

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И.В. Пегель

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

Учебное пособие

Издательство
Томского политехнического университета
2009

УДК 537
Б 43

Пегель И.В.

Б 43 Электродинамика сверхвысоких частот: учебное пособие / И.В. Пегель. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 158 с.

Пособие представляет собой краткий лекционный курс прикладной электродинамики с более подробным рассмотрением высокочастотных электромагнитных колебаний и волн. На основе уравнений Максвелла последовательно рассматриваются статические поля и постоянный ток, электромагнитные волны в открытом пространстве, свободные и вынужденные колебания и волны в волноведущих и резонансных структурах. Рассматриваются свойства проводников и диэлектриков в полях высокой частоты. Пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по специальностям «Микроволновая электроника», «Физическая электроника». Оно может быть полезно аспирантам, преподавателям высшей школы и другим специалистам, работающим в области электроники сверхвысоких частот и сильноточной электроники.

УДК 537

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор
заведующий кафедрой физики плазмы
Томского государственного университета,
заведующий лабораторией теоретической физики
Института сильноточной электроники СО РАН
А.В. Козырев

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры сильноточной электроники
Томского политехнического университета
старший научный сотрудник
Института сильноточной электроники СО РАН
А.И. Климов

© Томский политехнический университет, 2009
© Пегель И.В., 2009
© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ	6
ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ	9
Лекция 1 (ВВОДНАЯ)	10
1.1. Электромагнитные колебания и волны сверхвысоких частот	10
1.2. Цели и структура лекционного курса	13
Лекция 2 УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	16
2.1. Уравнения Максвелла	16
2.2. Описание электромагнитного поля в средах	18
Лекция 3 ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ	21
3.1. Электростатическое поле проводников	21
3.2. Электростатическое поле диэлектриков	25
3.3. Два механизма диэлектрической поляризации	28
Лекция 4 ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК И ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ	30
4.1. Постоянный ток. Электрическое поле в проводниках	30
4.2. Постоянное магнитное поле в отсутствие токов проводимости	32
4.3. Магнитное поле постоянного тока	35
Лекция 5 КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ	39
5.1. Уравнения квазистатического поля	39
5.2. Проникновение магнитного поля в проводник	40
5.3. Граничное условие Леонтовича. Поток энергии внутрь проводника	42
5.5. Скин-эффект в цилиндрическом проводнике	44

Лекция 6	
УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ	47
6.1. Уравнения переменного поля в среде в отсутствие дисперсии	47
6.2. Волновое уравнение	48
6.3. Плоская монохроматическая волна	50
6.4. Фазовая скорость волн	52
6.5. Групповая скорость волн	53
Лекция 7	
ЧАСТОТНАЯ ДИСПЕРСИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ	58
7.1. Дисперсия диэлектрической проницаемости как следствие инерционности поляризации среды	58
7.2. Классическая теория дисперсии	59
7.3. Диэлектрическая проницаемость проводников	62
Лекция 8	
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ	65
8.1. Уравнения поля в передающих линиях. Волны электрического и магнитного типов	65
8.2. Дисперсия Е-волн и Н-волн	71
Лекция 9	
ВОЛНОВОДЫ	75
9.1. Волновод прямоугольного сечения	75
9.2. Волновод круглого сечения	79
9.3. Концепция Бриллюэна	84
Лекция 10	
ВОЛНЫ В КАБЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ	87
10.1. ТЕМ-волна	87
10.2. Коаксиальная линия	89
10.3. Полосковая линия	91
Лекция 11	
ПОТОК ЭНЕРГИИ И ПОТЕРИ В ВОЛНОВОДАХ	94
11.1. Поток энергии через волновод	94
11.2. Затухание волн в волноводах	97

Лекция 12	
ЗАМЕДЛЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	101
12.1. Применения замедленных волн	101
12.2. Способы замедления электромагнитных волн	102
12.3. Гофрированный волновод. Брэгговский резонанс	107
12.4. Пространственные гармоники	111
Лекция 13	
ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ	
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ	116
13.1. Собственные колебания объемного резонатора	116
13.2. Добротность и ширина спектральной линии колебательных мод резонатора	120
13.3. Основные виды потерь энергии в резонаторах и связанные с ними добротности колебаний	123
13.4. Ортогональность собственных мод резонатора. Норма колебания	127
Лекция 14	
ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДОВ	
И ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ ЗАДАНЫМ ТОКОМ	131
14.1. Возбуждение волновода заданным высокочастотным током	131
14.2. Возбуждение колебаний в резонаторе заданным высокочастотным током	136
Лекция 15	
ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ	
В НЕОДНОРОДНОМ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ	
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ	141
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	145
Приложение 1	
НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА	147
Приложение 2	
ПОЛЯ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВОДНЫХ МОД	150
Приложение 3	
КОД KARAT	152
СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ	153
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.	

ОБОЗНАЧЕНИЯ

A	амплитуда волны в волноводе (медленная функция времени)
\mathbf{A}	векторный потенциал электромагнитного поля
\mathbf{B}	магнитная индукция
c	скорость света в вакууме
d	пространственный период колебаний
\mathbf{D}	электрическая индукция
e	заряд электрона
\mathbf{e}	напряженность электрического поля (микроскопическая)
\mathbf{E}	напряженность электрического поля
f	частота колебаний
$d\mathbf{f}$	ориентированный элемент площади
F	функция огибающей высокочастотного импульса
\mathbf{F}	сила
h	продольное волновое число
h_m	продольное волновое число m -й пространственной гармоники
\bar{h}	продольное волновое число периодической структуры, равно $2\pi/d$
\mathbf{h}	напряженность магнитного поля (микроскопическая)
\mathbf{H}	напряженность магнитного поля (макроскопическая)
I	сила электрического тока
I_n	модифицированная функция Бесселя порядка n
\mathbf{j}	плотность электрического тока
J_n	функция Бесселя порядка n
k	волновое число
K_n	модифицированная функция Ханкеля порядка n
\mathbf{l}	единичный вектор в направлении распространения волны
L	1. длина или характерный линейный размер; 2. индуктивность
m	масса
\mathbf{M}	намагниченность
n	концентрация частиц
\mathbf{n}	вектор внешней нормали к поверхности
N_m	1. норма волноводной моды или собственного колебания резонатора; 2. функция Неймана порядка m
p	давление
P	мощность
\mathbf{P}	диэлектрическая поляризация

q	электрический заряд
\mathbf{q}	поток энергии
Q	добротность колебаний
r	радиус, радиальная координата
R	1. радиус; 2. коэффициент отражения по мощности
\mathbf{r} или \mathbf{R}	радиус-вектор
S	площадь
$d\mathbf{S}$	ориентированный элемент площади
\mathbf{S}	вектор Умова–Пойнтинга
t	время
T	период колебаний
T^{ik}	компонента тензора энергии-импульса электромагнитного поля
U	напряжение
\mathbf{v}	скорость
\mathbf{v}_e	скорость электрона
$v_{гр}$	групповая скорость волн
$v_{ф}$	фазовая скорость волны
V	объем
V_k	объем в пространстве волновых чисел
w	объемная плотность энергии
W	энергия
W'	энергия на единицу длины
α	декремент затухания по энергии
β	безразмерная скорость v/c
Γ	граничный контур или граничная поверхность
δ	толщина скин-слоя
δ_{ij}	символ Кронекера, имеющий значения: 0 при $i \neq j$ и 1 при $i = j$
$\delta(\mathbf{r})$	дельта-функция Дирака векторного аргумента
Δ	оператор Лапласа
ε	диэлектрическая проницаемость
η	показатель преломления среды
k	поперечное волновое число
λ	длина волны в неограниченной среде
λ_w	длина волны в волноводе
μ	магнитная проницаемость
μ_{mn}	m -й корень производной от функции Бесселя порядка n
ν	характеристический показатель решения Флоке для уравнения Матье
ν_{mn}	m -й корень функции Бесселя порядка n
ξ	поверхностный импеданс проводника

φ	1. скалярный потенциал электромагнитного поля; 2. азимутальный угол в цилиндрической системе координат
Φ_M	усредненный высокочастотный потенциал
χ	диэлектрическая или магнитная восприимчивость
σ	1. поверхностная плотность заряда; 2. удельная электрическая проводимость
σ_{ij}	компоненты тензора напряжений Максвелла
ψ	1. величина угла; 2. магнитный потенциал
Ψ	мембранная функция – решение уравнения Гельмгольца
ρ	1. объемная плотность заряда; 2. волновое сопротивление
ζ	коэффициент поглощения среды
θ	фаза колебания или волны
$\theta_{бр}$	угол Бриллюэна
Θ	угол дифракции
ω или Ω	круговая (циклическая) частота
ω_e	электронная плазменная частота
∇	оператор Гамильтона (набла)
\square	оператор д'Аламбера

$(\mathbf{A}\mathbf{B})$ или $\mathbf{A}\mathbf{B}$ – скалярное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B}

$[\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B}]$ – векторное произведение векторов \mathbf{A} и \mathbf{B}

Точка над символом физической величины (например, \dot{r}) означает ее производную по времени, две точки (\ddot{r}) – вторую производную.

Величина, комплексно сопряженная с величиной A , обозначается A^* . Сокращение *к.с.* означает выражение, комплексно сопряженное с предшествующим.

Результат усреднения переменной величины A во времени или в пространстве обозначается $\langle A \rangle$ или \bar{A} .

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ

В настоящем учебном пособии физические величины в аналитических выражениях приведены в единицах системы СГС (сантиметр–грамм–секунда). Вне аналитических выкладок также использованы единицы международной системы СИ, а также некоторые внесистемные единицы.

Таблица 1

*Соотношения между единицами измерения СИ и СГС
для некоторых физических величин*

Физическая величина	Наименование единицы в СИ	Наименование единицы в СГС	Связь между единицами
Электрический заряд	Кулон	–	$1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}$
Ток	Ампер	–	$1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}$
Потенциал, напряжение	Вольт	–	$300 \text{ В} = 1 \text{ ед. СГС}$
Электрическое сопротивление	Ом	–	$9 \cdot 10^{11} \text{ Ом} = 1 \text{ ед. СГС}$
Емкость	Фарада	сантиметр	$1 \text{ Ф} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$
Напряженность электрического поля	Вольт на метр	–	$3 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 1 \text{ ед. СГС}$
Напряженность магнитного поля	Ампер на метр	Эрстед	$1 \text{ А/м} = 1.26 \cdot 10^{-2} \text{ Э}$
Магнитная индукция	Тесла	Гаусс	$1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$
Сила	Ньютон	дина	$1 \text{ Н} = 10^5 \text{ дин}$
Энергия	Джоуль	эрг	$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$

ЛЕКЦИЯ 1 (ВВОДНАЯ)

1.1. Электромагнитные колебания и волны сверхвысоких частот

К СВЧ-колебаниям принято относить электромагнитные колебания с длинами волн примерно от 1 метра до 1 миллиметра и частотами, соответственно, от 300 МГц до 300 ГГц. Таким образом, на шкале электромагнитных колебаний СВЧ-диапазон заключен между коротковолновой частью радиодиапазона и длинноволновой частью инфракрасного диапазона (который в последние годы получил самостоятельное название терагерцового).

Таблица 1

Обозначения некоторых поддиапазонов СВЧ-диапазона

Диапазон	Частота, ГГц	Длина волны, см
P	0.225...0.390	133.3...76.9
L	0.390...1.559	76.9...19.3
S	1.559...5.200	19.3...5.77
X	5.200...10.90	5.77...2.75
K	10.90...36.00	2.75...0.834
Q	36.00...46.00	0.834...0.652
V	46.00...56.00	0.652...0.536

Первым серьезным применением волн сверхвысоких частот стала радиолокация, бурное развитие которой происходило начиная с 1940-х годов. Работы по радиолокации в огромной мере стимулировали развитие прикладной электродинамики, СВЧ-электроники и СВЧ-техники.

Среди современных применений СВЧ-излучения радиолокация остается в ряду важнейших. Появилось и множество новых. Обширную нишу в бытовом применении заняли микроволновые печи. Для разогрева пищевых продуктов обычно используют частоту 2.45 ГГц (длина волны около 12 см). Глубина, на которую такое излучение проникает во влажные среды – каковыми и является большинство продуктов питания – составляет единицы сантиметров. Таким образом достигается их эффективный и равномерный нагрев. Источниками излучения в СВЧ-печах являются магнетроны – приборы с электронным потоком и магнитным полем.

В сотовых телефонах и станциях коммерческой связи, рабочие частоты которых лежат в L- и S-диапазонах, используются генераторы на полупроводниковых элементах.

Твердотельные устройства успешно используются для генерации СВЧ-излучения умеренной мощности, составляя конкуренцию электронным приборам с мощностями вплоть до нескольких киловатт. Там же, где требуются мощности в десятки, сотни киловатт и более, электронные пучки «царствуют» безраздельно.

Источники мощного коротковолнового СВЧ-излучения необходимы для нагрева плазмы в токамаках – перспективных термоядерных генераторах электроэнергии. Так, для проекта ITER, создаваемого в рамках широкой международной кооперации, разрабатываются СВЧ-генераторы – гиروتроны – с частотой излучения 170 ГГц (длина волны 1.8 мм), и мощностью ~ 1 МВт в непрерывном режиме. В числе ведущих мировых разработчиков таких устройств – Институт прикладной физики РАН (г. Нижний Новгород). Сегодня уже созданы мегаваттные магнетроны с длительностью импульса до 20 секунд.

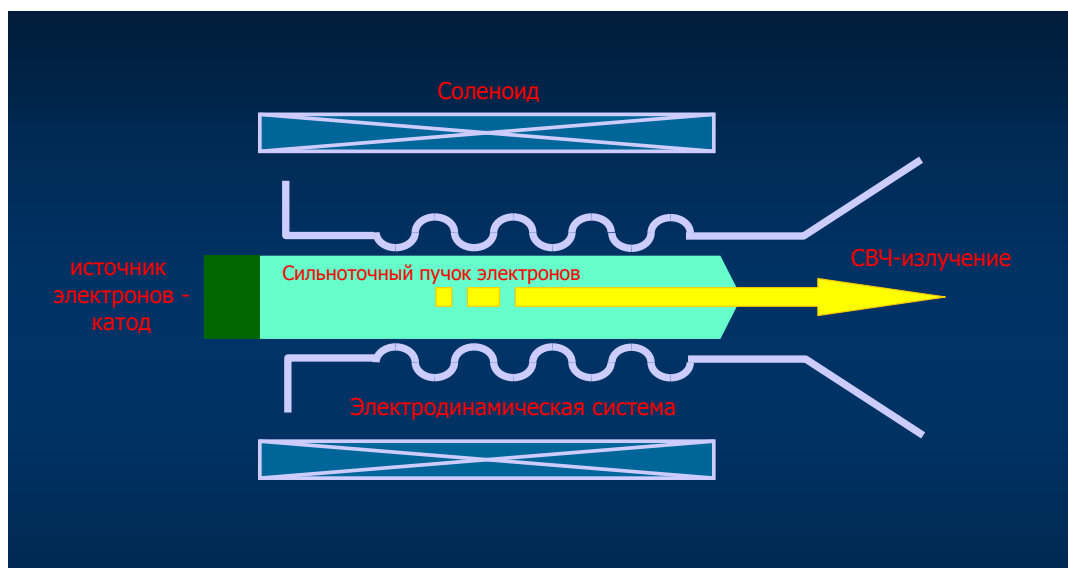


Рис. 1.1. Заставить сильноточный электронный пучок излучать микроволны можно по-разному. Один из способов – заставить электроны взаимодействовать с электромагнитной волной, замедленной до их скорости, в специальной электродинамической системе. Магнитное поле позволяет транспортировать интенсивный пучок, препятствуя его кулоновскому расталкиванию

Отдельный класс составляют сильноточные СВЧ-генераторы, генерирующие импульсы излучения гигаваттной мощности и очень малой длительности – от единиц до сотен наносекунд. В этих генераторах используются электронные пучки, генерируемые в режиме взрывной эмиссии и имеющие токи от единиц до десятков килоампер, а иногда и более. Энергия электронов в таких пучках составляет сотни килоэлек-

тронвольт и более – такие напряжения вырабатывают импульсные высоковольтные генераторы. Основными применениями высоковольтных СВЧ-генераторов являются наносекундная радиолокация и исследования радиационной стойкости радиоэлектронной аппаратуры.



Рис. 1.2. Излучение импульсно-периодического СВЧ-генератора заставляет светиться табло из неоновых ламп

Затрагивая вопрос о высоковольтных генераторах и ускорителях, подчеркнем еще один аспект, делающий электродинамику СВЧ важной для высоковольтной электроники и импульсной электрофизики. Он связан как раз с импульсным характером процессов в высоковольтных устройствах. Длительность высоковольтных импульсов обычно составляет от единиц наносекунд до микросекунд. В последние годы больших успехов достигла и техника формирования субнаносекундных и даже пикосекундных ($1 \text{ пс} = 10^{-12} \text{ с}$) импульсов. Энергия от высоковольтных генераторов доставляется к нагрузке по передающим линиям. Чаще всего это линии коаксиального типа – по сути дела, коаксиальные кабели. Для обеспечения электрической прочности передающие линии изготавливают с достаточно большим поперечным размером (от единиц до десятков сантиметров), а промежуток между электродами в них заполняется диэлектриком либо вакуумируется.

Если длительность τ импульса, транспортируемого по передающей линии, мала, это означает, что в спектре импульса присутствуют высокие частоты, величину которых можно оценить как $f \sim 1/\tau$. Нетрудно

видеть, что при длительности импульса в наносекунды и менее соответствующие частоты уже попадают в СВЧ-диапазон. Если соответствующая длина волны становится сопоставимой с поперечным размером линии, то в распространяющемся импульсе появятся волны различных типов. Их учет становится особенно важным в субнаносекундной и пикосекундной импульсной техники. Фактически, такие устройства должны проектироваться на основе представлений электродинамики СВЧ.

С другой стороны, наличие высоких частот в спектре передаваемых импульсов проявляется в искажении их формы при транспортировке. Это связано с тем, что диэлектрическая проницаемость диэлектрика, изолирующего линию (если только это не среда с малой плотностью – газ или вакуума) зависит от частоты. Поскольку от величины диэлектрической проницаемости зависит скорость распространения электромагнитной волны, эта зависимость будет приводить к различию в скорости движения для различных спектральных компонент и, как следствие, к размыванию импульса.

1.2. Цели и структура лекционного курса

Электродинамика СВЧ вместе с физикой пучков заряженных частиц образуют фундамент для дальнейшего изучения СВЧ-электроники – прикладной дисциплины, предметом которой являются процессы взаимодействия электронных потоков с электромагнитными волнами, лежащие в основе генерации СВЧ-излучения. Другая дисциплина, использующая те же основы – это физика высокочастотных линейных ускорителей заряженных частиц.

Изучение курса мы начнем с повторения основ классической электродинамики. Составляющие ее основу уравнения Максвелла мы будем в том или ином виде использовать в каждой лекции. Эти уравнения определяют электрическое и магнитное поля как функции пространственных координат и времени. В разных физических ситуациях уравнения Максвелла могут приводить к различным дифференциальным уравнениям первого или второго порядка и различных размерностей. Все такие уравнения – это известные уравнения математической физики, решения которых, представляемые в виде тех или иных элементарных или специальных функций, хорошо изучены.

Особый класс решений уравнений Максвелла, очень «удобный» для математического анализа, представляют собой гармонические переменные поля. Гармоническим называется колебание, величина которого зависит от времени по закону косинуса. Если по такому же закону полевая величина зависит и от пространственных координат, то колебание становится монохроматической волной – бегущей или стоячей. В математиче-

ском описании гармонических процессов можно весьма далеко «продвинуться» аналитически. Особенно удобно представление гармонических величин в комплексном – экспоненциальном – виде. Именно такое представление мы будем использовать в данном лекционном курсе.

Электромагнитным полям в пустом (или заполненном однородной средой) неограниченном пространстве будет посвящена отдельная лекция. Мы познакомимся с самым простым видом электромагнитных волн – однородными плоскими волнами. Такие волны, или их наборы, получаются, если решать уравнения Максвелла в декартовой системе координат. Если же использовать другие системы координат, можно получить фундаментальные решения других типов, например, волны сферические или цилиндрические. Любое сложное электромагнитное поле, существующее в пространстве в присутствии тел и источников колебаний – токов – можно представить в виде суммы плоских, сферических или цилиндрических волн, в зависимости от того, какая система координат более удобна в условиях данной задачи.

Мы познакомимся с важнейшими характеристиками волн – фазовой и групповой скоростью, введем понятие частотной дисперсии фазовой скорости, узнаем, какие уравнения в самом общем виде описывают распространение волновых возмущений.

От распространения волн в неограниченном пространстве мы перейдем к изучению электромагнитных волн и колебаний в структурах, являющихся основными конструктивными элементами СВЧ-техники: волноводах и резонаторах. Этим вопросам мы посвятим несколько лекций. Мы познакомимся с понятиями собственных колебаний и волн, изучим структуру их полей, законы дисперсии, проанализируем характер и причины их возможного затухания во времени и в пространстве.

Отдельный блок вопросов будет посвящен изучению свойств различных материалов в полях высокой частоты. В конструкциях мощных СВЧ-устройств более всего используются хорошие проводники – металлы; несколько реже применяются диэлектрики, и уже в специальных случаях – магнетики. Свойства всех этих материалов в электромагнитном поле существенным образом зависят от его частоты. Частотной зависимостью – дисперсией – обладает диэлектрическая проницаемость непроводящих сред; это явление совершенно необходимо учитывать при передаче высокочастотных импульсов по кабельным трассам.

Для металлов важнейшим частотно-зависимым явлением является скин-эффект. Проникновение поля в проводник на конечную глубину приводит к потерям электромагнитной энергии в стенках волноводов и их затуханию; с другой стороны, с другой стороны, учет скин-эффекта необходим, например, при создании импульсных магнитных систем.

Вопросы, рассматриваемые в нескольких последних лекциях, имеют уже непосредственное отношение к СВЧ-электронике. Мы рассмотрим замедленные электромагнитные волны, фазовая скорость которых меньше скорости света в вакууме. Оказывается, только такие волны могут эффективно обмениваться энергией с потоками заряженных частиц – например, в СВЧ-генераторах или линейных ускорителях. Мы познакомимся с простейшими и более сложными способами замедления волн в однородных и пространственно-периодических структурах, введем понятие пространственных гармоник, увидим, как при распространении волн в таких структурах проявляется параметрический резонанс.

Рассматривая вопросы, касающиеся возбуждения вынужденных волн и колебаний в волноводах и резонаторах, автор пособия использовал упрощенный подход, основанный на использовании закона сохранения энергии, тем самым отчасти пожертвовав математической строгостью изложения в пользу его физической наглядности.

В кратком лекционном курсе невозможно охватить подробно все вопросы электродинамики сверхвысоких частот, не говоря уже о прикладной электродинамике в целом. Поэтому в учебном пособии оставлен без рассмотрения ряд вопросов, более близких к теории цепей (телеграфные уравнения) и радиотехнике (антенны, квазиоптические линии). При необходимости магистранты имеют возможность досконально разобраться в том или ином вопросе электродинамики или техники высоких частот, обратившись к обширной фундаментальной учебной и профессиональной литературе, список которой имеется в конце пособия.

Изучение настоящего курса потребует от магистранта знания основ классической электродинамики (основные формулы которой приведены в лекции 2). В части математической подготовки магистрант должен владеть методами дифференциального и интегрального исчисления, векторного анализа (сводка основных формул которого дана в Приложении 1), элементарной теорией комплексных чисел, а также иметь представление об основных уравнениях математической физики.

В конце каждой лекции приведены вопросы для самоконтроля.

Иллюстрации 8.2.2., 12.2.5, 12.3.3 и в Приложении 2 выполнены на основе результатов расчетов с помощью полностью электромагнитного нестационарного PIC-кода KARAT. Более подробные сведения об этом коде приведены в Приложении 3.

ЛЕКЦИЯ 2

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

2.1. Уравнения Максвелла

При изучении настоящего курса мы будем опираться на теоретический аппарат классической (неквантовой) электродинамики. Классическая электродинамика – релятивистская теория, построенная в соответствии со специальной теорией относительности Эйнштейна. Электрическое поле и магнитное поле в ней являются функциями пространственных координат и времени, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла. Точные уравнения Максвелла имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{array} \right. \quad (2.1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho \end{array} \right. \quad (2.1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \end{array} \right. \quad (2.1.4)$$

В уравнениях (2.1–2.4) \mathbf{e} есть напряженность электрического поля, \mathbf{h} – напряженность магнитного поля, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с – скорость света в вакууме, фундаментальная константа, определяющая максимальную скорость распространения электромагнитных возмущений.

Как видно из уравнений Максвелла, электромагнитное поле порождается электрическими зарядами и токами, определяемыми их полевыми величинами: объемной плотностью заряда ρ и плотностью электрического тока \mathbf{j} . На сегодняшний день известно, что электрический заряд его элементарных носителей при любых условиях сохраняется. Поэтому изменение величины заряда в некотором заданном объеме пространства определяется его потоком через поверхность, этот объем ограничивающую. Таким образом, закон сохранения заряда может быть записан в виде *уравнения непрерывности* электрического тока:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.1.5)$$

Для электромагнитного поля определяются скалярный потенциал φ и векторный потенциал \mathbf{A} . Электрическое и магнитное поля выражаются через них следующим образом:

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.1.6)$$

Поскольку поля зависят от потенциалов дифференциальным образом, на величины потенциалов могут быть наложены дополнительные условия. Одно из таких условий имеет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0$$

– это так называемая калибровка Лоренца. При этом условии векторный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.1.7)$$

а скалярный потенциал – уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -4\pi\rho. \quad (2.1.8)$$

Оператор $\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ называют оператором д'Аламбера. Уравнение д'Аламбера по отношению к какой-либо полевой величине описывает волну – процесс распространения возмущения этой величины в пространстве и во времени при наличии источников, представленных правой частью уравнения. При этом c есть скорость распространения возмущения, а направление распространения возмущения может быть определено с учетом граничных условий.

С электромагнитным полем связана энергия, объемная плотность которой есть

$$w = \frac{1}{8\pi} (e^2 + h^2). \quad (2.1.9)$$

Энергия – скалярная величина. Ее поток в пространстве определяется вектором плотности потока энергии, компоненты которого показывают, какое количество энергии переносится за единицу времени через площадку единичной площади, нормальную к соответствующей оси координат. Для электромагнитного поля такой вектор называется вектором Умова–Пойнтинга (или просто вектором Пойнтинга) и равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{e} \mathbf{Ch}]. \quad (2.1.10)$$

Электромагнитное поле создает в занятом им пространстве и поток импульса. В отличие от энергии, импульс – векторная величина. В данном случае важно понимать, что направление переноса импульса вовсе не «обязано» совпадать с направлением вектора самого импульса. Каждая из трех компонент импульса, связанного с полем, может «переноситься» в любом из трех направлений¹. Поэтому поток импульса – не векторная, а тензорная величина.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} w & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Здесь S_i – компоненты вектора Пойнтинга, а величины σ образуют отдельный тензор, который называется *тензором напряжений Максвелла*. Его компоненты выражаются через компоненты электрического и магнитного полей следующим образом:

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_i E_k + H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + H^2) \right\}. \quad (2.1.11)$$

Смысл величин σ_{ik} есть плотности потока i -й компоненты импульса поля вдоль k -го координатного направления.

2.2. Описание электромагнитного поля в средах

Прежде чем приступить к описанию электромагнитного поля в физических средах, рассмотрим поле в вакууме, создаваемое единственной заряженной частицей с зарядом e . В классической теории образующие вещество элементарные частицы, – в том числе и электрически заряженные – считаются точечными объектами. Плотность заряда и плотность электрического тока такой частицы выражается с помощью дельта-функций Дирака². Так, для частицы, находящейся в точке \mathbf{r}_0 , запишем:

¹ Этим импульс электромагнитного поля отличается от механического импульса частицы (тела), направление переноса которого есть направление скорости частицы (центра масс тела).

² Дельта-функция векторного аргумента $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ определяется как функция, равная нулю во всех точках пространства кроме \mathbf{r}_0 , при том что взятый по всему пространству интеграл $\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = 1$.

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)).$$

Здесь \mathbf{v} – скорость движения частицы. Тогда уравнения Максвелла (2.1.1–2.1.4) примут вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \\ \operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)), \\ \operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \end{cases}$$

Поля \mathbf{e} и \mathbf{h} есть поля в вакууме везде кроме точки, занятой заряженной частицей.

Формально, следуя такому подходу, можно записать и систему уравнений для поля в среде, при этом выполнив суммирование по всем частицам среды:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_i e_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \\ \operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi e \sum_i e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \\ \operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \end{cases}$$

Однако поскольку число частиц, составляющих среду, огромно, то учесть все частицы и тем более решить получившуюся систему уравнений не представляется возможным. Кроме того, следовало бы учесть и влияние самих полей на движение частиц (а сделать это корректно позволяет только квантовая теория). Поэтому такой «микроскопический» подход к определению электромагнитных полей в веществе просто неосуществим.

В то же время, в большинстве практических задач знание точных мгновенных величин полей на микроскопическом уровне не является необходимым, а требуется знание некоторых усредненных величин.

В дальнейшем, говоря о величинах электрического и магнитного полей в среде, мы будем подразумевать величины, усредненные по «физически бесконечно малому объему» вещества. Такой объем должен удовлетворять двум условиям. С одной стороны, он должен вмещать очень большое число атомов или молекул среды, при этом его размер v

любом направлении должен многократно превышать расстояние между атомами или молекулами. С другой стороны, этот объем должен быть достаточно мал в масштабе геометрической неоднородности среды и неоднородности ее физических характеристик.

Пространственное усреднение полей по «физически бесконечно малому объему» одновременно означает и определенное усреднение по времени: в усредненном поле элементарные колебания, происходящие с атомными и молекулярными частотами, сглаживаются.

Обозначая за L_0 наибольший размер объема усреднения, запишем для усредненных величин плотности заряда и тока в среде:

$$\bar{\rho} \equiv \lim_{L \rightarrow L_0} \frac{1}{V} \int_V \rho dV = \lim_{L \rightarrow L_0} \frac{1}{V} \sum_i e_i, \quad \bar{\mathbf{j}} \equiv \lim_{L \rightarrow L_0} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{j} dV = \lim_{L \rightarrow L_0} \frac{1}{V} \sum_i e_i \mathbf{v}_i,$$

Для электрического и магнитного полей имеем, соответственно,

$$\mathbf{E} \equiv \bar{\mathbf{e}} = \lim_{L \rightarrow L_0} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E} dV, \quad \mathbf{B} \equiv \bar{\mathbf{h}} = \lim_{L \rightarrow L_0} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{h} dV.$$

Усредненная величина \mathbf{E} сохраняет свое наименование напряженности электрического поля. Усредненная величина \mathbf{B} напряженности магнитного поля носит специальное название магнитной индукции.

Вопросы для самоконтроля

1. Записать систему уравнений Максвелла для вакуума.
2. Записать уравнение непрерывности для электрического тока. Каков его физический смысл?
3. Каким образом электрическое и магнитное поля выражаются через потенциалы электромагнитного поля?
4. Записать выражения для плотности энергии электромагнитного поля и вектора Пойнтинга.
5. Каков физический смысл тензора напряжений Максвелла?
6. Дать определение дельта-функции Дирака. Каким образом с помощью этой функции представить плотность заряда и плотность тока, создаваемые точечным зарядом?
7. Дать определение «физически бесконечно малого» объема. В чем смысл усреднения физических величин по такому объему?
8. Что такое индукция магнитного поля?

ЛЕКЦИЯ 3

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

Все физические среды – твердые тела, жидкости, газы и плазма – могут быть разделены по своим электрическим свойствам на две большие группы: проводники и диэлектрики.

Проводящими называются среды, в которых любое электрическое поле – в том числе, и постоянное – вызывает движение зарядов. Очевидно, что в постоянном электрическом поле совершать незатухающее движение могут только свободные заряды, не связанные в пределах атомов или молекул и способные перемещаться по всему объему тела. В металлах и полупроводниках такими зарядами являются электроны проводимости, в электролитах – положительно и отрицательно заряженные ионы, в плазме – электроны и ионы.

В диэлектриках, в отличие от проводников, электрические заряды связаны и могут совершать движение только в пределах атомов или молекул. Такие заряды не могут обеспечить постоянного электрического тока через тело; поэтому протекание электрического тока в диэлектриках может носить только знакопеременный характер.

В этой лекции мы рассмотрим электростатические поля проводящих и диэлектрических тел. Среднее магнитное поле мы при этом будем предполагать отсутствующим. Само название «электростатический» предполагает, что рассматриваемое электрическое поле постоянно во времени. Однако для проводников при этом необходимо сделать важное уточнение: в рамках электростатики мы предполагаем, что в теле отсутствует постоянный ток. Таким образом, мы рассматриваем изолированные проводники, не соединенные с какими-либо внешними электрическими цепями, которые могли бы обеспечить протекание тока. Иначе электростатическую ситуацию можно определить как ситуацию с постоянным полем, но при отсутствии каких-либо потоков энергии.

3.1. Электростатическое поле проводников

Рассматривая проводящее тело, сразу же заметим, что вне зависимости от величины удельной проводимости материала электростатическое поле внутри проводника равно нулю. Действительно, в противном случае по проводнику, в соответствии с законом Ома, протекал бы ток. В объеме тела происходила бы диссипация электромагнитной энергии (превращение ее в тепло), восполняемая потоком энергии от поверхно-

сти проводника внутрь него. Это противоречило бы данному выше определению электростатики.

Равенство нулю электрического поля внутри проводника означает, что равна нулю и усредненная плотность заряда. Это нетрудно заключить из уравнения (2.1.3), которое после усреднения по «физически бесконечно малому» объему приобретет вид $div \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}$. Отсюда по теореме Остроградского–Гаусса (см. Приложение 1) следует, что для объема V , выбранного в пределах проводника произвольным образом и ограниченного замкнутой поверхностью S , справедливо соотношение $\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \bar{\rho} dV$. В силу произвольности выбора этого объема величина $\bar{\rho}$ в любой точке внутри тела должна быть равна нулю. Итак, все заряды находятся по поверхности проводника, причем их распределение обеспечивает обращение в нуль электрического поля внутри тела.

Задача электростатики проводников тем самым сводится к нахождению электрического поля в вакууме вне проводника и распределения зарядов на его поверхности. Для этого следует использовать уравнения, получаемые усреднением уравнений (2.1.1) и (2.1.3). В первом из них правая часть обратится в нуль (поскольку среднее магнитное поле мы считаем отсутствующим), и в результате получим

$$\left\{ \begin{array}{l} rot \mathbf{E} = 0, \\ div \mathbf{E} = 0. \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

$$\quad (3.1.2)$$

Итак, электростатическое поле является безвихревым, а согласно (2.1.6), оно потенциально:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Электростатический потенциал вне проводника удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

которое представляет собой частный случай однородного уравнения д'Аламбера (2.1.7) при $\partial\varphi/\partial t = 0$.

Граничные условия для поля электрического поля следуют из самих уравнений (3.1.1), (3.1.2).

Проинтегрируем уравнение $rot \mathbf{E} = 0$ по любой поверхности, содержащую границу тела (рис. 3.1.1):

$$\int_S rot \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Приближая границу контура к поверхности ($\Delta x \rightarrow 0$), будем иметь

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} \approx E_{t,2} \Delta l - E_{t,1} \Delta l = 0.$$

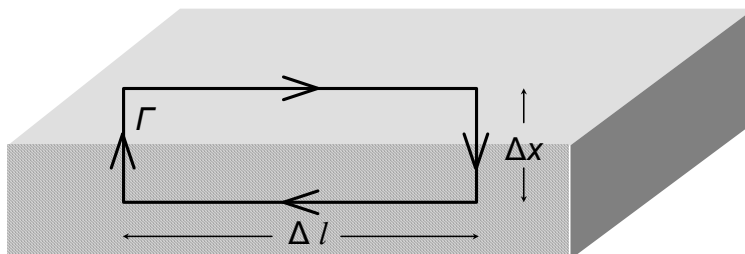


Рис. 3.1.1

Поскольку внутри проводника $E = 0$ и, следовательно, $E_{t,2} = 0$, то нулю равно и касательное поле на поверхности проводника:

$$E_{t,1} = 0.$$

Таким образом, электрическое поле на поверхности проводника нормально к ней. Это, в свою очередь, означает, что электростатический потенциал на всей поверхности проводника одинаков.

Нормальная к поверхности проводника компонента электрического поля определяется поверхностной плотностью распределения заряда. Действительно, интегрируя уравнение $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}$ по малому объему, содержащему фрагмент поверхности (рис. 3.1.2), имеем

$$\int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q,$$

здесь q – величина заряда на участке поверхности, попавшем в объем V .

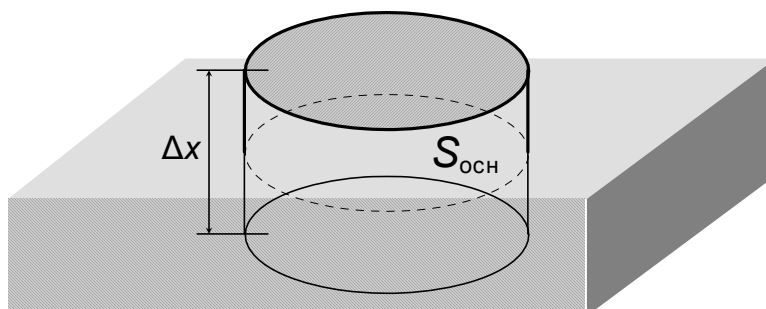


Рис. 3.1.2

«Сжимая» объем к границе поверхности ($\Delta x \rightarrow 0$), будем иметь

$$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} \approx E_{n,2} S_{\text{очн}} - E_{n,1} S_{\text{очн}} = 4\pi q.$$

Принимая во внимание отсутствие поля внутри проводника, получаем

$$E_{n,1} = 4\pi\sigma ,$$

здесь σ – поверхностная плотность заряда.

На заряды, находящиеся на поверхности проводника, со стороны электрического поля действует сила, всегда направленная по внешней нормали к поверхности. Следовательно, и сама поверхность проводника в электрическом поле испытывает отрицательное давление. На первый взгляд, выражение для величины этого давления может быть записано как

$$p = \frac{dF}{dS} = \sigma E_n = \frac{E_n^2}{4\pi} .$$

Однако, рассуждая таким образом, мы ошибаемся, завышая величину давления ровно вдвое. Дело в том, что из величины поля, действующего на элемент σdS поверхностного заряда, необходимо вычесть поле, создаваемое самим этим элементом. Выделим в нормальной компоненте поля две части:

$$E_n = E_\sigma + E_{\text{проч}} .$$

Здесь E_σ есть поле, создаваемое поверхностным зарядом, а $E_{\text{проч}}$ – поле, создаваемое всеми прочими зарядами (как на поверхности проводника, так и вне него). В силе, действующей на элемент поверхности, мы должны учитывать только величину $E_{\text{проч}}$. Поле E_σ имеет противоположные направления по разные стороны от границы проводника. Применяя теорему Остроградского–Гаусса к объему, включающему элемент поверхности, мы видим, что $E_\sigma = 2\pi\sigma\mathbf{n}$, где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности. Внутри проводника полное поле нулевое и $E_\sigma = -E_{\text{проч}}$. Снаружи от проводника, напротив, $E_\sigma = E_{\text{проч}}$ и, следовательно, $E_n = E_\sigma + E_{\text{проч}} = 2E_{\text{проч}}$, то есть, $E_{\text{проч}} = E_n/2$. Таким образом,

$$p = \sigma E_{\text{проч}} = \frac{E_n}{4\pi} E_{\text{проч}} = \frac{E_n^2}{8\pi} .$$

Теперь получим этот же результат формальным образом. Сила $d\mathbf{F}$, действующая на элемент $d\mathbf{S}$ поверхности проводника в электромагнитном поле, есть поток втекающего в этот элемент импульса поля. Плотность потока импульса электрического поля задается максвелловским тензором напряжений (2.1.11), который при отсутствии магнитного поля имеет вид

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} E^2 \right) .$$

Следовательно,

$$dF_i = \sum_k \sigma_{ik} dS_k = \sum_k \sigma_{ik} n_k dS = \\ = \frac{dS}{4\pi} \sum_k \left(n_k E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} n_k E^2 \right) = \frac{dS}{4\pi} \left\{ E_i (\mathbf{nE}) - \frac{1}{2} n_i E^2 \right\}.$$

Поскольку на поверхности проводника электрическое поле имеет только нормальную компоненту, то $E_i (\mathbf{nE}) = E_i E = n_i E^2$ и $dF_i = \frac{dS}{4\pi} \frac{1}{2} n_i E^2$.

