

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой общей физики  
ФТИ

 А.М. Лидер

« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2017 г.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ  
РАЗНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

Методические указания к выполнению лабораторной работы 1-06б  
по курсу «Физика 1» по разделу «Механика»  
для студентов всех направлений и специальностей

Издательство  
Томского политехнического университета  
2017

УДК 531.381  
ББК 22.3

Определение момента инерции тел разной геометрической формы: методические указания к выполнению лабораторной работы 1-06б по курсу «Физика 1» по разделу «Механика» для студентов всех направлений и специальностей / Л.А. Святкин; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2017. – 15с.

**УДК 531.381**  
**ББК 22.3**

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию  
методическим семинаром кафедры общей физики  
«\_\_»\_\_\_\_\_2017 г.

Председатель учебно-методической  
комиссии



А.М. Лидер

*Рецензент*

Доктор педагогических наук,  
профессор кафедры ОФ ФТИ НИ ТПУ

*В.В. Ларионов*

Старший преподаватель кафедры ОФ ФТИ НИ ТПУ

*Т. В. Смекалина*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ РАЗНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

**Цель работы:** определить моменты инерции твердых тел разной геометрической формы методом крутильных колебаний; проверить справедливость теоремы Гюйгенса–Штейнера.

**Приборы и принадлежности:** установка для изучения крутильных колебаний, два диска (сплошной и с диаметрными отверстиями), шар, два цилиндра (сплошной и полый), секундомер.

### КРАТКОЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Поступательное и вращательное движения являются частными проявлениями общего процесса механического движения тел. Физическое единство отражается в аналогии математической формы записи законов, описывающих эти виды движения. Согласно основному закону динамики поступательного движения, скорость изменения импульса  $\mathbf{P}$  движущегося тела определяется суммой внешних сил  $\mathbf{F}$ , действующих на него:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} . \quad (1a)$$

где  $\mathbf{a}$  – ускорение тела;  $m$  – масса тела, выражает численно меру инертности тела, т.е. его способность изменять состояние поступательного движения под действием силы  $\mathbf{F}$ . Основным законом динамики вращательного движения твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси, записывается в виде

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad \text{или} \quad \mathbf{M} = J\boldsymbol{\varepsilon} = J \frac{d^2\boldsymbol{\varphi}}{dt^2} , \quad (16)$$

где  $\mathbf{M}$  – момент силы;  $\mathbf{L}$  – момент импульса тела;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – угловое ускорение;  $\boldsymbol{\varphi}$  – вектор углового перемещения. Коэффициент пропорциональности  $J$  носит название момента инерции. Момент инерции является мерой инертности тела во вращательном движении и определяет способность тела изменять состояние вращательного движения под действием момента силы  $\mathbf{M}$ .

Согласно определению, момент инерции материальной точки массой  $m$  относительно оси вращения определяется как

$$J = mr^2, \quad (2)$$

где  $r$  – радиус вращения материальной точки.

Масса реального тела представляется в виде суммы масс составляющих его материальных точек. Соответственно, момент инерции тела есть совокупность моментов инерции его частей, рассматриваемых как материальные точки:

$$I = \sum_{i=1} m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm. \quad (3)$$

Так, в случае однородного цилиндра (круглого диска) массой  $m$  и радиуса  $R$  интегрирование выражения (3) дает для момента инерции относительно его оси симметрии формулу

$$J = \frac{1}{2} m \cdot R^2. \quad (4)$$

Соответствующий момент инерции полого цилиндра зависит как от его массы  $m$ , так и от радиусов закругления  $R_{\text{внеш}}$  (внешней) и  $R_{\text{внутр}}$  (внутренней) боковой поверхности:

$$J = \frac{1}{2} m \cdot (R_{\text{внеш}}^2 + R_{\text{внутр}}^2). \quad (5)$$

Момент инерции  $J$  однородного шара массой  $m$  и радиуса  $R$  по отношению к его оси симметрии равен:

$$J = \frac{2}{5} m \cdot R^2. \quad (6)$$

Таким образом, момент инерции цилиндра с тем же радиусом  $R$  и той же массой  $m$  больше, чем момент инерции сравниваемого шара.