Окончательно имеем

$$\frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{nE}^2 \text{ или } p = \frac{E^2}{8\pi}.$$

Нетрудно видеть, что если кроме проводников в пространстве присутствуют сторонние заряды с заданным распределением $\rho_{cm}(\mathbf{r})$, то уравнения электростатики приобретает вид

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \Delta\varphi = -4\pi\rho$$

с граничными условиями на проводниках, сформулированными выше.

3.2. Электростатическое поле диэлектриков

Диэлектриками называются среды, в которых невозможно протекание постоянного электрического тока. Поэтому электростатическое поле внутри диэлектрика может быть ненулевым. Решение электростатической задачи для диэлектрика предполагает, таким образом, нахождение электрического поля как вне диэлектрика, так и внутри него.

Первое из уравнений, описывающих электростатическое поле в диэлектрике, получается усреднением уравнения (2.1.1) и имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (3.2.1)$$

Второе уравнение должно быть получено усреднением уравнения (2.1.3) и запишется как

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}.$$

Для того, чтобы определить величину усредненной плотности заряда $\bar{\rho}$, предположим, что рассматриваемое тело в целом электронейтрально и в него также не помещено никаких сторонних зарядов. Внешение диэлектрика во внешнее электрическое поле, очевидно, не изменит нулевого заряда тела, так что

$$\int_V \bar{\rho} dV = 0.$$

Отсюда следует, что средняя плотность зарядов может быть записана как дивергенция некоторого вектора:

$$\bar{\rho} = -\text{div } \mathbf{P}, \quad (3.2.2)$$

с тем условием, что вне тела $\mathbf{P} = 0$. Действительно, интегрируя последнее выражение по объему, вмещающему тело и переходя, по теореме Остроградского–Гаусса, к интегралу по поверхности, ограничивающей этот объем, будем иметь

$$\int_V \bar{\rho} dV = -\int_V \text{div } \mathbf{P} dV = -\int_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = 0.$$

Вектор \mathbf{P} называется вектором диэлектрической поляризации среды. Диэлектрик, в котором $\mathbf{P} \neq 0$, называется поляризованным.

Покажем, что физический смысл величины \mathbf{P} – это дипольный момент единицы объема диэлектрика. Действительно, последняя величина определяется как $\mathbf{r}\bar{\rho}$, а полный дипольный момент тела есть $\int_V \mathbf{r}\bar{\rho} dV$.

Подставляя сюда выражение для средней плотности заряда (3.2.2) и выполняя интегрирование, получаем

$$\int_V \mathbf{r}\bar{\rho} dV = -\int_V \mathbf{r} \text{div } \mathbf{P} dV = -\int_S \mathbf{r} (\mathbf{P} d\mathbf{S}) + \int_V (\mathbf{P} \nabla) \mathbf{r} dV.$$

Интеграл по поверхности равен нулю, а в интеграле по объему $(\mathbf{P} \nabla) \mathbf{r} \equiv \mathbf{P}$, поэтому $\int_V \mathbf{r}\bar{\rho} dV = \int_V \mathbf{P} dV$. Поскольку это справедливо для тел любой формы, $\mathbf{P} = \mathbf{r}\bar{\rho}$, что и требовалось доказать.

Определим новую величину

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} - 4\pi\mathbf{P}, \quad (3.2.3)$$

которую назовем *вектором электрической индукции*. Для этой величины, если тело электрически нейтрально, будет справедливым уравнение

$$\text{div } \mathbf{D} = 0. \quad (3.2.4)$$

Если же в тело внесены сторонние заряды с плотностью ρ_{cm} , то

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho_{cm}.$$

Уравнения (3.2.1) и (3.2.4) должны быть дополнены граничными условиями. Эти условия следуют из самих этих уравнений. Рассмотрим

границу, разделяющую два различных диэлектрика. Из уравнения (3.2.1) следует (см. п. 3.1) условие

$$\mathbf{E}_{t,2} = \mathbf{E}_{t,1}. \quad (3.2.5)$$

Второе условие следует из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ и заключается в непрерывности нормальной к поверхности раздела компоненты вектора электрической индукции:

$$D_{n,2} = D_{n,1}. \quad (3.2.6)$$

На границе раздела между диэлектриком и проводником имеем

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad D_n = 4\pi\sigma,$$

здесь σ – плотность заряда на поверхности проводника.

Чтобы замкнуть систему уравнений (3.2.1) и (3.2.4), их следует дополнить соотношением, связывающим величины \mathbf{E} и \mathbf{D} . Вид этой связи определяется тем, как именно под действием электрического поля происходит поляризация среды. В большинстве случаев поляризация связана с полем линейным образом. Причины возможного отклонения от линейности мы рассмотрим ниже.

В изотропных диэлектриках линейная зависимость между \mathbf{P} и \mathbf{E} сводится к простой пропорции:

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}.$$

Коэффициент пропорциональности χ носит название *коэффициента поляризуемости* или *диэлектрической восприимчивости* среды. Можно показать, что эта величина всегда положительна. Для разреженных сред, частицы которых мало взаимодействуют друг с другом (например, газов) диэлектрическая восприимчивость пропорциональна плотности среды.

Величина $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ называется диэлектрической проницаемостью среды. Она связывает между собой электрическую индукцию и электрическое поле:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

Граничные условия на границе раздела двух диэлектриков принимают вид:

$$\mathbf{E}_{t,2} = \mathbf{E}_{t,1}, \quad \varepsilon_2 E_{n,2} = \varepsilon_1 E_{n,1}.$$

Таким образом, нормальная составляющая поля на границе испытывает скачок, изменяясь обратно пропорционально диэлектрическим проницаемостям соответствующих сред.

3.3. Два механизма диэлектрической поляризации

Свойством поляризоваться под действием электрического поля в той или иной мере обладают все вещества. Поляризация единицы объема среды, очевидно, есть произведение величины дипольного момента одной молекулы вещества на концентрацию молекул. С точки зрения преобладающего механизма поляризации можно выделить две основные группы веществ.

К первой группе принадлежат атомарные вещества, а также вещества, молекулы которых в отсутствие внешнего электрического поля не имеют дипольного момента. Поляризация в таких средах связана с нарушением симметрии распределения заряда в атомах или молекулах при их помещении в электрическое поле. Если напряженность поля не очень велика, то величина дипольного момента атома или молекулы пропорциональна напряженности электрического поля, что соответствует некоторой постоянной величине диэлектрической проницаемости. Однако если внешнее электрическое поле будет приближаться по уровню к внутриатомным или внутримолекулярным полям, дальнейшее смещение зарядов под действием поля станет ослабевать. Это проявится в *насыщении* диэлектрической поляризации среды, диэлектрическая восприимчивость которой в сильном поле будет стремиться к нулю, а диэлектрическая проницаемость – к единице.

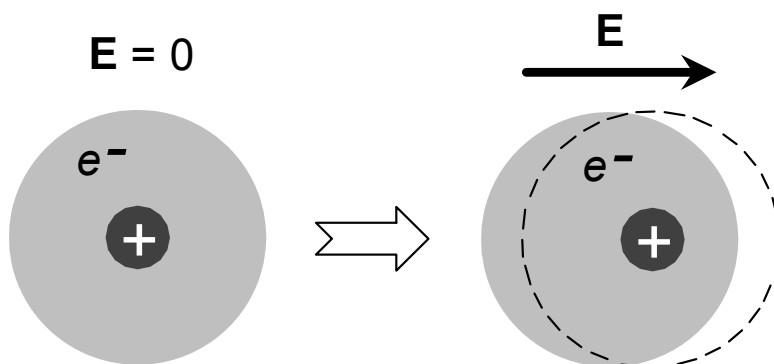
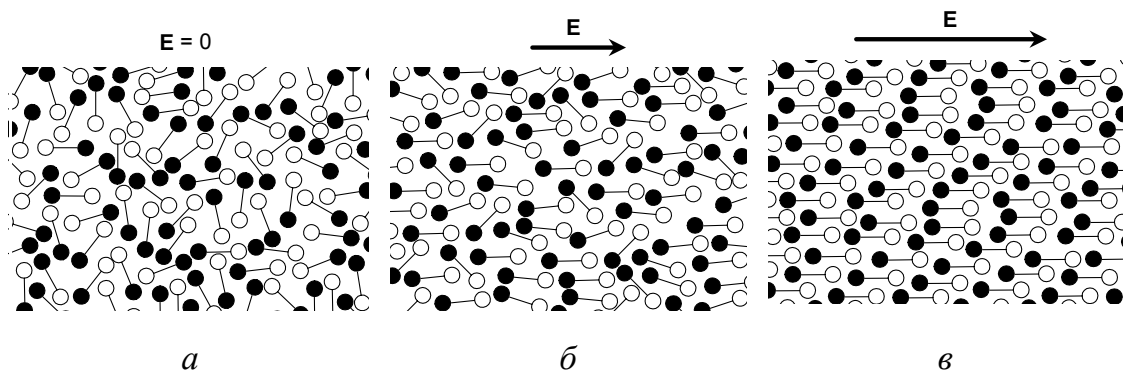


Рис. 3.2.1. Простейшая интерпретация поляризации атома

Вторую группу составляют вещества, молекулы которых имеют отличный от нуля дипольный момент. В электрическом поле такие молекулы, первоначально ориентированные хаотически вследствие теплового движения в среде, будут стремиться ориентироваться по полю. Роль упругой «возвращающей силы» в данном случае играет тепловое движение, стремящееся разупорядочить молекулы. Поэтому диэлектрическая восприимчивость подобных веществ уменьшается с ростом температуры. Насыщение поляризации в таких средах достигается при полях, когда большинство молекул ориентируется по полю (рис. 3.2.2).



*Рис. 3.2.2. Поляризация в диэлектрике, состоящем из полярных молекул:
 а – электрическое поле отсутствует, молекулы тепловым движением распределены хаотически;
 б – умеренное электрическое поле, молекулы ориентированы преимущественно по полю; в – сильное поле, полная поляризация (насыщение)*

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение проводящей среды.
2. Какого вида электрический ток может существовать в диэлектриках?
3. Объяснить термин «электростатический».
4. Какова величина электростатического поля внутри проводника?
5. Как электростатический заряд распределяется по объему проводящего тела?
6. Записать выражение для электростатического поля через потенциал, уравнение Лапласа и уравнение Пуассона для электростатического потенциала.
7. Сформулировать граничные условия для электростатического поля на поверхности проводника.
8. Какова сила, действующая на элемент поверхности проводника в электростатическом поле? Как давление электрического поля зависит от его напряженности?
9. Каков физический смысл вектора диэлектрической поляризации?
10. Записать определение для вектора электрической индукции, диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости среды.
11. Записать уравнения Максвелла для статических электрического поля и электрической индукции в диэлектрике. Сформулировать к ним граничные условия.
12. Каковы механизмы диэлектрической поляризации в двух основных типах диэлектриков? С чем связано насыщение поляризации в сильном поле?

ЛЕКЦИЯ 4 ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК И ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

4.1. Постоянный ток. Электрическое поле в проводниках

Говоря о *постоянном* токе, протекающем в некоторой среде, мы будем по-прежнему предполагать (как и в случае электростатики), что все величины, фигурирующие в уравнениях Максвелла, усредненных по «физически бесконечно малым» объемам среды, не зависят от времени. Однако теперь, в отличие от электростатического случая, мы считаем, что усредненная плотность потока зарядов $\mathbf{j} = \langle \rho \mathbf{v} \rangle$ отлична от нуля. Величину \mathbf{j} мы будем называть плотностью электрического тока.

Поскольку средняя плотность зарядов в условиях нашей задачи постоянна, то из уравнения непрерывности (2.1.5) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (4.1.1)$$

Электрическое поле внутри проводника также постоянно, является безвихревым:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (4.1.2)$$

и выражается через потенциал:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi. \quad (4.1.3)$$

К уравнениям (4.1.1) и (4.1.2) следует добавить уравнение, связывающее внутри среды величины \mathbf{E} и \mathbf{j} . Вид этой связи определяется свойствами среды. Для подавляющего большинства материалов эта связь линейна (что составляет сущность *закона Ома*) и для электрически изотропного проводника записывается в виде

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (4.1.4)$$

Величина σ называется удельной проводимостью материала проводника. Величина, обратная к σ , называется удельным электрическим сопротивлением.

Если проводник электрически однороден ($\sigma = \text{const}$), то подставляя (4.1.4) в (4.1.1) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

откуда по теореме Остроградского–Гаусса следует электронейтральность любого «физически бесконечно малого» объема проводника. Потенциал в этом случае удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (4.1.5)$$

На поверхности, разделяющей два проводника, нормальная к этой поверхности компонента плотности тока, очевидно, непрерывна: $j_{n,1} = j_{n,2}$. С другой стороны, из уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ следует непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля, а с учетом (4.1.4) – непрерывность отношения \mathbf{j}_t / σ . Таким образом, на границе раздела имеем:

$$j_{n,1} = j_{n,2}, \quad \mathbf{j}_{t,1} / \sigma_1 = \mathbf{j}_{t,2} / \sigma_2, \\ \sigma_1 E_{n,1} = \sigma_2 E_{n,2}, \quad \mathbf{E}_{t,1} = \mathbf{E}_{t,2}.$$

На границе проводника с диэлектриком (внутри проводника) $j_n = 0$ и $E_n = 0$. Последнее условие с учетом (4.1.3) приводит к дифференциальному граничному условию для потенциала

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0.$$

Итак, сформулируем задачу о протекании постоянного тока в однородном проводнике произвольной формы. Пусть на некоторой части поверхности S_1 проводника (всю поверхность которого обозначим как S) распределение потенциала задано (например, поверхность S_1 состоит из двух частей, соответствующих контактам с полюсами внешней электрической цепи с заданными потенциалами). Вдоль оставшейся части поверхности ($S - S_1$) проводник граничит с диэлектриком. Тогда необходимо решить уравнение для потенциала

$$\Delta \varphi = 0$$

с граничными условиями $\varphi|_{S_1} = \varphi_1(\mathbf{r})$, $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S - S_1} = 0$, а затем определить распределения электрического поля и плотности тока согласно выражениям (4.1.3) и (4.1.4).

Определив распределение потенциала по поверхности проводника, можно найти электрическое поле снаружи от него. Решение этой задачи эквивалентно решению задачи электростатики (решение уравнения Лапласа для потенциала с граничным условием Дирихле на поверхности проводника), с тем лишь отличием, что потенциал не постоянен вдоль

поверхности проводника, а распределен в соответствии с конфигурацией протекающего тока.

При протекании тока в проводнике электрическое поле, перемещая заряженные частицы, постоянно производит над ними механическую работу. Работа, совершаемая в единице объема проводника за единицу времени (то есть плотность мощности), равна \mathbf{jE} . Эта мощность диссипируется в веществе проводника, превращаясь в тепло и нагревая проводник. Удельная мощность тепловыделения при этом есть $\mathbf{jE} = \sigma E^2 = j^2 / \sigma$ (закон Джоуля–Ленца).

Итак, в массивных проводниках прохождение *постоянного* тока носит объемный характер. Принципиально иная картина токопрохождения возникает для переменных токов высокой частоты. Этот вопрос мы рассмотрим в Лекции 5.

4.2. Постоянное магнитное поле в отсутствие токов проводимости

Уравнения, описывающие постоянное магнитное поле в среде, получаются путем усреднения точных уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}. \quad (4.2.6)$$

Усредненную по «физически бесконечно малому» объему величину напряженности магнитного поля принято называть магнитной индукцией и обозначать \mathbf{B} . Первое из уравнений (4.2.6) после усреднения, очевидно, запишется в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.2.7)$$

Поскольку усредненное электрическое поле полагается постоянным, то из второго уравнения (4.2.6) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \langle \rho \mathbf{v} \rangle. \quad (4.2.8)$$

Пусть полный ток в теле отсутствует, то есть в любом полном поперечном сечении S тела

$$\int_S \langle \rho \mathbf{v} \rangle d\mathbf{S} = 0. \quad (4.2.9)$$

Тогда величина $\langle \rho \mathbf{v} \rangle$ может быть представлена в виде ротора некоторого вектора:

$$\langle \rho \mathbf{v} \rangle = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (4.2.10)$$

при том условии, что величина \mathbf{M} обращается в нуль за пределами тела. Действительно, переходя, согласно теореме Стокса (см. Приложение 1), к интегралу по контуру, охватывающему тело, имеем

$$\int_S \langle \rho \mathbf{v} \rangle d\mathbf{S} = c \int_S \operatorname{rot} \mathbf{M} d\mathbf{S} = c \oint_\Gamma \mathbf{M} d\mathbf{l} = 0.$$

Векторную величину \mathbf{M} называют намагниченностью тела. Вводя ее в уравнение (4.2.8), получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (4.2.11)$$

где величину $\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ принято называть напряженностью магнитного поля³.

Можно показать, что величина намагниченности равна магнитному моменту единицы объема тела:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} [\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}].$$

Итак, постоянное магнитное поле в среде описывается уравнениями (4.2.7) и (4.2.11). Эти уравнения следует дополнить соотношением, связывающим величины \mathbf{B} и \mathbf{H} . Если магнитное поле не слишком велико, то эта связь является линейной. Для изотропных тел

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Величина μ называется магнитной проницаемостью (заметим, что ее определение «обратно» к определению величины ε для диэлектриков). Величина

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi},$$

связывающая намагниченность с напряженностью магнитного поля ($\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$) называется магнитной восприимчивостью.

Граничные условия к уравнениям (4.2.7) и (4.2.11) следуют из самих этих уравнений и на поверхности раздела двух сред имеют вид:

³ Нетрудно видеть, что соотношение между величинами \mathbf{H} и \mathbf{B} аналогично соотношению между величинами \mathbf{D} и \mathbf{E} для диэлектрика. Однако исторически сложилось так, что название величины \mathbf{H} – напряженность магнитного поля – не соответствует ее физическому смыслу. Следует помнить, что истинное среднее значение напряженности магнитного поля в среде есть \mathbf{B} , а не \mathbf{H} .

$$B_{1,n} = B_{2,n}, \quad \mathbf{H}_{1,t} = \mathbf{H}_{2,t}.$$

Нетрудно видеть, что система уравнений и граничные условия для магнитного поля в среде *в отсутствие сторонних токов* по форме точно такие же, как для электрического поля в диэлектрике *в отсутствие сторонних зарядов* (отличаясь заменой \mathbf{E} на \mathbf{H} и \mathbf{D} на \mathbf{B}). При этом магнитное поле является безвихревым (4.2.11) и может быть выражено через потенциал:

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi.$$

Магнитный потенциал ψ удовлетворяет тем же уравнениям, что и электростатический потенциал.

Между диэлектрическими и магнитными свойствами веществ имеется ряд принципиальных различий. Так, если диэлектрическая проницаемость по величине всегда превышает единицу (среда всегда ослабляет электрическое поле внутри себя), то магнитная проницаемость может быть как меньше единицы (магнитное поле внутри среды ослабляется), так и больше единицы (поле усиливается). Другое различие состоит в том, что если выраженными диэлектрическими свойствами обладают все без исключения конденсированные среды, то перечень материалов, обладающих сколько-нибудь заметными магнитными свойствами, сравнительно невелик. Иначе говоря, у большинства материалов диэлектрическая восприимчивость намного превышает восприимчивость магнитную. Причина этого состоит в том, что намагничивание вещества представляет собой релятивистский эффект, при том имеющий второй порядок малости по параметру v/c , где v – скорости электронов в атомах. Наконец, если существование магнитов очевидно свидетельствует о возможности остаточной магнитной поляризации (намагниченности), то проделать подобное ни с одним из диэлектриков невозможно.

Все материалы по магнитным свойствам можно разделить на две большие группы: ферромагнетики и прочие материалы. Диэлектрическая проницаемость ферромагнетиков в сравнительно малых полях (вдали от насыщения) может достигать нескольких тысяч. Среди прочих материалов выделяют парамагнетики, у которых $\mu > 1$, и диамагнетики ($\mu < 1$). У большинства пара- и диамагнетиков величина μ лишь слабо отличается от единицы.

Величина $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ (4.2.10) называется плотностью вихревого тока. Вихревой ток в среде образуется микроскопическими электронными токами. Сильно упрощая ситуацию, движение электронов в атомах можно представить как их орбитальное вращение вокруг ядер. С этим движе-

нием связан соответствующий магнитный момент. Кроме того, магнитным моментом – спином – обладают и сами электроны.

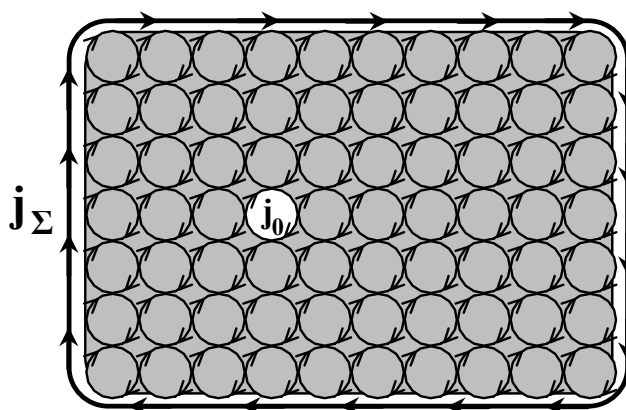


Рис. 4.2.10. Микроскопические вихревые токи и создаваемый ими макроскопический вихревой ток

Если тело однородно намагничено (рис. 4.2.1), то микроскопические вихревые токи \mathbf{j}_0 (и создаваемые ими магнитные моменты) в объеме тела компенсируют друг друга. На поверхности же они образуют касательный к ней замкнутый полный вихревой ток \mathbf{j}_Σ . Зная величину и распределение этого тока, можно определить магнитное поле как вне тела, так и внутри него.

Важно понимать, что вихревой ток не связан с переносом заряда по поверхности тела, то есть не является током проводимости.

Приведенным выше упрощенным объяснением магнетизма веществ мы в данном курсе и ограничимся. Заметим, что попытка полностью объяснить магнитные явления с классических позиций приводит к неразрешимым противоречиям. Корректное рассмотрение этих явлений требует квантово-механического подхода.

4.3. Магнитное поле постоянного тока

До сих пор, рассматривая магнитное поле в среде, мы учитывали только вихревой ток, образованный замкнутыми микротоками. Такой ток не обеспечивает электрической проводимости тела. И действительно, многие магнетики (например, ферриты) являются хорошими изоляторами.

Пусть теперь через тело протекает постоянный во времени ток, такой, что в произвольном поперечном сечении тела $\int_S \mathbf{j} dS \neq 0$. Величина

\mathbf{j} в этом случае называется плотностью тока проводимости. Распределение тока проводимости по объему тела определяется уравнениями, приведенными в п. 4.1. В эти уравнения не входит магнитное поле, – в том

числе, и создаваемое самим током проводимости. Действительно, известно, что магнитное поле мало влияет на проводимость подавляющего большинства твердых тел. Причина этого заключается в малой скорости движения носителей заряда в таких телах, и, соответственно, малости действующих на них релятивистских магнитных сил⁴. Поэтому в формулировке задачи о магнитном поле токов их распределение в пространстве можно считать заданным. Уравнения поля при этом отличаются от уравнений (4.2.7, 4.2.11) присутствием плотности тока проводимости в правой части роторного уравнения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (4.3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.3.2)$$

Для решения этих уравнений удобно ввести усредненный векторный потенциал \mathbf{A} таким образом, что

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (4.3.3)$$

при этом наложив на величину \mathbf{A} дополнительное условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (заметим, что уравнение (4.3.2) в этом случае удовлетворяется автоматически).

В случае линейной зависимости $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, подставляя (4.3.3) в (4.3.1), получаем уравнение для векторного потенциала:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (4.3.4)$$

Это уравнение справедливо для любой неоднородной среды.

В однородной среде $\mu = \text{const}$ и, поскольку (см. Приложение 1) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$, уравнение (4.3.4) приобретает вид уравнения Пуассона:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}. \quad (4.3.5)$$

Проще всего магнитное поле определяется, когда ток является чисто аксиальным и осесимметричным, то есть (в цилиндрической системе координат) $\mathbf{j} = j(r) \mathbf{z}_0$. В этом случае силовые линии магнитного поля есть окружности с радиусом $r = \text{const}$, абсолютная же величина поля

⁴ Иная картина имеет место в ионизованном газе – плазме, которую мы в настоящем курсе не рассматриваем.

определяется непосредственно из уравнения (4.3.1). По теореме Стокса имеем

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} dS,$$

откуда

$$H(r) = \frac{2I(r)}{rc}.$$

Здесь $I(r)$ – полный ток, протекающий внутри окружности радиуса r .

Для осесимметричных круговых токов, когда $j_r = j_z = 0$ и $\mathbf{j} = \mathbf{j}_\varphi(r, z)$, уравнения магнитного поля также сводятся к скалярному уравнению. Действительно, в этом случае векторный потенциал имеет единственную азимутальную компоненту A_φ . Компоненты вектора магнитной индукции

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi), \quad B_\varphi = 0,$$

с учетом чего из (4.3.1) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) = -\frac{4\pi}{c} j_\varphi(r, z).$$

Рассмотрим еще один важный частный случай, когда магнитное поле постоянного тока может быть найдено точно. Это тот случай, когда магнитными свойствами среды можно пренебречь, во всем пространстве положив $\mu = 1$. В этом случае уравнение (4.3.5) принимает вид

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Известно решение этого уравнения, обращающееся в нуль на бесконечности:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV.$$

Здесь \mathbf{r}' – координаты точек, принадлежащих объему, занятому токами, по которому и производится интегрирование. Возьмем ротор (по координатам \mathbf{r} точки наблюдения) от подынтегрального выражения:

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \cancel{\operatorname{rot} \mathbf{j}(\mathbf{r}')} + \left[\left(\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \boldsymbol{\nabla} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] = - \left[\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right].$$

Таким образом, обозначая $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, окончательно записываем:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{R}]}{R^3} dV.$$

Последняя формула выражает собой закон Био и Савара.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой ток называется постоянным?
2. Сформулировать закон Ома.
3. Является ли ток постоянный ток проводимости вихревым?
4. Сформулировать задачу о протекании постоянного тока в однородном проводнике произвольной формы.
5. Сформулировать закон Джоуля-Ленца.
6. Как называется величина напряженности магнитного поля, усредненная по «физически бесконечно малому» объему среды?
7. Как связаны между собой намагниченность, магнитная индукция и напряженность магнитного поля в среде? Каков физический смысл намагниченности?
8. Записать систему уравнений Максвелла с граничными условиями для магнитной индукции и напряженности магнитного поля в среде в статическом случае.
9. В каком случае магнитное поле в среде может быть выражено через потенциал?
10. На какие основные классы делятся материалы по магнитным свойствам?
11. Каковы основные принципиальные различия между диэлектрическими и магнитными свойствами веществ?
12. Записать уравнения для магнитного поля вокруг проводника с постоянным током.
13. Чему равно магнитное поле, создаваемое осесимметричным током аксиального направления на некотором расстоянии от оси?
14. Сформулировать закон Био и Савара.

ЛЕКЦИЯ 5

КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

5.1. Уравнения квазистатического поля

До сих пор мы рассматривали электрические и магнитные поля, постоянные во времени. Перейдем теперь к переменным полям. Нашей первой задачей будет задача о полях внутри массивного проводника, который помещен во внешнее изменяющееся во времени магнитное поле. При этом мы предложим, что скорость изменения поля не слишком велика. Именно, характеризуя эту скорость частотой ω , будем считать, что длина волны, которая соответствует этой частоте в вакууме, значительно превышает размеры тела L :

$$\lambda \sim c/\omega \gg L \text{ или } \omega \ll c/L.$$

Тем самым мы пренебрегаем волновыми эффектами, связанными с конечностью скорости распространения электромагнитного поля. В этом случае распределение магнитного поля вне проводника в каждый момент времени можно описывать уравнениями магнитостатики

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

Внутри же проводника (если он электрически изотропен) поля должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{где } \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Последнее уравнение было выведено, вообще говоря, для постоянных токов и магнитных полей. Применять его для переменных полей можно, если связь между электрическим полем и током проводимости остается той же, что в стационарном случае. Для этого частота изменения поля должна быть много меньше обратного времени свободного пробега электронов в проводнике. Для типичных металлов допускаемые этим условием предельные частоты изменения поля соответствуют инфракрасному диапазону.

Итак, электрическое поле в проводнике в условиях нашей задачи возникает только благодаря тому, что магнитное поле изменяется во времени.

Исключив электрическое поле из первого и последнего уравнений (5.1.1), получим:

$$\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot} \mathbf{H} \right).$$

Пусть рассматриваемая среда однородна по проводимости и магнитной проницаемости. Тогда, вынося соответствующие множители из под знака ротора, пользуясь выражением $\text{rot rot} \mathbf{H} = \text{grad div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}$ и учитывая, что $\text{div} \mathbf{H} = 0$, приходим к уравнению

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (5.1.2)$$

Граничные условия для магнитного поля на поверхности проводника остаются такими же, как и в статическом случае:

$$B_{1,n} = B_{2,n}, \quad \mathbf{H}_{1,t} = \mathbf{H}_{2,t}.$$

Нетрудно убедиться в том, что присутствие в правой части последнего уравнения в (5.1.1) плотности тока проводимости не изменяет граничного условия для \mathbf{H} .

Исключая из уравнений (5.1.1) величину \mathbf{H} , для электрического поля в проводнике получаем уравнение, по форме совпадающее с уравнением (5.1.2) для магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.1.3)$$

5.2. Проникновение магнитного поля в проводник

Уравнение (5.1.2) по своей форме эквивалентно уравнению теплопроводности или уравнению диффузии; роль коэффициента χ «температуропроводности» или «диффузии» в данном случае играет величина $c^2/4\pi\mu\sigma$. Поэтому процесс проникновения магнитного поля магнитного поля в проводник (который мы далее рассмотрим на двух примерах) иногда называют «диффузией магнитного поля».

Из теории диффузии известно, что величина, удовлетворяющая уравнению (5.1.2), за время t распространяется в среде на расстояние порядка $\delta \sim \sqrt{\chi t}$. Для поля, колеблющегося с частотой ω , имеем

$\delta \sim c/\sqrt{\mu\sigma\omega}$. Величину δ принято называть толщиной скин-слоя (от англ. *skin* – кожа, оболочка). Далее мы уточним эту значение этой величины и ее физический смысл.

Если толщина скин-слоя велика по сравнению с размерами тела ($\delta \gg L$), то распределение магнитного поля в каждый момент времени будем таким же, как в стационарном случае при заданном значении поля вне тела. При этом вихревым электрическим полем и связанными с ним резистивными потерями можно пренебречь.

Важным является противоположный случай, когда поле проникает лишь в тонкий поверхностный слой проводника ($\delta \ll L$). Рассмотрим этот случай в одномерном приближении. Пусть проводник представляет собой полупространство (рис. 5.2.1), а магнитное поле на его поверхности не зависит от поперечных координат:

$$\mathbf{H}_{\text{внешн}} = \text{Re}(\mathbf{H}_1 e^{i\omega t}).$$

При этих условиях поле внутри проводника также будет зависеть только от координаты z . Уравнение (5.1.2) при этом примет вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

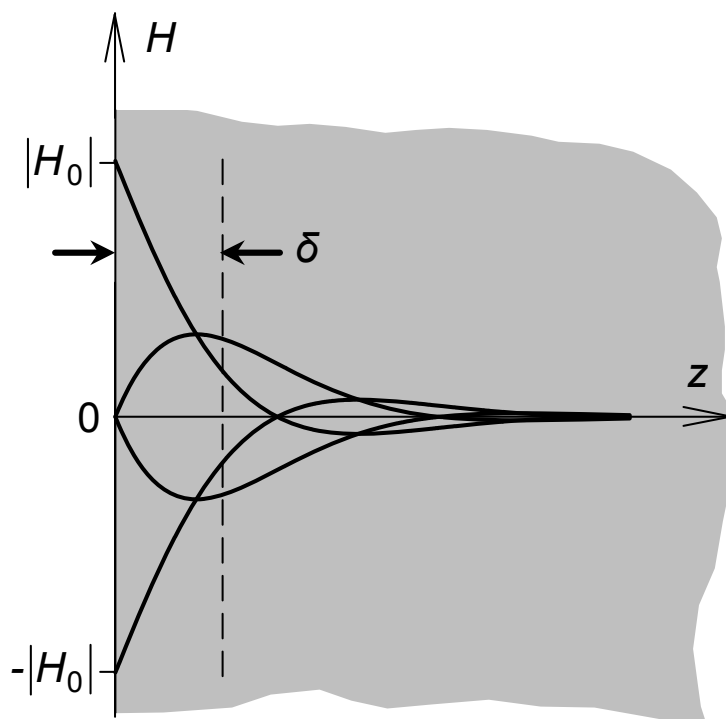


Рис. 5.2.1. Затухание магнитного поля в полубесконечном проводнике. Кривые даны с интервалом в одну четвертую периода колебания

Отыскивая его решение в виде

$$\mathbf{H} = \operatorname{Re} \left[\mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kz)} \right],$$

запишем:

$$\left(i \frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2} + k^2 \right) \mathbf{H} = 0,$$

откуда

$$k = \sqrt{-i \frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}} = (1-i) \frac{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}{c}.$$

Обозначая

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\mu\sigma\omega}},$$

имеем для магнитного поля внутри проводника

$$\mathbf{H} = \operatorname{Re} \left[\mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - z/\delta)} \right] e^{-z/\delta} \quad (5.2.1)$$

Аналогичная зависимость получается и для электрического поля.

Поскольку все компоненты вектора напряженности магнитного поля на границе двух сред непрерывны, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1$.

Как видно из (5.2.1), уточненная толщина скин-слоя δ в условиях данной задачи определяет не только глубину проникновения поля в проводник, но и длину волны в проводнике: $\lambda' = 2\pi\delta$.

5.3. Граничное условие Леонтовича. Поток энергии внутрь проводника

Пользуясь понятием скин-слоя, получим простое граничное условие, связывающее напряженности электрического и магнитного полей на поверхности хорошего проводника.

Пусть проводящее тело находится в переменном электромагнитном поле с частотой ω . Рассмотрим участок поверхности тела, имеющий характерный радиус кривизны R . Внутри тела от его поверхности будет распространяться электромагнитная волна. Как мы уже знаем, длина волны λ' внутри тела определяется толщиной скин-слоя: $\lambda' = 2\pi\delta$. Пусть проводимость тела достаточно велика, так что толщина скин-слоя много меньше радиуса кривизны поверхности: $\delta \ll R$. Одновременно имеем $\lambda' \ll R$. Последнее означает, что волновые фронты, распространяющейся внутрь тела от его поверхности, по крайней мере, в первые

моменты времени параллельны этой поверхности. Иначе говоря, на каждом участке поверхности в пределах размера R мы имеем плоскую волну, распространяющуюся по внутренней нормали к поверхности тела.

Известно (подробнее об этом в лекции 6), что для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ , комплексные амплитуды магнитного и электрического полей связаны соотношением

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\mathbf{1} \mathbf{Ч} \mathbf{E}]. \quad (5.4.1)$$

Здесь $\mathbf{1}$ – единичный вектор в направлении распространения волны, в данном случае это вектор внутренней нормали к поверхности тела.

Электрическое поле внутри проводника вблизи его поверхности имеет, следовательно, только касательные к поверхности компоненты. Поскольку на границе раздела двух сред касательные компоненты сохраняются, условие (5.4.1) выполняется и снаружи от тела на его поверхности. Учитывая, что внешняя нормаль к поверхности тела $\mathbf{n} = -\mathbf{1}$, перепишем (5.4.1) в виде:

$$\mathbf{H}_t = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\mathbf{E}_t \mathbf{Ч} \mathbf{n}], \quad (5.4.2)$$

В таком виде граничное условие на поверхности проводника называют граничным условием Леонтовича. Иначе, умножив (5.4.1) векторно на \mathbf{n} , запишем

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\mathbf{n} \mathbf{Ч} \mathbf{H}_t]. \quad (5.4.3)$$

В рассматриваемой ситуации величину $\xi = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ называют поверхностным импедансом проводника. Это величина комплексная. Действительно, воспользовавшись выражением (7.3.2) для диэлектрической проницаемости проводника, имеем

$$\xi = \sqrt{i \frac{\omega \mu}{4\pi\sigma}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{8\pi\sigma}} = \xi' + i\xi''.$$

Нетрудно видеть, что в случае идеального проводника ($\sigma \rightarrow \infty$) граничное условие (5.4.3) принимает уже знакомую нам форму $\mathbf{E}_t = 0$.

Используя граничное условие Леонтовича, найдем плотность потока электромагнитной энергии, втекающей в проводник в высокочастотном поле. Пусть в некоторой точке на поверхности тела

$$\mathbf{H}_t(t) = \text{Re}(\mathbf{H}_0 e^{i\omega t}).$$

Плотность потока энергии определяется нормальной к поверхности компонентой вектора Пойнтинга:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n &= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_t \mathbf{CH}_t] = \frac{c}{4\pi} \left\{ \text{Re}(\xi [\mathbf{n} \mathbf{CH}_0] e^{i\omega t}) \mathbf{C} \text{Re}(\mathbf{H}_0 e^{i\omega t}) \right\} = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} (\xi [\mathbf{n} \mathbf{CH}_0] e^{i\omega t} + \text{к.с.}) \mathbf{C} \frac{1}{2} (\mathbf{H}_0 e^{i\omega t} + \text{к.с.}) \right\}. \end{aligned}$$

Практический интерес представляет величина потока энергии, усредненная за период высокочастотных колебаний. Обозначая усреднение угловыми скобками и учитывая, что при усреднении быстро осциллирующие члены, содержащие $e^{2i\omega t}$ и $e^{-2i\omega t}$, не дают вклада и могут быть опущены, получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_n \rangle_T &= \frac{c}{16\pi} \left\{ \xi \left[[\mathbf{n} \mathbf{CH}_0] \mathbf{CH}_0^* \right] + \text{к.с.} \right\} = \\ &= \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left\{ \xi \left[[\mathbf{n} \mathbf{CH}_0] \mathbf{CH}_0^* \right] \right\} = -\mathbf{n} \frac{c}{8\pi} \xi' |H_0|^2. \end{aligned}$$

Знак минус в итоговом выражении показывает, что поток энергии направлен внутрь тела.

Для идеального проводника $\xi' = 0$ и поток энергии внутрь тела отсутствует. Такое тело идеально отражает электромагнитные волны.

5.5. Скин-эффект в цилиндрическом проводнике

Если по проводнику протекает ток высокой частоты, то, принимая во внимание изложенное в п. 5.4, можно оправданно предположить, что при достаточно большой частоте ток будет в основном сосредоточен в поверхностном слое проводника. Это явление называется скин-эффектом.

Рассмотрим задачу о распределении тока высокой частоты (изменяющегося во времени по гармоническому закону как $e^{i\omega t}$) в длинном прямом цилиндрическом проводнике радиуса R_0 , проходящем в свободном пространстве. Воспользуемся уравнением (5.1.3):

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Электрическое поле в проводнике, как и плотность тока в нем, имеет лишь продольную компоненту, и, в приближении осевой симметрии,

зависит только от радиуса. Тогда в цилиндрической системе координат последнее уравнение примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + k^2 E_z = 0, \quad (5.5.1)$$

здесь $k = \frac{\sqrt{-2i}}{\delta} = \frac{1-i}{\delta}$, где $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$ – толщина скин-слоя.

Уравнение (5.5.2), будучи переписано в виде

$$(kr)^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial (kr)^2} + \frac{\partial E_z}{\partial (kr)} + (kr)^2 E_z = 0,$$

представляет собой уравнение Бесселя порядка 0. Его решение представляет собой суперпозицию функций Бесселя (см. рис. 9.2.2) и Неймана нулевого порядка от *комплексного* аргумента kr . Функция Неймана, имеющая особенность в нуле, не может быть использована в решении нашей задачи (это означало бы бесконечную плотность тока по оси проводника). Поэтому в решении для электрического поля оставим только функцию Бесселя J_0 :

$$E = E_z(r) = E_0 J_0(kr) e^{i\omega t}.$$

По такому же закону распределена и плотность тока $j_z = \sigma E_z$.