Если необходимо рассчитать момент инерции тела относительно некоторой оси  $AA$ , не проходящей через центр масс  $C$  (рис. 1), то можно воспользоваться теоремой Гюйгенса–Штейнера: «Момент инерции  $J_{AA}$  тела относительно произвольной неподвижной оси  $AA$  равен сумме момента

инерции  $J_{OO}$  этого тела относительно оси  $OO$ , параллельной оси  $AA$  и проходящей через центр масс тела  $C$ , и произведения массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $l$  между осями  $AA$  и  $OO$

$$J_{AA} = J_{OO} + m \cdot l^2. \quad (7)$$

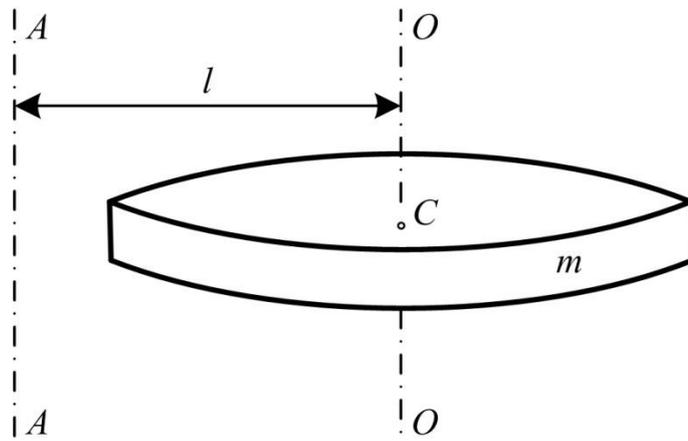


Рис. 1. Иллюстрация к теореме Гюйгенса–Штейнера

Таким образом, используя формулы (3) и (7), можно аналитически рассчитать момент инерции любого тела, условно разделяя его на составные части правильной геометрической формы и определяя расстояния, на которых они находятся от общей оси вращения тела. В случаях, когда аналитическое определение момента инерции затруднено сложностью формы тела или неоднородностью распределения массы, его определяют опытным путем.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ИЗ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

При малых амплитудах крутильных колебаний возвращающий момент сил  $M$  пропорционален углу отклонения  $\varphi$  тела от положения равновесия:

$$M = \kappa \cdot \varphi, \quad (8)$$

где  $\kappa$  (каппа) называется коэффициентом угловой жесткости или модулем кручения оси (подвеса). Численно  $\kappa$  выражает величину момента силы, возникающего в материале при его закручивании на единичный угол. С учетом выражения (8) период гармонических крутильных колебаний можно рассчитать как:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\kappa}}. \quad (9)$$

Если взять симметричное тело известной массы  $m$ , центр масс которого можно смещать в горизонтальной плоскости относительно оси вращения (например, диск с диаметрными отверстиями), то согласно теореме Гюйгенса–Штейнера момент инерции  $J$  такого тела можно записать как

$$J = J_0 + ml^2, \quad (10)$$

где  $J_0$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс;  $l$  – расстояние от центра масс тела до оси, относительно которой определяется момент инерции  $J$ . Подставив формулу (10) в (9), получим выражение, связывающее период колебаний  $T$  тела относительно произвольной неподвижной оси  $AA$  (параллельной оси  $OO$ , проходящей через центр масс тела) и расстояние  $l$  между осями  $AA$  и  $OO$  (рис. 1)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{\kappa} \cdot l^2 + \frac{4\pi^2}{\kappa} J_0. \quad (11)$$

Подчеркнем, что формула (11) верна при условии, что теорема Гюйгенса–Штейнера справедлива. Таким образом, чтобы проверить справедливость теоремы, необходимо экспериментально определить зависимость  $T^2 = f(l^2)$  и показать, что эта зависимость является линейной и удовлетворяет уравнению  $T^2 = a \cdot l^2 + C$ , где  $a$  и  $C$  – некоторые константы. Отметим, что угловой коэффициент прямой  $a$  в уравнении этой зависимости равен

$$a = \frac{4\pi^2 m}{\kappa}, \quad (12)$$

что дает возможность экспериментально определить значение модуля кручения оси в используемой установке