Напряженность магнитного поля внутри проводника, очевидно, имеет только азимутальную компоненту и определяется из первого уравнения в системе (5.1.1):

$$i \frac{\omega}{c} H_\varphi = (\text{rot } \mathbf{E})_\varphi = -\frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

Учитывая, что $J_0'(x) = -J_1(x)$, имеем

$$H = H_\varphi = -iE_0 \sqrt{\frac{4\pi\mu\sigma}{\omega}} J_1(kr) e^{i\omega t}.$$

Постоянную E_0 теперь можно определить из того условия, что на поверхности провода магнитное поле $H = 2I/R_0 c$, здесь R_0 – радиус провода, I – полный протекающий ток.

При достаточно больших частотах, когда толщина скин-слоя мала по сравнению с радиусом проводника, имеем $|kr| \sim r/\delta \gg 1$. В этом

случае, воспользовавшись приближенным представлением функции Бесселя при большом значении аргумента [16, стр. 185], получим

$$J_0(kr) = J_0\left(\frac{1+i}{\delta}\right) \approx \sqrt{\frac{\delta/r}{2\pi(1+i)}} \exp\left[(1+i)\frac{r}{\delta}\right] = \frac{(1-i)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\delta}{r}} \exp\left[(1+i)\frac{r}{\delta}\right].$$

С учетом этого для электрического поля и плотности тока внутри проводника на малом расстоянии $x \ll R_0$ от его поверхности имеем

$$E_z, j_z \propto e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}$$

– поле и ток распределены так же, как в плоском случае проводника во внешнем переменном поле (п. 5.2).

Вопросы для самоконтроля

1. При каких частотах изменения электромагнитного поля это поле считается квазистатическим по отношению к телу некоторых размеров?
2. При каких частотах в уравнениях Максвелла для переменного электромагнитного поля в проводнике можно использовать закон Ома? Записать эти уравнения.
3. Записать волновое уравнение, описывающее проникновение квазистатического поля в проводник.
4. Чем определяется толщина скин-слоя? Каков физический смысл этой величины?
5. Как распределено переменное электромагнитное поле некоторой частоты в проводящем теле, если его характерные размеры намного превышают толщину скин-слоя на этой частоте?
6. Сформулировать граничное условие Леонтовича для полей на поверхности проводника. При каких условиях оно реализуется?
7. Что такое поверхностный импеданс проводника? Записать с помощью этой величины плотность потока энергии электромагнитного поля внутрь проводника.
8. Что называется скин-эффектом? Как в рассматриваемой физической ситуации распределены поля в проводнике?

ЛЕКЦИЯ 6

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Под волной в самом общем смысле мы будем понимать такое возмущение поля (любого, не обязательно электромагнитного), которое может распространяться в пространстве в отсутствие источников поля. Таким образом, электромагнитные волны – это возмущения электромагнитного поля, которые могут распространяться в пустоте в отсутствие зарядов и токов или в среде в отсутствие *сторонних* зарядов и токов.

6.1. Уравнения переменного поля в среде в отсутствие дисперсии

Сам процесс распространения поля предполагает зависимость поля от времени. Для любого волнового процесса можно говорить о характерных временах или частотах изменения полей. Запишем уравнения переменного поля для изотропной среды, обладающей диэлектрическими и магнитными свойствами, но не проводящей постоянный ток.

Сделаем важное допущение. Будем полагать, что характерные частоты рассматриваемых колебаний таковы, что связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} и между \mathbf{B} и \mathbf{H} все еще остается той же, что и для постоянного поля:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \varepsilon = const, \quad \mu = const. \quad (6.1.1)$$

Отклонение величин ε и μ от их статических значений (или, как говорят, дисперсия этих величин) начинается при частотах, сравнимых с собственными частотами тех молекулярных или электронных колебаний, с которыми связано появление диэлектрической или магнитной поляризации вещества.

Условие (6.1.1) также предполагает отсутствие эффектов насыщения поляризации среды, которые могут иметь место при очень больших полях.

Уравнения для макроскопических полевых величин получаются путем усреднения точных уравнений (2.1–2.4) по «физически бесконечно малому» объему. Можно показать, что если выполнены условия (6.1.1), то результатом такого усреднения будет система уравнений

$$rot \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad rot \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{cm}, \quad (6.2.1)$$

$$div \mathbf{D} = 4\pi \rho_{cm}, \quad div \mathbf{B} = 0. \quad (6.2.2)$$

В области, где сторонние заряды и токи отсутствуют, имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (6.1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (6.1.4)$$

Уравнения (6.1.2) могут иметь ненулевые решения, которые, очевидно, нестационарны.

6.2. Волновое уравнение

В однородной среде с постоянными ε и μ уравнения (6.1.3, 6.1.4) принимают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (6.2.2)$$

Взяв ротор от одного из уравнений (6.2.1) и исключив из них, таким образом, \mathbf{H} или \mathbf{E} , используя известное тождество векторного анализа $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ и учитывая (6.2.2), приходим к однородному уравнению д'Аламбера для электрического поля

$$\left(\Delta - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (6.2.3)$$

и такому же уравнению для \mathbf{H} . Уравнение (6.2.3) описывает распространение волнового возмущения поля в пространстве со скоростью, равной

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Понятие «волновое возмущение» проще всего проиллюстрировать, перейдя к одномерному случаю, где поле зависит от единственной координаты x . Обозначив символом f любую из компонент векторов \mathbf{E} или \mathbf{H} , из (6.2.3) получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = 0.$$

Это уравнение, в свою очередь, преобразуем к виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0. \quad (6.2.4)$$

Введем новые переменные $\xi = t - x/v$, $\eta = t + x/v$, так что

$$t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad x = \frac{v}{2}(\eta - \xi).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta},$$

и уравнение (6.2.4) приобретет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Нетрудно видеть, что последнее уравнение допускает решение в виде суммы любых двух функций, отдельно зависящих от η и ξ :

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v).$$

Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $f = f_1(t - x/v)$. Каков смысл этого решения? При каждом фиксированном x поле зависит от времени; с другой стороны, в каждый момент времени поле различно при различных x . Однако для всех координат и моментов времени, удовлетворяющих соотношению $t - x/v = \text{const}$, поле одинаково. Иначе говоря, поле волны в точке с координатой x неизменно, если $x = \text{const} + vt$. Это значит, что если в нулевой момент времени поле в некоторой точке имело определенную величину, то через время t поле будет иметь ту же величину на расстоянии vt от первоначального места. Таким образом, можно сказать, что величина поля распространяется в направлении x со скоростью, равной v .

Итак, решение $f_1(t - x/v)$ представляет собой волну неизменной формы, бегущую со скоростью v вдоль оси x в положительном направлении, а решение $f_2(t + x/v)$ – волну, бегущую в отрицательном направлении. Заметим, что функции f_1 и f_2 удовлетворяют однородному уравнению первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) f = 0.$$

Это уравнение, как и уравнение д'Аламбера (6.2.3), часто называют волновым.

6.3. Плоская монохроматическая волна

Важнейшим решением уравнений (6.2.1, 6.2.2) для бесконечной и однородной среды является плоская монохроматическая волна, поля которой записываются в виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}_\omega e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right], \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{H}_\omega e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right]. \quad (6.3.1)$$

Здесь постоянные векторы \mathbf{E}_ω и \mathbf{H}_ω называются комплексными амплитудами, а величина \mathbf{k} носит название волнового вектора.

Подставляя поля (6.3.1) в уравнения (6.1.5), используя формулу векторного анализа $\operatorname{rot}(a\mathbf{B}) = a \operatorname{rot} \mathbf{B} + [\nabla a \times \mathbf{B}]$ и учитывая то, что $\nabla e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} = -i \mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, а ротор постоянных векторов \mathbf{E}_ω и \mathbf{H}_ω равен нулю, придем к уравнениям, связывающим комплексные амплитуды полей:

$$\frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}_\omega = -[\mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{E}_\omega], \quad \frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}_\omega = [\mathbf{k} \mathbf{C} \mathbf{H}_\omega]. \quad (6.3.2)$$

Умножив эти уравнения скалярно на \mathbf{k} , получим $\mathbf{k} \mathbf{H}_\omega = \mathbf{k} \mathbf{E}_\omega = 0$. Кроме того, как нетрудно видеть, и $\mathbf{E}_\omega \mathbf{H}_\omega = 0$. С учетом этого, исключая из (6.3.2) величины \mathbf{E}_ω и \mathbf{H}_ω , найдем выражение для квадрата волнового вектора:

$$\mathbf{k}^2 = \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Если среда является прозрачной (непоглощающей), то волновой вектор является вещественным. Однако если среда обладает поглощением, то волновой вектор будет содержать как действительную, так и мнимую части: $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i \mathbf{k}''$. Тогда экспоненциальный множитель в выражениях для полей запишется как $e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} = e^{i(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r})} e^{\mathbf{k}''\mathbf{r}}$.

Осциллирующий сомножитель $e^{i(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r})}$ называется фазовым множителем, а величина $\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r}$ фазой волны. Нетрудно видеть, что поверхности равных фаз плоской волны представляют собой плоскости, перпендикулярные к вектору \mathbf{k}' . Этот вектор, таким образом, задает направление распространения волны. Мнимая же часть волнового вектора (взятая с обратным знаком) задает направление ее затухания⁵. Направления векторов \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' в общем случае могут и не совпадать.

⁵ «Активные» среды, в которых может происходить усиление волн, мы здесь не рассматриваем.

Итак, для прозрачных сред волновой вектор действителен, а его длина есть

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} = n \frac{\omega}{c}.$$

Величина $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется показателем преломления среды. Векторы электрического и магнитного поля колеблются в одной фазе и связаны соотношением

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\mathbf{l} \times \mathbf{E}],$$

здесь $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ – единичный вектор в направлении \mathbf{k} . Таким образом, векторы электрического и магнитного полей ортогональны как между собой, так и по отношению к волновому вектору. Поверхности равных фаз и поверхности равных амплитуд есть плоскости, перпендикулярные к направлению распространения волны. Такая волна называется однородной плоской волной.

Если среда обладает поглощением, причем векторы \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' параллельны, то распространяющиеся в такой среде плоские волны также являются однородными, хотя и затухающими. В этом случае можно ввести комплексную длину волнового вектора согласно определению $\mathbf{k} = k \mathbf{l}$:

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c} = (n - i\zeta) \frac{\omega}{c}. \quad (6.3.3)$$

Здесь величина n , как и ранее, называется показателем преломления. Величина ζ называется коэффициентом поглощения среды и определяет декремент пространственного затухания волны, которое будет происходить по закону $E \propto \exp\left[-\zeta \frac{\omega}{c} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})\right]$.

Пусть магнитная проницаемость среды $\mu = 1$, а диэлектрическая проницаемость комплексна: $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$. В этом случае из (6.3.3) имеем $\varepsilon' + i\varepsilon'' = n^2 - 2in\zeta - \zeta^2$. Разделяя действительную и мнимую части этого выражения, получим

$$\varepsilon' = n^2 - \zeta^2, \quad \varepsilon'' = -2n\zeta.$$

Разрешая эти уравнения относительно n и ζ , получаем

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon'}, \quad \zeta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon'}.$$

Если $\varepsilon' \gg \varepsilon''$, то $n \approx \sqrt{\varepsilon'}$ и $\zeta \approx -\frac{\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon'}} = -\frac{\varepsilon''}{2n}$.

6.4. Фазовая скорость волн

Определим для плоской монохроматической волны ее фазовую скорость в узком смысле как скорость движения фазового фронта (поверхности постоянной фазы) в направлении нормали к этой поверхности (вдоль вектора \mathbf{k}'). Для плоской волны эта величина равна

$$v_{\phi,0} = \frac{\omega}{k'}.$$

В пустоте, очевидно, имеем $v_{\phi,0} = c$, а в среде с постоянными ε и μ

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

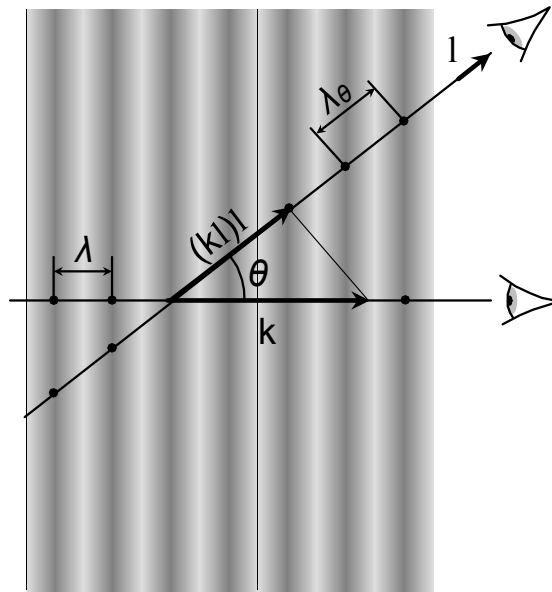


Рис. 6.4.1. К понятию фазовой скорости волны

В более широком смысле фазовая скорость может быть определена по отношению к некоторому направлению. Пусть действительная компонента волнового вектора образует с направлением наблюдения угол θ (рис. 6.4.1). Тогда под фазовой скоростью волны в заданном направлении понимается скорость движения точки пересечения поверхности постоянной фазы линией наблюдения. Очевидно, что эта скорость есть

$$v_{\phi,\theta} = \frac{v_{\phi,0}}{\cos \theta} = \frac{\omega}{k \mathbf{l}},$$

здесь \mathbf{l} – единичный вектор в направлении наблюдения. Определенная таким образом величина фазовой скорости всегда превышает $v_{\phi,0}$, а при наблюдении под прямым углом – обращается в бесконечность.

6.5. Групповая скорость волн

Монохроматическая бегущая волна представляет собой идеализацию, предполагающую бесконечно долгое существование волны во времени и ее неограниченность в пространстве. Поскольку на практике волновые процессы всегда ограничены, их спектр никогда не является строго монохроматическим. Простейший импульс, полученный «вырезанием» из бесконечной монохроматической волны фрагмента конечной длины, имеет тем большую ширину спектра, чем меньше число колебаний в импульсе:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{1}{N}.$$

Здесь N – число колебаний. Определенная таким образом величина $\Delta\omega$ называется *естественной шириной спектра* импульса. Компактные волновые импульсы называют волновыми пакетами. При распространении электромагнитных волн в средах или волноведущих структурах волновые компоненты с различными частотами, как правило, обладают более или менее различными фазовыми скоростями (это явление называется частотной *дисперсией*). Подробнее мы рассмотрим это явление в следующей лекции). Вследствие этого форма импульса по мере его распространения искажается.

При каких же условиях еще можно рассматривать движение волнового пакета как единого целого?

Рассмотрим одномерное волновое возмущение – волновой пакет, движущийся в направлении z . В общем виде поле волны может быть представлено как суперпозиция монохроматических волн с различными частотами и соответствующими этим частотам волновыми числами:

$$E(z, t) = \int_0^{\infty} E_{\omega}(\omega) e^{i[\omega t - h(\omega)z]} d\omega \quad (6.5.1)$$

Если между ω и h имеется пропорциональная зависимость, то фазовая скорость, которая и является коэффициентом пропорционально-

сти ($v_\phi = \omega/h$) будет одинаковой для всех частот. Такой волновой пакет, перемещаясь со скоростью v_ϕ , будет сохранять свою форму. Действительно, в этом случае

$$E(z, t) = \int_0^\infty E_\omega(\omega) e^{i\omega[t-z/v_\phi]} d\omega = E(0, t - z/v_\phi).$$

Видно, что пакет из нулевой точки придет в точку z с задержкой по времени, равной $\Delta t = z/v_\phi$.

Если зависимость $h(\omega)$ не сводится к прямой пропорциональности, то фазовые скорости различных гармоник в пакете будут различаться. Однако если спектр импульса узок, то в первом приближении распылением пакета можно пренебречь.

Действительно, пусть частоты гармоник в пакете сосредоточены в сравнительно малом интервале в окрестности основной частоты: $\Delta\omega \ll \omega_0$ (рис. 6.5.1). В этом случае, раскладывая продольное волновое в ряд в окрестности ω_0 , можно ограничиться первыми двумя членами разложения:

$$h(\omega) \approx h(\omega_0) + \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0).$$

Подставив это выражение в (6.5.1) и обозначив $h_0 \equiv h(\omega_0)$, запишем

$$E(z, t) = \int_0^\infty E_\omega(\omega) \exp \left[i \left(\omega_0 t + (\omega - \omega_0)t - h_0 z - \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) z \right) \right] d\omega$$

или

$$E(z, t) = e^{i(\omega_0 t - h_0 z)} \int_0^\infty E_\omega(\omega) \exp \left[i(\omega - \omega_0) \left(t - \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} z \right) \right] d\omega. \quad (6.5.2)$$

С другой стороны, поле (6.5.1) в случае узкополосного пакета можно записать, выделив в нем колебание с основной частотой ω_0 :

$$E(z, t) = e^{i(\omega_0 t - h_0 z)} F(z, t).$$

В этой записи функция

$$F(z, t) = \int_0^\infty E_\omega(\omega) \exp \left\{ i \left[(\omega - \omega_0)t - (h - h_0)z \right] \right\} d\omega \quad (6.5.3)$$

называется огибающей высокочастотного импульса. Сравнивая между собой формулы (6.5.1) и (6.5.3), мы видим, что выражение (6.5.3) может быть переписано в виде:

$$E(z, t) = e^{i(\omega_0 t - h_0 z)} F(0, t - v_{zp}/z) = e^{i\omega_0(t - z/v_{\phi,0})} F(0, t - v_{zp}/z), \quad (6.5.4)$$

где введены обозначения $v_{\phi,0} \equiv \omega_0/h_0$, $v_{zp} \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \right)^{-1}$. Выражение (6.5.4)

описывает импульс с высокочастотным заполнением на частоте ω_0 , имеющим фазовую скорость $v_{\phi,0}$ и ограниченный временной огибающей $F(z, t)$. При этом огибающая импульса движется по z со скоростью v_{gp} , не изменяя своей первоначальной формы, которая была задана в сечении $z = 0$.

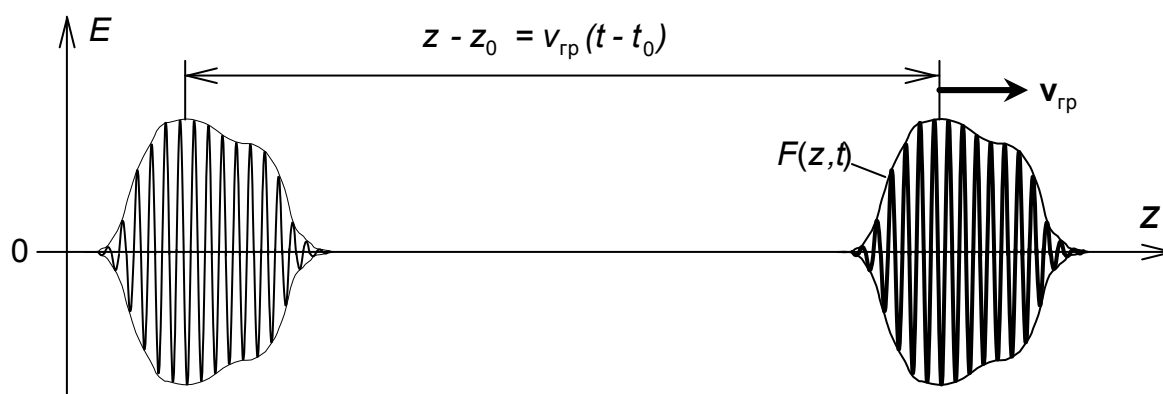


Рис. 6.5.1. К понятию групповой скорости волнового пакета

Величина v_{gp} называется групповой скоростью волнового пакета. Полагая, что в рассматриваемом диапазоне частот величины h и ω связаны взаимно однозначно, перепишем определение для групповой скорости в виде

$$v_{gp} = \frac{\partial \omega}{\partial h} \Big|_{\omega_0}. \quad (6.5.5)$$

Мы видим, что в зависимости от закона дисперсии групповая скорость волны может быть как сонаправленной с фазовой скоростью, так и иметь противоположный знак. На практике встречаются обе эти ситуации. В дальнейшем мы будем неоднократно обращаться к понятиям фазовой и групповой скоростей, рассматривая распространение электромагнитных волн в различных волноведущих структурах.

Если ширина спектральной полосы волнового пакета велика, то дисперсией фазовой скорости и расплыванием пакета при его распро-

странении уже нельзя пренебрегать. На больших дистанциях частотные компоненты импульса могут значительно разделяться в пространстве. Этот эффект может быть использован для спектрального анализа импульсов. Используя длинные дисперсионные линии, можно осуществлять пространственную (а на выходе линии – временную) развертку частотных компонент первоначально компактного многочастотного импульса.

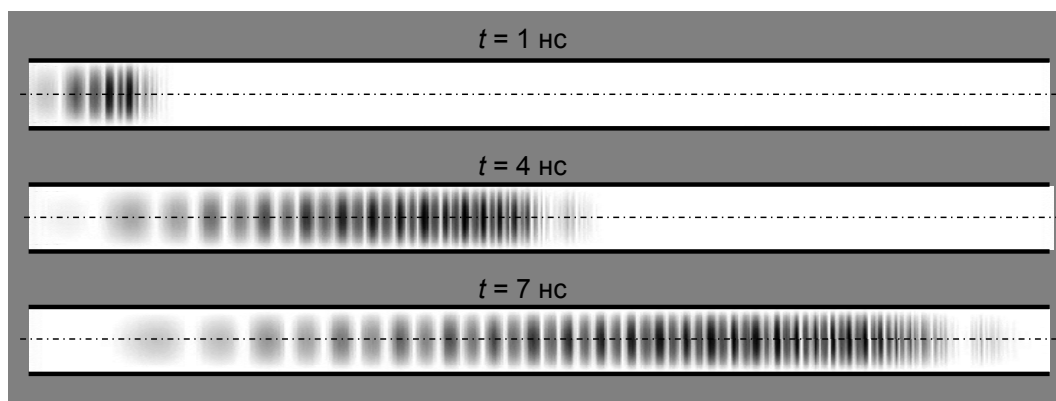


Рис. 6.5.2. Расплывание первоначально короткого (протяженностью в два колебательных цикла) волнового импульса со структурой поля E_{01} при его распространении в волноводе круглого сечения. Длительность импульса на входе в волновод 0.2 нс, частота колебания 10 ГГц. Радиус волновода 1.5 см, длина 200 см. Расчет с помощью PIC-кода KARAT

Частотная дисперсия фазовых скоростей электромагнитных волн может происходить как в объемных средах, так и в различных вакуумных структурах – например, в волноводах, которые мы будем рассматривать в лекциях 8 и 9. Дисперсия волн в волноводах особенно сильна в окрестности так называемых критических частот распространения волн.

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение электромагнитной волны.
2. Записать уравнения Максвелла для переменного поля в среде без дисперсии.
3. Записать уравнение д'Аламбера для возмущений электрического и магнитного полей в среде. Какова скорость распространения возмущений?
4. Записать волновое уравнение первого порядка, описывающее распространение волнового импульса неизменной формы в одномерном случае. Функция какого вида описывает такое возмущение?
5. Дать определение однородной плоской электромагнитной волны, ее комплексных амплитуд и фазы.

6. Как связаны между собой по величине и направлению электрическое, магнитное поле и волновой вектор в однородной плоской волне? Как связаны между собой волновое число и частота колебаний волны?
7. Что представляют собой поверхности равных фаз в плоской волне? Каков смысл действительной и мнимой компонент волнового вектора?
8. Как связаны показатель преломления и коэффициент поглощения среды с действительной и мнимой частями ее диэлектрической проницаемости?
9. Дать развернутое определение фазовой скорости волны. В каком случае и почему величина фазовой скорости электромагнитной волны может превышать скорость света в вакууме?
10. Что такое естественная ширина спектра волнового импульса? Что называют волновым пакетом?
11. С какой скоростью распространяется в пространстве волновой пакет, фазовая скорость всех гармоник которого одинакова?
12. В каком случае можно в первом приближении пренебречь искажением формы волнового пакета при его движении при наличии частотной дисперсии?
13. Дать определение и записать выражение для групповой скорости.
14. Записать выражение для поля в узкополосном волновом пакете неизменной формы, движущегося с некоторой групповой скоростью, фазовая скорость основной частотной компоненты в котором известна.

ЛЕКЦИЯ 7

ЧАСТОТНАЯ ДИСПЕРСИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

7.1. Дисперсия диэлектрической проницаемости как следствие инерционности поляризации среды

В лекции 3 мы рассмотрели явление диэлектрической поляризации в постоянном поле. Перейдем теперь к рассмотрению диэлектрических свойств среды, находящейся в электрическом поле высокой частоты. При этом будем предполагать, что поле не слишком сильно, то есть поляризация среды далека от насыщения и зависит от напряженности поля линейно.

Поскольку поле является переменным, переменным будет смещение зарядов среды под действием поля, а значит, и ее поляризация. При этом важно то, что смещение заряда (и связанная с ним поляризация) определяется действием поля не только в текущий, но и во все предыдущие моменты времени. Иными словами, можно говорить об инерционности поляризации.

Выражение для поляризации, линейно зависящей от поля в предшествующие моменты времени, можно в общем виде записать интегральным образом:

$$\mathbf{P}(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau .$$

Тогда для величины электрической индукции, в соответствие с ее определением (3.2.3), будем иметь

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) - 4\pi \int_0^{\infty} f(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau . \quad (7.1.1)$$

Вид функции $f(t)$, очевидно, зависит от свойств среды. По аналогии с электростатической формулой $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ мы можем для переменных полей записать: $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}$, где $\hat{\varepsilon}$ – уже не число, а линейный интегральный оператор, действие которого определяется выражением (7.1.1).

Для переменного электрического поля, изменяющегося во времени по гармоническому закону $\mathbf{E}(t) \propto e^{i\omega t}$, из (7.1.1) следует:

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = 1 - 4\pi \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (7.1.2)$$

Таким образом, для гармонического поля, как и для поля статического, величина диэлектрической проницаемости определяется как коэффициент пропорциональности между величинами \mathbf{D} и \mathbf{E} , с тем уточнением, что этот коэффициент зависит не только от характеристик среды, но и от частоты поля.

Величина ε , согласно определению (7.1.2), комплексна. Запишем ее в виде $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$.

Важную информацию о поведении величин ε' и ε'' можно подчеркнуть уже из самого определения (7.1.2). Из него видно, что

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega).$$

Следовательно,

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega) \text{ и } \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega).$$

Таким образом, ε' является четной, а ε'' нечетной функцией частоты. Представляя эти функции в виде разложений в ряды по степеням частоты, в разложении для ε' будет иметь, очевидно, только четные степени ω , а в разложении для ε'' только нечетные степени ω . Младший действительный член разложения, таким образом, не зависит от частоты (для диэлектриков он, очевидно, соответствует электростатической диэлектрической проницаемости ε_0); первый же отличный от нуля мнимый член разложения пропорционален первой степени ω .

Физический смысл величин ε' и ε'' мы уже рассмотрели в лекции 6 при рассмотрении монохроматической плоской волны (п. 6.3). Причина появления мнимой части у диэлектрической проницаемости станет понятной из следующего ниже рассмотрения.

7.2. Классическая теория дисперсии

Изложим положения элементарной теории дисперсии диэлектрической проницаемости. Эта теория применима к разреженным средам (например, газам), в которых сложными эффектами взаимодействия между атомами и электронами можно пренебречь и атомы можно рассматривать как изолированные. Кроме того, предполагается, что электрическое поле, действующее на электроны, совпадает со средним полем в среде.

Пусть среда состоит из одинаковых атомов, каждый из которых состоит из ядра с единственным электроном. Движением сравнительно массивного ядра в электрическом поле пренебрегаем. Электрон пред-

ставим как классический гармонический осциллятор, обладающий собственной частотой ω_0 и коэффициентом затухания γ , в заданном внешнем электрическом поле. Движение электрона будем описывать (при этом пренебрегая возможным действием силы со стороны магнитной составляющей поля) уравнением

$$m\ddot{\mathbf{r}} + g\dot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r} = e\mathbf{E}e^{i\omega t}.$$

Здесь $g\dot{\mathbf{r}}$ – сила трения, которая учитывает поглощение волны, $k\mathbf{r}$ – квазиупругая возвращающая сила. Поскольку это уравнение нерелятивистское, оно справедливо для не слишком сильных электрических полей. Обозначим $\gamma = g/2m$, $\omega_0^2 = \sqrt{k/m}$. Тогда уравнение движения примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}e^{i\omega t}.$$

Решение этого неоднородного уравнения складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения (которое имеет вид затухающих колебаний и нас не интересует) и частного решения неоднородного уравнения, которое описывает интересующие нас установившиеся колебания и имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}\mathbf{E}e^{i\omega t}.$$

Если концентрация атомов в среде равна n , то поляризация (дипольный момент единицы объема) среды есть

$$\mathbf{P}(t) = en\mathbf{r}(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}\mathbf{E}e^{i\omega t},$$

здесь $\omega_e = \sqrt{4\pi ne^2/m}$ – электронная плазменная частота. Следовательно, диэлектрическая проницаемость среды есть комплексная величина

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}.$$

Запишем отдельно ее действительную и мнимую части:

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{\omega_e^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2},$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2\gamma\omega\omega_e^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

Нетрудно видеть, что ε' является четной, а ε'' – нечетной функцией частоты. Проанализируем ход этих зависимостей, предполагая, что потери сравнительно малы ($\gamma^2 \ll \omega_0^2$).

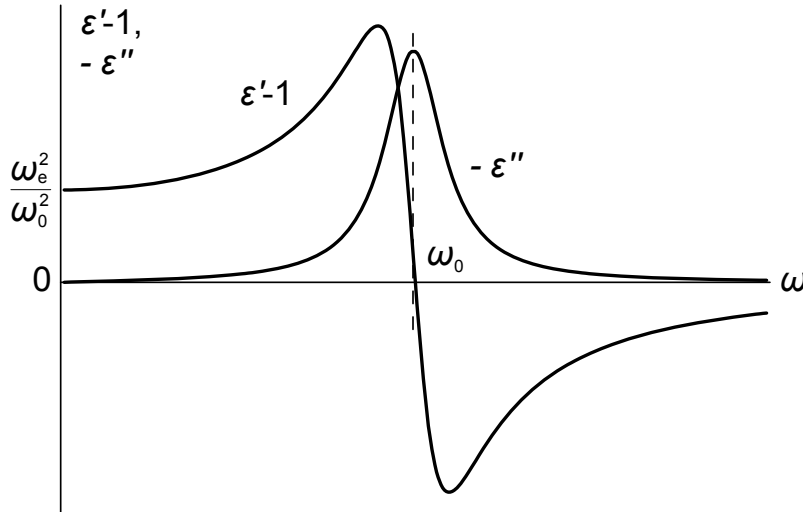


Рис. 7.2.1. Компоненты диэлектрической проницаемости в зависимости от частоты при $2\gamma/\omega_0 = 0.1$

В области частот, много меньших чем собственная частота осциллятора ($\omega \ll \omega_0$), имеем

$$\varepsilon'(\omega) \approx 1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} \text{ и } \varepsilon''(\omega) \approx -\frac{2\gamma\omega\omega_e^2}{\omega_0^4}.$$

При высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$)

$$\varepsilon'(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \text{ и } \varepsilon''(\omega) \approx -\frac{2\gamma\omega_e^2}{\omega^3}.$$

Функция ε' , кроме точки $\omega = 0$, имеет еще два экстремума, расположенных при $\omega = \omega_0\sqrt{1 \mp 2\gamma/\omega_0}$ и принимает в этих точках значения

$$\varepsilon' = 1 \pm \frac{\omega_e^2}{4\gamma(\omega_0 \mp \gamma)} \approx 1 \pm \frac{\omega_e^2}{4\gamma\omega_0}.$$

Между точками экстремумов функция $\varepsilon'(\omega)$ имеет отрицательную производную. В этой области, которая называется областью аномальной дисперсии, показатель преломления среды уменьшается с частотой.

Мнимая часть диэлектрической проницаемости имеет минимум, который при малых потерях приблизительно соответствует $\omega \approx \omega_0$ и равен

$$\min(\varepsilon') \approx -\frac{\omega_e^2}{2\gamma\omega_0}.$$

В области частот, где $2\gamma\omega \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$ (то есть, вне области аномальной дисперсии), имеем *нормальный* закон дисперсии в виде

$$\varepsilon'(\omega) \approx 1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

При этом

$$\varepsilon''(\omega) \approx -\frac{\omega_e^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = (\varepsilon' - 1) \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2},$$

то есть, $|\varepsilon''| \ll \varepsilon' - 1$. Таким образом, в области нормальной дисперсии показатель преломления

$$n_{\text{норм}}(\omega) \approx \sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{1 + \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

7.3. Диэлектрическая проницаемость проводников

Понятие диэлектрической проницаемости, введенное нами для непроводящих тел, может быть обобщено и на проводники.

Прежде всего, заметим, что диэлектрическая поляризация вещества может происходить в любом теле, в которое проникает электрическое поле. Последнему условию не удовлетворяют только проводящие тела в случае постоянного электрического поля. Переменное же электромагнитное поле может существовать и в проводящих средах.

Чтобы описать электромагнитное поле в среде, в которой одновременно происходит диэлектрическая поляризация и протекает электрический ток, воспользуемся вторым уравнением из (6.2.1):

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{cm}}.$$

Пусть сторонний ток есть ток проводимости: $\mathbf{j}_{cm} = \sigma \mathbf{E}$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}.$$

Вводя величину $\varepsilon_{\text{поляризация}}$ согласно соотношению $\mathbf{D} = \varepsilon_{\text{поляризация}} \mathbf{E}$, будем иметь:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon_{\text{поляризация}}}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}.$$

Для гармонического поля с частотой ω последнее уравнение примет вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = ik \left(\varepsilon_{\text{поляризация}} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma \right) \mathbf{E}. \quad (7.3.1)$$

Определим комплексную величину диэлектрической проницаемости проводника как

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{поляризация}} - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} = \varepsilon_{\text{поляризация}} + \varepsilon_{\text{проводность}}.$$

Тогда уравнение (7.3.1) приобретет простой вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = ik\varepsilon \mathbf{E}.$$

что по форме совпадает с соответствующим уравнением для диэлектрика.

Для хороших проводников – металлов – на частотах вплоть до оптических слагаемое $-i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ по абсолютной величине намного превышает «поляризационное» слагаемое $\varepsilon_{\text{поляризация}}$. Поэтому можно приближенно считать, что диэлектрическая проницаемость металла есть

$$\varepsilon_{\text{мет}} \approx -i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (7.3.2)$$

Вопросы для самоконтроля

1. При каких частотах изменения электромагнитного поля это поле считается квазистатическим по отношению к телу некоторых размеров?
2. Записать интегральное выражение для линейной диэлектрической поляризации, отражающее ее инерционный характер.

3. Каковы свойства четности функций действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости?
4. К каким средам применима классическая теория дисперсии? Сформулировать предположения теоретической модели.
5. Изобразить зависимости действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости от частоты колебаний. Каковы предельные значения этих величин при очень больших частотах?
6. Дать определения нормальной и аномальной дисперсии.
7. Записать выражение для диэлектрической проницаемости проводящей среды.

ЛЕКЦИЯ 8

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

8.1. Уравнения поля в передающих линиях. Волны электрического и магнитного типов

Передающие линии предназначены для направленной передачи электромагнитной энергии. От выполняющих ту же функцию антенн они отличаются тем, что представляют собой протяженные структуры, направляющие электромагнитную волну на всем своем протяжении.

Направление (или, как иногда говорят, каналирование) электромагнитных волн основано на явлениях их отражения и преломления. Роль линий передачи могут играть не только металлические, но и диэлектрические объекты (например, в оптическом диапазоне – световоды, в которых используется эффект полного внутреннего отражения волн). Для передачи электрической энергии на низких частотах успешно используются обычные пары проводов. Однако на высоких частотах открытые двухпроводные линии становятся непригодными из-за возрастающих потерь на излучение волн в окружающее пространство. Модификацией двухпроводной линии, обладающей меньшими потерями на излучение, является полосковая линия. Однако явным преимуществом с точки зрения эффективности передачи энергии в СВЧ-диапазоне обладают волноводы.

Волноводом в общем смысле слова мы будем называть передающую линию, ограниченную замкнутой в поперечном направлении проводящей поверхностью. Под это определение попадают и коаксиальные двухпроводные линии. Однако чаще термином «волновод» обозначают трубчатую линию без проводников внутри. На практике обычно используют волноводы прямоугольного и круглого сечений; встречаются и специальные волноводы более сложной формы.

Если волновод не имеет внутренних проводников, то его поперечное сечение представляет собой *односвязную область*⁶. Поперечное сечение коаксиальной линии уже является *двухсвязным*. В дальнейшем мы увидим, что такие линии отличаются от линий односвязного сечения наличием дополнительного семейства волн.

⁶ Для односвязной области любая замкнутая кривая в пределах области может быть стянута в точку. Области, в которых существуют замкнутые кривые, не стягиваемые в пределах этой области в точку, называют многосвязными.

Итак, пусть волновод однороден в направлении z , а в поперечном направлении ограничен поверхностью обобщенного цилиндра. Если внутри волновода присутствуют проводники, то пусть они также имеют вид продольно ориентированных протяженных цилиндров. Будем считать, что все поверхности волновода идеально проводящие.

Поскольку рассматриваемый волновод симметричен относительно любой плоскости, перпендикулярной к образующей обобщенного цилиндра, а волны в нем не испытывают затухания, можно оправданно предположить, что поле в линии имеет вид плоских волн, распространяющихся в направлении z . Эти волны, однако, не могут быть однородными в поперечном направлении, поскольку в этом случае поля в них были бы ортогональны к направлению распространения, а это противоречило бы граничному условию на проводящих поверхностях (равенство нулю касательного к поверхности электрического поля).

Для достижения определенных целей волноводы иногда заполняют диэлектрической или магнитной средой. Мы, однако, ограничимся наиболее часто встречающимся случаем, когда волновод заполнен газом или вакуумирован ($\varepsilon = \mu = 1$).

Рассмотрим поля в волноводе на частоте ω , предполагая, что они имеют структуру неоднородных плоских волн. Неоднородность заключается в том, что амплитуды полей зависят от поперечных координат. Запишем:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\omega t - hz)} \right\}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\omega t - hz)} \right\} \quad (8.1.1)$$

Опуская далее знак действительной части и обозначая фазовый множитель $f \equiv e^{i(\omega t - hz)}$, имеем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp) f, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp) f.$$

Подставим эти выражения в уравнения

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Оператор дифференцирования по времени для гармонического процесса заменим умножением на $i\omega$ и воспользуемся известным выражением из векторного анализа $\text{rot}(a\mathbf{B}) = a \cdot \text{rot}\mathbf{B} - [\mathbf{B} \times \nabla a]$. Поскольку $\nabla f = -ihf\mathbf{z}_0$, из первого уравнения в (8.1.2) получаем

$$f \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp) + ihf [\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp) \times \mathbf{z}_0] = -ikf \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp),$$

здесь $k = \omega/c$. Прodelывая то же самое со вторым уравнением в (8.1.2), сокращая фазовый множитель f , оставляя в векторных произведениях лишь поперечные компоненты полей и опуская аргумент у комплексных амплитуд, получаем:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} - ih[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_\perp] = -ik \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - ih[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_\perp] = ik \mathbf{E}. \end{cases} \quad (8.1.3)$$

Разбивая электрическое поле на поперечные и продольные компоненты:

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_\perp, \mathbf{E}_\parallel\} = \mathbf{E}_\perp + E_\parallel \mathbf{z}_0,$$

и прodelывая то же самое для \mathbf{H} , имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \operatorname{rot}(\mathbf{E}_\perp + E_\parallel \mathbf{z}_0) = \operatorname{rot} \mathbf{E}_\perp - [\mathbf{z}_0 \times \nabla E_\parallel], \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \operatorname{rot}(\mathbf{H}_\perp + H_\parallel \mathbf{z}_0) = \operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp - [\mathbf{z}_0 \times \nabla H_\parallel], \end{aligned}$$

С учетом последних выражений из (8.1.3) получаем

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\perp - [\mathbf{z}_0 \times \nabla E_\parallel] - ih[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_\perp] = -ik \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp - [\mathbf{z}_0 \times \nabla H_\parallel] - ih[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_\perp] = ik \mathbf{E}. \end{cases} \quad (8.1.4)$$

Поскольку комплексные амплитуды полей зависят только от поперечных координат, векторы $\operatorname{rot} \mathbf{E}_\perp$ и $\operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp$ являются чисто продольными. Приняв это во внимание, разобьем уравнения (8.1.4) на поперечные и продольные составляющие:

$$\perp \quad \begin{cases} [\mathbf{z}_0 \times \nabla E_\parallel] + ih[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_\perp] = ik \mathbf{H}_\perp, \\ [\mathbf{z}_0 \times \nabla H_\parallel] + ih[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_\perp] = -ik \mathbf{E}_\perp, \end{cases} \quad (8.1.5)$$

$$\quad \quad \quad (8.1.6)$$

$$\parallel \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\perp = -ikH_\parallel \mathbf{z}_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\perp = ikE_\parallel \mathbf{z}_0. \end{cases} \quad (8.1.7)$$

$$\quad \quad \quad (8.1.8)$$

Выразим из (8.1.6)

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{i}{k} [\mathbf{z}_0 \times \nabla H_\parallel] - \frac{h}{k} [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_\perp].$$

Подставив это выражение в (8.1.5) и учитывая, что

$$[\mathbf{z}_0 \mathbf{C} \mathbf{E}_\perp] = \frac{i}{k} [\mathbf{z}_0 \mathbf{C} [\mathbf{z}_0 \mathbf{C} \nabla H_\parallel]] - \frac{h}{k} [\mathbf{z}_0 \mathbf{C} [\mathbf{z}_0 \mathbf{C} \mathbf{H}_\perp]] = -\frac{i}{k} \nabla H_\parallel + \frac{h}{k} \mathbf{H}_\perp,$$

получаем

$$[\mathbf{z}_0 \times \nabla E_\parallel] + \frac{h}{k} \nabla H_\parallel + i \frac{h^2}{k} \mathbf{H}_\perp = ik \mathbf{H}_\perp$$

или

$$\left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right) \mathbf{H}_\perp = -\frac{i}{k} [\mathbf{z}_0 \times \nabla E_\parallel] - i \frac{h}{k^2} \nabla H_\parallel.$$

Определим поперечное волновое число κ таким образом, что $k^2 = \kappa^2 + h^2$. Принимая во внимание, что комплексные амплитуды полей зависят только от поперечных координат и оставляя поэтому в операторе градиента только поперечные компоненты ($\nabla \rightarrow \nabla_\perp$), приходим к выражению

$$\mathbf{H}_\perp = -i \frac{h}{\kappa^2} \left\{ \nabla_\perp H_\parallel + \frac{k}{h} [\mathbf{z}_0 \times \nabla_\perp E_\parallel] \right\}.$$

Аналогично, заменяя $\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}$ и $k \rightarrow -k$, имеем

$$\mathbf{E}_\perp = -i \frac{h}{\kappa^2} \left\{ \nabla_\perp E_\parallel - \frac{k}{h} [\mathbf{z}_0 \times \nabla_\perp H_\parallel] \right\}.$$

Итак, поперечные компоненты электрического и магнитного полей мы выразили через продольные. Вместо величин E_\parallel и H_\parallel в выражениях для поперечных полей часто используют так называемые потенциальные (или мембранные – смысл этого термина будет ясен чуть позже) функции Ψ_E и Ψ_H , такие, что

$$E_\parallel = \kappa^2 \Psi_E, \quad (8.1.9)$$

$$H_\parallel = \kappa^2 \Psi_H. \quad (8.1.10)$$

Далее мы увидим, что, оперируя этими функциями, можно описывать и такие волны, в которых продольные компоненты полей отсутствуют (нетрудно видеть, что при этом $\kappa = 0$. Это так называемые ТЕМ-волны, которые могут существовать в волноводах с многосвязным сечением).

Итак, для поперечных компонент поля имеем выражения

$$\mathbf{E}_\perp = -ih \left\{ \nabla_\perp \Psi_E - \frac{k}{h} [\mathbf{z}_0 \times \nabla_\perp \Psi_H] \right\}, \quad (8.1.11)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = -ih \left\{ \nabla_{\perp} \Psi_H + \frac{k}{h} [\mathbf{z}_0 \times \nabla_{\perp} \Psi_E] \right\}, \quad (8.1.12)$$

а для продольных компонент – выражения (8.1.9) и (8.1.10).

Сделаем следующее замечание. В выражениях (8.1.11) и (8.1.12) величины Ψ_E и Ψ_H стоят в отдельных слагаемых. Это означает, что в волноводе могут независимо существовать два семейства волн. У волн одного семейства равна нулю величина Ψ_E , у волн второго семейства – величина Ψ_H . Иными словами, это такие волны, у которых отсутствует продольная составляющая одного из полей – или электрического, или магнитного.

Волны, у которых $\Psi_H = H_{\parallel} = 0$, называются волнами электрического типа или Е-волнами (иначе, ТМ-волнами, от англ. *transverse magnetic* – поперечный магнитный). Для них

$$\mathbf{E}_{\perp} = -ih \nabla_{\perp} \Psi_E, \quad (8.1.13)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = -ik [\mathbf{z}_0 \times \nabla_{\perp} \Psi_E]. \quad (8.1.14)$$

Волны, у которых $\Psi_E = E_{\parallel} = 0$, называются волнами магнитного типа или Н-волнами (ТЕ-волнами, от *transverse electrical*). Для этих волн

$$\mathbf{E}_{\perp} = ik [\mathbf{z}_0 \times \nabla_{\perp} \Psi_H], \quad (8.1.15)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = -ih \nabla_{\perp} \Psi_H. \quad (8.1.16)$$

В этой лекции мы будем рассматривать волны только этих двух типов. Чисто поперечным волнам в линиях с двусвязным сечением будет посвящена лекция 10.

Для завершения решения задачи нам необходимо найти функции Ψ_E и Ψ_H , зависящие от поперечных координат. Для этого используем следующие рассуждения.

Электромагнитные поля в отсутствие зарядов и токов удовлетворяют волновому уравнению (7.153), которое в одночастотном случае при $\varepsilon = \mu = 1$ принимает вид (например, для электрического поля)

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

(и так же для магнитного поля). Для продольной компоненты поля, очевидно,

$$(\Delta + k^2) E_{\parallel}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

В рассматриваемой нами неоднородной плоской волне

$$E_{\parallel}(\mathbf{r}, t) = E_{\parallel}(\mathbf{r}_{\perp}) f(z, t)$$

поэтому

$$\Delta(E_{\parallel} f) = f \Delta E_{\parallel} + E_{\parallel} \Delta f + 2 \left(\nabla E_{\parallel} \cdot \nabla f \right)_0 = f \Delta E_{\parallel} + E_{\parallel} \Delta f.$$

С учетом того, что $\Delta f = -h^2 f$, получаем

$$-E_{\parallel} h^2 + \Delta E_{\parallel} + k^2 E_{\parallel} = 0$$

или

$$(\Delta_{\perp} + \kappa^2) E_{\parallel} = 0.$$

Точно так же, для магнитного поля

$$(\Delta_{\perp} + \kappa^2) H_{\parallel} = 0.$$

Точно таким же уравнениям удовлетворяют и потенциальные функции:

$$(\Delta_{\perp} + \kappa^2) \Psi_E = 0, \quad (\Delta_{\perp} + \kappa^2) \Psi_H = 0.$$

Уравнения (8.1.17) должны быть решены на двумерной области, представляющей собой поперечное сечение передающей линии. Граничные условия к этим уравнениям определяются условиями для величин E_{\parallel} или H_{\parallel} на поверхностях, ограничивающих это сечение. Поскольку на поверхности идеального проводника

$$\mathbf{E}_t|_{\Gamma} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0,$$

то

$$E_{\parallel}|_{\Gamma} = \Psi_E|_{\Gamma} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial H_{\parallel}}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial \Psi_H}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0.$$

Итак, для электромагнитных волн в волноводах имеем в общем виде задачу:

$$(\Delta_{\perp} + \kappa^2) \Psi = 0, \tag{8.1.17}$$

с граничными условиями для E-волн

$$\Psi|_{\Gamma} = 0 \tag{8.1.18}$$

и для Н-волн

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (8.1.19)$$

Уравнение (8.1.17) называется уравнением Гельмгольца. Оно возникает во многих задачах о двумерных колебаниях, в том числе, в задаче о колебании упругой мембраны. Поэтому функции Ψ , являющиеся решениями уравнения Гельмгольца, часто называют мембранными функциями.

8.2. Дисперсия Е-волн и Н-волн

В задаче (8.1.17–8.1.19) неизвестными являются не только функция Ψ , но и поперечное волновое число κ , которое должно быть определено из граничных условий. Функции Ψ называют собственными функциями уравнения Гельмгольца, а величины κ – собственными числами задачи.

Для волноводов величины κ образуют бесконечный дискретный набор. Каждому значению κ соответствует своя *волновая мода* с определенной структурой полей. Наборы собственных чисел для Е-волн и для Н-волн в целом различны. При этом можно показать, что если поперечное сечение волновода односвязно, то минимальное значение величины κ^2 , при котором возможно ненулевое решение, отлично от нуля как для Е-волн, так и для Н-волн. Волновая мода с минимальным κ называется *низшей волной* соответствующего типа.

Продольное и поперечное волновые числа для волноводных мод связаны соотношением

$$\omega^2 = c^2 (h^2 + \kappa^2). \quad (8.2.1)$$

При известной величине κ это соотношение определяет для моды *дисперсионную зависимость* $\omega(h)$. Согласно (8.2.1), эта зависимость является параболической. Видно, что частота ω не может принимать значений меньше того, которое соответствует нулевому продольному волновому числу ($h = 0$). Это минимальное значение частоты называется *критической частотой* волноводной моды:

$$\omega_{cr} = c\kappa.$$

При частоте меньше критической волна не может распространяться в волноводе. Действительно, перепишем (8.2.1) в виде

$$\omega^2 = c^2 h^2 + \omega_{cr}^2. \quad (8.2.2)$$

Если $\omega < \omega_{cr}$, то продольное волновое число становится мнимым:

$$h = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{cr}^2} = \frac{i}{c} \sqrt{\omega_{cr}^2 - \omega^2}.$$

Это означает, что электромагнитное поле уже не осциллирует в продольном направлении, а затухает как $\exp\left(-\frac{z}{c} \sqrt{\omega_{cr}^2 - \omega^2}\right)$ (разумеется, не теряя осцилляций во времени). При этом затухание волны связано не с ее поглощением (стенки волновода идеально проводящие), а с появлением обратной волны, то есть, с отражением.

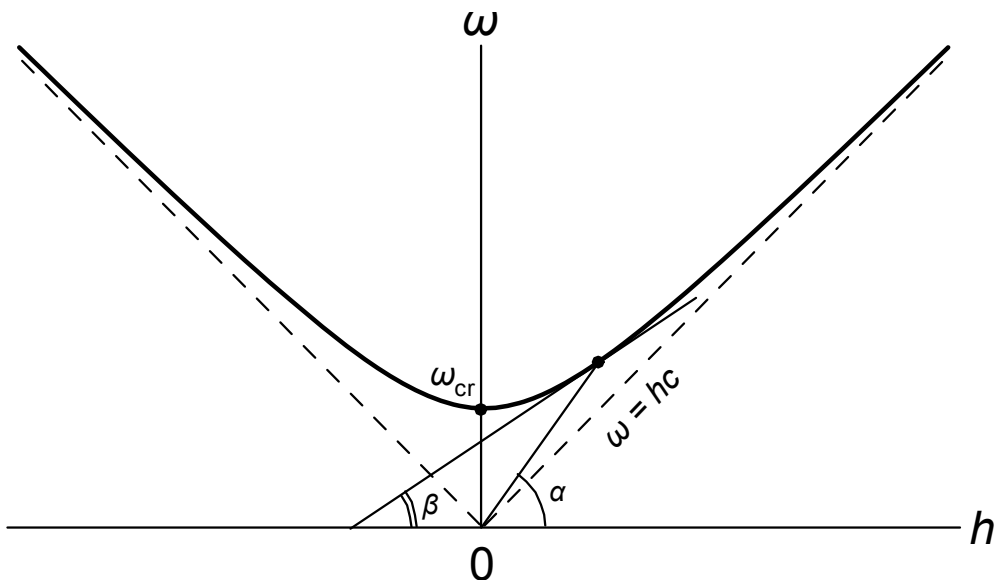


Рис. 8.2.1. Дисперсионная кривая волноводной моды и графический способ определения фазовой и волновой скоростей ($v_{ф} = \operatorname{tg} \alpha$, $v_{гв} = \operatorname{tg} \beta$). Ветви кривой при $h > 0$ и при $h < 0$ соответствуют двум волнам, бегущим в положительном и в отрицательном направлениях

В следующей лекции мы на двух примерах увидим, что поперечные волновые числа для каждой из мод обратно пропорциональны одному из характерных поперечных размеров L волновода:

$$\kappa \propto \frac{1}{L}$$

(например, для круглого волновода – его радиусу). Поэтому для каждой моды при заданной частоте можно говорить о критическом размере волновода. Сужая волновод, можно таким образом добиться отражения волны от более узкого участка (рис. 8.2.2). Отражатели на основе *запредельного сужения* не перекрывают всего просвета волновода и не препятствуют транспортировке в нем, к примеру, электронного пучка; в устройствах сильноточной СВЧ-электроники они находят широкое применение.

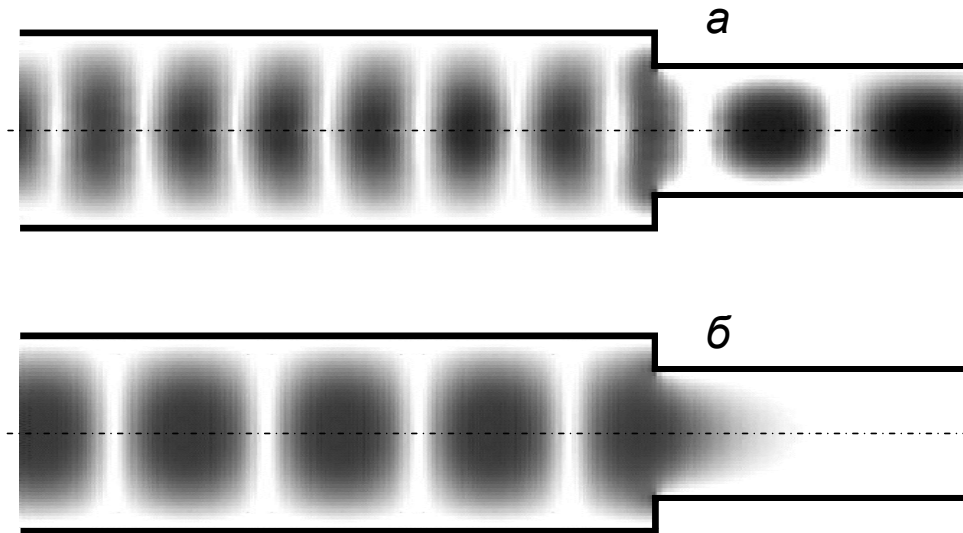


Рис. 8.2.2. Волна E_{01} в круглом волноводе с сужением. Радиус широкой части волновода 1.5 см, узкой части 1.0 см ($\omega_{cr} = 11.5$ ГГц). Частота волны: а – 13 ГГц, б – 10 ГГц. Градации серого цвета пропорциональны величине $|E_z|$. Расчет с помощью кода KARAT

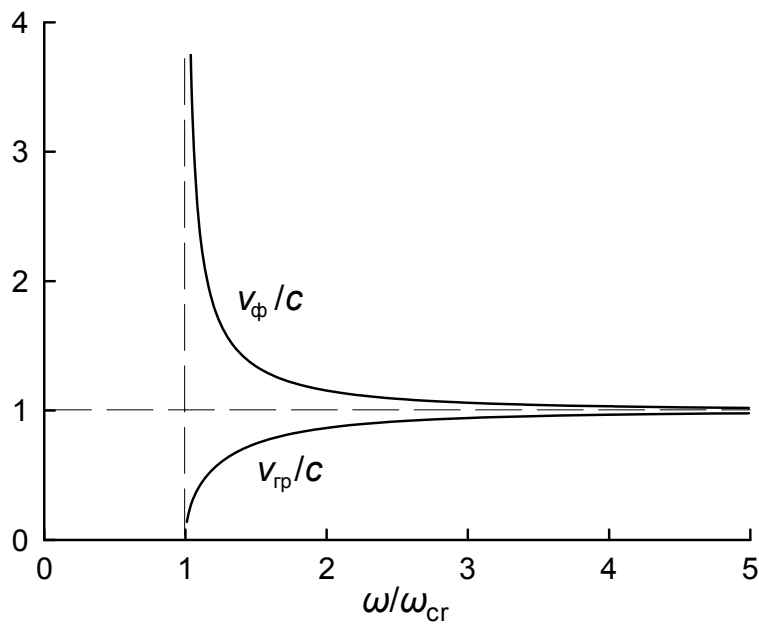


Рис. 8.2.3. Зависимость фазовой и групповой скоростей волны в однородном вакуумном волноводе от частоты

Из выражения (8.2.2) легко определить фазовую и групповую скорости волны. Фазовая скорость вдоль направления волновода

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = c \frac{k}{h} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_{cr}^2 / \omega^2}},$$

а групповая скорость

$$v_{\phi} = \frac{\partial \omega}{\partial h} = c \frac{h}{k} = c \sqrt{1 - \omega_{cr}^2 / \omega^2} .$$

Таким образом, при частотах вблизи критической фазовая скорость волны стремится к бесконечности, а групповая к нулю. С увеличением частоты обе эти величины стремятся с разных сторон к одному и тому же пределу, равному c . Видно, что величины фазовой и групповой скоростей связаны простым соотношением

$$v_{\phi} v_{gp} = c^2 .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое линия передачи? Назвать основные виды передающих линий.
2. Изобразить односвязную, двусвязную, трехсвязную области.
3. Почему в передающих линиях не могут распространяться однородные плоские волны? Дать определение неоднородной плоской волны.
4. Почему вектора $rot \mathbf{E}_{\perp}$ и $rot \mathbf{H}_{\perp}$ в случае неоднородной плоской волны являются чисто продольными?
5. Дать определение поперечного волнового числа.
6. Как связаны продольные компоненты полей в неоднородных плоских волнах с мембранными функциями?
7. Дать определения волн типа E и волн типа H, записать для них выражения компонент полей через мембранные функции.
8. Записать уравнение Гельмгольца с граничными условиями для волн электрического и магнитного типов.
9. В чем смысл задачи на собственные значения и собственные числа? Дать определение волновой моды.
10. Дать определение критической частоты волновой моды. Почему для волноводов с односвязным поперечным сечением эта величина никогда не равна нулю?
11. Записать дисперсионное соотношение для волноводной моды через компоненты волнового числа и критическую частоту. Изобразить дисперсионную кривую, показав графически величины фазовой и групповой скоростей.
12. Что такое запердельное сужение? Каково продольное распределение полей волны при частоте ниже критической?
13. Записать соотношение, связывающее величины фазовой и групповой скоростей в вакуумном волноводе.

ЛЕКЦИЯ 9 ВОЛНОВОДЫ

На основе решений уравнения Гельмгольца, полученного нами в предыдущей лекции, рассмотрим структуру и свойства электромагнитных волн в продольно-однородных вакуумных волноводах двух важнейших видов – прямоугольном и круглом.

9.1. Волновод прямоугольного сечения

Рассмотрим прямоугольный волновод (рис. 9.1.1) с поперечными размерами a (по x) и b (по y).

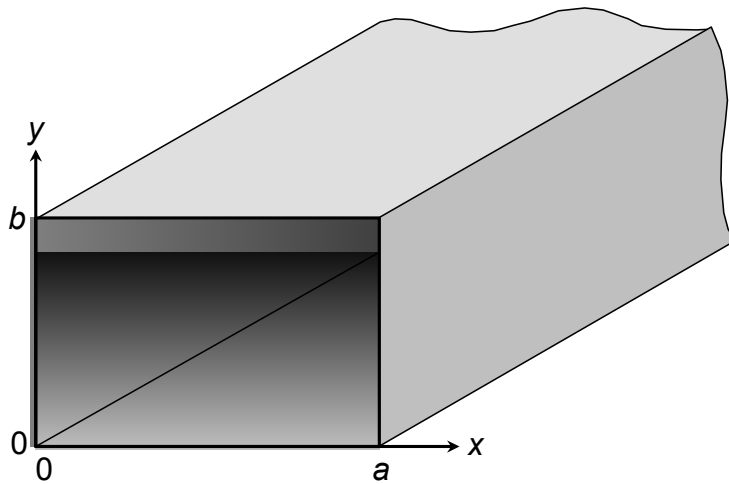


Рис. 9.1.1. Однородный волновод прямоугольного сечения

В декартовой системе координат уравнение Гельмгольца

$$(\Delta_{\perp} + \kappa^2)\Psi = 0$$

принимает вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa^2 \right) \Psi = 0. \quad (9.1.1)$$

Для решения этого уравнения воспользуемся методом факторизации. Представим искомую мембранную функцию в виде произведения двух сомножителей, каждый из которых зависит только от одной из поперечных координат:

$$\Psi(x, y) = X(x)Y(y).$$

Тогда уравнение (9.1.1) примет вид

$$X''Y + XY'' + XY\kappa^2 = 0,$$

где двойными штрихами обозначены вторые производные функций по своим аргументам: $X'' \equiv \frac{d^2X}{dx^2}$, $Y'' \equiv \frac{d^2Y}{dy^2}$. Разделив последнее уравнение на XY , получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\kappa^2.$$

Слагаемые в левой части зависят от различных независимых переменных x и y . В то же время, правая часть уравнения является константой. Это возможно лишь в том случае, когда константой является каждое из слагаемых в левой части. Поэтому обозначим

$$\frac{X''}{X} \equiv -\kappa_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} \equiv -\kappa_y^2, \quad \text{где } \kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \kappa^2.$$

Теперь уравнения по x и по y разделены:

$$X'' + \kappa_x^2 X = 0, \quad Y'' + \kappa_y^2 Y = 0.$$

Решения этих уравнений будем искать в виде:

$$X = Ae^{i\kappa_x x} + Be^{-i\kappa_x x}, \quad Y = Ce^{i\kappa_y y} + De^{-i\kappa_y y}. \quad (9.1.2)$$

Чтобы определить постоянные величины A , B , C и D , а также неизвестные нам пока собственные числа задачи κ_x и κ_y , воспользуемся граничными условиями. Эти условия различны для волн типа Е и волн типа Н.

Для волн Е-типа имеем условие на поверхности волновода $\Psi|_r = E_z|_r = 0$, которое распишем в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(0, y) = 0, \\ \Psi(a, y) = 0, \\ \Psi(x, 0) = 0, \\ \Psi(x, b) = 0, \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} X(0) = 0, \\ X(a) = 0, \\ Y(0) = 0, \\ Y(b) = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда, используя (9.1.2), имеем $B = -A$, $D = -C$, а также

$$e^{i\kappa_x a} - e^{-i\kappa_x a} = 0, \quad e^{i\kappa_y b} - e^{-i\kappa_y b} = 0$$

или, соответственно,

$$\sin(\kappa_x a) = 0, \quad \sin(\kappa_y b) = 0.$$

Корни последних двух уравнений определяют собственные числа задачи:

$$\kappa_x = m \frac{\pi}{a}, \quad \kappa_y = n \frac{\pi}{b}, \quad \text{здесь } m \text{ и } n \text{ — целые.}$$

Таким образом, обозначив $M = A C$, получаем мембранную функцию для Е-волн в прямоугольном волноводе:

$$\Psi = M \sin(\kappa_x x) \sin(\kappa_y y).$$

Очевидно, что для существования нетривиального (ненулевого) решения для волны Е-типа необходимо, чтобы ни одна из величин κ_x , κ_y не равнялась нулю.

Для волн Н-типа граничное условие на поверхности волновода дифференциальное: $\frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$. Распишем его в виде:

$$\begin{cases} \Psi'_x(0, y) = 0, & X'(0) = 0, \\ \Psi'_x(a, y) = 0, & X'(a) = 0, \\ \Psi'_y(x, 0) = 0, & \text{или } Y'(0) = 0, \\ \Psi'_y(x, b) = 0, & Y'(b) = 0. \end{cases}$$

Отсюда, используя (9.1.2), имеем $B = A$, $D = C$, а также

$$\sin(\kappa_x a) = 0, \quad \sin(\kappa_y b) = 0,$$

откуда, так же как и для Е-волн, получаем

$$\kappa_x = m \frac{\pi}{a}, \quad \kappa_y = n \frac{\pi}{b}, \quad \text{здесь } m \text{ и } n \text{ — целые.}$$

Таким образом, мембранная функция для Н-волн в прямоугольном волноводе

$$\Psi = M \cos(\kappa_x x) \cos(\kappa_y y).$$

Из последнего выражения мы видим, что формально нетривиальное решение для волны Н-типа возможно и в случае одновременного равенства нулю величин κ_x и κ_y . В этом случае мембранная функция просто равна константе. Однако физически этому не соответствует ни одна волна. Действительно, из (8.1.10) мы видим, что при $\kappa = 0$ равно

нулю продольное магнитное поле; с другой же стороны из (8.1.15) и (8.1.16) следует, что при постоянной Ψ равны нулю поперечные поля. Поэтому волны H_{00} в прямоугольном волноводе не существует.

Закон дисперсии для волн в прямоугольном волноводе с поперечными размерами a и b записывается в виде:

$$\omega^2 = h^2 c^2 + \kappa^2 c^2 = h^2 c^2 + (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) c^2 = h^2 c^2 + \left[\left(m \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(n \frac{\pi}{b} \right)^2 \right] c^2.$$

Минимальное значение частоты (критическая частота) соответствует нулевому продольному волновому числу:

$$\omega_{cr} = \min(\omega) = \pi c \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}.$$

Этой частоте соответствует критическая длина волны

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}.$$

Среди волн Е-типа низшей волной (имеющей минимальную критическую частоту и, соответственно, максимальную критическую длину волны) является волна E_{11} . Для нее

$$\lambda_{cr} [E_{11}] = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

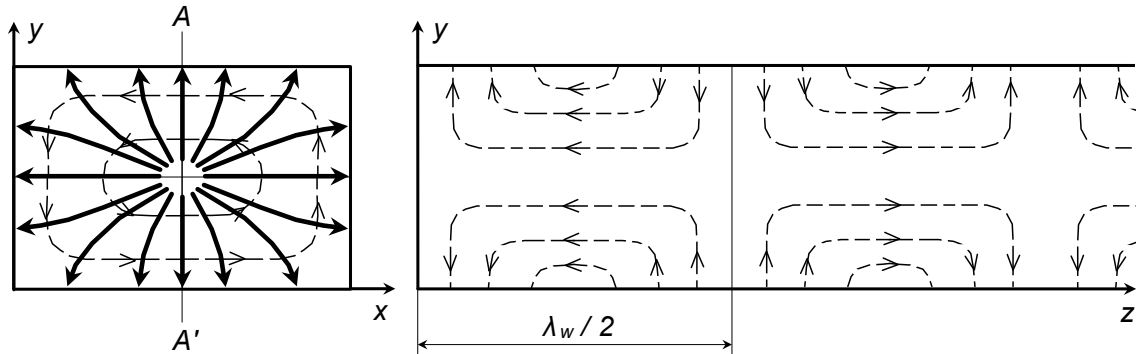


Рис. 9.1.2. Структура полей волны E_{11} в прямоугольном волноводе (электрическое поле показано сплошными, магнитное – прерывистыми линиями)

Для простейших магнитных волн имеем: $\lambda_{cr} [H_{01}] = 2b$, $\lambda_{cr} [H_{10}] = 2a$, $\lambda_{cr} [H_{11}] = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Заметим, что волна H_{11} имеет ту же критическую длину волны, что и волна E_{11} . Такое условие может вы-

полняться и для пар волн с некоторыми другими поперечными индексами. Волновые моды, имеющие одинаковую критическую частоту (и, значит, одинаковый закон дисперсии), но разную структуру полей, называются вырожденными по частоте. Такие волны невозможно различить в эксперименте, используя лишь частотные измерения.

Волна H_{01} (при $a \leq b$) или H_{10} (при $a \geq b$) называется основной волной прямоугольного волновода. Нетрудно убедиться, что она обладает самой низкой критической частотой среди всех волн – как электрических, так и магнитных (см. Задачу 7). При передаче электромагнитной энергии по прямоугольным волноводам в подавляющем большинстве случаев используется именно эта волна.

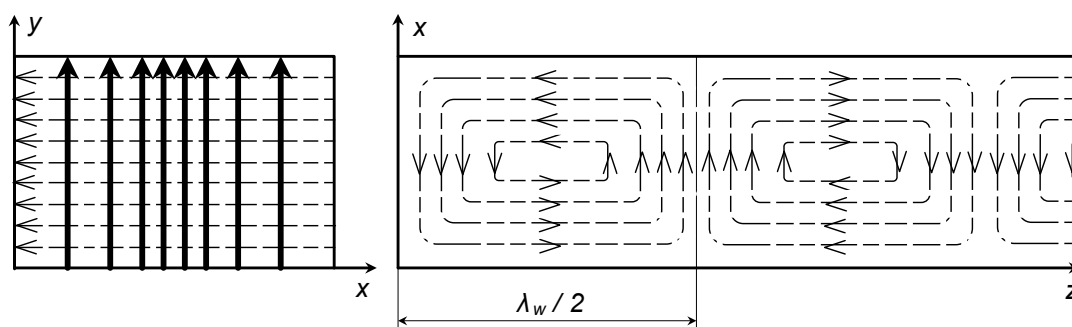


Рис. 9.1.3. Структура полей волны H_{10} в прямоугольном волноводе

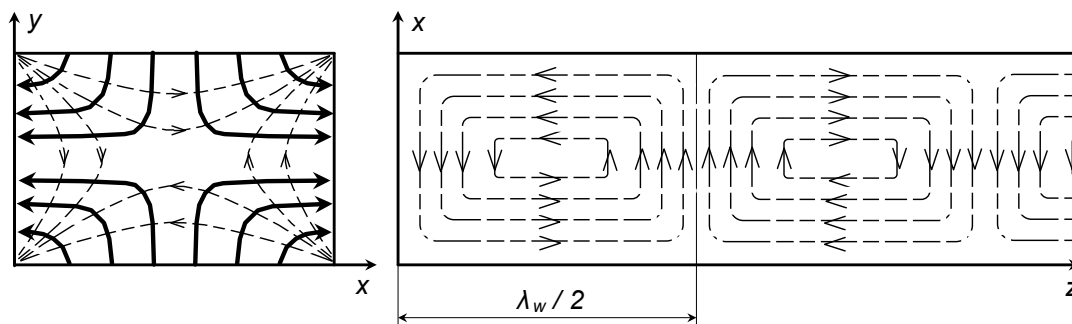


Рис. 9.1.4. Структура полей волны H_{11} в прямоугольном волноводе

Расчетные карты векторов поперечного электрического поля для некоторых мод прямоугольного волновода даны в Приложении 3. Они в количественном отношении более точно передают структуру полей, чем схематические рис. 9.1.2–9.1.4.

9.2. Волновод круглого сечения

Круглый волновод (рис. 9.2.1) естественно рассматривать в полярной системе координат (r, φ) . Пусть радиус волновода равен R_0 . Уравнение Гельмгольца принимает вид

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 \right) \Psi = 0.$$

Как и в предыдущем случае, действуем методом факторизации. Представим мембранную функцию в виде произведения

$$\Psi(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

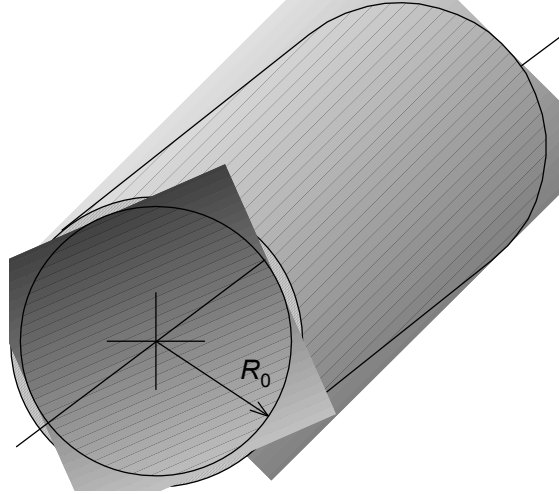


Рис. 9.2.1. Круглый волновод

Тогда имеем

$$R''\Phi + \frac{1}{r} R'\Phi + \frac{1}{r^2} R\Phi'' + \kappa^2 R\Phi = 0$$

или, после деления на $R\Phi$,

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \kappa^2 = 0.$$

Коль скоро это уравнение справедливо при любых r и φ , слагаемые в левой части, зависящие только от r или только от φ , должны быть константами. Обозначив

$$\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv -n^2,$$

приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \Phi'' + n^2\Phi = 0, \\ r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \kappa^2 r^2 - n^2 = 0. \end{cases}$$

Решение первого уравнения есть

$$\Phi = Ae^{in\varphi} + Be^{-in\varphi}.$$

Поскольку очевидна периодичность решения по полярному углу: $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, число n должно быть целым.

Второе уравнение системы перепишем в виде

$$r^2 R'' + rR' + (\kappa^2 r^2 - n^2)R = 0.$$

Оно называется уравнением Бесселя. Его решением является линейная комбинация функций

$$R = CJ_n(\kappa r) + DN_n(\kappa r),$$

где J_n – функция Бесселя (первого рода) порядка n , N_n – функция Неймана (иначе называемая функцией Бесселя второго рода) порядка n .

В отличие от функций Бесселя, которые конечны при любом значении аргумента, функции Неймана имеют особенность в начале координат. Поэтому они не могут быть использованы в решении нашей задачи: выбираем $D = 0$. Итак,

$$\Psi = J_n(\kappa r)(Ae^{in\varphi} + Be^{-in\varphi}).$$

Графики функций Бесселя низших целых порядков при вещественном аргументе изображены на рис. 9.2.2.

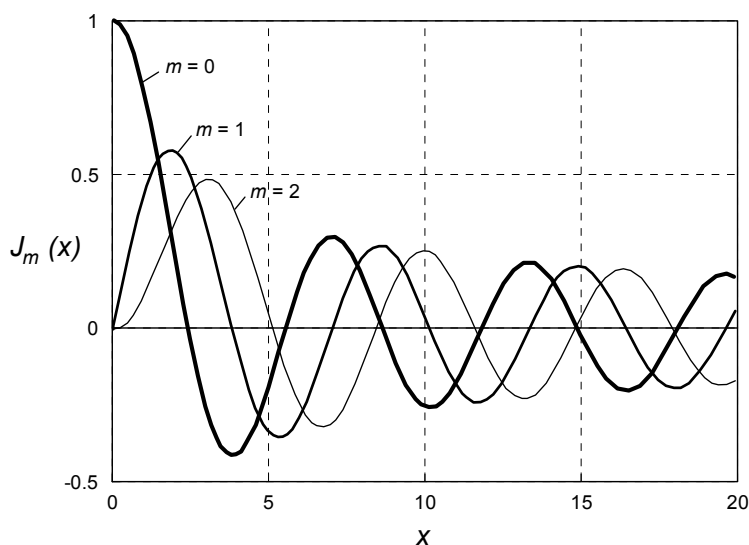


Рис. 9.2.2. Функции Бесселя вещественного аргумента

Собственное число задачи – радиальное волновое число κ – определим из граничного условия на поверхности волновода.

Для волн Е-типа имеем условие на радиусе волновода $\Psi(R_0, \varphi) = E_z(R_0, \varphi) = 0$, то есть $J_n(\kappa R_0) = 0$. Таким образом, величина κR_0 должна быть корнем функции Бесселя:

$$\kappa R_0 = v_{nm}.$$

Здесь n – порядок функции Бесселя, а m – порядковый номер корня. Итак, для Е-волн

$$\kappa_{nm}^{[E]} = \frac{v_{nm}}{R_0}.$$

Для волн Н-типа граничное условие является дифференциальным:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{R_0} = \left. \frac{\partial E_z}{\partial r} \right|_{R_0} = 0,$$

поэтому

$$\kappa_{nm}^{[H]} = \frac{\mu_{nm}}{R_0}.$$

Здесь μ_{nm} – величина m -го корня *производной* от функции Бесселя порядка n .

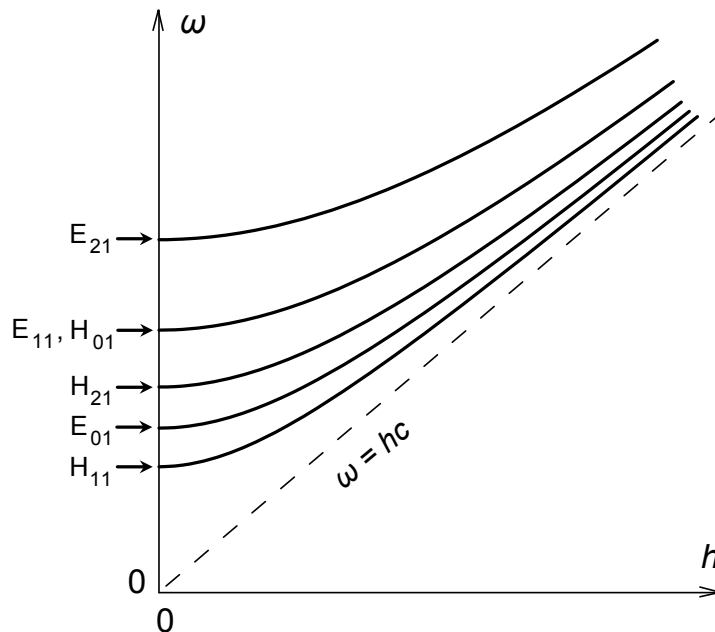


Рис. 9.2.3. Дисперсионные кривые пяти волн круглого волновода с наименьшими критическими частотами

Основной волной круглого волновода, имеющей наименьшую критическую частоту, является несимметричная волна H_{11} , для которой $\mu_{11} \approx 1.84$. Второй по критической частоте является симметричная волна E_{01} , для которой $\nu_{01} \approx 2.405$. Далее следует пара вырожденных волн E_{11} и H_{01} , для которых $\nu_{11} = \mu_{01} \approx 3.83$. Вырождение этих волн следует из того факта, что производная функции Бесселя нулевого порядка с точностью до знака совпадает с функцией Бесселя первого порядка: $J'_0(x) = -J_1(x)$. Для волны E_{21} имеем $\nu_{21} \approx 5.15$. Дисперсионные кривые перечисленных волн изображены на рис. 9.2.3.

Структура полей волн H_{11} , E_{01} , H_{01} и E_{11} схематически представлена на рис. 9.2.4–9.2.6.