$$\kappa = \frac{4\pi^2 m}{a}. \quad (13)$$

Исходя из формулы (9), полученное значение модуля кручения оси к позволяет на используемой в работе установке определять момент инерции любого тела, зная период его крутильных колебаний относительно этой оси

$$J = \frac{\kappa}{4\pi^2} T^2. \quad (14)$$

## ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Для проведения измерений в работе используется установка, изображенная на рис. 2. Источником колебаний служит вал, скрепленный спиральной пружиной с треножником 1, устойчиво устанавливаемым на горизонтальную поверхность. На вал с помощью винта закрепляются тела разной геометрической формы (диск с диаметральными отверстиями 2, шар 3, сплошной 4 или полый 7 цилиндры, сплошной диск 6).

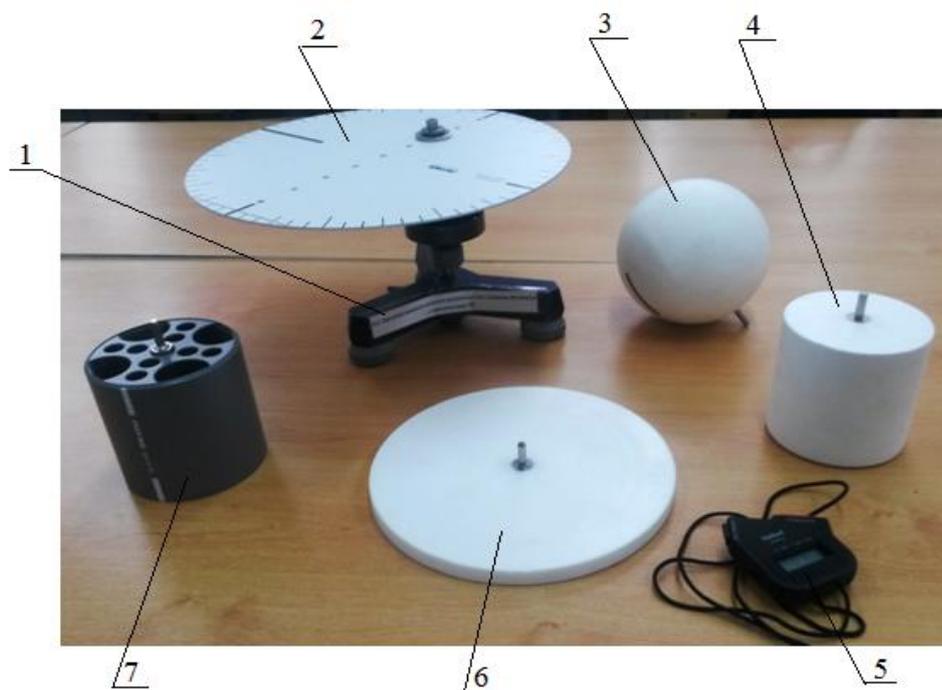


Рис. 2. Установка для измерения моментов инерции различных тел:

- 1 – треножник с вращающимся валом; 2 – диск с диаметральными отверстиями;  
3 – шар; 4 – сплошной цилиндр; 5 – секундомер; 6 – сплошной диск;  
7 – полый цилиндр.

# РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

## Правила безопасности

1. Не допускать падения исследуемых тел на твердые поверхности (стол, стул, пол и т.д.).
2. Не закручивать в ходе экспериментов вал в треножнике на углы, превышающие  $180^\circ$ , для предотвращения быстрого износа пружины, скрепляющей вал и треножник.

## Порядок выполнения работы

**Упражнение 1.** Определение модуля кручения оси и проверка теоремы Гюйгенса–Штейнера

1. Установите и закрепите диск с диаметрными отверстиями на вращающемся валу так, чтобы ось вращения проходила через центр диска. Данное положение диска соответствует  $l = 0$  см (рис. 3а).
2. Поверните диск на угол  $90^\circ$  и отпустите, измерьте время  $t$  десяти полных колебаний. Определите период колебаний  $T = t / 10$ . Повторите измерения 3 раза и запишите результаты в таблицу 1.