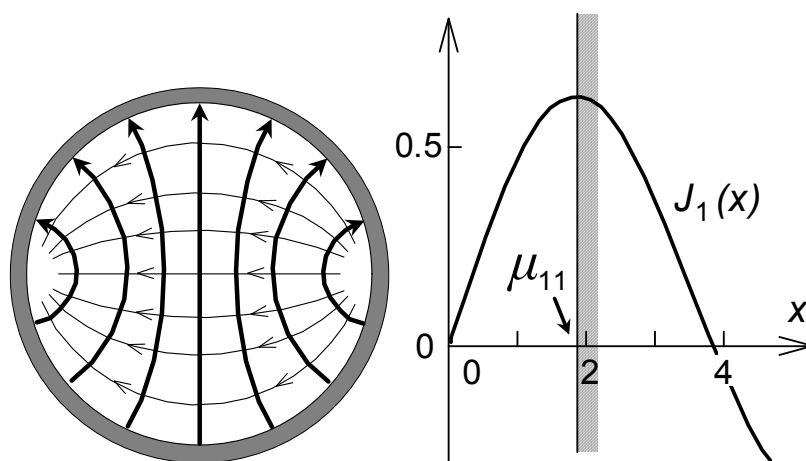


Рис. 9.2.4. Структура полей волны H_{11} круглого волновода. На рисунке справа граница штриховки соответствует положению стенки волновода

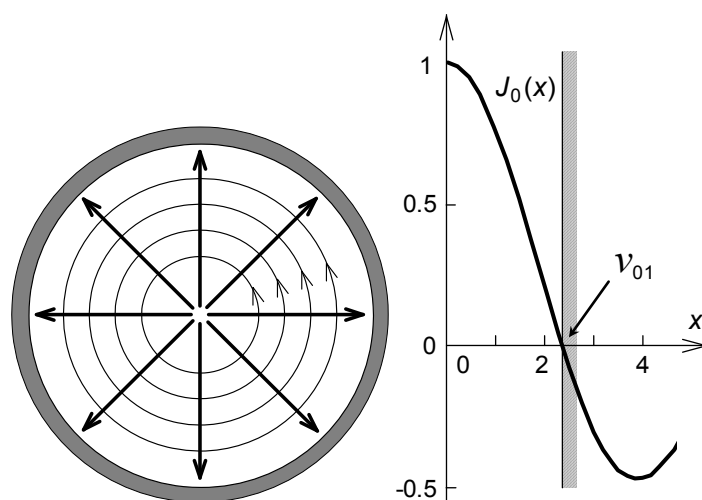


Рис. 9.2.5. Структура полей волны E_{01} круглого волновода

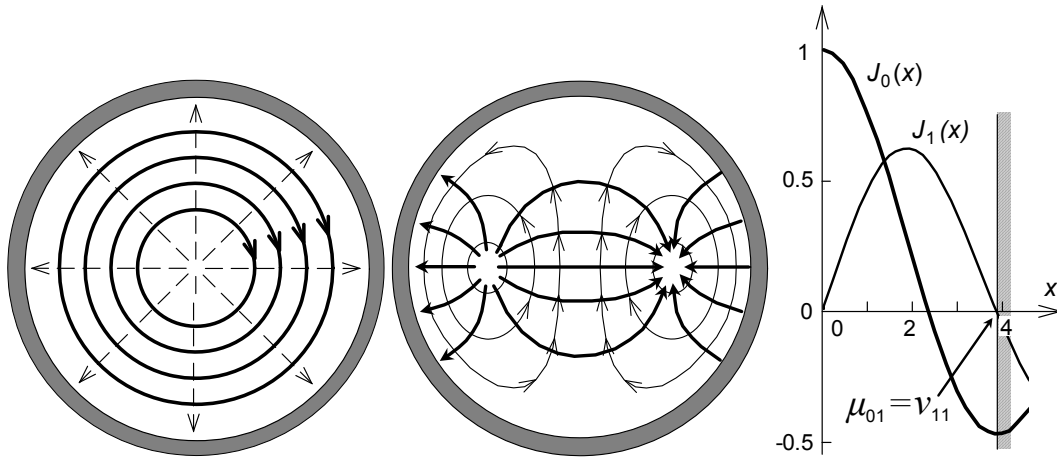


Рис. 9.2.6. Структура полей волн H_{01} и E_{11} круглого волновода

Расчетные карты векторов поперечного электрического поля для некоторых мод круглого волновода приведены в Приложении 3.

9.3. Концепция Бриллюэна

Структуру и дисперсионные свойства «волноводных» волн легче понять – по крайней мере, в случае волновода прямоугольного сечения – представив такие волны как результат сложения «обычных» (однородных) плоских волн, распространяющихся под углом к образующей волновода между его стенками, многократно от них отражаясь. Такая интерпретация лежит в основе *концепции Бриллюэна*. Проиллюстрируем эту концепцию на примере волны H_{10} в вакуумном волноводе прямоугольного сечения (рис. 9.3.1).

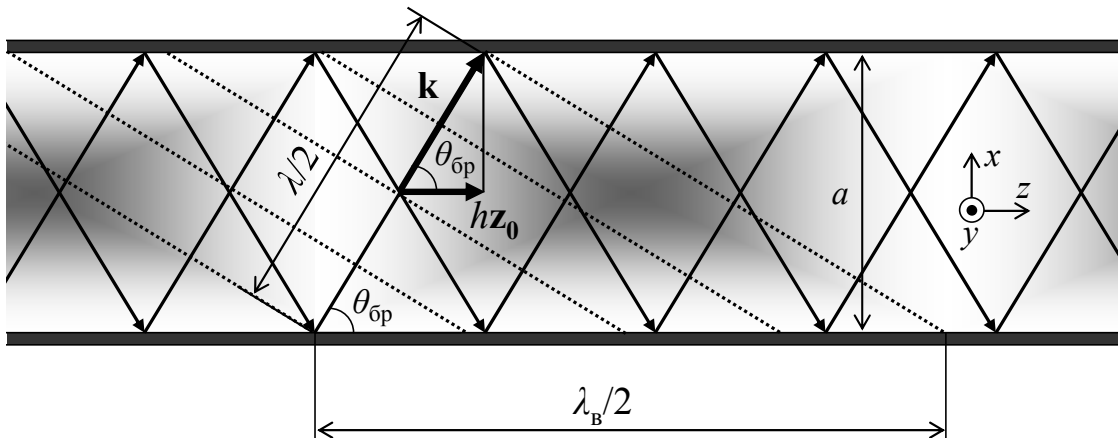


Рис. 9.3.1. Формирование неоднородной плоской волны с числом поперечных вариаций $m = 1$ в результате сложения двух плоских волн, распространяющихся с отражением между двумя проводящими плоскостями. Фазовые плоскости одной из этих волн, имеющей волновой вектор \mathbf{k} и длину волны λ , обозначены пунктиром

Пусть две плоские волны с частотой ω и волновыми векторами в плоскости рисунка (x - z) распространяются под некоторым углом θ к образующей волновода, испытывая отражения от его стенок. Поскольку волновод вакуумный, фазовая скорость волн в направлении их распространения равна c .

Пусть электрическое поле в волнах направлено по y . В этом случае граничные условия на стенках волновода, параллельных плоскости рисунка, не препятствуют однородности волн в направлении y . Поэтому вместо волновода конечной ширины (по y) будем рассматривать две проводящие плоскости, расположенные на расстоянии a . На этих плоскостях, в соответствии с граничным условием, суммарное электрическое поле падающих и отраженных плоских волн должно быть равно нулю.

Чтобы суммарное поле двух переотражающихся друг в друга волн обладало периодичностью в продольном направлении, необходимо, чтобы между точками отражения для каждой из волн укладывалось целое число ее полупериодов:

$$m \frac{\lambda}{2} = \frac{a}{\sin \theta_{op}}$$

(в примере, приведенном на рис. 9.3.1, $m = 1$). Поэтому, если частота волны и расстояние между плоскостями заданы, угол, под которым распространяется волна (носящий название *бриллюэновского угла*) при каждом m должен иметь вполне определенную величину

$$\theta = \theta_{op} = \arcsin \frac{2a}{m\lambda} = \arcsin \left(\frac{a\omega}{\pi mc} \right). \quad (9.3.1)$$

Складываясь, две плоские волны (которые также называют *бриллюэновскими*) образуют волну, бегущую в направлении z с фазовой скоростью

$$v_{\phi} = \frac{c}{\cos \theta_{op}}.$$

Поперечное распределение поля в этой волне неоднородно и представляет собой стоячую волну с числом вариаций, равным m .

При величине бриллюэновского угла, равной $\pi/2$ (бриллюэновские волны бегут поперек волновода) фазовая скорость неоднородной волны обращается в бесконечность. Частота ω в таком случае есть критическая частота:

$$\omega_{cr} = \pi m \frac{c}{a}, \quad \lambda_{cr} = \frac{2a}{m},$$

что соответствует выражениями полученным ранее формальным образом (п. 9.1) для волн H_{m0} .

В случае круглого волновода представление неоднородной плоской волны в виде суперпозиции плоских волн хотя и возможно, но затруднительно и не обладает такой же физической наглядностью, как в случае прямоугольного волновода. В качестве бриллюэновских волн для круглого волновода должны быть использованы цилиндрические волны.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем сущность метода факторизации применительно к решению уравнения Гельмгольца?
2. Записать выражение для мембранных функций E-волн и H-волн в прямоугольном волноводе.
3. Записать дисперсионное уравнение для волновой моды в прямоугольном волноводе с размерами a и b .
4. Какая из волн электрического типа в прямоугольном волноводе имеет максимальную критическую длину волны?
5. Какая волна называется основной волной прямоугольного волновода и почему?
6. Какие волновые моды называются вырожденными по частоте?
7. Почему в прямоугольном волноводе не существует волн E_{01} и H_{00} ?
8. Записать выражение для мембранных функций E-волн и H-волн круглого волновода и выражения для их радиальных волновых чисел.
9. Записать уравнение Бесселя.
10. Перечислить первые шесть волн круглого волновода в порядке увеличения критической частоты. Изобразить структуру полей этих волн. Какие из перечисленных волн образуют вырожденную пару?
11. Сформулировать концепцию Бриллюэна.

ЛЕКЦИЯ 10 ВОЛНЫ В КАБЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

10.1. ТЕМ-волна

Итак, мы выяснили, что в однородных волноводах с односвязным сечением – например, прямоугольных или круглых – могут распространяться только такие электромагнитные волны, у которых хотя бы одна из продольных компонент поля – или электрическая, или магнитная – отлична от нуля.

Существуют ли поперечно-ограниченные линии передачи, допускающие существование чисто поперечных электромагнитных волн? Какими свойствами эти волны обладают?

Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к соотношениям (8.1.11, 8.1.12), связывающим между собой комплексные амплитуды полей в неоднородной плоской волне в вакуумном случае. Выпишем эти соотношения еще раз:

$$\begin{cases} [\mathbf{z}_0 \times \nabla E_{\parallel}] + ih[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{\perp}] = ik \mathbf{H}_{\perp}, \\ [\mathbf{z}_0 \times \nabla H_{\parallel}] + ih[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_{\perp}] = -ik \mathbf{E}_{\perp}, \\ \text{rot } \mathbf{E}_{\perp} = -ikH_{\parallel} \mathbf{z}_0, \\ \text{rot } \mathbf{H}_{\perp} = ikE_{\parallel} \mathbf{z}_0. \end{cases}$$

Пусть теперь $E_{\parallel} = H_{\parallel} = 0$. Тогда приведенные уравнения упрощаются, приобретая вид:

$$\begin{cases} h[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{\perp}] = k \mathbf{H}_{\perp}, \end{cases} \quad (10.1.1)$$

$$\begin{cases} h[\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}_{\perp}] = -k \mathbf{E}_{\perp}, \end{cases} \quad (10.1.2)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_{\perp} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{H}_{\perp} = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений мы с необходимостью получаем, что продольное волновое число совпадает с полным волновым числом:

$$h = k.$$

С другой стороны, поскольку $\text{rot } \mathbf{E}_{\perp} = 0$, то электрическое поле может быть представлено через потенциал, который обозначим φ :

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\nabla_{\perp} \varphi.$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{E}_{\perp} = 0$, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta_{\perp} \varphi = 0.$$

Теперь магнитное поле определяется по выражению (10.1.1):

$$\mathbf{H}_{\perp} = [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}_{\perp}].$$

Мы видим, что магнитное поле равно по величине электрическому и ему ортогонально.

Поскольку поверхности проводников линии идеально проводящие, то граничное условие на них есть $\mathbf{E}_t = 0$. Следовательно, потенциал одинаков в пределах каждого проводника. Если при этом поперечное сечение линии односвязно, единственное решение уравнения Лапласа есть $\varphi = \text{const}$, что соответствует нулевому полю. Если же поперечное сечение линии включает несколько проводников (многосвязно), то ненулевое решение для поля возможно, если различаются потенциалы хотя бы двух проводников.

Заметим, что в полученных уравнениях для полей никак не присутствует частота. Таким образом, поперечная структура полей волны не зависит от частоты и является такой же, как в статическом случае. В продольном же направлении имеем бегущие волны: $\mathbf{E}, \mathbf{H} \propto e^{i(\omega t - kz)}$.

Чисто поперечные волны в передающих линиях называют ТЕМ-волнами (от англ. *transverse electrical and magnetic*). ТЕМ-волны распространяются при любых частотах начиная с нулевой. Понятие критической частоты для этих волн отсутствует. Условие $h = k$ означает, что волноводная длина волны такая же, как и в открытом пространстве при той же частоте⁷. Фазовая скорость ТЕМ-волн по величине совпадает с групповой скоростью и равна c . Таким образом, ТЕМ-волны в вакуумных линиях не обладают дисперсией (но она может появиться, если линия заполнена средой с соответствующими диэлектрическими и магнитными свойствами).

Поскольку электрическое поле в ТЕМ-волне потенциально, то для нее можно ввести понятие напряжения, как для переменного тока. Для

⁷ ТЕМ-волнами, кроме волн в кабельных линиях, иногда называют и электромагнитные волны в открытом пространстве, имея в виду их поперечный характер. Вместе с тем, это два различных физических объекта. Действительно, ТЕМ-волны в линиях обладают потенциальным электрическим полем, а волны в открытом пространстве – вихревым.

линии с двумя проводниками напряжение есть интеграл от электрического поля вдоль любой кривой, начинающейся на одном проводнике и оканчивающейся на другом. Иначе, это просто разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ этих двух проводников.

Зная магнитное поле, можно определить и ток, протекающий по каждому из проводников:

$$I = -\frac{c}{4\pi} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}_{\perp} d\mathbf{l}.$$

Интеграл здесь берется по внешнему контуру проводника.

Линии передачи с многосвязным сечением еще называют кабельными линиями. В подавляющем большинстве случаев используют кабельные линии с двумя проводниками. Для таких линий вводят величину волнового сопротивления

$$\rho = \frac{U}{I},$$

где величины напряжения и тока определены, как сказано выше.

Рассмотрим два наиболее часто используемые кабельные линии: коаксиальную и полосковую.

10.2. Коаксиальная линия

Пусть внешний и внутренний проводники коаксиальной линии имеют радиусы, соответственно, R_2 и R_1 . Внешний проводник считаем заземленным: $\varphi(R_2) = \varphi_2 = 0$, потенциал внутреннего проводника $\varphi(R_1) = \varphi_1 = U$. Таким образом, граничные условия осесимметричны.

Уравнение Лапласа в полярных координатах при условии симметрии по углу имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0.$$

Решение этого уравнения есть $\varphi = C_1 \ln r + C_2$. Учитывая граничные условия, имеем $C_2 = -C_1 \ln R_2$, $C_1 = U / \ln(R_1/R_2)$, так что

$$\varphi(r) = U \frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Электрическое поле представлено только радиальной компонентой:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{U}{r \ln(R_2/R_1)}.$$

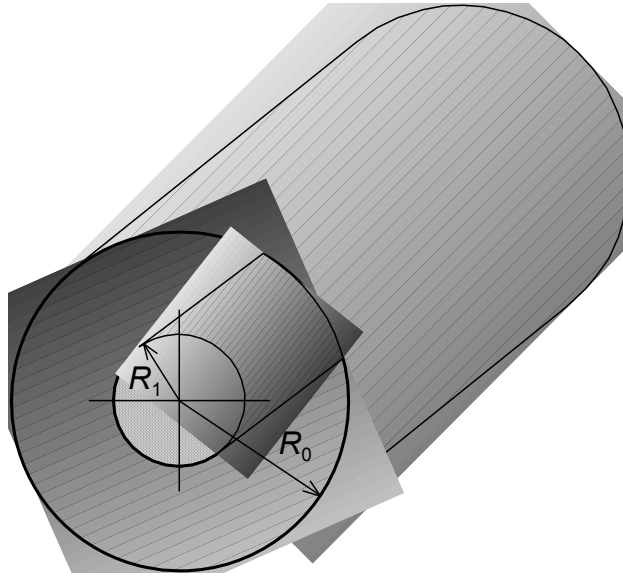


Рис. 10.2.1. Коаксиальная линия

Магнитное поле, в свою очередь, имеет только азимутальную компоненту:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{z}_0 \times \hat{\mathbf{e}}_r E_r] = \hat{\mathbf{e}}_\varphi E_r = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \frac{U}{r \ln(R_2/R_1)}.$$

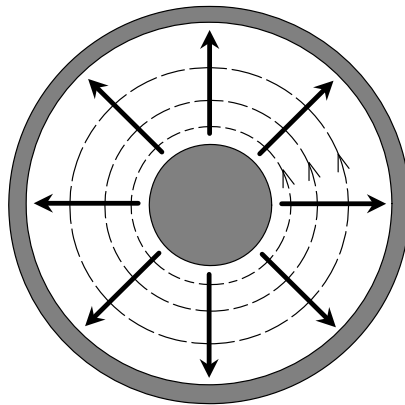


Рис. 10.2.2. Поля в коаксиальной линии

Ток, протекающий по внутреннему проводнику линии, равен

$$I = -\frac{c}{4\pi} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}_\perp \cdot d\mathbf{l} = \frac{c}{4\pi} \frac{U}{R_1 \ln(R_2/R_1)} 2\pi R_1 = \frac{cU}{2 \ln(R_2/R_1)}.$$

Отсюда получаем выражение для волнового сопротивления вакуумной коаксиальной линии:

$$\rho_{\text{коакс}} = \frac{2}{c} \ln(R_2/R_1).$$

Если линия заполнена средой с проницаемостями ϵ и μ , то $H_\varphi = \sqrt{\epsilon/\mu} E_r$ и

$$\rho_{\text{коакс}} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln(R_2/R_1).$$

В системе единиц СИ волновое сопротивление коаксиальной линии выражается как

$$\rho_{\text{коакс}} [\text{Ом}] = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln(R_2/R_1).$$

Поскольку ТЕМ-волна распространяется при любых частотах, ее называют основной волной коаксиальной линии. Кроме нее в коаксиальной линии, как и в обычных волноводах, могут существовать волны типа Е и типа Н. Поскольку они имеют критическую частоту, эти волны для коаксиальной линий называют волнами высших типов.

10.3. Полосковая линия

Полосковая линия – это линия, образованная двумя параллельными металлическими лентами, расстояние между которыми много меньше их ширины: $d \ll a$. При этом условии поле в основном сосредоточено в зазоре между лентами. В этом случае можно также пренебречь неоднородностью электрического поля на краях линии, считая, что поле между проводниками зависит только от координаты y .

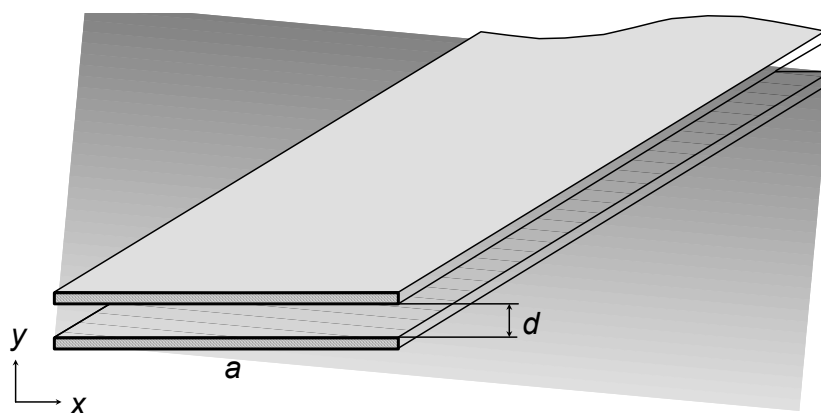


Рис. 10.3.1

Уравнение Лапласа в этом случае имеет вид $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$. Граничные условия определим в виде $\varphi(0) = 0$, $\varphi(d) = U$. Решение уравнения Лапласа есть

$$\varphi(y) = C_1 y + C_2.$$

С учетом граничных условий имеем $C_2 = 0$, $C_1 = U/d$, так что

$$\varphi(x) = U \frac{y}{d}.$$

Отсюда электрическое поле

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{U}{d}.$$

Магнитное поле в линии

$$\mathbf{H} = [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{y}_0 E_x] = -\mathbf{x}_0 E_x = \frac{U}{d} \mathbf{x}_0.$$

Ток, протекающий по проводнику, для которого $y = 0$, равен

$$I = -\frac{c}{4\pi} \oint_{\Gamma} \mathbf{H}_{\perp} d\mathbf{l} = \frac{c}{4\pi} U \frac{a}{d}.$$

Отсюда получаем выражение для волнового сопротивления вакуумной полосковой линии:

$$\rho_{\text{полоск}} = \frac{4\pi d}{c a}.$$

Если зазор между проводниками линии заполнен средой, то волновое сопротивление линии есть

$$\rho_{\text{полоск}} = \frac{4\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{d}{a}.$$

В системе единиц СИ последнее выражение приобретает вид

$$\rho_{\text{полоск}} [\text{Ом}] = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{d}{a}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Записать выражение для электрического поля в ТЕМ-волне. Как в этой волне связаны между собой поперечные компоненты полей? Продольные компоненты?
2. Почему ТЕМ-волны не могут существовать в прямоугольном или круглом волноводах?
3. Записать величину критической частоты для волны ТЕМ-типа.
4. Дать определение волнового сопротивления кабельной линии.
5. Какова структура полей ТЕМ-волны в коаксиальной линии? Записать выражение для электрического и для магнитного поля.
6. Что называется полосковой линией?
7. Записать выражения для волновых сопротивлений коаксиальной и полосковой линий в системах единиц СГС и СИ.

ЛЕКЦИЯ 11

ПОТОК ЭНЕРГИИ И ПОТЕРИ В ВОЛНОВОДАХ

11.1. Поток энергии через волновод

Пусть в вакуумном волноводе, направленном по z , существует электромагнитная волна Е- или Н-типа. Плотность потока энергии, связанного с этой волной, определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)].$$

Полный поток энергии, переносимый волной через поперечное сечение волновода, равен

$$q_z = \int_{S_{\perp}} \mathbf{S} d\mathbf{f}_{\perp} = \int_{S_{\perp}} S_z df_{\perp}.$$

Очевидно, что в продольную компоненту вектора Пойнтинга дают вклад только поперечные по отношению к \mathbf{z}_0 множители в векторном

произведении: $\mathbf{S}_z = z_0 S_z = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{H}_{\perp}]$.

Поля \mathbf{E} и \mathbf{H} осциллируют с частотой ω , причем, как видно из выражений (8.1.13–8.1.16), сдвиг фаз между колебаниями различных компонент электрического и магнитного поля кратен π . Поэтому плотность потока S_z будет быстропеременной функцией, изменяющейся во времени по закону $S_z = S_{\max} \cos^2 \omega t$, где S_{\max} – амплитудное значение. То же самое справедливо и для всего потока q_z .

Практический интерес представляет величина потока энергии, усредненная за период колебаний $T = 2\pi/\omega$. Обозначая усреднение угловыми скобками, имеем

$$\langle S_z \rangle_T = S_{\max} \langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2} S_{\max}, \quad \langle q_z \rangle_T = \frac{1}{2} q_{\max}$$

– средняя величина потока энергии в волне составляет половину от максимального мгновенного значения.

Получим выражения для усредненного потока энергии в Е- и Н-волнах через величины полей. Перед этим заметим, что в соответствии с (8.1.1)

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle_T &= \frac{c}{4\pi} \left\langle \left[\operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\omega t - hz)} \right\} \mathbf{C} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\omega t - hz)} \right\} \right] \right\rangle_T = \\
&= \frac{c}{16\pi} \left\langle \left[\left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\omega t - hz)} + \text{к.с.} \right\} \mathbf{C} \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\omega t - hz)} + \text{к.с.} \right\} \right] \right\rangle_T = \\
&= \frac{c}{16\pi} \left\{ \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}_\perp) \right] + \left[\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_\perp) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_\perp) \right] \right\} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}_\perp) \right].
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что при усреднении по периоду колебаний быстро осциллирующие члены, содержащие $e^{2i\omega t}$ и $e^{-2i\omega t}$, не дают вклада и могут быть опущены. Итак, опуская аргумент у комплексных амплитуд, запишем:

$$\langle \mathbf{S}_z \rangle_T = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^* \right].$$

Используя выражения для поперечных компонент полей (8.1.13–8.1.16), получим для E-волн

$$\langle \mathbf{S}_z \rangle_T = \frac{c}{8\pi} h k \operatorname{Re} \left[\nabla_\perp \Psi_E \times \left[\mathbf{z}_0 \times \nabla_\perp \Psi_E^* \right] \right] = \frac{c}{8\pi} h k |\nabla_\perp \Psi_E|^2 \mathbf{z}_0.$$

Такой же результат, с точностью до замены $\Psi_E \rightarrow \Psi_H$, получается и для H-волн. Итак, для потока энергии, опуская индекс типа волны, запишем в общем виде

$$q_z = \frac{c}{8\pi} h k \int_{S_\perp} |\nabla_\perp \Psi|^2 dS. \quad (11.1.1)$$

Это выражение можно еще более упростить, воспользовавшись второй формулой Грина в частной формулировке

$$\int_S |\nabla_\perp \Psi|^2 dS = \oint_\Gamma \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} dl - \int_S \Psi \Delta_\perp \Psi^* dS.$$

В силу граничных условий (8.1.18) либо (8.1.19), в контурном интеграле всегда один из сомножителей равен нулю. Учитывая, что $\Delta_\perp \Psi = -\kappa^2 \Psi$, получаем

$$\int_S |\nabla_\perp \Psi|^2 dS = \kappa^2 \int_S |\Psi|^2 dS, \quad (11.1.2)$$

с учетом чего выражение (11.1.1) переписется в виде

$$q_z = \frac{c}{8\pi} h k \kappa^2 \int_{S_\perp} |\Psi|^2 dS. \quad (11.1.3)$$

Чтобы придать полученному выражению наглядный смысл, найдем усредненную за период T энергию электромагнитного поля волны, приходящуюся на единицу длины волновода. Ее величина есть

$$W' \equiv \left\langle \frac{dW}{dz} \right\rangle_T = \frac{1}{8\pi} \int_{S_{\perp}} \langle E^2 + H^2 \rangle_T dS.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle_T &= \left\langle \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\perp}) e^{i(\omega t - hz)} \right\} \right\rangle_T = \frac{1}{4} \left\langle \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\perp}) e^{i(\omega t - hz)} + \text{к.с.} \right\}^2 \right\rangle_T = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\perp}) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_{\perp})_T = \frac{1}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r}_{\perp})|^2 \end{aligned}$$

и точно так же для магнитного поля, запишем

$$W' = \frac{1}{16\pi} \int_{S_{\perp}} \left(|\mathbf{E}_{\perp}|^2 + |\mathbf{H}_{\perp}|^2 + |E_{\parallel}|^2 + |H_{\parallel}|^2 \right) dS.$$

Для волн Е-типа имеем

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{16\pi} \int_{S_{\perp}} \left(|\mathbf{E}_{\perp}|^2 + |\mathbf{H}_{\perp}|^2 + |E_{\parallel}|^2 \right) dS = \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_{S_{\perp}} \left(h^2 |\nabla_{\perp} \Psi_E|^2 + k^2 |\nabla_{\perp} \Psi_E|^2 + \kappa^4 |\Psi_E|^2 \right) dS \end{aligned}$$

или, с учетом (11.1.2),

$$W' = \frac{1}{16\pi} \int_{S_{\perp}} \left(h^2 \kappa^2 |\Psi_E|^2 + k^2 \kappa^2 |\Psi_E|^2 + \kappa^4 |\Psi_E|^2 \right) dS = \frac{\kappa^2 k^2}{8\pi} \int_{S_{\perp}} |\Psi_E|^2 dS.$$

Такой же результат, с точностью до замены $\Psi_E \rightarrow \Psi_H$, получается и для Н-волн.

Возвращаясь к выражению (11.1.3) для усредненного потока энергии, выделяя в нем групповую скорость волны $v_{gp} = c h/k$ и сравнивая получившуюся формулу с выражением для W' , мы видим, что

$$q_z = v_{gp} W'.$$

Таким образом, можно сказать, что энергия в электромагнитной волне переносится со скоростью, равной групповой скорости волны.

11.2. Затухание волн в волноводах

До сих пор мы рассматривали волноводы с идеально проводящими стенками. Очевидно, что электромагнитные волны в таких волноводах распространяются без затухания⁸.

При конечной проводимости материала волновода часть электромагнитной энергии теряется, нагревая стенку волновода. Поэтому волна по мере своего распространения вдоль волновода затухает.

Проанализируем характер затухания волны. Пусть в волноводе распространяется единственная волновая мода с некоторой заданной структурой. Затухание волны в продольном направлении будем предполагать слабым, так что поперечная структура волны, несмотря на ее затухание, остается неизменной.

Пусть поток мощности через поперечное сечение волновода с координатой z составляет величину q_z . (рис. 11.2.1). Обозначим поток мощности электромагнитного поля в стенку волновода на единицу его длины величиной q_n . Тогда на интервале Δz произойдет следующие уменьшение потока переносимой мощности:

$$q(z + \Delta z) - q(z) \approx -q_n(z) \Delta z .$$

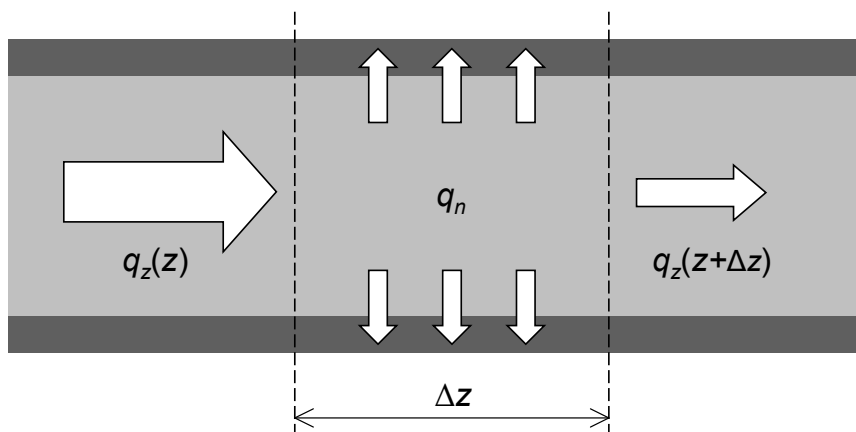


Рис. 11.2.1

Устремляя Δz к нулю, запишем

$$\frac{dq_z}{dz} = -q_n . \quad (11.2.1)$$

⁸ Во всяком случае, когда волновод однороден в продольном направлении. Затухание волн – являющееся, однако, результатом их отражения, а не поглощения – возможно в неоднородных, периодических волноводах (Лекция 12).

Мы знаем (см. п. 5.3), что плотность потока электромагнитной мощности в проводник q_n пропорциональна величине $|H_t|^2$. Плотность потока мощности вдоль волновода q_z пропорциональна, в зависимости от типа волны, величине $|E_z|^2$ или $|H_z|^2$. Если поперечная структура волны фиксирована, то пропорция между названными величинами при изменении амплитуды волны сохраняется. Поэтому положим, что $q_n = \alpha q_z$, где α – постоянная величина. Тогда уравнение (11.2.1) примет вид

$$\frac{dq_z}{dz} = -\alpha q_z.$$

Решение этого уравнения является экспоненциально затухающим:

$$q_z(z) = q_z(0)e^{-\alpha z}.$$

Величина α называется декрементом затухания волны по мощности. Амплитуды электрического и магнитного полей в волне затухают с декрементом вдвое меньшим, чем α : $E, H \propto e^{-\frac{\alpha}{2}z}$.

Используя выражения для плотности потока мощности вдоль волновода и плотности потока мощности в его стенку, определим декремент затухания волны по мощности:

$$\alpha = \frac{\oint S_n dl}{\int_{S_\perp} S_z ds}.$$

Поток энергии в стенки волновода есть

$$\mathbf{S}_n = \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*] = \frac{c\xi'}{8\pi} |\mathbf{H}_t|^2 \mathbf{n}, \quad (11.2.2)$$

где $\xi' = \sqrt{\frac{\mu\kappa c}{8\pi\sigma}} = \delta k\mu/2$, δ – толщина скин-слоя. Тогда для волн Е-типа получаем

$$\alpha^{[E]} = \frac{1}{2} \frac{\delta\mu\kappa^2}{h} \frac{\oint |\mathbf{H}_t|^2 dl}{\int_{S_\perp} |\mathbf{E}_z|^2 ds},$$

а для волн Н-типа

$$\alpha^{[H]} = \frac{1}{2} \frac{\delta \mu \kappa^2}{h} \frac{\oint_{\Gamma} |\mathbf{H}_t|^2 dl}{\int_{S_{\perp}} |\mathbf{H}_z|^2 ds}.$$

Сделаем оценку затухания для волн различных типов на примере волновода квадратного сечения со стороной L_{\perp} .

Для E -волн вклад в касательную к поверхности волновода составляющую магнитного поля дает только его поперечная компонента: $\mathbf{H}_t \sim \mathbf{H}_{\perp}$, причем последнюю величину, согласно (8.1.14), можно оценить как $\mathbf{H}_{\perp} \approx \frac{k}{\kappa^2} \nabla_{\perp} E_{\parallel} \approx \frac{k}{\kappa} E_{\parallel}$. Поэтому

$$\oint_{\Gamma} |\mathbf{H}_t|^2 dl \sim 4L_{\perp} |\mathbf{H}_{\perp}|^2 \approx 4 \frac{k^2}{\kappa^2} L_{\perp} |E_{\parallel}|^2.$$

Приближенно заменив $\int_{S_{\perp}} |E_{\parallel}|^2 dS \approx L_{\perp}^2 E_{\parallel}^2$, получаем

$$\alpha^{[E]} \sim \frac{\delta}{L_{\perp}} \frac{k^2}{h} \propto \frac{k^2}{k^{1/2} \sqrt{k^2 - \kappa^2}}.$$

Вблизи критической частоты $h \ll \kappa$ и $\kappa \approx k$, так что

$$\alpha \propto \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{cr}^2}}$$

– декремент затухания обращается в бесконечность при приближении частоты к критической. При больших частотах $h \gg \kappa$ и $h \approx k$, поэтому

$$\alpha \propto \sqrt{\omega}.$$

Для H -волн вклад в касательную к поверхности волновода составляющую магнитного поля, кроме поперечной, дает и продольная компонента поля:

$$H_t \approx \sqrt{|\mathbf{H}_{\perp}|^2 + |H_{\parallel}|^2} \approx H_{\parallel} (1 + h^2 / \kappa^2)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\alpha^{[H]} \sim \frac{\delta}{L_{\perp}} \frac{\kappa^2}{h} (1 + h^2 / \kappa^2) \approx \frac{\delta}{L_{\perp}} \frac{k^2}{h}$$

– результат совпадает с полученным выше для Е-волн.

Интересное исключение из этого общего правила составляют симметричные магнитные волны H_{0m} в круглом волноводе, для которых

$$H_\varphi = -i \frac{h}{\kappa^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_\parallel}{\partial \varphi} = 0. \text{ Для таких волн } \mathbf{H}_t = \mathbf{H}_\parallel \text{ и } \oint_r |\mathbf{H}_t|^2 dl \sim 4L_\perp |\mathbf{H}_\parallel|^2,$$

поэтому

$$\alpha^{[H_{0m}]} \sim \frac{\delta}{L_\perp} \frac{\kappa^2}{h}.$$

Вблизи критической частоты декремент затухания подчиняется общему

правилу: $\alpha^{[H_{0m}]} \propto \frac{1}{h} \propto \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{cr}^2}}$. Однако при больших частотах декре-

мент затухания симметричных Н-волн уменьшается по закону

$$\alpha^{[H_{0m}]} \propto \omega^{-3/2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Во сколько раз усредненная за период колебания величина потока мощности через волновод отличается от амплитудного неусредненного значения? Как соотносится между собой частота колебаний потока мощности и частота волны?
2. Записать величину вектора Пойнтинга для гармонических полей с известными комплексными амплитудами, усредненную за период колебания.
3. Какая физическая величина играет роль коэффициента пропорциональности между погонной величиной энергии электромагнитного поля и потоком энергии, создаваемым волной в волноводе?
4. Почему поток энергии волны и мощность потерь за счет поглощения волны в стенках прямо пропорциональны друг другу?
5. Дать определение декремента затухания волны. От чего зависят декременты резистивного затухания для волн типа Е и волн типа Н?
6. Как зависят декременты резистивного затухания волн от частоты? Какие волны составляют исключение из общего правила и почему?

ЛЕКЦИЯ 12

ЗАМЕДЛЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

12.1. Применения замедленных волн

Электромагнитная волна называется замедленной в том случае, если ее величина ее фазовой скорости меньше c – скорости света в вакууме.

Необходимость в замедленных волнах возникает в первую очередь в генераторах СВЧ-колебаний с бегущими волнами и в линейных ускорителях заряженных частиц. В этих устройствах поток заряженных частиц на большом протяжении взаимодействует с бегущей электромагнитной волной. В СВЧ-генераторе заряженные частицы тормозятся полем генерируемой волны и их кинетическая энергия переходит в энергию электромагнитного поля. В ускорителе, напротив, энергия поля электромагнитной волны переходит в кинетическую энергию ускоряемых частиц.

В обоих случаях в основе эффективного энергообмена между заряженными частицами и волной лежит *принцип фазового синхронизма*. Проиллюстрируем его на примере движения единственной заряженной частицы – электрона – в поле электромагнитной волны, распространяющейся в направлении z . При этом считаем, что частица совершает только продольное движение⁹ (например, за счет присутствия сильного продольного магнитного поля). С другой стороны, считаем, что у электромагнитной волны имеется отличная от нуля z -компонента электрического поля, влияющая на продольное движение частиц.

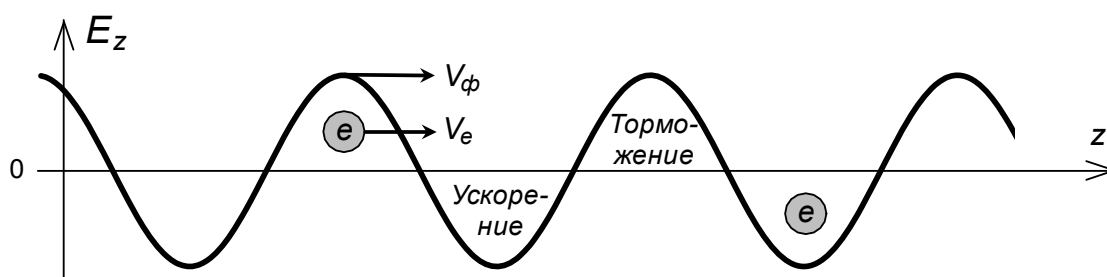


Рис. 12.1.1

Пусть требуется ускорить заряженную частицу. Для того, чтобы ускорение происходило наиболее эффективно, необходимо поместить частицу в ускоряющую фазу поля (для электрона – положительную полу-волну) и создать такие условия, чтобы она оставалась в этой фазе макси-

⁹ При этом условии фазовый синхронизм носит название черенковского.

мально долго, двигаясь синхронно с волной. Очевидно, что для этого скорость движения частицы должна совпадать с фазовой скоростью волны. В противном случае частица будет отставать от волны либо, наоборот, обгонять ее, при этом переходя из ускоряющей полуволны в тормозящую.

Аналогично, для генерации (усиления) электромагнитной волны необходимо, чтобы заряженные частицы длительное время находились в тормозящих фазах поля волны¹⁰.

Поскольку скорость заряженных частиц не может превышать скорости света в вакууме c , то для осуществления синхронизма между частицами и электромагнитной волной фазовая скорость волны также должна быть меньше c . Вместе с тем, мы убедились в том, что в однородных вакуумных волноводах фазовая скорость волн всегда превышает c . Поэтому такие волноводы непригодны для использования в качестве пространства взаимодействия СВЧ-генераторов с прямолинейными электронными пучками или линейных ускорителей – во всяком случае, при слаборелятивистских энергиях электронов, когда отличие их скорости от c значительно. Для получения бегущих волн с фазовой скоростью $v_{\text{ф}} < c$ используют специальные волноведущие структуры, называемые замедляющими системами.

12.2. Способы замедления электромагнитных волн

Простейшую возможность для замедления электромагнитной волны дает использование преломляющей среды. Как мы знаем (см. п. 6.2), в безграничной среде с проницаемостями ε и μ электромагнитная волна распространяется со скоростью, равной $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Диэлектрическое заполнение позволяет замедлить и волну в волноводе. Действительно, если диэлектрик заполняет волновод целиком, то продольное волновое число волны есть

$$h = \sqrt{k^2 \varepsilon - \kappa^2} \quad (12.1)$$

(здесь κ – поперечное волновое число волны, определяемое размером и формой поперечного сечения волновода и не зависящее от ε). Фазовая скорость

¹⁰ В отличие от линейных ускорителей, в которых компактные сгустки частиц перед началом ускорения впрыскиваются в ускоряющие фазы волны, в СВЧ-генераторах используются непрерывные пучки электронов. При этом *фазовая группировка* частиц, в результате которой большая часть электронов сосредотачивается в тормозящих фазах поля (вследствие чего энергия в среднем передается от электронного пучка к волне, а не наоборот), возникает в результате самого электронно-волнового взаимодействия.

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{h_0} \frac{h_0}{\sqrt{k^2 \varepsilon - \kappa^2}} = v_{\phi,0} \sqrt{\frac{k^2 - \kappa^2}{k^2 \varepsilon - \kappa^2}}. \quad (12.2)$$

Здесь h_0 и $v_{\phi,0}$ – продольное волновое число и фазовая скорость волны в волноводе без заполнения. Таким образом, при достаточной величине ε фазовая скорость волны может быть как угодно снижена.

Диэлектрическое заполнение замедляющей системы СВЧ-прибора не должно быть сплошным: в нем должно быть оставлен канал для пропускания электронного пучка. Если поперечные размеры канала относительно невелики, то фазовая скорость можно по-прежнему рассчитывать по формуле (12.2). Основные конфигурации волноводов с частичным диэлектрическим заполнением изображены на рис. 12.2.1.

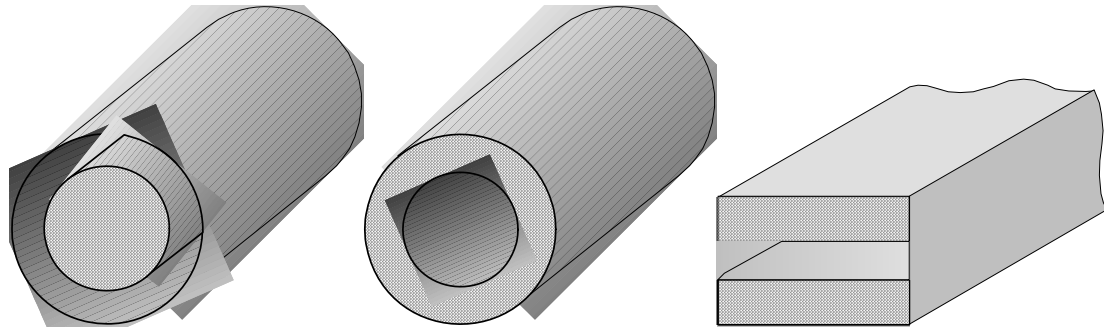


Рис. 12.2.1. Волноводы с частичным диэлектрическим заполнением

Несмотря на простоту, волноводы с диэлектрическим заполнением, сравнительно редко применяются в конструкциях мощных СВЧ-генераторов (и совсем не применяются в линейных ускорителях). Одна из причин этого состоит в том, что при большой напряженности высокочастотных полей неизбежен пробой диэлектрика. Поэтому волноводные конструкции СВЧ-устройств большой мощности стремятся делать преимущественно вакуумными, при этом принимая специальные меры для подавления высокочастотного пробоя металлических поверхностей.

Замедление волн можно осуществить и в вакуумных волноводных системах, используя следующий способ «геометрического» характера. Чтобы уменьшить фазовую скорость волны вдоль некоторого направления, волну «заставляют» проходить дополнительное расстояние поперек этого направления. Проиллюстрируем это на грубом примере. Пусть фазовая скорость волны вдоль образующей волновода равна $v_{\phi,0}$. Если уложить исходный волновод длиной L в виде «змейки» длиной l (рис. 12.2.2), то скорость движения фазовых фронтов в направлении z , уменьшится в среднем в L/l раз по отношению к $v_{\phi,0}$.

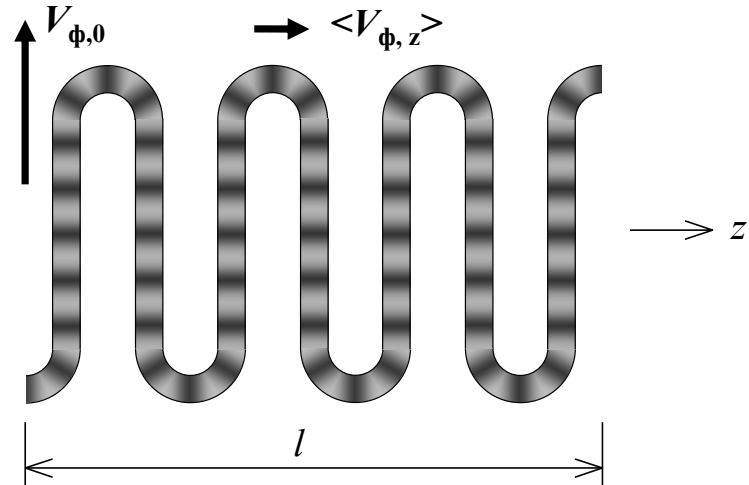


Рис. 12.2.2

Несколько разновидностей замедляющих систем, основанных на этом принципе, схематически изображено на рис. 12.2.3.

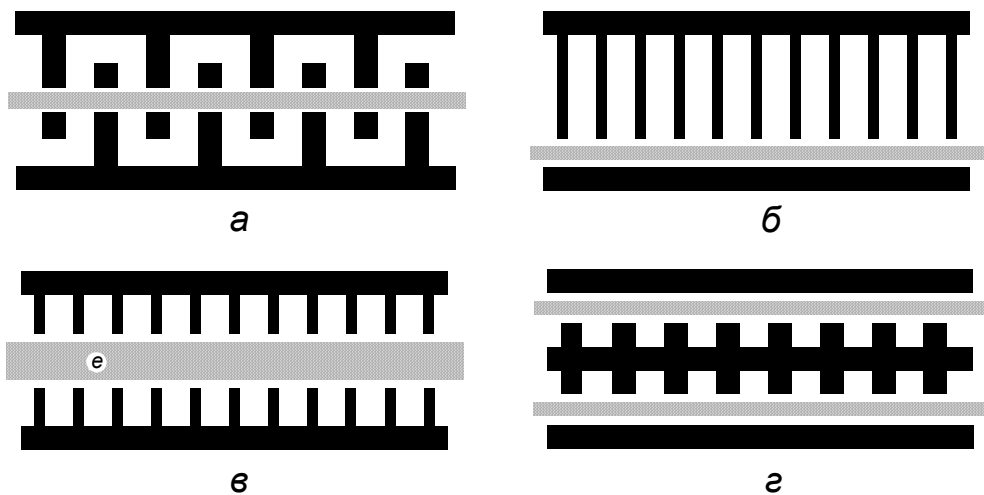


Рис. 12.2.3. Разновидности замедляющих систем:
а – встечно-штыревого типа, *б* – гребневого типа,
в – диафрагмированный волновод,
г – коаксиальная линия с гребенчатым внутренним проводником

Заметим, что если частота волны в гладком волноводе значительно превышает критическую (то есть, ее угол Бриллюэна мал, а фазовая скорость лишь незначительно превышает c), то для реализации условия $v_{\phi} < c$ может быть достаточно даже небольшой гофрировки волновода. Такой способ замедления пригоден для использования в СВЧ-приборах с высокоэнергетическими электронными пучками, в которых требуемая степень замедления волны невелика.

Весьма распространены различные замедляющие линии на основе спиральных элементов (см. например, рис. 12.2.4). Используемые спи-

рали могут быть однозаходными или многозаходными. Рассмотрим коаксиальную линию.

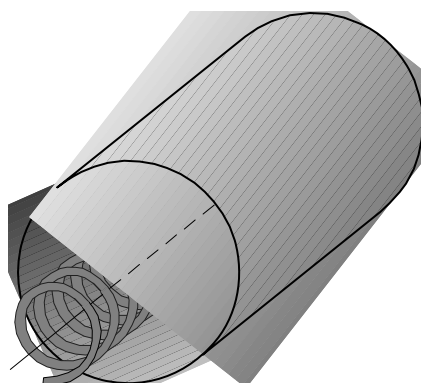


Рис. 12.2.4 Коаксиальная линия со спиральным внутренним проводником

Рассмотрим подробнее коаксиальную линию с внутренним проводником, выполненным в виде многозаходной спирали (такая спираль представляет собой множество обычных (однозаходных) спиралей, вложенных друг в друга с продольным сдвигом. Пусть радиус внешнего проводника линии равен R_2 , а спираль с шагом d намотана тонким изолированным проводом на радиусе R_1 . Углом намотки относительно оси назовем величину

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{4R_1}{d}.$$

Тогда длина намотки на одном периоде спирали есть $l = d \cos \psi$.

Будем считать, что длина волны, распространяющейся в линии, достаточно велика: $\lambda_w \gg d/N$, где N – число заходов спирали. В этом случае можно пренебречь детальным рассмотрением электромагнитных полей между соседними витками спирали и соответствующими резонансными эффектами. Саму же спираль можно представить в виде тонкостенного цилиндра с анизотропной проводимостью, ток в котором может протекать только под углом ψ к образующей.

Если угол намотки $\psi = 0$, то, очевидно, имеем обычную коаксиальную линию с основной волной ТЕМ-типа. Если $\psi = \pi/2$ (спираль распадается на отдельные кольца), протекание продольного тока по внутреннему проводнику и, следовательно, распространение основной волны становятся невозможными. В то же время появляется возможность для распространения волн, характерных для круглого волновода (точнее, тех из них, в которых электрическое поле не содержит азимутальной составляющей, и при частотах, превышающих соответствующие критические

частоты). В промежуточном диапазоне углов в линии могут присутствовать в модифицированном виде те и другие волны (рис. 12.2.5).

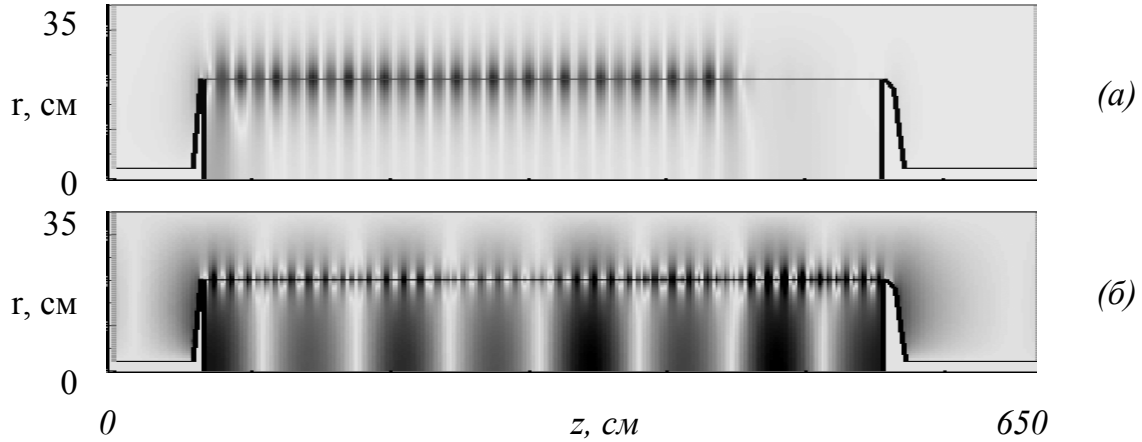


Рис. 12.2.5. Распространение волн в спиральной линии при частотах ниже и выше критической частоты волны E_{01} (328 МГц):
(а) $f=200$ МГц, (б) $f=400$ МГц. Угол намотки спирали $\psi=80^\circ$.
Расчет с помощью PIC-кода KARAT

Величина коэффициента замедления для основной волны (определенного как $K_{зам}=h/k$, где h и k – продольное и полное волновые числа), может быть получена из дисперсионного соотношения [20, 21]:

$$\left(\frac{k}{\kappa} \operatorname{tg} \psi\right)^2 = \frac{I_0(\kappa R_1) K_0(\kappa R_1)}{I_1(\kappa R_1) K_1(\kappa R_1)} \times \frac{1 - \frac{I_0(\kappa R_1) K_0(\kappa R_2)}{I_0(\kappa R_2) K_0(\kappa R_1)}}{1 - \frac{I_1(\kappa R_1) K_1(\kappa R_2)}{I_1(\kappa R_2) K_1(\kappa R_1)}}, \quad (12.2.1)$$

здесь $\kappa = \sqrt{h^2 - k^2}$, I и K – модифицированные функции Бесселя и Ханкеля. В пределе малых частот последнее соотношение упрощается, приводя к явному выражению для коэффициента замедления: (С.Д. Коровин: [22]):

$$K_{зам} \approx \sqrt{1 + \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{2 \ln R_2/R_1}}. \quad (12.2.2)$$

Нетрудно видеть, что в пределе при $R_1 \rightarrow R_2$, когда зазор между спиралью и внешним проводником линии можно приближенно считать плоским, выражение (12.2.2) переходит в простую формулу, имеющую очевидный геометрический смысл:

$$K_{зам} \approx \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \frac{1}{\cos \psi}.$$

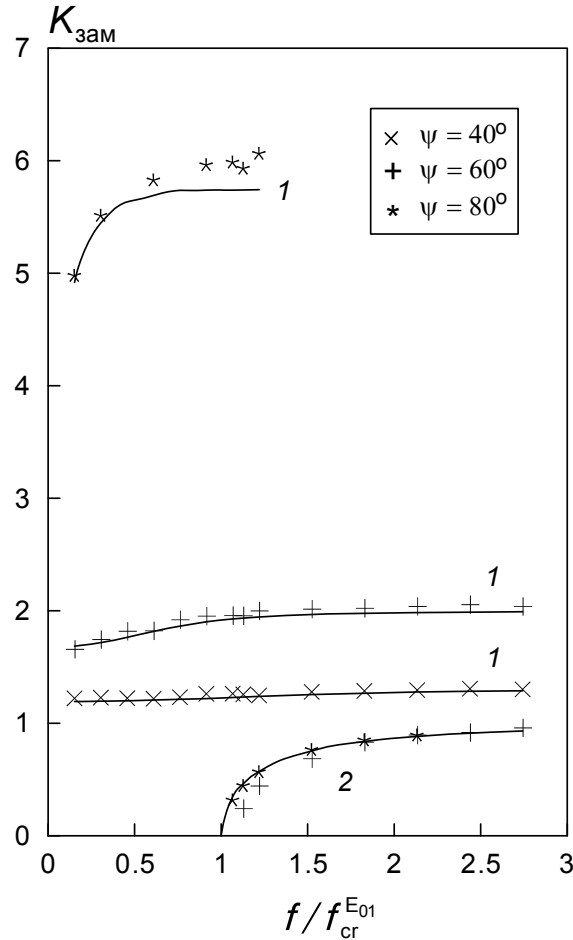


Рис. 12.2.6. Зависимость коэффициента замедления волн в спиральной линии от частоты (в долях критической частоты волны E_{01}) при различных величинах угла намотки:
 1 – основная волна, 2 – волна E_{01}

Далее мы рассмотрим еще одну изящную возможность для получения замедленных составляющих в спектре электромагнитных волн, которая также связана с использованием периодических волноводов.

12.3. Гофрированный волновод. Брэгговский резонанс

Рассмотрим свойства волны, распространяющейся в слабо гофрированном волноводе круглого сечения.

Пусть сперва мы имеем гладкий волновод радиуса R_0 , в котором распространяется волна некоторой моды, поперечное волновое число которой есть

$$\kappa_0 = \mu/R_0 .$$

Величина μ здесь обозначает корень функции Бесселя либо ее производной – в зависимости от типа волны.

Пусть теперь волновод, при том же среднем радиусе, гофрирован с периодом d (рис. 12.3.1):

$$R = R_0 + \Delta R \cos\left(\frac{2\pi}{d} z\right).$$

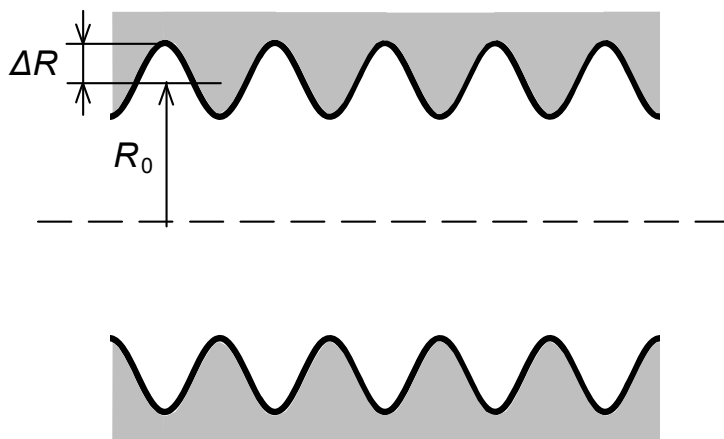


Рис. 12.3.1. Гофрированный волновод

Если амплитуда гофрировки сравнительно невелика ($\Delta R/R_0 \equiv -\alpha \ll 1$), то можно полагать, что гофрировка волновода не привела к смене моды волны, лишь незначительно исказив ее поля. Тогда для поперечного волнового числа, по аналогии со случаем гладкого волновода, запишем:

$$\kappa(z) = \mu/R(z).$$

Таким образом, теперь величина $\kappa(z)$, как и радиус волновода, периодически изменяется с продольной координатой. Введем обозначение $\bar{h} = 2\pi/d$ и разложим величину $\kappa(z)$ в ряд по малому параметру α , ограничиваясь первыми двумя членами разложения:

$$\kappa(z) = \frac{\mu}{R_0(1 - \alpha \cos \bar{h}z)} \approx \kappa_0(1 + \alpha \cos \bar{h}z). \quad (12.3.1)$$

Пусть E – любая из компонент электрического поля волны. Нетрудно убедиться в том, что если продольное волновое число волны есть h , то справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + h^2 E = 0. \quad (12.3.2)$$

Поскольку $h^2 = k^2 - \kappa^2$, то с учетом (12.3.1) запишем:

$$h^2 \approx h_0^2 - 2\alpha\kappa_0^2 \cos(\bar{h}z),$$

здесь $h_0 = \sqrt{k^2 - \kappa_0^2}$. Введем безразмерную продольную координату $x = \bar{h}z/2$, и безразмерные обозначения $a = (2h_0/\bar{h})^2$, $q = \alpha\kappa_0^2 (2/\bar{h})^2$. В результате всего этого уравнение (12.3.2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + (a - 2q \cos 2x) E = 0. \quad (12.3.3)$$

Уравнение (12.3.3) есть *уравнение Матье* [16, стр. 532], описывающее колебания осциллятора, собственная частота которого Ω изменяется по периодическому закону

$$\Omega = (a - 2q \cos 2x)^{1/2}.$$

Разумеется, в нашем случае осцилляции происходят не во времени, а в пространстве, при этом величина Ω имеет смысл не частоты, а приведенного продольного волнового числа.

Решение уравнения Матье может быть записано в виде

$$F(x) = P_1(x)e^{i\nu x} + P_2(x)e^{-i\nu x}, \quad (12.3.4)$$

(решение Флоке), $P_1(x)$ и $P_2(x)$ есть периодические (но не обязательно гармонические!) функции с периодом π (что соответствует периодичности по z с периодом d). Символом ν в данном случае обозначен так называемый *характеристический показатель* решения. Его величина зависит от величин a и q . На рис. 12.2.2 эта зависимость схематически представлена в плоскости параметров $(-2q/a, \sqrt{a})$.

Везде вне областей, на рисунке затемненных, характеристический показатель является действительной величиной, причем при малых отношениях q/a (что и соответствует неглубокой гофрировке) $\nu \approx a$. Решение Флоке в этом случае приобретает приближенный вид

$$F \approx P_1 e^{iax} + P_2 e^{-iax} = P_1 e^{ih_0 z} + P_2 e^{-ih_0 z},$$

причем абсолютные значения периодических функций P_1 и P_2 мало отклоняются от единицы. Для электрического поля, с учетом его гармонической зависимости от времени, это означает:

$$E \propto P_1(z) e^{i(\omega t + h_0 z)} + P_2(z) e^{i(\omega t - h_0 z)}. \quad (12.3.5)$$

Таким образом, мы имеем две бегущие в противоположных направлениях волны, амплитуды которых немного промодулированы (в общем случае, негармонически!) с периодом d . В пределе малой глубины гофрировки эта модуляция пропадает.

В затемненных на рис. 12.3.2 областях, называемых областями неустойчивости, характеристический показатель становится комплексным. При этом величина его мнимой части ν'' возрастает по мере продвижения внутрь области – например, с увеличением q при фиксированном a (что соответствует увеличению глубины гофрировки при заданном ее периоде). В слагаемых решения Флоке появляются сомножители $e^{\nu''x}$ и $e^{-\nu''x}$, то есть появляется затухание волн в продольном направлении. Таким образом, зоны неустойчивости решений уравнения Матье соответствуют *полосам непропускания* волны в гофрированном волноводе.

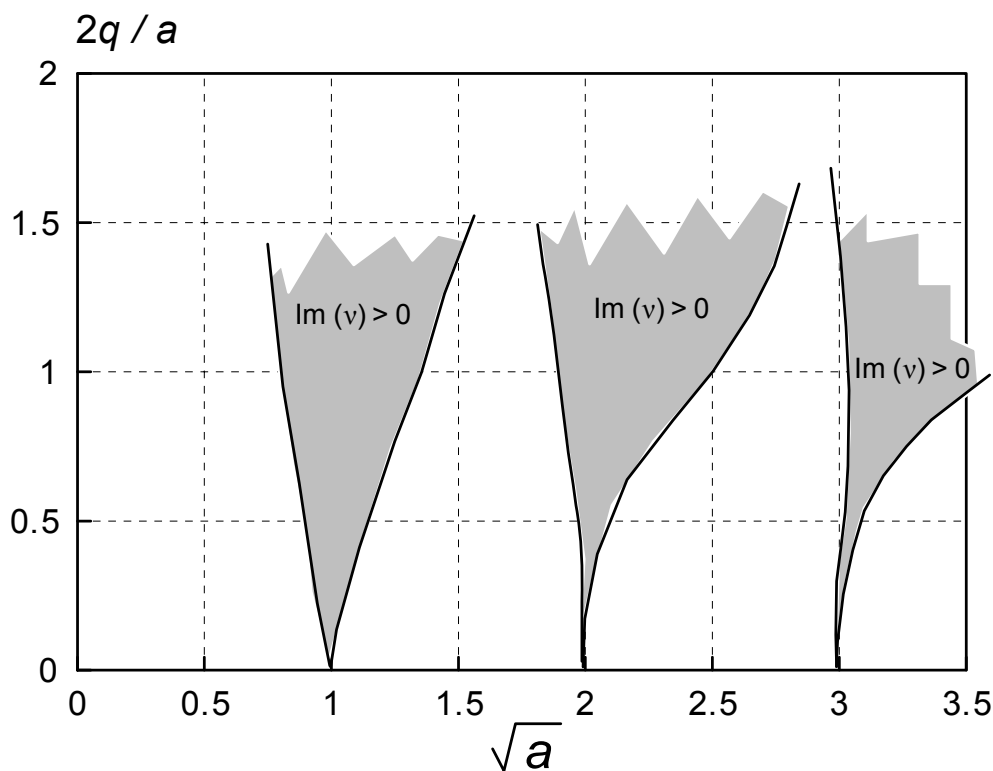


Рис. 12.3.2. Зоны неустойчивости решений Флоке для уравнения Матье

Центры полос неустойчивости (при малых q) соответствуют значениям $\sqrt{a} = n$, где n – целое число. Это условие может быть переписано в виде

$$h_0 = n \frac{\bar{h}}{2}, \text{ или } d = n \frac{\lambda_g}{2}, \quad (12.3.6)$$

здесь $\lambda_g = 2\pi/h_0$ – длина волны в гладком волноводе. Условия (12.3.6) при различных n определяют так называемые *брэгговские резонансы*.

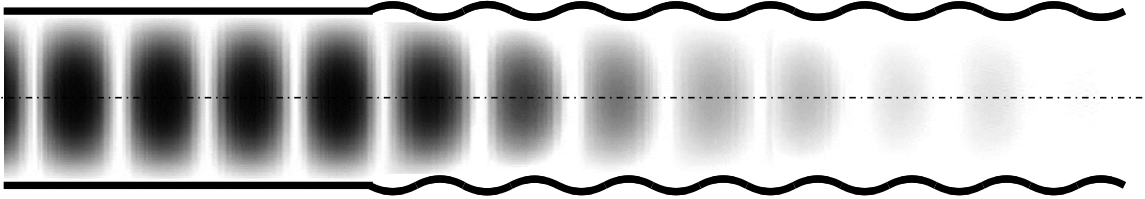


Рис. 12.3.3. Отражение волны E_{01} с частотой 10 ГГц в круглом волноводе от гофрированного участка в условиях брэгговского резонанса. Частота волны 10 ГГц. Средний радиус 1.5 см, амплитуда гофрировки 0.1 см, период 2.33 см. Градациями серого цвета показана величина $|E_z|$. Расчет с помощью кода KARAT

Брэгговский резонанс типичен при распространении волн любой природы в периодических структурах. Это один из случаев *параметрического резонанса*. Затухание волны при брэгговском резонансе не связано с диссипацией энергии, поскольку происходит в результате переизлучения волны в обратном направлении. Физически это происходит за счет отражения волны от периодических неоднородностей – в данном случае гофр. Если гофрированный участок волновода, на котором выполняется условие резонанса, имеет достаточную длину, то отражение волны может быть почти полным. Такое «брэгговское зеркало» (рис. 12.2.3) представляет собой эффективный полосовой фильтр.

12.4. Пространственные гармоники

Итак, для частот, лежащих вне полос непропускания гофрированного волновода, для электрического поля волны, бегущей в положительном направлении, можно записать:

$$E(z, t) = \operatorname{Re} \left[P(z) e^{i(\omega t - h_0 z)} \right].$$

Вид периодической функции $P(z)$ зависит от формы и амплитуды гофрировки волновода. Представим эту функцию в виде разложения в ряд Фурье:

$$P(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m e^{-im\bar{h}z}.$$

Тогда для электрического поля волны имеем разложение

$$E(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m e^{-ih_0 z - im\bar{h}z} \right\} = \operatorname{Re} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m e^{i(\omega t - h_m z)}.$$

Таким образом, поле представляет собой суперпозицию бесконечного числа *пространственных гармоник*, имеющих амплитуды P_m и продольные волновые числа $h_m = h_0 + m\bar{h}$. Определяя фазовые скорости этих гармоник как

$$v_{\phi,m} = \frac{\omega}{h_m} = \frac{\omega}{h_0 + m\bar{h}},$$

мы видим, что гармоники с достаточно большими номерами $|m|$ могут быть как угодно замедлены ($|v_{\phi,m}| < c$). При этом фазовые скорости тех гармоник, у которых $m < -h_0/\bar{h}$, отрицательны.

При плавной и не слишком сильной гофрировке волновода наибольшую амплитуду имеет нулевая пространственная гармоника (которая обычно называется *основной*), затем следуют «плюс первая» и «минус первая» гармоники, и так далее.

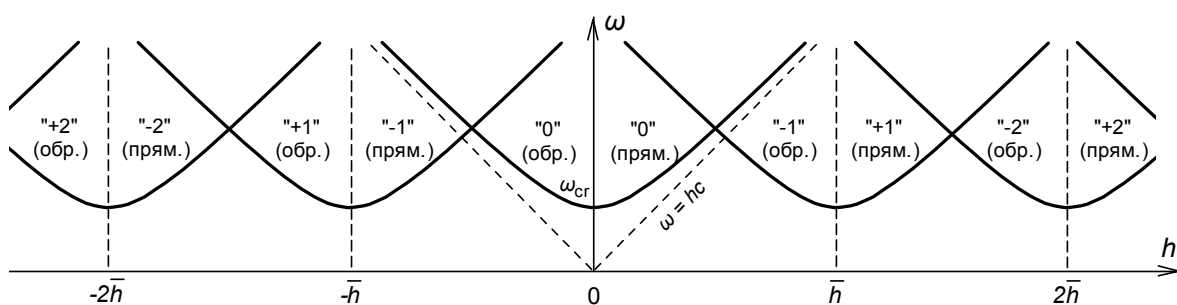


Рис. 12.4.1. Дисперсионные кривые пространственных гармоник волн прямого и обратного направлений в волноводе с исчезающе малой глубиной гофрировки (для каждой ветви указан номер гармоники и направление распространения волны)

Соотношения между амплитудами различных пространственных гармоник задаются геометрическими параметрами волновода и для каждой конфигурации волновода являются вполне определенными. Эти гармоники не являются «самостоятельными» физическими объектами и не могут существовать отдельно друг от друга. Пространственные гармоники появляются в поле волны при переходе ее из гладкого волновода в гофрированный и исчезают из поля волны, когда она покидает гофрированный участок.

Заметим, что условия брэгговских резонансов соответствуют местам пересечений дисперсионных кривых различных гармоник. Поэтому при конечной амплитуде гофрировки множество отдельных парабол превращается в набор непрерывных кривых, разделенных полосами частот непрозрачности.

Совокупность полей всех пространственных гармоник, имеющих общую дисперсионную характеристику в пределах каждого диапазона пропускания, называется *структурной волной* гофрированного волновода. Как и число волновых мод гладкого волновода, число структурных волн гофрированного волновода бесконечно. В области высоких частот дисперсионная характеристика гофрированного волновода представляет собой чрезвычайно сложную картину.

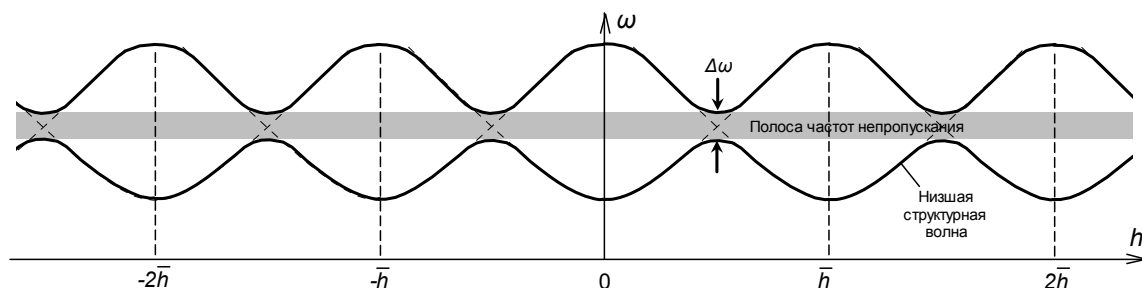


Рис. 12.4.2. Дисперсионные кривые двух низших структурных волн гофрированного волновода, «порожденных» нижней волной гладкого волновода

Поле каждой пространственной гармоники имеет свою определенную структуру, отличающуюся от структуры волны в гладком волноводе. «Особняком» при этом стоят замедленные гармоники, структура которых принципиально отличается от структуры гармоник с фазовыми скоростями, превышающими c .

Как и для волн в гладких волноводах, поперечная структура полей пространственных гармоник определяется уравнением Гельмгольца

$$(\Delta_{\perp} + \kappa_m^2)\psi = 0.$$

Здесь κ_m – поперечное волновое число, индивидуальное для каждой гармоники и определяемое как $\kappa_m = \sqrt{k^2 - h_m^2}$. Иначе,

$$\kappa = h_m \sqrt{k^2/h_m^2 - 1} = h_m \sqrt{\beta_{\phi,m}^2 - 1}.$$

Следовательно, если пространственная гармоника является замедленной ($\beta_{\phi,m} < 1$), то ее поперечное волновое число является мнимым и равным

$$\kappa_m = i|\kappa_m| = ih_m \sqrt{1 - \beta_{\phi,m}^2}.$$

Уравнение Гельмгольца в этом случае приобретает вид

$$(\Delta_{\perp} - |\kappa_m|^2)\psi = 0.$$

Решением этого уравнения в декартовой системе координат являются суперпозиции гиперболических тригонометрических функций sh и ch , а в цилиндрической системе – модифицированных функций Бесселя I_n (рис. 14.4.3) Эти функции, в отличие от своих «обычных» родственников, являющихся знакопеременными, монотонно возрастают и при больших значениях аргумента имеют экспоненциальные асимптотики:

$$\begin{aligned} \text{sh}(|\kappa|x), \text{ch}(|\kappa|x) &\propto e^{|\kappa|x}, \\ I_n(|\kappa|r) &\propto e^{|\kappa|r}. \end{aligned}$$

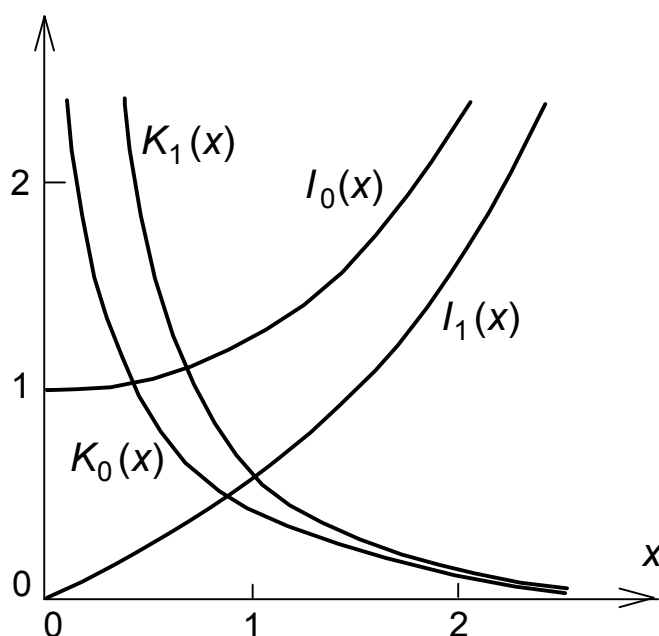


Рис. 14.4.3. Модифицированные функции Бесселя I и Ханкеля K нулевого и первого порядков

Таким образом, поля замедленных гармоник быстро спадают по направлению от стенки к центру волновода, уменьшаясь в e раз на расстоянии $L \propto |\kappa_m|^{-1}$. Поскольку

$$|\kappa_m|^2 = k^2 \left(\frac{1}{\beta_\phi^2} - 1 \right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1 - \beta_\phi^2}{\beta_\phi^2},$$

то для масштаба спада поля имеем

$$L \sim \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\beta_\phi}{\sqrt{1 - \beta_\phi^2}}.$$

Таким образом, при $\beta_\phi \approx 1$ имеем $L \rightarrow \infty$ (поле распределено равномерно в поперечном сечении волновода), а при $\beta_\phi \ll 1$ имеем $L \sim \frac{\lambda}{2\pi} \beta_\phi \ll \lambda$.

В завершение лекции заметим, что локализация поля вблизи поверхностей волноведущей системы, следующая из свойств решений уравнения Гельмгольца при $k < h$, является общим свойством любых замедленных волн или гармоник, вне зависимости от того, каким именно способом замедление достигается.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется замедленной электромагнитной волной? Для чего замедляют электромагнитные волны?
2. Объяснить понятие фазового синхронизма.
3. Как для замедления электромагнитной волны можно использовать диэлектрик?
4. В чем заключается «геометрический» способ замедления электромагнитной волны в волноводе?
5. Какие волны и при каких условиях могут распространяться в коаксиальной линии со спиральным внутренним проводником?
6. Чем определяется коэффициент замедления основной волны в спиральной линии?
7. Сформулировать постановку задачи о слабо гофрированном волноводе.
8. Записать уравнение Матье, пояснив смысл входящих в него величин.
9. Какой вид имеет решение Флоке уравнения Матье?
10. Что такое полосы частот непропускания гофрированного волновода? Как ширина этих полос изменяется с глубиной гофрировки?
11. Записать условия брэгговских резонансов. Что такое «брэгговское зеркало»?
12. Дать определение пространственных гармоник, записать выражения для их фазовых скоростей.
13. Изобразить дисперсионные кривые волновода с исчезающе малой глубиной гофрировки и волновода с сильной гофрировкой.
14. Чем определяются соотношения между амплитудами различных пространственных гармоник? Могут ли пространственные гармоники существовать независимо? Дать определение структурной волны в гофрированном волноводе.
15. Каково распределение полей замедленных электромагнитных волн в плоскости поперечного сечения волноведущей системы?

ЛЕКЦИЯ 13

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

13.1. Собственные колебания объемного резонатора

Объемный резонатор определим как область пространства, ограниченную хорошо проводящими (металлическими) стенками, в которой могут существовать свободные колебания электромагнитного поля. Под свободными колебаниями мы понимаем колебания, происходящие в отсутствие источников возбуждения (токов). Кроме того, резонатор может содержать отверстия, через которые может происходить поступление электромагнитной энергии от внешних источников или, наоборот, ее излучение. Наконец, источники электромагнитных колебаний (высокочастотные токи) могут находиться и внутри самого резонатора. Поэтому в резонаторе возможны не только свободные, но и вынужденные колебания электромагнитного поля.

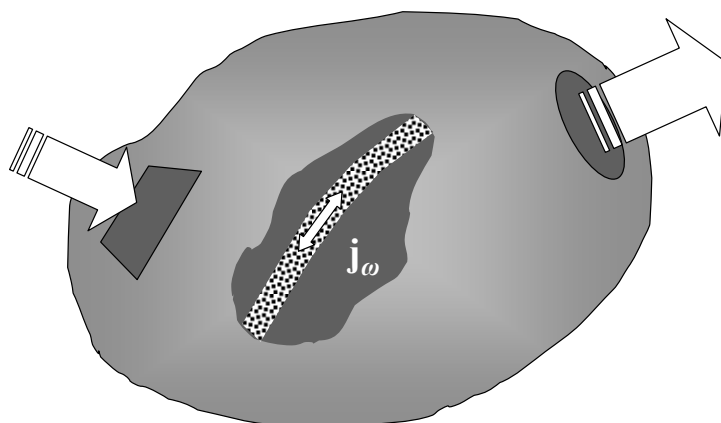


Рис. 13.1.1. Резонатор с отверстиями связи и высокочастотным током

Начнем с рассмотрения свободных колебаний резонатора. Для простоты предположим, что резонатор вакуумирован, то есть в его объеме $\varepsilon = \mu = 1$.

Как мы знаем (см. лекцию 6), комплексные амплитуды монохроматических полей в вакууме в отсутствие токов удовлетворяют однородным уравнениям

$$i \frac{\omega}{c} \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{E}, \quad i \frac{\omega}{c} \mathbf{E} = -\text{rot } \mathbf{H},$$

которые сводятся к трехмерному волновому уравнению для электрического поля

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (13.1.1)$$

и точно такому же уравнению для магнитного поля. Для решения задачи достаточно решить уравнение для электрического поля.

Пусть резонатор ограничен идеально проводящей поверхностью. Тогда граничное условие для электрического поля на этой поверхности есть $\mathbf{E}_t=0$. Уравнение (13.1.1) с такими граничными условиями представляет собой задачу на собственные функции $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и собственные числа – значения частоты ω . Можно показать, что, поскольку объем резонатора конечен, то собственные числа и соответствующие им собственные функции образуют дискретные наборы. Каждая пара собственная функция – собственное число определяет одно из собственных колебаний резонатора (или *моду*) с определенной структурой поля и частотой.

Назовем размерностью резонатора число координат, от которых в нем зависит поле. Можно показать, что величины частот собственных колебаний могут быть приписаны индексы, число которых равно размерности резонатора. Проиллюстрируем смысл этих индексов на примере так называемого волноводного резонатора.

Пусть имеется волновод – для определенности, прямоугольного сечения с поперечными размерами L_x, L_y . Частоты электромагнитных волн, которые могут распространяться в таком волноводе, удовлетворяют известному соотношению (см. п. 9.1)

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = h^2 + \kappa_x^2 + \kappa_y^2 = h^2 + \left(m \frac{\pi}{L_x} \right)^2 + \left(n \frac{\pi}{L_y} \right)^2.$$

Как мы видим, поперечные компоненты волнового числа κ_x и κ_y образуют дискретный набор: между стенками волновода вдоль каждого направления x и y должно укладываться целое число вариаций (полуволн) поля. В продольном направлении волновод не ограничен; поэтому величина h продольной компоненты волнового числа может изменяться непрерывно; это же относится и к частоте колебаний ω .