Таблица 1

$l$ , см	$T_1$ , с	$T_2$ , с	$T_3$ , с	$T_{\text{ср}}$ , с	$I^2$ , м <sup>2</sup>	$T_{\text{ср}}^2$ , с <sup>2</sup>	$K$ , кг·м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	$R$ , см	$m$ , г	$J_{\text{экс}}$ , кг·м <sup>2</sup>	$J_{\text{теор}}$ , кг·м <sup>2</sup>
0									435		
3											
6											
9											
12											

3. Определите экспериментально зависимость периода  $T$  крутильных колебаний диска от положения центра масс диска относительно оси вращения. Для этого установите и закрепите диск на вращающемся валу

так, чтобы ось вращения проходила через отверстие в диске на расстоянии  $l$  от его центра (рис. 3б). Повторите пункт 2 для разных значений  $l$  (расстояние между соседними отверстиями фиксировано и равно 3 см). Полученные значения периодов занесите в таблицу 1.

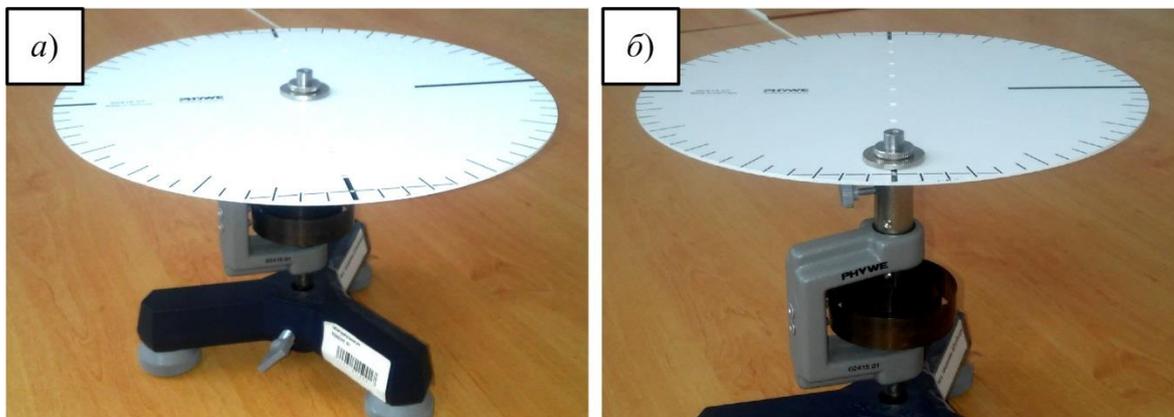


Рис. 3. Положение диска с диаметрными отверстиями на установке:

а) при значении  $l = 0$  см; б) при значении  $l = 12$  см

4. Для каждого положения диска относительно оси вращения рассчитайте среднеарифметическое значение периода колебаний  $T_{\text{ср}}$ , а также величины  $l^2$  и  $T_{\text{ср}}^2$ .
5. Постройте график зависимости  $T_{\text{ср}}^2 = f(l^2)$ .
6. Зная массу диска  $m$  и используя формулу (13), определите модуль кручения оси к по наклону прямой на графике зависимости  $T_{\text{ср}}^2 = f(l^2)$ .
7. Рассчитайте по формуле (14) экспериментальные значения момента инерции  $J_{\text{эксп}}$  диска при его различных положениях относительно оси вращения. Результаты расчетов занесите в таблицу 1.
8. Измерьте радиус диска с диаметрными отверстиями и по формулам (4) и (7) определите теоретические значения момента инерции  $J_{\text{теор}}$  диска при его различных положениях относительно оси вращения. Результаты расчетов занесите в таблицу 1.

**Упражнение 2.** Определение момента инерции твердых тел разной геометрической формы методом крутильных колебаний

1. По указанию преподавателя установите и закрепите на вращающийся вал шар, сплошной диск, сплошной или полый цилиндр.

2. Поверните исследуемое тело на угол  $90^\circ$  и отпустите, измерьте время  $t$  десяти его полных колебаний. Определите период колебаний  $T = t / 10$ . Повторите измерения 3 раза и запишите результаты в таблицу 2.

Таблица 2

Твердое тело	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T_3, \text{с}$	$T_{\text{ср}}, \text{с}$	радиусы	$m, \text{кг}$	$J_{\text{эксп}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$J_{\text{теор}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
Шар					$R = 7 \text{ см}$	0,750		
Сплошной цилиндр					$R = 5 \text{ см}$	0,380		
Полый цилиндр					$R_{\text{внеш}} = 5 \text{ см}$ $R_{\text{внут}} = 4,6 \text{ см}$	0,350		
Сплошной диск					$R = 11 \text{ см}$	0,305		

3. Рассчитайте среднеарифметическое значение периода колебаний  $T_{\text{ср}}$ .
4. Зная массу  $m$  исследуемого тела, рассчитайте по формуле (14) экспериментальное значение момента инерции  $J_{\text{эксп}}$ .
5. Зная радиус(ы) исследуемого тела, по формулам (4)–(6) определите теоретическое значение момента инерции  $J_{\text{теор}}$ .
6. Результаты расчетов занесите в таблицу 2.
7. Повторите пункты (1)–(5) для тел разной геометрической формы, **выбранных по указанию преподавателя**.
8. Сделайте вывод по проделанной работе.

### ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. В чем проявляется физическое единство законов, описывающих поступательное и вращательное движения?
2. Какие основные физические величины характеризуют вращательное движение? Дайте им определение.
3. Что называют моментом инерции тела? Какова размерность момента инерции тела?
4. В чем проявляется отличие момента инерции от массы тела?

5. Каким образом распределение массы тела в пространстве влияет на его момент инерции?
6. Выведите формулу для расчета момента инерции шара, цилиндра, диска относительно оси, проходящей через центр масс этих тел.
7. Как рассчитать момент инерции шара, имеющего внутреннюю полость в виде шара, стержня, прямоугольного параллелепипеда?
8. Сформулируйте теорему Гюйгенса–Штейнера. Какие ограничения накладываются на ориентацию оси, относительно которой рассчитывается момент инерции?
9. Какие физические величины должны быть измерены для определения момента инерции полого цилиндра относительно произвольной неподвижной оси, которая параллельна его оси симметрии?
10. Когда действительно утверждение, что момент возвращающей силы в крутильных колебаниях пропорционален углу отклонения тела?
11. Каков физический смысл имеет коэффициент угловой жесткости или модуля кручения оси (подвеса)?
12. Объясните метод определения модуля кручения оси (подвеса), используемый в данной работе. Как учитывается погрешность измерений данного метода?
13. Какие физические величины влияют на период колебаний тел, изучаемых в данной работе?
14. Объясните цели, которые преследуются в лабораторной работе при построении графика зависимости квадрата периода ( $T^2$ ) от квадрата расстояния ( $l^2$ ).
15. Каким образом влияет амплитуда колебаний на погрешности определения момента инерции твердых тел и модуля кручения оси (подвеса)?
16. Момент инерции тел различной формы определяют в работе экспериментальным и теоретическим путем. В каком случае точность выше и почему?

17. Можно ли применять теорему Гюйгенса-Штейнера в случае, когда ось вращения находится от оси, проходящей через центр масс тела, на расстоянии меньшем, чем линейные размеры тела? Ответ обосновать.
18. Докажите, что при углах поворота колеблющегося тела на угол, больший, чем  $10\text{--}20^\circ$ , период колебаний зависит от амплитуды колебаний.
19. Как определить угловую скорость колеблющихся тел в момент прохождения ими положения равновесия в данной работе?
20. Как можно определить максимальную кинетическую энергию колеблющихся тел в данной работе?
21. Если свинцовый цилиндр сплющить в тонкий диск, как изменится его момент инерции относительно оси симметрии тела?
22. Под действием касательной силы  $F$  диск массой  $m$  и радиусом  $R$  приобретает угловое ускорение  $\epsilon$  относительно его оси симметрии. При каких значениях массы и радиуса диска может быть получено прежнее значение углового ускорения  $\epsilon$ , если касательная вращающая сила уменьшена в  $k$  раз? Дайте обоснованный ответ в виде аналитического доказательства.
23. Каким образом атлет, прыгая с трамплина в воду, управляет скоростью своего вращения?
24. Как измерить момент инерции Земли, Луны и молекулы кислорода?
25. При длительном пребывании в невесомости космонавты обычно худеют. Как можно измерить массы тела космонавтов в невесомости?

## ГЛОССАРИЙ

**Амплитуда** – наибольшее отклонение колеблющегося тела от положения равновесия при механическом колебании.

**Вращательное движение** – вид механического движения системы точек (абсолютно твёрдого тела), при котором все точки описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Центры всех окружностей лежат

при этом на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям окружностей и называемой осью вращения. Ось вращения может располагаться внутри тела и за его пределами.

**Инертность** – свойство тел оставаться в некоторых системах отсчёта в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения в отсутствие или при взаимной компенсации внешних воздействий.

**Крутильные колебания** – механические колебания, при которых упругие элементы системы испытывают деформации сдвига.

**Материальная точка** – такое тело, размерами и формой которого можно пренебречь в сравнении с размерами других тел или расстояниями до них в условиях данной задачи.

**Механическое движение** – изменение взаимного расположения тел относительно друг друга в пространстве с течением времени. Любое механическое движение относительно.

**Момент импульса** – физическая величина, характеризующая количество вращательного движения. Величина, зависящая от того, сколько массы вращается, как она распределена относительно оси вращения и с какой скоростью происходит вращение.

**Момент инерции** – скалярная физическая величина, являющееся мерой инертности во вращательном движении вокруг оси, подобно тому, как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении.

**Момент силы** – векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора, проведённого от оси вращения к точке приложения силы, на вектор этой силы. Характеризует вращательное действие силы на твёрдое тело.

**Основной закон динамики вращательного движения** – скорость изменения момента импульса  $L$  вращающейся системы материальных точек определяется суммарным моментом  $M$  внешних сил, действующих на эту систему:

$$M = \frac{dL}{dt}.$$

**Ось вращения** – прямая, неподвижная относительно вращающегося вокруг неё твердого тела.

**Плотность материала** – скалярная физическая величина, определяемая как отношение массы тела к занимаемому этим телом объёму.

**Твердое тело** – одно из четырех агрегатных состояний вещества, отличающееся от других агрегатных состояний (жидкости, газов, плазмы) стабильностью формы и характером теплового движения атомов, совершающих малые колебания около положений равновесия.

**Теорема Штейнера** – момент инерции  $J$  тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции  $J_0$  этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $l$  между осями:  
$$J = J_0 + m \cdot l^2.$$

**Угловая скорость** – величина, характеризующая скорость вращения материальной точки вокруг центра вращения. Для вращения в двухмерном пространстве угловая скорость выражается числом, в трёхмерном пространстве представляется псевдовектором (аксиальным вектором).

**Угловое ускорение** – величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости твёрдого тела. Псевдовекторная физическая величина, равная первой производной от псевдовектора угловой скорости по времени.

**Центр масс** – геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц как целого.

Учебное издание

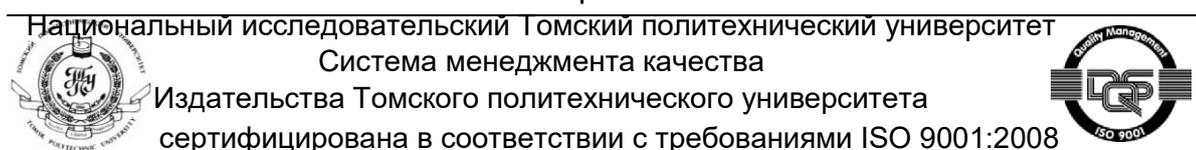
Святкин Леонид Александрович

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛ РАЗНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Методические указания к выполнению лабораторной работы 1-066  
по курсу «Физика 1» по разделу «Механика»  
для студентов всех направлений и специальностей

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в  
полном соответствии с качеством  
предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати 00.00.2017. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».  
Печать XEROX. Усл. печ. л. 9,01. Уч.-изд. л. 8,16.  
Заказ 000-17. Тираж 100 экз.



**ИЗДАТЕЛЬСТВО**  **ТПУ**, 634050, г. Томск, пр.  
Ленина, 30 Тел./факс: 8(3822)56-35-  
35, [www.tpu.ru](http://www.tpu.ru)