Теперь выделим отрезок волновода длиной L_z , замкнув его на торцах проводящими плоскостями. В силу возникших граничных условий ($\mathbf{E}_t = 0$ на торцах) на длине образовавшегося волноводного резонатора также должно укладываться целое число полуволн поля. Бегущие волны в результате отражения от торцов формируют стоячую волну. Таким

образом, теперь и продольное волновое число образует дискретный набор значений:

$$h \equiv \kappa_z = l \frac{\pi}{L_z},$$

здесь l – целое число. Частота собственного колебания, имеющего индексы m, n, l удовлетворяет соотношению

$$\frac{\omega_{mnl}^2}{c^2} \equiv k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(m \frac{\pi}{L_x}\right)^2 + \left(n \frac{\pi}{L_y}\right)^2 + \left(l \frac{\pi}{L_z}\right)^2 \dots \quad (13.1.2)$$

Моды волноводных резонаторов обозначаются так же, как и исходные моды соответствующих волноводов, с добавлением индекса продольных вариаций, например: мода E_{113} прямоугольного резонатора, мода H_{015} цилиндрического резонатора и т. п.

Примером двумерного резонатора является волновод, с колебанием некоторой моды на критической частоте (которой могут быть приписаны два «поперечных» индекса).

Идеализированный одномерный резонатор, еще называемый резонатором Фабри-Перо, образован двумя плоскопараллельными зеркалами, бесконечными в поперечном направлении. Частоты его собственных колебаний есть

$$\omega_l = l \frac{\pi c}{L_z}$$

(здесь L_z – расстояние между зеркалами, l – целое число). Нетрудно видеть, что последнее соотношение может быть переписано в виде

$$L_z = l \frac{\lambda}{2},$$

где λ – длина волны.

Итак, частоты собственных колебаний резонатора ограничены снизу отличным от нуля минимальным значением, которое соответствует основному колебанию. Сверху же частоты колебаний резонатора не ограничены и могут принимать как угодно большие значения.

Зададим некоторую величину частоты ω_0 . Сколько различных собственных колебаний содержится в диапазоне частот от нуля до ω_0 ?

Для трехмерного резонатора (для определенности, прямоугольного со сторонами L_x, L_y, L_z) имеем соотношение (13.1.2).

В пространстве волновых чисел (с декартовой системой координатами k_x, k_y, k_z) частоте ω_0 будет соответствовать сфера, имеющая «ради-

ус» $k = \omega_0/c$. Искомые собственные колебания будут соответствовать точкам, заключенным внутри этой сферы. Чтобы определить число этих точек, разделим весь объем сферы $V_k = \frac{4}{3}\pi k^3$ на элементарный объем, приходящийся на одно колебание. Последняя величина есть объем «кубика», длины сторон которого соответствуют приращению каждого из индексов m, n, l на единицу:

$$\Delta V_k = \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi}{L_x} \frac{\pi}{L_y} \frac{\pi}{L_z} = \frac{\pi^3}{V},$$

здесь V – объем резонатора. Кроме того, следует учесть, что колебания, различающиеся только знаками величин k_x, k_y, k_z (при этом находясь в восьми разных секторах рассматриваемого шара в пространстве волновых чисел) имеют одинаковую структуру. Поэтому полученное число колебаний должно следовать разделить на 8:

$$N \approx \frac{1}{8} \frac{V_k}{\Delta V_k} = \frac{1}{6\pi^2} k^3 V = \frac{1}{6\pi^2} \frac{\omega^3}{c^3} V = \frac{4}{3} \pi \frac{V}{\lambda^3}.$$

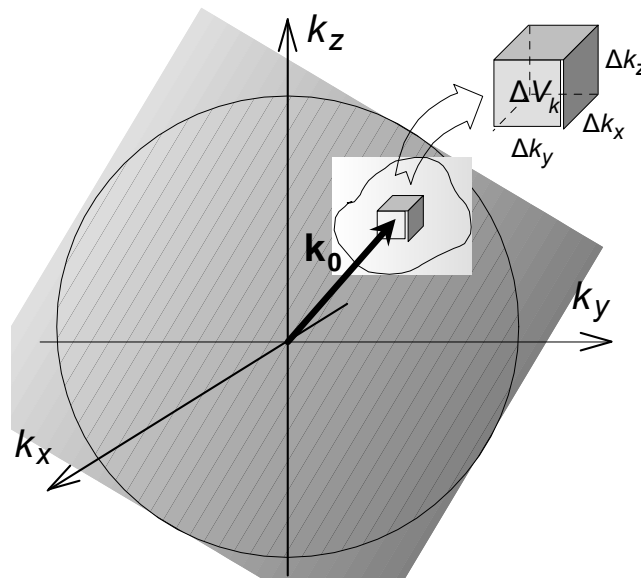


Рис. 13.1.2

Таким образом, с увеличением частоты число колебаний в объемном резонаторе растет пропорционально кубу частоты.

Число колебаний, приходящихся на единичный интервал частот, есть $\Delta N \approx \frac{\partial N}{\partial \omega}$ (эта величина характеризует, как говорят, *плотность*

мод резонатора), а интервал между соседними колебаниями – соответственно, $\Delta\omega \approx (\Delta N)^{-1} \approx \left(\frac{\partial N}{\partial \omega}\right)^{-1}$. Для трехмерного резонатора имеем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \left(\omega \frac{\partial N}{\partial \omega}\right)^{-1} = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda^3}{V}.$$

Для двумерного резонатора вместо шара в пространстве волновых чисел имеем круг в соответствующей плоскости, и

$$N \approx \frac{1}{4} \frac{S_k}{\Delta S_k} \approx \pi \frac{S}{\lambda^2},$$

здесь S – площадь поперечного сечения резонатора. Относительная величина интервала между двумя «соседними» колебаниями для двумерного резонатора есть

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2}{S}.$$

Наконец, для одномерного резонатора длиной L_z получаем

$$N = \frac{k_z}{\Delta k_z} = \frac{k_z L_z}{\pi} = \frac{\omega L_z}{\pi c} = \frac{2L_z}{\lambda}, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\lambda}{2L_z}.$$

В заключение заметим, что все формулы для резонатора, однородно заполненного диэлектрической средой, отличаются от формул для пустого резонатора заменой в них:

$$\omega \rightarrow \sqrt{\varepsilon\mu} \omega, \quad \mathbf{E} \rightarrow \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \sqrt{\varepsilon} \mathbf{H}.$$

В частности, все собственные частоты резонатора в случае его диэлектрического заполнения уменьшаются в $\sqrt{\varepsilon\mu}$ раз.

13.2. Добротность и ширина спектральной линии колебательных мод резонатора

В реальном резонаторе всегда существуют потери энергии электромагнитного поля. Эти потери могут быть связаны с поглощением волн в стенках резонатора (омические потери) или выходом излучения через отверстия в резонаторе¹¹. В обоих случаях изменение во времени

¹¹ Кроме того, если в резонаторе существует ток заряженных частиц, то энергия колебаний может затрачиваться и на совершение работы над этим током. Этот вопрос мы здесь не затрагиваем.

электромагнитной энергии, запасенной в резонаторе, определяется потоком мощности поля через его границу:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_S \mathbf{S} \mathbf{d}f .$$

В последнем интеграле в граничную поверхность S резонатора включены и отверстия в нем.

Пусть в резонаторе возбуждено какое-то одно из его собственных колебаний. Потери энергии будут, очевидно, приводить к затуханию этого колебания во времени. Предположим, что потери в резонаторе не очень велики и колебания в резонаторе, затухая, остаются близкими к гармоническим. В этом случае энергия поля и плотность потока энергии зависят от амплитуды колебания поля одинаковым образом (квадратично), и поэтому можно записать:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \alpha W .$$

Решение этого уравнения есть

$$W(t) = W_0 e^{-\alpha t} ,$$

здесь W_0 – энергия в резонаторе в начальный момент времени. Величина α называется декрементом затухания колебаний по энергии. Очевидно, что электрическое поле в резонаторе будет затухать со вдвое меньшим декрементом:

$$E(t) \propto \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right) .$$

Определим *добротность* колебания как величину $Q \equiv \omega/\alpha$. Из этого определения следует, что

$$Q = \omega \frac{W}{P} , \tag{13.2.1}$$

здесь символом P обозначена мощность потерь.

Частота собственного колебания в резонаторе с потерями, которую обозначим ω' , будет, вообще говоря, отличаться в меньшую сторону от частоты ω_0 того же собственного колебания в отсутствие потерь. Закон изменения во времени электрического поля в резонаторе с потерями может быть записан как

$$E = E_0 \exp(i\omega't) \exp\left(-\frac{\omega'}{2Q}t\right) = E_0 \exp\left[i(\omega' + i\omega'')t\right] ,$$

здесь обозначено $\omega'' = \frac{\omega'}{2Q}$. Таким образом, можно говорить о комплексной частоте колебания

$$\hat{\omega} = \omega' + i\omega''.$$

При наличии затухания колебания поля в резонаторе уже не являются в точности монохроматическими и поэтому их спектр приобретает конечную ширину. Определим, как связана ширина спектральной линии колебания с добротностью колебания. (Подчеркнем, что каждое собственное колебание имеет свою величину добротности. Выражение же «добротность резонатора» не является корректным, если не уточняется, о какой колебательной моде идет речь.)

Величины Фурье-компонента в этом выражении записываются как

$$E_{\omega}(\omega) \propto \int_0^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} E_0 e^{i(\omega' + i\omega'')t} e^{-i\omega t} dt.$$

Если добротность колебания достаточно велика, то $\omega' \approx \omega_0$ и

$$E_{\omega}(\omega) \propto \int_0^{\infty} E_0 \exp \left[\left(i\omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} - i\omega \right) t \right] dt = \frac{E_0}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\omega_0}{2Q}}.$$

Спектральная интенсивность, определяемая как квадрат модуля спектральной амплитуды, равна, соответственно

$$|E_{\omega}|^2 = E_{\omega} E_{\omega}^* \propto \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2Q} \right)^2}.$$

Максимум спектральной интенсивности достигается при $\omega = \omega_0$ и равен

$$\max |E_{\omega}|^2 = |E_{\omega}(\omega_0)|^2 = \left(\frac{2Q}{\omega_0} \right)^2 |E_0|^2.$$

Ширина спектра, соответствующая половине от максимума интенсивности, определяется из условия

$$\left| E \left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega_{0.5}}{2} \right) \right|^2 = \frac{1}{2} |E(\omega_0)|^2,$$

откуда

$$\Delta\omega_{0.5} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Таким образом, ширина спектра колебаний резонатора определяется добротностью данного колебания. В частности, при $Q \rightarrow \infty$ ширина спектра стремится к нулю.

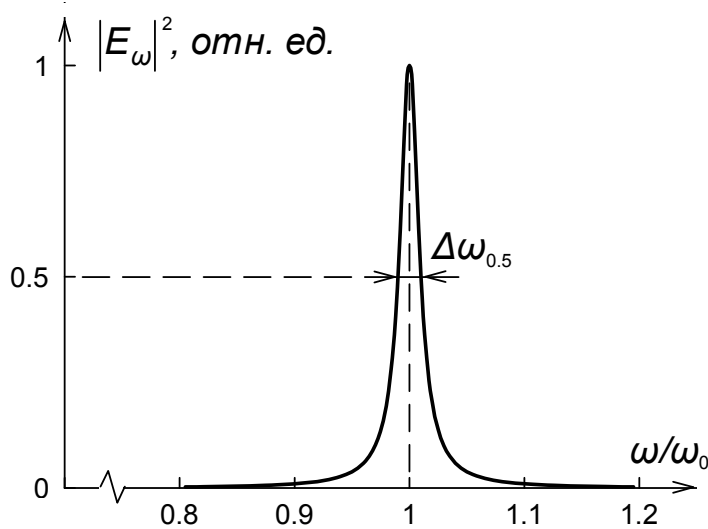


Рис. 13.2.1. Кривая спектральной интенсивности собственного колебания резонатора при $\omega_0/2Q = 0.01$

В заключение заметим, что если в резонаторе имеется несколько (N) каналов или различных механизмов потерь электромагнитной энергии, с каждым из которых связана мощность потерь P_i и добротность Q_i , то результирующая добротность, согласно определению (13.2.1), удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{Q} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{Q_i}.$$

Рассмотрим несколько типичных механизмов потерь электромагнитной энергии в резонаторах.

13.3. Основные виды потерь энергии в резонаторах и связанные с ними добротности колебаний

Резистивные потери в волноводном резонаторе

Рассмотрим резонатор в виде закрытого на торцах отрезка волновода. Пусть боковая поверхность волновода имеет конечную проводимость, а торцевые поверхности идеально проводящие. Представим по-

ле в резонаторе как суперпозицию двух волн, бегущих в противоположных направлениях. Отражение волн от торцов будет происходить без потерь энергии, а при продольном распространении волн они будут затухать. Если волновод однороден, декременты затухания для прямой и обратной волн будут одинаковыми, как и переносимые ими энергии. Поэтому для вычисления добротности резонатора достаточно рассмотреть волну одного направления.

Величина энергии поля в волне, приходящаяся на единицу длины в волноводе с площадью поперечного сечения S_{\perp} есть (11.1.3)

$$W' = \frac{q_z}{v_{cp}} = \frac{1}{8\pi} k^2 \kappa^2 \int_{S_{\perp}} |\Psi|^2 dS .$$

Следовательно, полная энергия волны в резонаторе длиной L составляет величину

$$W = \int_0^L W' dz = \frac{1}{8\pi} k^2 \kappa^2 \int_V |\Psi|^2 dV .$$

Здесь V – объем волновода. Мощность потерь, связанных с поглощением волны в стенке волновода на единицу длины, в соответствии с 11.2.2, есть

$$q_n = \frac{c}{8\pi} \xi' \oint_{\Gamma} |\mathbf{H}_t|^2 dl = \frac{c}{8\pi} \frac{\delta k}{2} \oint_{\Gamma} |\mathbf{H}_t|^2 dl ,$$

здесь интеграл взят по контуру поперечного сечения волновода, причем его материал предполагается немагнитным ($\mu = 1$). Соответственно, полная мощность потерь для волны одного направления

$$P = \int_0^L q_n dz = \frac{c}{8\pi} \frac{\delta k}{2} \int_S |\mathbf{H}_t|^2 dS .$$

Итак, добротность резонатора, связанная с поглощением волны в его боковой стенке

$$Q = \omega \frac{W}{P} = \frac{2k^2 \kappa^2 \int_V |\Psi|^2 dV}{\delta \int_S |\mathbf{H}_t|^2 dS} .$$

Пусть L_{\perp} – характерный поперечный размер резонатора (волновода). Тогда, действуя по аналогии с рассуждениями в п. 11. 2, нетрудно убедиться в том, что для колебаний электрического типа (для которых

$\Psi = E_{\parallel}/\kappa^2$ и $\mathbf{H}_t \equiv \mathbf{H}_{\perp}$), как и для колебаний магнитного типа (для которых $\Psi = H_{\parallel}/\kappa^2$ и $|\mathbf{H}_t|^2 = |\mathbf{H}_{\perp}|^2 + |H_{\parallel}|^2$) добротность

$$Q \sim \frac{1}{2} \frac{L_{\perp}}{\delta} \propto \omega^{1/2}.$$

Исключение, как и ранее, составляют симметричные Н-колебания в резонаторах круглого сечения. Для них $\mathbf{H}_t \equiv \mathbf{H}_{\parallel}$ и

$$Q \sim \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{L_{\perp}}{\delta} \propto \omega^{5/2}.$$

Если сохраняется соотношение между поперечным размером резонатора и длиной волны ($L_{\perp} \propto \lambda \propto \omega^{-1}$), то добротность Е- и Н-колебаний падает с ростом частоты как $Q \propto \omega^{-1/2}$. Для симметричных же Н-колебаний в резонаторах круглого сечения добротность колебаний возрастает с их частотой как $Q \propto \omega^{3/2}$.

*Добротность,
связанная с конечным коэффициентом отражения волн*

Пусть мы имеем резонатор, ограниченный в продольном направлении двумя волновыми отражателями (зеркалами), обладающими некоторым пропусканием, и такой, что волновые потери из резонатора в поперечном направлении несущественны. Например, это может быть резонатор, образованный двумя широкими плоскопараллельными пластинами (резонатор Фабри-Перо – рис. 13.3.1), или резонатор в виде волновода с отражателями на концах (например, брэгговских, или в виде запредельных сужений).

Представим колебание в резонаторе как сумму двух волн, бегущих в противоположных направлениях. Пусть коэффициенты отражения (по мощности) левого и правого зеркал есть R_1 и R_2 . Для простоты будем считать, что обе эти величины достаточно близки к единице, то есть, амплитуда волн за одно отражение изменяется незначительно. В этом случае можно считать, что волны обоих направлений переносят одинаковую мощность, равную $q_z = v_{\text{гр}} W'$, а полная энергия поля в резонаторе есть $W = 2 W' L$.

Мощность потерь (поток энергии через зеркала) есть

$$P = P_1 + P_2 = (1 - R_1) q_z + (1 - R_2) q_z = (2 - R_1 - R_2) v_{\text{гр}} W'.$$

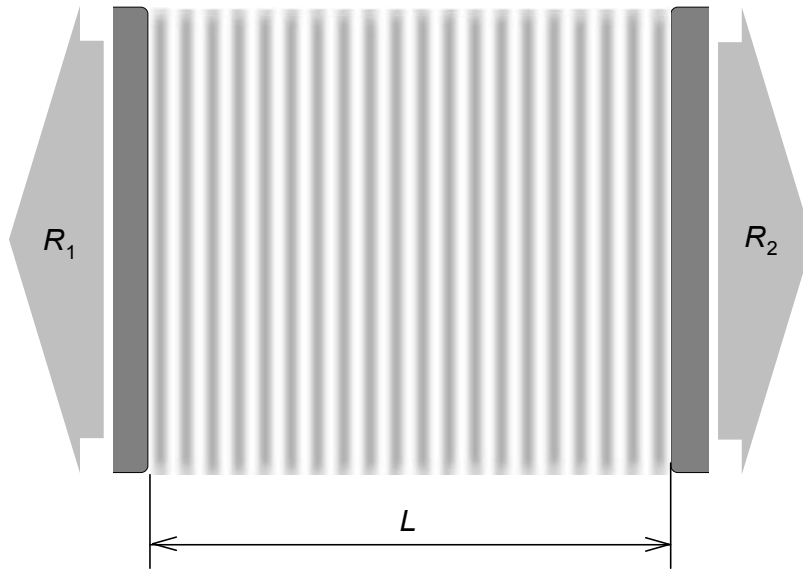


Рис. 13.3.1. К определению добротности резонатора, связанной с выходом излучения через зеркала

В результате для величины добротности имеем выражение

$$Q = \omega \frac{W}{P} = \frac{\omega L}{\left(1 - \frac{R_1 + R_2}{2}\right) \beta_{\text{гр}}} = \frac{kL}{\left(1 - \frac{R_1 + R_2}{2}\right) \beta_{\text{гр}}}.$$

Если коэффициент отражения R одинаков для обоих зеркал, то

$$Q = \frac{kL}{(1 - R) \beta_{\text{гр}}}.$$

3. Дифракционная добротность открытого резонатора

Рассмотрим теперь резонатор с плоскопараллельными зеркалами конечного размера, без диэлектрического заполнения. Пусть a – радиус каждого из зеркал, а расстояние между зеркалами равно L (рис. 13.3.2). Дифракция волн на краях зеркал приводит к появлению расходимости волнового потока.

Известно, что величина дифракционного угла (в том случае, если он мал по сравнению с одним радианом) есть

$$\Theta \approx \frac{\lambda}{a}.$$

После отражения от одного из зеркал излучение, попавшее в угол дифракции, проходит мимо противоположного зеркала и теряется. При этом мощность потерь есть

$$P \approx cW_1 \frac{S_1}{\pi a^2} \approx cW_1 \frac{2\pi a L \Theta}{\pi a^2} \approx 2cW_1 \frac{L\lambda}{a^2},$$

этом S_1 есть площадь кольца потерь.

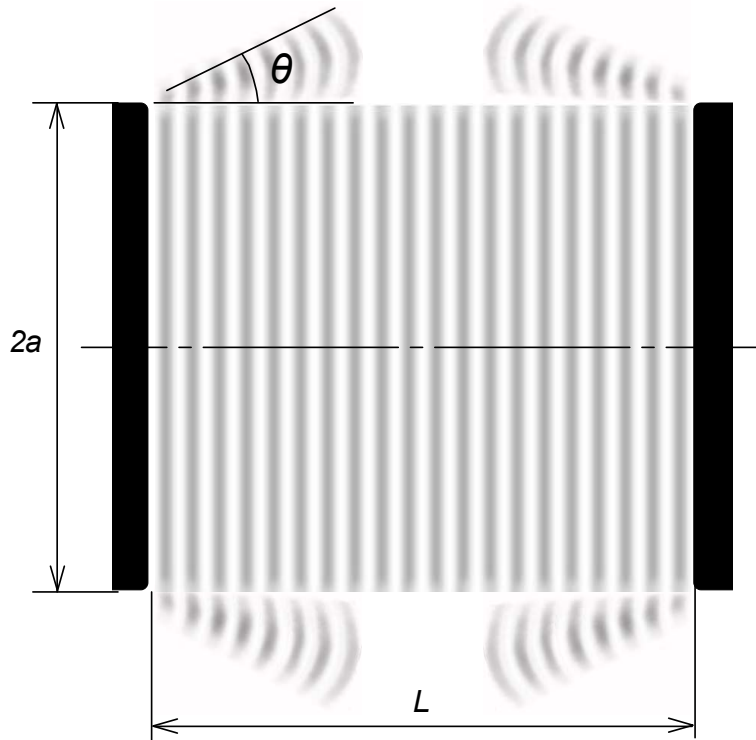


Рис. 13.3.2. К определению дифракционной добротности резонатора

Таким образом, добротность резонатора есть

$$Q \approx \omega \frac{W_1 L}{P} \approx \pi \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2.$$

13.4. Ортогональность собственных мод резонатора. Норма колебания

Электрическое и магнитное поля собственных мод резонатора обладают важным свойством ортогональности. При этом не следует понимать ортогональность буквально как перпендикулярность полей в каждой точке пространства. В данном случае свойство ортогональности полей носит интегральный и формулируется следующим образом (для простоты рассматриваем случай $\epsilon = \mu = 1$): для двух различных собственных мод резонатора интеграл от скалярного произведения комплексных амплитуд электрических полей этих мод по всему объему резонатора равен нулю, и то же самое справедливо для магнитных полей этих мод. Докажем это утверждение.

Комплексные амплитуды полей двух собственных мод (которые отметим индексами m и n) удовлетворяют однородным уравнениям

$$\begin{cases} ik_m \mathbf{H}_m = \text{rot } \mathbf{E}_m, \\ ik_m \mathbf{E}_m = -\text{rot } \mathbf{H}_m, \end{cases} \quad (13.4.1)$$

$$(13.4.2)$$

$$\begin{cases} ik_n \mathbf{H}_n = \text{rot } \mathbf{E}_n, \\ ik_n \mathbf{E}_n = -\text{rot } \mathbf{H}_n, \end{cases} \quad (13.4.3)$$

$$(13.4.4)$$

а также условиям

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (13.4.5)$$

Умножим (13.4.1) скалярно на \mathbf{H}_n , а (13.4.4) на \mathbf{E}_m и сложим полученные уравнения. Таким же образом поступим с уравнениями (13.4.2) и (13.4.3). В результате получим:

$$\begin{aligned} ik_n \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n + ik_m \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n &= \mathbf{H}_n \text{rot } \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_m \text{rot } \mathbf{H}_n \\ ik_m \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n + ik_n \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n &= \mathbf{H}_m \text{rot } \mathbf{E}_n - \mathbf{E}_n \text{rot } \mathbf{H}_m. \end{aligned}$$

Применив к правым частям последних уравнений известное векторное тождество

$$\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{B},$$

перепишем:

$$\begin{aligned} ik_n \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n + ik_m \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n &= \text{div}[\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n], \\ ik_m \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n + ik_n \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n &= \text{div}[\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m]. \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученные уравнения по всему объему, занятому полем резонатора. По теореме Остроградского-Гаусса перейдем к интегралам по поверхности этого объема:

$$\begin{aligned} ik_n \int_V \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n dV + ik_m \int_V \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n dV &= \int_V \text{div}[\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n] dV = \int_S [\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n] d\mathbf{S}, \\ ik_m \int_V \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n dV + ik_n \int_V \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n dV &= \int_V \text{div}[\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m] dV = \int_S [\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m] d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Поскольку на поверхности объема, полностью вмещающего поле, оно по определению обращается в нуль, равны нулю и поверхностные интегралы в последних выражениях. Поэтому имеем

$$k_n \int_V \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n dV + k_m \int_V \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n dV = 0,$$

$$k_m \int_V \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n dV + k_n \int_V \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n dV = 0 .$$

Обозначив $A = \int_V \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n dV$ и $B = \int_V \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n dV$, перепишем:

$$\begin{aligned} k_n A + k_m B &= 0 , \\ k_m A + k_n B &= 0 , \end{aligned}$$

или иначе

$$\begin{aligned} (k_n^2 - k_m^2) A &= 0 , \\ (k_n^2 - k_m^2) B &= 0 . \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $k_n \neq k_m$ (то есть, при $n \neq m$, если не рассматривать случаи вырождения по частоте) $A = B = 0$ или

$$\int_V \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n dV = 0 \text{ и } \int_V \mathbf{H}_m \mathbf{H}_n dV = 0 ,$$

что и требовалось доказать.

В случае, если $n = m$, то есть обе рассматриваемые моды суть одна и та же мода, то $A = -B \neq 0$. Величину

$$N_m \equiv \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{E}_m \mathbf{E}_m dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{H}_m \mathbf{H}_m dV$$

принято называть нормой m -го собственного колебания резонатора.

Если потери для данной моды малы ($\omega_m'' \ll \omega_m'$), то величину k_m можно приближенно считать вещественной. В этом случае, записав уравнения (13.4.3) и (13.4.4) для величин $\mathbf{E}_n \equiv \mathbf{E}_m^*$ и $\mathbf{H}_n \equiv \mathbf{H}_m^*$, в итоге получим:

$$\int |\mathbf{E}_m|^2 dV = \int |\mathbf{H}_m|^2 dV .$$

Норма колебания в данном случае является вещественной величиной и приобретает ясный физический смысл: она равна удвоенной величине энергии поля, усредненной за период колебания:

$$N_m = \frac{1}{4\pi} \int |\mathbf{E}_m|^2 dV = \frac{1}{4\pi} \int |\mathbf{H}_m|^2 dV = 2 \langle W \rangle_T ,$$

здесь $\langle W \rangle_T = \frac{1}{16\pi} \int (|\mathbf{E}_m|^2 + |\mathbf{H}_m|^2) dV$.

Заметим, что поскольку комплексные амплитуды собственных полей резонатора обладают свойством взаимной ортогональности, а их число бесконечно, то они образуют полный базис: в виде разложения по ним может быть представлено любое волновое (соленоидальное) поле в пределах резонатора.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется резонатором электромагнитных колебаний?
2. Что такое свободные колебания резонатора? Каким уравнениям удовлетворяют поля этих колебаний?
3. Чем определяются частоты собственных колебаний (мод) резонатора?
4. Какое геометрическое тело в пространстве волновых чисел соответствует поверхности равных частот?
5. Какой объем в пространстве волновых чисел приходится на одно собственное колебание?
6. Как зависит плотность мод резонатора от его объема и длины волны?
7. Как изменятся частоты собственных колебаний резонатора при заполнении его однородным диэлектриком?
8. Дать определение и привести выражение для добротности собственного колебания резонатора.
9. В чем смысл комплексной частоты собственного колебания?
10. Как связана ширина спектральной линии собственного колебания резонатора с добротностью этого колебания?
11. Записать правило «сложения» добротностей.
12. От чего и как зависит резистивная добротность волноводного резонатора с волнами типа Е? Типа Н? Колебания какого вида имеют аномальную зависимость добротности от частоты? Какова эта зависимость в пределе больших частот?
13. От чего и как зависит добротность резонатора, ограниченного отражателями?
14. От чего и как зависит дифракционная добротность открытого резонатора?
15. В чем смысл взаимной ортогональности полей собственных колебаний резонатора?
16. Что такое норма собственного колебания резонатора, каков ее физический смысл?

ЛЕКЦИЯ 14

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДОВ И ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ ЗАДАНЫМ ТОКОМ

14.1. Возбуждение волновода заданным высокочастотным током

Решая задачу о возбуждении волн в волноводе *заданным* током, мы будем предполагать, что возникающее электромагнитное поле не оказывает обратного влияния на сам ток (то есть не возмущает движения заряженных частиц, который этот ток создают). С другой стороны, мы будем считать, что в присутствии потока заряженных частиц в волноводе существуют те же волны, что и в «холодном» (без пучка) волноводе; иначе говоря, поток частиц не изменяет поперечной структуры полей. В то же время, зависимость амплитуды волн от продольной координаты будет определяться их взаимодействием с током.

Наиболее общая формулировка задачи, очевидно, предполагает рассмотрение тока, имеющего произвольное пространственное распределение и зависимость от времени. С другой стороны, следует учитывать взаимодействие тока со всеми собственными волнами волновода – в том числе, и не распространяющимися в рассматриваемом частотном диапазоне.

Ток, зависящий от координат и времени произвольным образом, может быть представлен в виде ряда Фурье по частотам:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \mathbf{j}_{\omega}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Аналогично для электрического и магнитного полей запишем:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} \mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Подставив последние три выражения в уравнения Максвелла, получим уравнения, связывающие между собой величины Фурье-компонент (гармоник) тока и полей на частоте ω :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\omega} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{\omega}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_{\omega} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}_{\omega} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\omega}. \end{cases}$$

Одной и той же частоте ω в волноводе может соответствовать несколько волновых мод (а с учетом нераспространяющихся волн – бесконечное их число). Поэтому каждая из величин $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})$ в последней системе уравнений, в общем, соответствует суперпозиции полей многих различных волновых мод. Однако при практических расчетах пучково-волнового взаимодействия в СВЧ-приборах задача, как правило, облегчается тем, что набор рабочих волн прибора ограничен – чаще всего, единственной модой. В этом случае рассматривать взаимодействие пучка со всеми волновыми модами нет необходимости.

Перейдем, таким образом, к задаче о взаимодействии единственной гармоники тока с единственной волноводной модой. Пусть в волноводе существует высокочастотный ток с частотой ω , который представим в виде

$$\mathbf{j} = \text{Re} \left[j_\omega(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} \right].$$

Здесь мы предполагаем, что комплексная амплитуда тока j_ω не только зависит от координат, но и является медленно (по сравнению с частотой ω) изменяющейся функцией времени:

$$\frac{\partial j_\omega}{\partial t} \ll \omega j_\omega.$$

Электрическое поле волноводной моды представим неоднородной плоской волной:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left(\mathbf{E}_\omega e^{i\omega t} \right) = \text{Re} \left[A(z, t) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\omega t - hz)} \right]; \quad (14.009)$$

таким образом, $\mathbf{E}_\omega = A(z, t) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\perp) e^{-ihz}$. Здесь $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\perp)$ – мембранная функция, определяющая поперечное распределение поля и являющаяся решением уравнения Гельмгольца, h – продольное волновое число волны, обладающей фазовой скоростью $v_\phi = \omega / h$. Зависимость комплексной амплитуды волны A от времени, очевидно, также должна быть медленной:

$$\frac{\partial |A|}{\partial t} \ll \omega |A|.$$

Итак, задача состоит в нахождении функции $A(z, t)$. Для этого воспользуемся соображениями «энергетического» характера¹².

¹² Хотя приведенные далее рассуждения не являются вполне строгими, они приводят к тому же конечному результату, что и формальное рассмотрение, изложенное в работах [8], [19] (т. 1, с. 40).

Рассмотрим баланс энергии на коротком отрезке волновода между сечениями z и $z+\Delta z$. Групповую скорость волны считаем положительной. Величина энергии поля, усредненная за период колебания, на рассматриваемом отрезке есть

$$W = W' \Delta z ,$$

здесь W' – энергия, приходящаяся на единицу длины волновода.

Изменение величины W за единицу времени складывается из усредненного потока энергии, вносимой волной через левую границу рассматриваемого отрезка волновода, ее убыли в виде потока, выходящего через правую границу, и мощности той работы (также средней за период T), которую ток \mathbf{j} совершает в поле волны на интервале Δz :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = q_z(z) - q_z(z + \Delta z) + \langle P_j \rangle_T \Delta z . \quad (14.111)$$

Здесь $\langle P_j \rangle_T$ – усредненная погонная мощность работы пучка, для определения которой сперва найдем ее мгновенную величину:

$$\begin{aligned} P_j &= - \int_{S_\perp} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) dS = - \int_{S_\perp} \operatorname{Re}(\mathbf{j}_\omega e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\mathbf{E}_\omega e^{i\omega t}) dS = \\ &= - \int_{S_\perp} \frac{1}{2} (\mathbf{j}_\omega e^{i\omega t} + \mathbf{j}_\omega^* e^{-i\omega t}) \frac{1}{2} (\mathbf{E}_\omega e^{i\omega t} + \mathbf{E}_\omega^* e^{-i\omega t}) dS = \\ &= - \frac{1}{4} \int_{S_\perp} (\mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega e^{2i\omega t} + \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* + \mathbf{j}_\omega^* \mathbf{E}_\omega + \mathbf{j}_\omega^* \mathbf{E}_\omega^* e^{-2i\omega t}) dS . \end{aligned}$$

При усреднении по периоду колебаний быстро осциллирующие члены, содержащие множители $e^{2i\omega t}$ и $e^{-2i\omega t}$, не дадут вклада и могут быть опущены, в результате чего получим:

$$\langle P_j \rangle_T = - \frac{1}{4} \int_{S_\perp} (\mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* + \mathbf{j}_\omega^* \mathbf{E}_\omega) dS = - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_\perp} \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* dS . \quad (14.119)$$

Далее, нам известно (см. лекцию 11, п. 11.1), что для волноводных мод погонная энергия W' и поток мощности q_z связаны через групповую скорость:

$$q_z = v_{gp} W' . \quad (14.121)$$

С учетом (14.119) и (14.121) уравнение (14.111) приобретает вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = v_{gp} [W'(z) - W'(z + \Delta z)] - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_z^{z+\Delta z} \int_{S_\perp} \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* dS dz' .$$

Устремляя $\Delta z \rightarrow 0$ и переходя от W к W' , запишем:

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = -v_{ep} \frac{\partial W'}{\partial z} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_{\perp}} \mathbf{j}_{\omega} \mathbf{E}_{\omega}^* dS. \quad (14.122)$$

Свяжем погонную величину усредненной энергии волны с ее амплитудой. Если P_1 есть усредненный поток мощности для волны единичной амплитуды, то для волны с амплитудой A будем иметь $q_z = P_1 |A|^2$ и, с учетом (14.121), $W' = P_1 |A|^2 / v_{ep}$. В результате уравнение (14.122) приобретет вид

$$\frac{1}{v_{ep}} \frac{\partial |A|^2}{\partial t} + \frac{\partial |A|^2}{\partial z} = -\frac{1}{2P_1} \operatorname{Re} \int_{S_{\perp}} \mathbf{j}_{\omega} \mathbf{E}_{\omega}^* dS.$$

Учитывая выражение (14.009) и то, что

$$\frac{\partial}{\partial t} |A|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (AA^*) = A \frac{\partial A^*}{\partial t} + A^* \frac{\partial A}{\partial t} = 2 \operatorname{Re} \left(A^* \frac{\partial A}{\partial t} \right),$$

получаем

$$2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{v_{ep}} A^* \frac{\partial A}{\partial t} + A^* \frac{\partial A}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2P_1} \operatorname{Re} \left(A^* e^{ihz} \int_{S_{\perp}} \mathbf{j}_{\omega} \hat{\mathbf{E}}_{\omega}^* dS \right).$$

Не теряя общности, «снимая» знак действительной части и сокращая на величину A^* , окончательно получаем *уравнение возбуждения* волноводной моды гармоническим током в виде

$$\frac{1}{v_{ep}} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{N} e^{ihz} \int_{S_{\perp}} \mathbf{j}_{\omega} \hat{\mathbf{E}}_{\omega}^* dS. \quad (14.131)$$

Величина N в знаменателе правой части есть *норма волны*, определяемая как учетверенная величина средней мощности для волны единичной амплитуды:

$$N \equiv 4P_1 = \frac{c}{2\pi} \int_{S_{\perp}} \left[\hat{\mathbf{E}}_{\omega} \times \hat{\mathbf{H}}_{\omega}^* \right] d\mathbf{S}.$$

Неоднородное волновое уравнение (14.131) описывает распространение волнового возмущения при наличии источников колебания (представленных правой частью). Если последняя равна нулю, то получившееся уравнение

$$\frac{1}{v_{ep}} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} = 0,$$

как нам уже известно (см. п. 6.2), описывает движение волны с профилем неизменной формы со скоростью v_{zp} .

Заметим, что правая часть уравнения возбуждения может быть равна нулю и при $\mathbf{j}_\omega \neq 0$. Действительно, пусть мы имеем бегущую волну тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_\perp) e^{i(\omega t - h_j z)} \right],$$

для которой $\mathbf{j}_\omega = \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_\perp) e^{-ih_j z}$. Тогда уравнение (14.131) принимает вид:

$$\frac{1}{v_{zp}} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{1}{N} e^{i(h-h_j)z} \int_{S_\perp} \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{E}}^* dS. \quad (14.141)$$

Видно, что правая часть этого уравнения будет равна нулю при нулевой величине интеграла $\int_{S_\perp} \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{E}}^* dS$. При $\mathbf{j}_\omega \neq 0$ такое возможно, если ток

протекает в тех местах волновода, где коллинеарное ему электрическое поле отсутствует. В качестве примера возьмем круглый волновод радиуса R_0 с симметричной волной E_{0n} , соосно пронизываемый трубчатым электронным пучком с радиусом r_b и малой толщиной стенки. Пусть пучок направляется сильным продольным магнитным полем, поэтому создает только продольный ток и может взаимодействовать лишь с продольной компонентой электрического поля волны. Однако если радиус пучка удовлетворяет условию $r_b/R_0 = \nu_{0m}/\nu_{0n}$, где ν_{0m} есть m -й корень функции Бесселя нулевого порядка, то продольное электрическое поле на траектории пучка отсутствует и взаимодействие пучка с данной вол-

ной невозможно. Говорят, что величина $\int_{S_\perp} \frac{\hat{\mathbf{j}}}{j} \hat{\mathbf{E}}^* dS$ определяет геометрическую связь тока (пучка частиц) с волной.

Однако достаточная связь тока с волной и большая величина самого тока еще не обеспечивают эффективного энергообмена между пучком и волной. Существует еще одно важное очевидное условие: разность фаз между электромагнитной волной и волной тока должна быть вполне определенной (0 или π , в зависимости от того, какой режим взаимодействия требуется – ускорение пучка волной или, напротив, усиление волны) и не должна изменяться с продольной координатой. Иначе говоря, должен сохраняться постоянным множитель $e^{i(h-h_j)z}$. Это, очевидно, возможно в единственном случае $h = h_j$, то есть тогда, когда фа-

звая скорость электромагнитной волны совпадает с фазовой скоростью волны тока.

В последнем случае говорят о фазовом синхронизме между электромагнитной волной и волной тока. К этому понятию мы уже обращались в лекции 12 (п. 12.1), рассматривая одиночную заряженную частицу (или компактный сгусток частиц) в поле бегущей волны. Условие синхронизма особенно важно, если протяженность отрезка взаимодействия значительно превышает длину волны в волноводе.

14.2. Возбуждение колебаний

в резонаторе заданным высокочастотным током

Рассмотрим возбуждение резонатора высокочастотным током. При этом будем предполагать, что обратное влияние электромагнитного поля на ток отсутствует.

Обычно на практике возбуждение резонатора стремятся осуществлять на какой-то одной моде резонансным способом: монохроматическим током с частотой, совпадающей с частотой собственного колебания. Эту простейшую ситуацию мы и рассмотрим.

Пусть одно из собственных колебаний резонатора имеет частоту $\omega = \omega' + i\omega''$. Предположим, что это колебание является высокочастотным, так что $\omega' \ll \omega''$.

Пусть в резонаторе присутствует высокочастотный ток, частота которого совпадает с действительной частью частоты рассматриваемого собственного колебания:

$$\mathbf{j} = \text{Re} \left[\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}, t) e^{i\omega' t} \right].$$

Считаем, что комплексная амплитуда тока может медленно изменяться во времени:

$$\frac{\partial j_\omega}{\partial t} \ll \omega' j_\omega.$$

Будем рассматривать *вынужденные* колебания, возбуждаемые током \mathbf{j} . Представим поля этих колебаний в виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[A(t) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{i\omega' t} \right], \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[A(t) \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) e^{i\omega' t} \right].$$

Здесь $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r})$ – комплексные амплитуды собственного колебания. Заметим, что частота вынужденного колебания ω' является вещественной. Поэтому это колебание, в отличие от соответствующего собственного колебания, не является затухающим. Однако если амплитуда

возбуждающего тока медленно изменяется во времени, то медленной функцией времени будет и амплитуда вынужденного колебания $A(t)$:

$$\left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| \ll \omega' |A|.$$

Для определения функции $A(t)$ воспользуемся «энергетическими» соображениями аналогично тому, как это делалось в задаче о возбуждении волновода.

Запишем для вынужденного колебания уравнение баланса энергии. Пусть W есть величина энергии поля, усредненная за период колебания. Если P есть усредненная мощность потерь, то изменение энергии во времени есть

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -P + P_j. \quad (14.2.1)$$

Здесь

$$P_j = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[A^* \int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* dV \right]$$

– усредненная мощность работы пучка в электрическом поле возбуждаемой моды.

Обозначим за W_1 величину энергии колебания единичной амплитуды ($A=1$). Тогда $W = |A|^2 W_1$. Средняя мощность потерь связана с энергией колебания (см. п. 13.2): $P = \alpha W$, здесь

$$\alpha = \frac{\omega'}{Q} = 2\omega'',$$

Q – добротность колебания. Таким образом, $P = 2\omega'' W$. С учетом этого уравнение (14.2.1) примет вид:

$$W_1 \frac{\partial |A|^2}{\partial t} + 2\omega'' W_1 |A|^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[A^* \int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* dV \right].$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial t} |A_m|^2 = 2 \operatorname{Re} \left(A_m^* \frac{\partial A_m}{\partial t} \right)$, принимая во внимание действительность второго слагаемого в левой части, «снимая» знак действительной части и сокращая на величину A^* , в итоге получаем:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'' A = -\frac{1}{4W_1} \int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* dV,$$

или, с учетом данного в лекции 13 определения нормы колебания, получаем уравнение *резонансного* возбуждения моды резонатора в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'' A = -\frac{1}{2N} \int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* dV. \quad (14.2.2)$$

Если правая часть уравнения равна нулю (возбуждающий ток или отсутствует, или не взаимодействует с полем рассматриваемой моды из-за слабой геометрической связи¹³), то приходим к уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'' A = 0,$$

решение которого $A(t) = A_0 e^{-\omega'' t}$ соответствует затухающему собственному колебанию поля:

$$\mathbf{E}(r, t) = \text{Re} \left[A_0 \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{i\omega t} e^{-\omega'' t} \right] = \text{Re} \left[A_0 \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \right].$$

Заметим, что в уравнении (14.2.2) второе слагаемое в левой части (описывающее потери) пропорционально амплитуде колебания, а правая часть, описывающая «накачку» колебания, от амплитуды не зависит. Физически это происходит из того, что мощность потерь зависит от амплитуды колебания квадратично, а мощность «накачки» под действием высокочастотного тока – линейно. Это и делает возможным начальное нарастание колебаний; в процессе их раскачки наступит, однако, момент, когда мощность потерь сравнится с мощностью «накачки». В результате установится режим стационарных колебаний, в котором $\partial A / \partial t = 0$, а амплитуда колебания пропорциональна его добротности:

$$A = -\frac{1}{2\omega'' N} \int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_\omega^* dV \propto Q.$$

Таким образом, при резонансном возбуждении колебания в идеализированном случае его бесконечной добротности (и при уже названном условии отсутствия обратного воздействия поля на ток) амплитуда колебания может нарастать до бесконечности.

¹³ Как и в случае с волноводом, для эффективного возбуждения колебания током в резонаторе необходимо, чтобы ток проходил преимущественно в местах пучностей, а не узлов электрического поля.

Мы рассмотрели возбуждение одночастотным током единственного резонансного с ним колебания. В действительности же под действием такого тока будут в большей или меньшей мере возбуждаться и все прочие пространственные моды резонатора (частоты *собственных* мод которых ω_m отличаются от частоты тока ω). Можно показать (см. [2], [19]), что уравнение возбуждения для каждой из таких мод имеет вид:

$$\frac{\partial A_m}{\partial t} + i(\omega - \omega_m) A_m = -\frac{1}{2N_m} \int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_{\omega_m}^* dV. \quad (14.2.3)$$

Используя это уравнение, важно понимать, что хотя каждое их возбуждаемых вынужденных колебаний имеет пространственную структуру полей такую же, что и соответствующее собственное колебание $(\mathbf{E}_{\omega_m}, \mathbf{H}_{\omega_m})$, колебание поля происходит все же не с собственной частотой моды, а с частотой возбуждающего тока.

Нетрудно видеть, что в случае резонанса ($\omega = \omega'_m$) уравнение (14.2.3) переходит в уравнение (14.2.2).

Наконец, в том случае, когда возбуждающий ток не является монохроматическим, а обладает частотной полосой некоторой ширины, наиболее эффективно будут возбуждаться те колебательные моды, собственные частоты которых попадают в эту полосу (при условии, что поля этих колебаний имеют с током достаточно хорошую геометрическую связь). Моды, не удовлетворяющие этому условию, будут возбуждаться с малой амплитудой, образуя *нерезонансный фон*.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулировать постановку задачи о возбуждении волн в волноводе заданным током.
2. Какие допущения используются при формулировке задачи о взаимодействии монохроматического тока с полем единственной волноводной моды?
3. Записать уравнение возбуждения волноводной моды в общем (нестационарном) случае и в стационарном случае. Записать уравнение возбуждения при отсутствии источника возбуждения. Какой физический процесс описывает получившееся уравнение?
4. Записать выражение для нормы волноводной моды. Каков физический смысл этой величины?
5. Какие условия необходимы для эффективного энергообмена между электромагнитной волной и потоком заряженных частиц в волноводе?

6. Сформулировать постановку задачи о резонансном возбуждении колебания в резонаторе заданным гармоническим током.
7. Записать уравнение резонансного возбуждения моды резонатора заданным монохроматическим током.
8. Почему при наличии потерь амплитуда возбуждаемых колебаний ограничивается даже в условиях резонанса?
9. В резонаторе под действием монохроматического тока, имеющего некоторую частоту, возбужден набор колебаний. Структура полей в каждом из них определяется соответствующей собственной модой резонатора. С какими частотами будут происходить колебания возбужденных мод?
10. Что такое нерезонансный фон?

ЛЕКЦИЯ 15

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕОДНОРОДНОМ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим движение (для простоты, нерелятивистское) заряженной частицы с массой m и зарядом e в электромагнитном поле, изменяющемся во времени по гармоническому закону с частотой ω , с комплексными амплитудами, зависящими от пространственных координат:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}\}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}\}.$$

Считаем, что прочие поля отсутствуют. Уравнение движения частицы имеет вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]. \quad (17.1)$$

Точно решить это уравнение при произвольной конфигурации высокочастотного поля затруднительно. Однако можно решить его приближенно, предположив, что движение частицы представляет собой медленное (с характерными частотами много меньшими ω) движение $\mathbf{R}(t)$ и накладывающиеся на него высокочастотные (с частотой ω) колебания $\tilde{\mathbf{r}}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{R}(t) + \tilde{\mathbf{r}}(t).$$

В этом случае уравнение движения (17.1) примет вид

$$m\ddot{\mathbf{R}} + m\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = e\mathbf{E}((\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{r}}), t) + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}((\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{r}}), t)] + \frac{e}{c}[\dot{\tilde{\mathbf{r}}} \times \mathbf{H}((\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{r}}), t)].$$

Будем считать, что амплитуда осцилляций частицы $\Delta \mathbf{r}$ и ее усредненное смещение за период колебаний малы по сравнению с характерным пространственным масштабом изменения высокочастотного поля (рис. 15.1):

$$|\Delta \mathbf{r}| \ll \left| \frac{E}{\nabla E} \right|, \quad \left| \dot{\mathbf{R}} \frac{2\pi}{\omega} \right| \ll \left| \frac{E}{\nabla E} \right|.$$

Разложим электрическое и магнитное поля в ряд в окрестности точки \mathbf{R} , имеющей размер \tilde{r} . Для электрического поля учтем нулевой и первый

члены разложения по величине $\tilde{\mathbf{r}}$. Поскольку движение частицы нерелятивистское, а амплитуды полей $E \sim H$, сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля, много меньше электрической. Поэтому в разложении для магнитного поля ограничимся членом нулевого порядка малости. Тогда уравнение движения приобретет следующий вид:

$$m\ddot{\mathbf{R}} + m\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = e\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) + e(\tilde{\mathbf{r}}\nabla)\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{H}(\mathbf{R}, t)] + \frac{e}{c}[\dot{\tilde{\mathbf{r}}} \times \mathbf{H}(\mathbf{R}, t)].$$

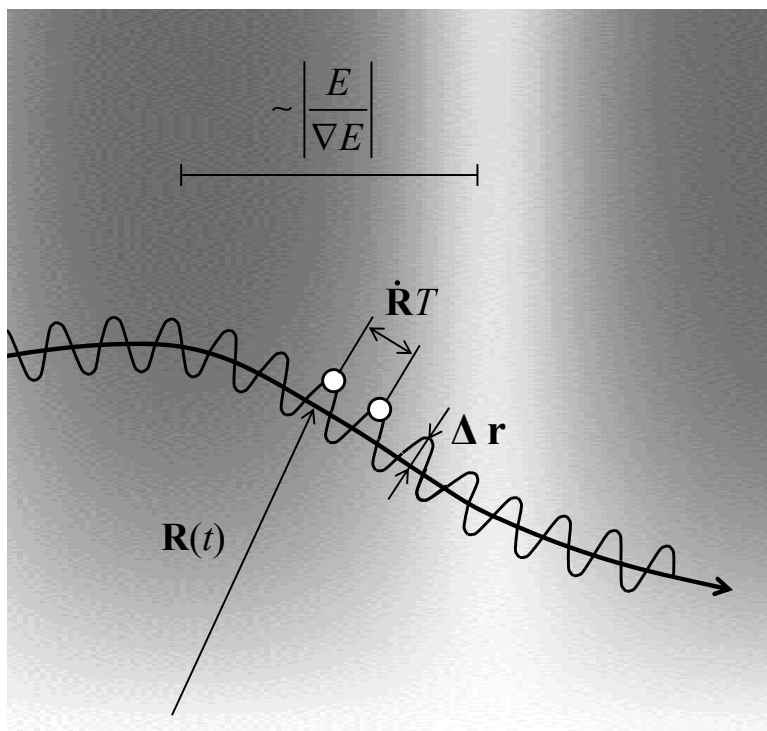


Рис. 15.1

Считая, что колебательное движение частицы вблизи точки \mathbf{R} определяется электрическим полем в этой точке, а также пренебрегая для этих колебаний магнитной силой (в силу нерелятивизма движения), записываем:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \frac{e}{m}\text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{R})e^{i\omega t}\}.$$

Дважды интегрируя это уравнение по времени, последовательно получаем

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}} = \frac{e}{m\omega}\text{Im}\{\mathbf{E}(\mathbf{R})e^{i\omega t}\}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m\omega^2}\text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{R})e^{i\omega t}\}.$$

Подставим эти выражения в уравнение движения, получим (аргумент у комплексных амплитуд \mathbf{E} и \mathbf{H} далее опущены):

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} = & -\left(\frac{e}{m\omega}\right)^2 \frac{1}{2}(\mathbf{E}e^{i\omega t} + \mathbf{E}^*e^{-i\omega t}) \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{E}e^{i\omega t} + \mathbf{E}^*e^{-i\omega t}) + \\ & + \frac{e}{mc} \left[\dot{\mathbf{R}} \times \frac{1}{2}(\mathbf{H}e^{i\omega t} + \mathbf{H}^*e^{-i\omega t}) \right] + \\ & + \frac{e^2}{m^2c\omega} \left[\frac{1}{2i}(\mathbf{E}e^{i\omega t} - \mathbf{E}^*e^{-i\omega t}) \times \frac{1}{2}(\mathbf{H}e^{i\omega t} + \mathbf{H}^*e^{-i\omega t}) \right].\end{aligned}$$

Усредним полученное уравнение по периоду высокочастотных колебаний. При этом физический смысл величины $\ddot{\mathbf{R}}$ в левой части сохраняется, а в правой части все осциллирующие члены (пропорциональные $e^{\pm i\omega t}$ или $e^{\pm 2i\omega t}$) дадут нулевой вклад. В результате получим:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} = & -\left(\frac{e}{2m\omega}\right)^2 \left\{ (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}^* + (\mathbf{E}^*\nabla)\mathbf{E} \right\} + \frac{e^2}{4im^2c\omega} \left\{ [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] - [\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}] \right\} = \\ = & -\frac{1}{2} \left(\frac{e}{m\omega}\right)^2 \left\{ \operatorname{Re}((\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}^*) + \frac{\omega}{c} \operatorname{Im}[\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}] \right\}.\end{aligned}$$

Учитывая, что для монохроматического поля (как это следует из уравнений Максвелла)

$$\mathbf{H} = -i \frac{c}{\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

получим

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e}{m\omega}\right)^2 \operatorname{Re} \left\{ (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}^* + [\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}^*] \right\}.$$

Используя известное выражение векторного анализа

$$\nabla(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} + [\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}],$$

запишем для комплексной амплитуды электрического поля:

$$\begin{aligned}\nabla|\mathbf{E}|^2 & \equiv \nabla(\mathbf{E}\mathbf{E}^*) = \\ & = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}^* + (\mathbf{E}^*\nabla)\mathbf{E} + [\mathbf{E} \times [\nabla \times \mathbf{E}^*]] + [\mathbf{E}^* \times [\nabla \times \mathbf{E}]] = \\ & = 2 \operatorname{Re} \left\{ (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}^* + [\mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}^*] \right\}.\end{aligned}$$

С учетом этого окончательно запишем уравнение усредненного движения заряженной частицы в следующем виде:

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_M \equiv -\nabla\Phi_M, \text{ здесь } \Phi_M(\mathbf{r}) = \left| \frac{e\mathbf{E}(\mathbf{r})}{2m\omega} \right|^2.$$

Таким образом, сила \mathbf{F}_M , определяющая усредненное движение заряженной частицы в быстропеременном электромагнитном поле, является потенциальной. Эта сила называется силой Миллера (по имени отечественного ученого М.А. Миллера, который впервые подробно исследовал этот случай движения заряженной частицы [14]), а величина $\Phi_M(\mathbf{r})$ – усредненным высокочастотным потенциалом.

Сила Миллера не зависит от знака заряда частицы. Действие ее всегда таково, что заряженная частица выталкивается из области более сильного высокочастотного поля в область слабых полей.

Заметим, наконец, что метод усреднения движения заряженной частицы по периоду колебаний высокочастотного поля (который мы, в простейшем виде, и применили при решении данной задачи) широко используется в электронике СВЧ при решении различных задач о взаимодействии заряженных частиц и их пучков с высокочастотными электромагнитными полями.

Вопросы для самоконтроля

1. При каких условиях, рассматривая движение заряженной частицы электромагнитном поле высокой частоты, мы можем считать это поле слабонеоднородным?
2. В виде суммы каких двух движений представляется движение заряженной частицы при решении задачи о ее движении в слабонеоднородном высокочастотном поле?
3. Как используется метод усреднения при решении этой задачи?
4. Записать выражения для усредненного высокочастотного потенциала и силы Миллера. В каком направлении действует эта сила? Как это направление зависит от заряда частицы?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти электрическое поле в цилиндрическом коаксиальном конденсаторе.
2. Найти электрическое поле в сферическом конденсаторе.
3. Найти электростатическое поле тонкого заряженного кольца на его оси.
4. Определить емкость плоского конденсатора, заполненного двумя слоями диэлектрика с различными диэлектрическими проницаемостями и различной толщины.
5. Найти магнитное поле тонкого кольца с током на его оси.
6. Оценить частоту электромагнитных колебаний, при которой величины действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости металла станут соизмеримыми.
7. Показать, что при любых соотношениях поперечных размеров прямоугольного волновода наименьшей критической частотой обладает волна H_{01} или H_{10} .
8. При каких условиях волна H_{01} прямоугольного волновода, плавно деформируемого в круглый, перейдет в волну H_{11} круглого волновода, и наоборот?
9. Найти добротность колебания со структурой E_{01} в резонаторе, образованном участком круглого волновода между двумя вставленными в него цилиндрическими втулками закритического радиуса и конечной длины.
10. Определить пространственное распределение магнитного поля, создаваемое магнитным ондулятором – последовательностью тонких колец с токами, расположенных периодически в осевом направлении. В каждом двух соседних кольцах токи одинаковы по величине и противоположны по направлению. Расстояние между кольцами много меньше их радиуса.
11. Получить выражения для полей волн типа H и типа E в коаксиальной линии. Определить критические частоты таких волн.
12. По волноводу распространяется электромагнитный импульс с длительностью τ , спектр которого представляет собой узкую линию с частотой ω . Излучение распространяется по волноводу в виде низшей моды с критической частотой ω_{cr} . Определить пространственную длину импульса.
13. В круглом волноводе заданного радиуса с идеально проводящими стенками распространяется электромагнитная волна низшего типа. Частота волны фиксирована. На стенки волновода дополнительно

нанесен тонкий (по сравнению с радиусом волновода) слой среды с конечной проводимостью. Толщина слоя постоянна по длине волновода. При каком условии декремент затухания волны будет максимальным? (Дать качественное объяснение).

14. На вход волновода подается импульс излучения длительностью τ , спектр которого представляет собой две узкие линии, разность между которыми частотами которых $\Delta\omega \gg 1/\tau$. Излучение распространяется в виде низшей моды с критической частотой ω_{cr} . Оценить длину волновода, при которой на его выходе излучение будет представлять собой два импульса, задержанных относительно друг друга на время $\Delta t \approx \tau$.
15. Доказать свойство взаимной ортогональности полей волноводных мод, имеющее вид
$$\int_{S_{\perp}} \{[\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n] - [\mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_m]\} \mathbf{dS} = 0$$
, где интеграл взят по площади поперечного сечения волновода.
16. Получить выражение (12.2.2) для коэффициента замедления основной волны в коаксиальной линии с центральным проводником в виде спирально проводящего цилиндра.
17. Стенки объемного резонатора имеют конечную проводимость. При какой частоте колебаний произойдет слияние спектральных линий соседних колебаний и резонатор потеряет резонансные свойства?
18. Показать, что частоты собственных колебаний резонатора в случае его диэлектрического заполнения уменьшаются в $\sqrt{\varepsilon}$ раз.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

В данном разделе символами a, b обозначены скалярные, символами \mathbf{A}, \mathbf{B} – векторные функции координат.

Инвариантные (не зависящие от выбора системы координат) определения дифференциальных операторов

Градиент скалярной функции $a(\mathbf{r})$ определяется как векторная функция

$$\text{grad } a(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S a(\mathbf{r}') dS,$$

где V – объем, содержащий точку \mathbf{r} , S – замкнутая поверхность, ограничивающая данный объем, δ – наибольшее расстояние между точкой \mathbf{r} и точками \mathbf{r}' на поверхности S . Ориентированный элемент площади $d\mathbf{S} \equiv \mathbf{n}dS$, где нормаль \mathbf{n} направлена из объема V наружу.

Дивергенция векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ определяется как скалярная функция

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}.$$

Ротор векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ определяется как векторная функция

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S [\mathbf{A}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}].$$

Теорема Остроградского–Гаусса (теорема о дивергенции)

Пусть функция $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ непрерывно дифференцируема в области V , ограниченной замкнутой поверхностью S . Тогда

$$\int_V \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S},$$

то есть, поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции по объему, ограниченному этой поверхностью.

Теорема Стокса

Пусть функция $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ непрерывно дифференцируема в области V , а лежащая в этой области поверхность S ограничена замкнутой кривой C . Тогда

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

то есть, криволинейный интеграл от некоторого вектора по замкнутому контуру равен потоку ротора этого вектора через поверхность, натянутую на этот контур.

Таблица 2

*Дифференциальные операторы
в декартовой и цилиндрической системах координат*

Оператор	Декартова система (x, y, z)	Цилиндрическая система (r, φ, z)
Градиент	$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$
Дивергенция	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Ротор	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \end{pmatrix}$
Оператор Лапласа скалярной функции	$\Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$	$\Delta a = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$

Оператор ∇ (набла)

Оператор набла (другое название – оператор Гамильтона) в декартовой системе координат определяется как вектор с компонентами

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Согласно своему определению, оператор ∇ линеен. Дифференциальные операторы записываются через оператор ∇ следующим образом:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} a &= \nabla a, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= (\nabla \cdot \mathbf{A}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= [\nabla \times \mathbf{A}], \\ \Delta a &= \nabla^2 a.\end{aligned}$$

Действия с оператором ∇ подчиняются следующим правилам:

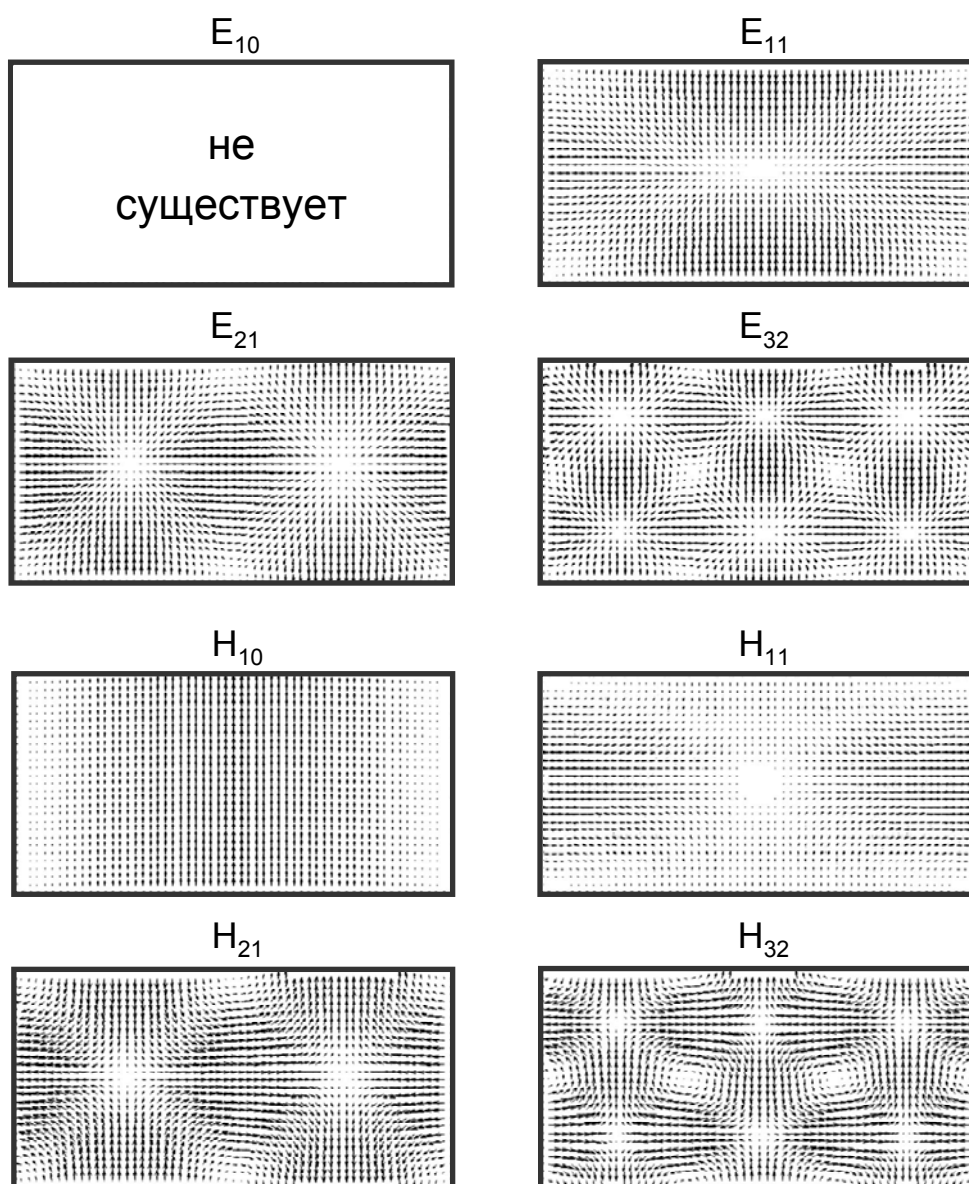
$$\begin{aligned}\nabla(ab) &= a\nabla b + b\nabla a, \\ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + [\mathbf{A} \times [\nabla \times \mathbf{B}]] + [\mathbf{B} \times [\nabla \times \mathbf{A}]], \\ \nabla \cdot (a\mathbf{B}) &= a(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\nabla a \cdot \mathbf{B}), \\ \nabla \cdot [\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}] &= \mathbf{B} \cdot [\nabla \nabla \mathbf{A}] - \mathbf{A} \cdot [\nabla \nabla \mathbf{B}], \\ (\mathbf{A} \cdot \nabla)(a\mathbf{B}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \nabla a) + a(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \\ [\nabla \nabla (a\mathbf{B})] &= a[\nabla \nabla \mathbf{B}] + [\nabla a \nabla \mathbf{B}], \\ [\nabla \times [\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}]] &= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}), \\ (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \\ &+ [\nabla \times [\mathbf{B} \times \mathbf{A}]] - [\mathbf{B} \times [\nabla \times \mathbf{A}]] - [\mathbf{A} \times [\nabla \times \mathbf{B}]] \end{aligned} \right\}.\end{aligned}$$

Операции второго порядка:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} a &= (\nabla \cdot (\nabla a)) = \nabla^2 a = \Delta a, \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \Delta \mathbf{A} + [\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}]] = \Delta \mathbf{A} + \operatorname{rot} \operatorname{rot}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} a &= [\nabla \times (\nabla a)] = 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= (\nabla \cdot [\nabla \nabla \mathbf{A}]) = 0, \\ \Delta(ab) &= a\Delta b + b\Delta a + 2(\nabla a \cdot \nabla b).\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 ПОЛЯ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВОДНЫХ МОД

Приведенные ниже «карты» векторов электрического поля в поперечных сечениях волноводов прямоугольного (рис. П-3.1) и круглого (рис. П-3.2) сечений для некоторых из мод получены в расчетах с помощью декартовой трехмерной версии электромагнитного РИС-кода KARAT.



*Рис. П-3.1. Поперечное электрическое поле некоторых мод
прямоугольного волновода*

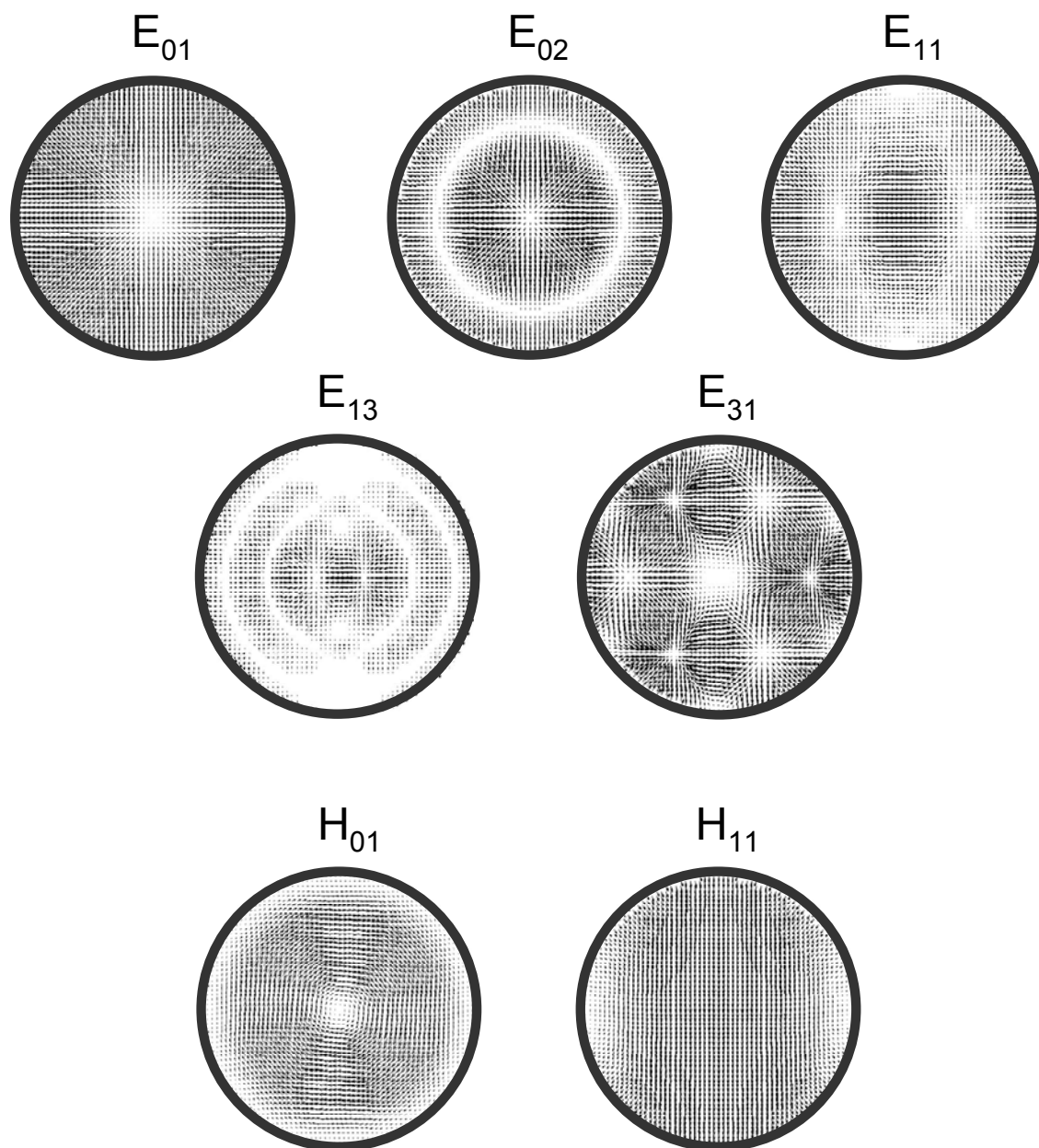


Рис. П-3.2. Поперечное электрическое поле некоторых мод круглого волновода

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

КОД KARAT

Ряд иллюстраций в данном учебном пособии выполнен на основе расчетов с помощью компьютерного кода KARAT.

Код KARAT (автор В.П. Тараканов, ИВТ РАН, г. Москва) представляет собой полностью электромагнитный нестационарный код на основе PIC-метода (метода макрочастиц). Потoki заряженных частиц представляются макрочастицами с фиксированным зарядом, движение которых описывается трехмерным релятивистским уравнением Лоренца. Уравнения движения интегрируются по схеме с перешагиванием с использованием алгоритма Бориса (смещение в электрическом поле и вращение в магнитном поле разделены). Электромагнитные поля описываются уравнениями Максвелла, интегрируемыми в конечных разностях на прямоугольных сетках. Разностный алгоритм явный, с перешагиванием, на сетках, смещенных по координате и времени. Расчетная область замкнута с точки зрения граничных условий. С точки зрения размерности по электромагнитному полю, код существует в виде совокупности одномерной, двумерных (RZ, XZ, и R θ), и трехмерных (XYZ и R θ Z) моделей.

Основное назначение кода состоит в расчете взаимодействия электромагнитных полей с бесстолкновительной (как, например, электронные и ионные потоки) или слабо термализованной плазмой. Код включает ряд феноменологических моделей проводящих, диэлектрических и магнитных сред, несколько моделей ионизации газа. Программа содержит несколько различных моделей инжекции и эмиссии заряженных частиц (в том числе самосогласованная чайлд-лэнгмюровская, модель Ричардсона, несколько моделей вторичной эмиссии), обеспечивает запуск в расчетную область электромагнитных волн различной модовой структуры, а также содержит средства для моделирования наиболее типичных внешних электрических цепей.

Геометрический блок программы дает возможность для ввода расчетных областей сложных конфигураций, что делает код пригодным для оптимизации конструкций экспериментальных устройств (в частности, СВЧ-приборов), как обладающих осевой симметрией, так и трехмерных. Обилие заложенных расчетных и диагностических возможностей делает код KARAT одним из наиболее мощных современных средств численного эксперимента в электродинамике.

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

Азимутальный – относящийся к углу (в полярной или цилиндрической системах координат).

Аксиальный – осевой.

Анизотропный – зависящий от направления.

Вихревое поле – поле, ротор которого отличен от нуля.

Волна – возмущение полевой величины, способное распространяться в пространстве в отсутствие источников возмущения.

Вынужденные колебания – колебания, происходящие под действием внешней силы и пропадающие при ее исчезновении.

Гармонический – изменяющийся по закону косинуса.

Граничное условие Дирихле (г. у. первого рода) для уравнений в частных производных – условие, при котором на границах расчетной области задаются значения искомой функции.

Граничное условие Неймана (г. у. второго рода) для уравнений в частных производных – условие, при котором на границах расчетной области задаются значения производной искомой функции по направлению нормали к границе области.

Групповая скорость – скорость движения огибающей волнового пакета.

Диссипация – рассеяние; d . энергии – переход энергии упорядоченного процесса в тепло.

Изотропный – не зависящий от направления.

Инвариантный – неизменный.

Калибровка – наложение на величину дополнительного условия, устраняющего неоднозначность определения этой величины.

Классический – не квантовый.

Коаксиальный – соосный.

Конденсированное состояние вещества – твердое и жидкое состояния. У вещества в конденсированном состоянии существует упорядоченность в расположении частиц (ионов, атомов, молекул): дальний порядок у кристаллических тел, ближний порядок у аморфных твердых тел и жидкостей. Свойства веществ в конденсированном состоянии определяются их структурой и взаимодействием частиц.

Линейный (относительно какой-либо величины) – пропорциональный первой степени этой величины.

Многосвязная область – плоская область, в которой существуют замкнутые кривые, не стягиваемые в пределах этой области в точку.

Монохроматический – одночастотный.

Насыщение – прекращение увеличения отклика системы на внешнее возмущение несмотря на рост возмущающего фактора.

Нестационарный – изменяющийся во времени.

Нетривиальный (о решении математической задачи) – не равный тождественно нулю.

Нормальный – (о векторе, направлении) перпендикулярный к заданному направлению, поверхности.

Однородный – не зависящий от места в пространстве

Односвязная область – плоская область, любая замкнутая кривая в пределах которой может быть стянута в точку.

Ортогональность – обобщенное понятие перпендикулярности.

Осциллятор – система, изменение свойств которой во времени имеет периодический характер.

Осцилляция – колебание.

Параметрический резонанс – резонанс, возникающий в условиях, когда частота собственных колебаний осциллятора периодически изменяется во времени.

Передающая линия – устройство для передачи электромагнитной энергии в некотором направлении, при этом обеспечивающее локализацию электромагнитного поля в поперечном направлении.

Планарный – плоский или почти плоский.

Плоская волна – математический объект, описывающий полевую величину, гармонически изменяющуюся во времени и вдоль некоторого направления в пространстве.

Поле – скалярная или векторная функция набора пространственных координат и времени.

Поле физическое (силовое) – векторная функция пространственных координат и времени, определяющая силу, действующую на пробную частицу.

Потенциальный (о векторном поле) – представимый в виде градиента скалярной функции.

Релятивистский – относящийся к движению со скоростью, приближающейся к скорости света в вакууме.

СВЧ-диапазон – диапазон электромагнитных колебаний, лежащий между радиодиапазоном и инфракрасным диапазоном. Соответствует длинам волн от 1 м до 1 мм и частотам от 300 МГц до 300 ГГц.

Синхронизм фазовый – 1. (с. между электромагнитной волной и заряженной частицей в ее поле) ситуация, при которой частица находится в одной и той же фазе волны в течение длительного времени (много большего, чем период колебаний волны); 2. (с. между электромагнитной

волной и волной тока) ситуация, в которой обе эти волны имеют одинаковые пространственные периоды и фазовые скорости.

Скаляр – величина, представленная единственным числом и не зависящая от выбора системы координат.

Собственные колебания – колебания осциллятора, на который не действуют внешние силы.

Стационарный – неизменный во времени.

Сторонний (о заряде или токе в среде) – создаваемый заряженными частицами, не являющимися частью среды.

Суперпозиция – сумма, наложение двух или более факторов, действие каждого из которых не изменяет действия других.

Тангенциальный – касательный (к поверхности, линии)

Тензор – математический объект, представимый в каждой выбранной системе координат в виде двумерной или многомерной таблицы. При переходе от одной системы координат к другой значения элементов таблицы (компонент тензора) преобразуются по определенному закону. Тензоры используют для описания физических объектов, свойства которых инвариантны относительно выбора системы координат.

Точечный – не имеющий пространственного размера.

Тривиальный (о решении математической задачи) – равный тождественно нулю.

Фазовая скорость – скорость движения поверхности с постоянной фазой. Определяется для монохроматических волн.

Физически бесконечно малый объем – выделенный объем в физической среде, вмещающий очень большое число ее атомов или молекулами, но малый в масштабе геометрической и физической неоднородности среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 509 с.
4. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. Основы математического аппарата. – М.: Наука, 1966. – 240 с.
5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндз М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика. – М.: Мир, 1977. – 347 с.
6. Мешков И.Н., Чириков Б.В. Электромагнитное поле. В двух частях. – Новосибирск: Наука, 1987, – 272 с. – 256 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. I. Механика. – М.: Наука, 1988. – 215 с.

Дополнительная:

8. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. – М.: Советское радио, 1973. – 398 с.
9. Вайнштейн Л.А. Переходные процессы при возбуждении волноводов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 1998. – Т. 6. – № 1. С. 20.
10. Гапонов-Грехов А.В., Петелин М.И. Релятивистская высокочастотная электроника // Вестник АН СССР. – 1979. – № 4. – С. 11–23.
11. Шевчик В.Н., Шведов Г.Н., Соболева А.В. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. – Изд. Сарат. ун-та, 1962. – 334 с.
12. Котетешвили П.В., Рыбак П.В., Тараканов В.П. KARAT – средство вычислительного эксперимента в электродинамике. Препринт № 44 ИОФ АН СССР. – М., 1991. – 46 с.
13. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ (в двух томах). Т. 1: Том Техника сверхвысоких частот. – М.: Высшая школа, 1972. – 440 с.
14. Миллер М.А. Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях // Известия вузов. Радиофизика. – 1958. – Т. 1. – № 3. – С. 110–123.
15. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

16. Справочник по специальным функциям / под ред. Абрамовиц М, Стиган И. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
17. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника / под ред. А.А. Рухадзе. – Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 543 с.
18. Месяц Г.А. Импульсная энергетика и электроника. – М.: Наука, 2004. – 704 с.
19. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В двух томах. – М.: Физматлит, 2003, 2004. – 496 с, 648 с.
20. Силин Р.А., Сазонов В.П. Замедляющие системы. – М.: Сов. радио, 1966. – С. 104.
21. Тараненко З.И., Трохименко Я.К. Замедляющие системы. – Киев, 1965. – С. 39.
22. Korovin S.D., Gubanov V.P., Gunin A.V., Pegel I.V., Stepchenko A.S. Repetitive nanosecond high-voltage generator based on spiral forming line / Proc. Int. IEEE Pulsed Power Plasma Science Conf. (PPPS-2001), Las Vegas, 2001. – P. 1249–1251.

Учебное издание

ПЕГЕЛЬ И.В.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции


Компьютерная верстка *К.С. Чечельницкая*
Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*

Подписано к печати 14.11.2011. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 9,19. Уч.-изд. л. 8,31.
Заказ ____-11. Тираж 35 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru