

Тема 2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Базисная система гармонических функций. – Тригонометрический ряд Фурье. – Амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала. – Историческая справка. – Комплексный ряд Фурье. – Понятие отрицательной частоты. – Спектры простейших периодических сигналов. – Условия и теорема Дирихле. – Явление Гиббса. – Распределение мощности в спектре периодического сигнала. – Практическая ширина спектра периодического сигнала.

2.1. Базисная система сигналов

При формировании математической модели сигнала могут использоваться различные системы ортогональных функций. Однако наибольшее распространение получила система, в которой базис образуют ортогональные гармонические функции:

$$1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \dots, \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin n\omega_1 t, \dots \quad (2.1)$$

Это объясняется тем, что гармоническая функция является единственной, которая сохраняет свою форму при прохождении через линейные системы, то есть если на входе линейной системы действует гармонический сигнал, то на ее выходе сигнал по окончании переходного процесса будет гармоническим, отличаясь от входного лишь амплитудой и начальной фазой. Графики нескольких первых функций системы показаны на рис. 2.1.

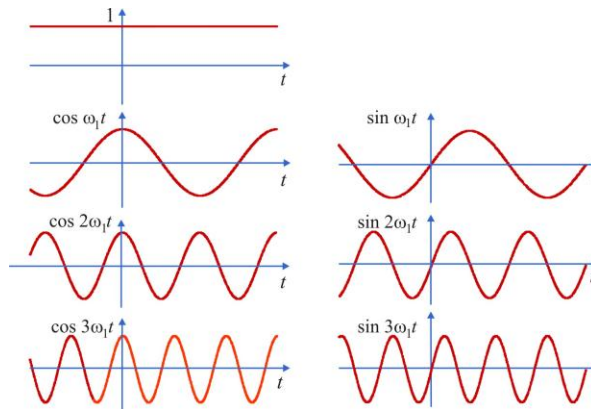


Рис. 2.1. Базисные тригонометрические функции

Система тригонометрических функций (2.1) является полной и ортогональной на интервале длительностью $T = 2\pi/\omega_1$. Условия ортогональности имеют вид:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t \cdot dt = \begin{cases} 0 & \text{для } n \neq m, \\ T/2 & \text{для } n = m, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t \cdot dt = \begin{cases} 0 & \text{для } n \neq m, \\ T/2 & \text{для } n = m, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t \cdot dt = 0. \quad (2.4)$$

В качестве примера покажем справедливость соотношения (2.2). Сначала преобразуем подынтегральную функцию:

$$\cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t = \frac{1}{2} \cos(n-m)\omega_1 t + \frac{1}{2} \cos(n+m)\omega_1 t.$$

После этого для первого интеграла при $n \neq m$ найдем

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t \cdot dt = \frac{1}{2(n-m)\omega_1} \sin(n-m)\omega_1 t \Big|_{t_0}^{t_0+T} + \frac{1}{2(n+m)\omega_1} \sin(n+m)\omega_1 t \Big|_{t_0}^{t_0+T} = 0.$$

При $n = m$ получим

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\omega_1 t \cdot dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos 2n\omega_1 t \cdot dt = \frac{T}{2}.$$

Подобным образом можно убедиться в справедливости соотношений (2.3) и (2.4).

2.2. Тригонометрический ряд Фурье

Всякая периодическая функция времени $x(t)$, которая в пределах периода ее изменения T удовлетворяет условиям Дирихле (о них скажем позже), может быть представлена в виде разложения по тригонометрическим функциям Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t]. \quad (2.5)$$

Этот ряд называется тригонометрическим рядом Фурье. Коэффициенты ряда определяются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt; \quad (2.6)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos n\omega_1 t dt; \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin n\omega_1 t dt. \quad (2.8)$$

При расчете коэффициентов ряда Фурье необходимо выбрать начальный момент времени t_0 периода интегрирования в формулах (2.6)–(2.8). Как правило, значение t_0 выбирают так, чтобы упростить вычисления. Обычно, исходя из этого условия, принимают $t_0 = -T/2$. При этом формулы (2.6)–(2.8) приобретают следующий вид:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt; \quad (2.9)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos n\omega_1 t dt; \quad (2.10)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin n\omega_1 t dt. \quad (2.11)$$

Непосредственно из формул (2.9)–(2.11) следуют два свойства, которые упрощают вычисления коэффициентов ряда Фурье в случае, когда функция $x(t)$ удовлетворяет условиям нечетности или четности.

Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, является нечетной, то есть $x(t) = -x(-t)$, то коэффициенты $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и в разложении (2.5) остаются только синусоидальные составляющие:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \omega_1 t.$$

Если функция $x(t)$, описывающая сигнал, является четной, то есть $x(t) = x(-t)$, то коэффициенты $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, и в разложении (2.5) остаются только постоянная и косинусоидальные составляющие:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega_1 t).$$

Получила распространение и другая форма записи тригонометрического ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \omega_1 t + \phi_n), \quad (2.12)$$

где амплитуда A_n и фаза ϕ_n n -ой гармонической составляющей связаны с коэффициентами a_n и b_n соотношениями:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \phi_n = \arg(a_n - j b_n) = -\arctg \frac{b_n}{a_n} \quad (2.13)$$

или

$$a_n = A_n \cos \phi_n; \quad b_n = A_n \sin \phi_n. \quad (2.14)$$

Согласно (2.12) периодический сигнал $x(t)$ содержит в себе независящую от времени постоянную составляющую $a_0/2$ и бесконечный набор гармонических колебаний, так называемых гармоник, с частотами $\omega_n = n \omega_1$ ($n = 1, 2, \dots$), кратными основной частоте $\omega_1 = 2\pi/T$ периодического сигнала. Спектральную составляющую с частотой ω_1 называют *основной гармоникой*, а составляющие с частотами $\omega_n = n \omega_1$ ($n > 1$) – *высшими гармониками* периодического сигнала.

Представление произвольного сигнала в виде совокупности постоянной составляющей и суммы гармонических колебаний с кратными частотами называют *спектральным разложением* этого сигнала в базисе гармонических функций, или *гармоническим анализом* сигнала.

Совокупности величин A_n и ϕ_n ($n = 1, 2, \dots$) называют соответственно *амплитудным и фазовым* частотными спектрами сигнала или, иначе, спектром амплитуд и спектром фаз. Графически частотные спектры изображают в виде отрезков A_n , ϕ_n , проведенных перпендикулярно к оси, на которую наносятся значения 0 , ω_1 , $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1, \dots$ (рис.2.2). Спектр периодического сигнала называется *линейчатым* или *дискретным*, так как состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам.

там $\omega = n \cdot \omega_1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Графическое изображение амплитудного и фазового частотных спектров принято называть *амплитудной и фазовой спектральной диаграммами*.

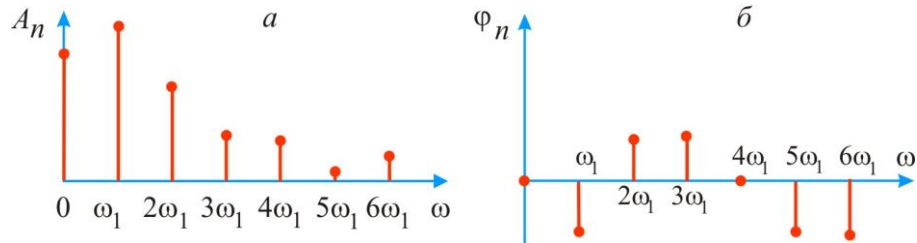


Рис.2.2. Спектральные диаграммы периодического сигнала:
 a – амплитудная; b – фазовая.

Отметим, что между периодическими сигналами и их частотными спектрами существует взаимно-однозначное соответствие: периодический сигнал $x(t)$ полностью определяет ее частотные спектры и, наоборот, имея частотные спектры, можно определить, какому периодическому сигналу они принадлежат. Имея в виду это соответствие, при решении многих практических задач операции над периодическими сигналами заменяют операциями над частотными спектрами сигналов.

Спектр сигналов, описываемых относительно гладкими функциями, быстро убывает (с ростом номера коэффициенты быстро стремятся к нулю). Спектр относительно «изрезанных» сигналов убывает медленно, так как для представления разрывов и «изломов» функции нужны синусоиды с большими частотами.

2.3. Комплексный (экспоненциальный) ряд Фурье

Применяется также запись ряда Фурье в комплексной форме, получаемая при замене тригонометрических функций экспоненциальными с введением в рассмотрение комплексных величин.

Тригонометрический ряд Фурье записывается в виде

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t]. \quad (2.15)$$

По формулам Эйлера имеем:

$$\cos n\omega_1 t = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2};$$

$$\sin n\omega_1 t = j \frac{-e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}.$$

Подставив эти выражения в (2.12), получим

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right). \quad (2.16)$$

Запись формулы (2.16) можно упростить. Для этого введем в рассмотрение отрицательные индексы n и с учетом, что коэффициенты a_n четны, а коэффициенты b_n нечетны относительно индексов, обозначим

$$c_n = \frac{a_n - j b_n}{2} \quad \text{для } n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Тогда, объединив все слагаемые в (2.16) под один знак суммы, придем к следующей форме записи ряда Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j n \omega_1 t}, \quad (2.18)$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j n \omega_1 t} dt. \quad (2.19)$$

Достоинством этой формы записи ряда Фурье является компактность. Согласно (2.18) сигнал $x(t)$ представлен суммой комплексных составляющих вида $c_n e^{j n \omega_1 t}$, где n изменяется от $-\infty$ до ∞ . Отрицательному значению n соответствует отрицательная частота $-n\omega_1$. Очевидно, что отрицательные частоты в природе не существуют. Они являются математической абстракцией и появляются в результате формального представления гармонических функций в комплексной форме. Легко показать, что при переходе от комплексной формы записи (2.18) к тригонометрической (2.15) отрицательная частота исчезает. Выделим в ряде (2.18) пару слагаемых, соответствующих некоторому значению n :

$$x_n(t) = \frac{a_n - j b_n}{2} e^{j n \omega_1 t} + \frac{a_n + j b_n}{2} e^{-j n \omega_1 t}.$$

Векторная диаграмма этих комплексных составляющих ряда показана на рис. 2.3. Векторы с длиной $|c_n|$ вращаются с угловой частотой $n\omega_1$ во взаимно противоположных направлениях. Сумма этих векторов дает вещественную функцию

$$x_n(t) = 2 |c_n| \cos(n \omega_1 t + \varphi_n).$$

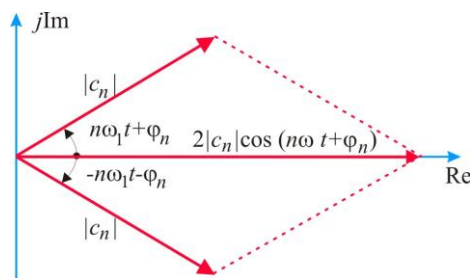
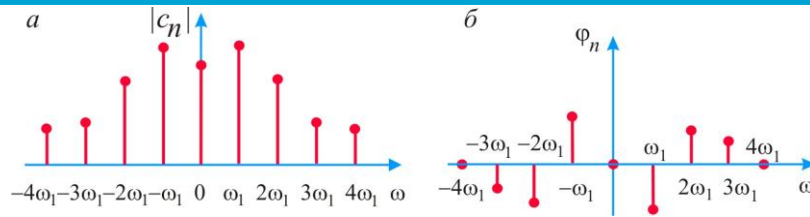


Рис.2.3. Векторная диаграмма гармонического сигнала

Коэффициенты c_n являются комплексными величинами. Поэтому для представления периодического сигнала в частотной области в общем случае необходимо иметь два вещественных спектра: амплитудный спектр $|c_n|$ и фазовый спектр $\varphi_n = \arg c_n$. Спектральные диаграммы при использовании комплексного ряда Фурье строятся как для положительных, так и для отрицательных значений ω (или n). Легко убедиться в том, что амплитудный спектр является четной функцией, фазовый спектр – нечетной функцией. и в общем случае имеют вид, подобный показанному на рис.2.4.

Рис.2.4. Спектральные диаграммы: a – амплитудная; b – фазовая.

Для положительных n коэффициенты тригонометрического и комплексного рядов Фурье, как следует из (2.13) и (2.17), связаны следующим образом:

$$|c_n| = A_n/2, \quad \varphi_n = \arg c_n = \arg(a_n - j b_n).$$

Историческая справка

Основы математического аппарата гармонического анализа были заложены еще в середине XVIII века. Именно тогда Даламбер получил уравнение колебания струны, а Д. Бернулли записал общее решение этого уравнения в форме ряда, содержащего гармонические функции. Затем в 1755 году Л. Эйлер, развивая работы Д. Бернулли, нашел связь между коэффициентами ряда и параметрами струны. Эйлер первым указал на возможность аппроксимации произвольных функций тригонометрическими рядами.

Спустя полвека, на сессии Французской академии наук 21 декабря 1807 года математик и инженер Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830) сделал сообщение, ставшее историческим. Фурье, изучавший проблему теплопроводности, заявил, что произвольную функцию, заданную на конечном интервале, *всегда* можно представить в виде суммы синусоидальных и косинусоидальных составляющих. Как утверждал Фурье, функция может состоять из произвольного числа «кусков», аналитическое выражение которых совершенно различно. Не требуется и непрерывность функций. Членам академии, в том числе и великому аналитику Лагранжу, утверждение Фурье показалось совершенно невероятным. В то время считалось, что гармонический анализ можно применять лишь к функциям, которые не только непрерывны, но имеют и непрерывные производные любого порядка.

Фурье снял это ограничение и дал примеры гармонического анализа функций, имевших конечное число разрывов на заданном интервале. Фурье не смог предложить строгих доказательств своего утверждения. Последующие исследования, однако, показали, что утверждение Фурье было абсолютно справедливо. Через несколько лет его исследования были обобщены и получили теоретическое подтверждение в работах математиков Ш. Штурма и Ж. Лиувилля. Дирихле детально исследовал условия, при которых «произвольная функция» Фурье может быть представлена гармоническим рядом Фурье. Теоретические исследования Фурье быстро нашли и практическое применение. Английский ученый У. Томсон (лорд Кельвин) создал первый механический гармонический анализатор и использовал его для предсказания высоты приливов. В своих оптических исследованиях применял гармонический анализатор А. Майкельсон.

2.4. Спектры простейших периодических сигналов

Прямоугольное колебание

Рассмотрим спектральный состав прямоугольного колебания (рис.2.5), которое часто называют *меандром*. Покажем одновременно, как влияет выбор начала отсчета времени на спектр этого сигнала.

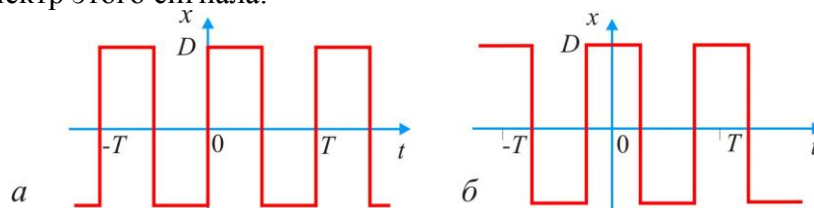


Рис. 2.5. График прямоугольных колебаний (меандра)

Вариант 1. Пусть начало отсчета времени совпадает с началом положительной полуволны (рис.2.5,а). В этом случае функция $x(t)$, описывающая сигнал, является нечетной. Согласно приведенным выше формулам имеем:

$$a_n = \frac{2D}{T} \int_{-T/2}^0 (-1) \cos n \omega_1 t dt + \int_0^{T/2} \cos n \omega_1 t dt = 0,$$

$$b_n = \frac{2D}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) \sin n \omega_1 t dt + \int_0^{T/2} \sin n \omega_1 t dt \right] = \frac{2D}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что коэффициенты b_n при четных n равны нулю. Поэтому ряд Фурье записывается в следующем виде

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_1 t + \dots \right). \quad (2.20)$$

Ряд (2.20) можно привести к форме записи (2.12). В результате будем иметь

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left[\cos \left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \cos \left(3 \omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \cos \left(5 \omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right]. \quad (2.21)$$

Результаты гармонического анализа прямоугольного колебания в виде значений амплитуды и фазы гармонических составляющих согласно (2.21) приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1.

n	–	1	2	3	4	5	6	7
A_n	–	$4D/\pi$	0	$4D/3\pi$	0	$4D/5\pi$	0	$4D/7\pi$
φ_n	рад	$-\pi/2$	-	$-\pi/2$	-	$-\pi/2$	-	$-\pi/2$

Вариант 2. Рассмотрим вариант, когда начало отсчета времени располагается в середине импульса (рис.2.5,б). Теперь функция $x(t)$, описывающая прямоугольное колебание, будет четной относительно t . Для этого случая получим

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0;$$

$$a_n = \frac{4D}{T} \left[\int_0^{T/4} \cos n \omega_1 t dt + \int_{T/4}^{T/2} (-1) \cos n \omega_1 t dt \right] = \frac{4D}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ряд Фурье приобретает вид

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3 \omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5 \omega_1 t + \dots \right) \quad (2.22)$$

После приведения ряда (2.21) к форме записи (2.12) получим

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left[\cos \omega_1 t + \frac{1}{3} \cos (3 \omega_1 t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5 \omega_1 t + \dots \right]. \quad (2.23)$$

Результаты этого варианта гармонического анализа прямоугольного колебания приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2.

n	-	1	2	3	4	5	6	7
A_n	-	$4D/\pi$	0	$4D/3\pi$	0	$4D/5\pi$	0	$4D/7\pi$
φ_n	рад	0	-	$-\pi$	-	0	-	$-\pi$

Сравнивая выражения (2.21) и (2.23), или данные гармонического анализа в табл. 2.1 и 2.2, можно сделать следующее заключение. При смещении начала отсчета амплитудный спектр сигнала не изменяется, изменяется лишь фазовый спектр.

Из выражений (2.21) и (2.22) следует, что в разложении прямоугольного колебания отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники. На рис.2.6 сплошными линиями показаны графики функции $x^*(t)$, полученные при учете различного числа членов ряда.

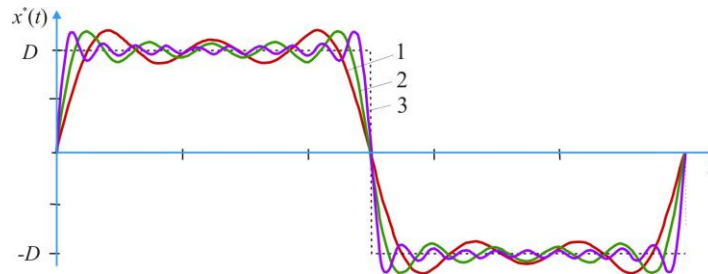


Рис. 2.6. Аппроксимация прямоугольного колебания
усеченным рядом Фурье с различным числом N гармоник:
1 – $N=5$, 2 – $N=9$, 3 – $N=19$

Вариант 3. Найдем разложение прямоугольного колебания в комплексный ряд Фурье (2.18). Приняв за начало отсчета начало положительной полуволны (рис.2.5,a), для коэффициентов ряда согласно (2.19) будем иметь

$$c_n = \frac{D}{T} \int_{-T/2}^0 (-1)e^{-jn\omega_1 t} dt + \frac{D}{T} \int_0^{T/2} e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

После несложных преобразований получим

$$c_n = \frac{D}{j2\pi n} (1 - e^{-j\pi n}) = \frac{D}{j\pi n} (1 - \cos \pi n).$$

Значения модуля и аргумента коэффициентов c_n комплексного ряда Фурье, рассчитанные по этой формуле, приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2.

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$ c_n $...	$2D/3\pi$	0	$2D/\pi$	0	$2D/\pi$	0	$2D/3\pi$...
φ_n	...	$\pi/2$	-	$\pi/2$	-	$-\pi/2$	-	$-\pi/2$...

Пилообразный сигнал

Рассмотрим пилообразный сигнал (рис. 2.7). В пределах периода этот сигнал описывается линейной функцией:

$$x(t) = \frac{2D}{T}t, \quad -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}. \quad (2.24)$$

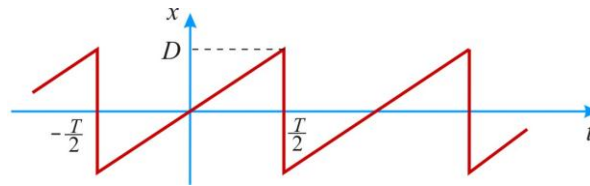


Рис. 2.7. График пилообразного сигнала

Данная функция является нечетной. Поэтому коэффициенты ряда Фурье, записанного в тригонометрической форме, равны:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.26)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2D}{T}t \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = -\frac{2D}{\pi n} \cos n\pi = \frac{2D}{\pi n} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Ряд Фурье записывается в следующем виде:

$$x(t) = \frac{2D}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega_1 t) + \dots \right].$$

Последовательность прямоугольных импульсов

Найдем спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой D , длительностью τ и периодом следования T (рис. 2.8). На интервале $(-T/2, T/2)$ сигнал описывается функцией

$$x(t) = \begin{cases} D & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

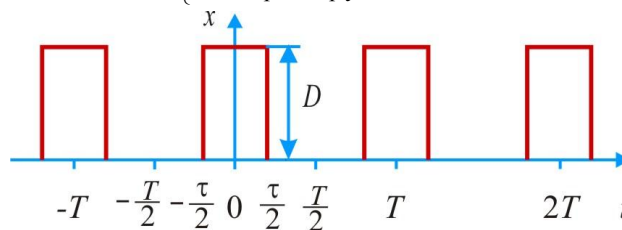


Рис. 2.8. Последовательность прямоугольных импульсов

Функция $x(t)$ является четной, поэтому ряд Фурье содержит только постоянную и косинусоидальные составляющие. Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D dt = 2E \frac{\tau}{T};$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2D\tau}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_1 \tau / 2)}{n\omega_1 \tau / 2} \right] = \frac{2D}{\pi n} \sin \frac{n\pi\tau}{T}. \quad (2.28)$$

Амплитуды гармонических составляющих равны

$$A_n = |a_n| = \frac{2D}{\pi n} \left| \sin \frac{n\pi\tau}{T} \right|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.29)$$

На рис. 2.9 приведена амплитудная спектральная диаграмма исследуемой последовательности импульсов в относительных единицах A_n/D для $\tau/T = 0.5$.

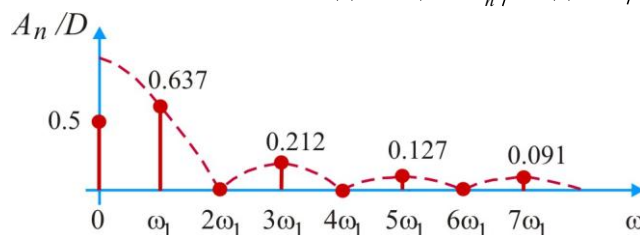


Рис. 2.9. Амплитудная спектральная диаграмма последовательности прямоугольных импульсов для $\tau/T = 0.5$

2.5. Условия сходимости ряда Фурье. Явление Гиббса

Итак, периодический сигнал, описываемый на интервале $[-T/2, T/2]$ функцией $x(t)$, может быть описан тригонометрическим рядом Фурье (2.7). При практических расчетах в тригонометрическом ряду Фурье учитывается конечное число N членов ряда и исходная функция аппроксимируется усеченным рядом

$$x^*(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n \omega_1 t) + b_n \sin(n \omega_1 t)]. \quad (2.30)$$

Очевидно, представляют огромный практический интерес:

- условия, при выполнении которых аппроксимирующая функция $x^*(t)$ сходится к исходной функции $x(t)$;
- особенности поведения аппроксимирующей функции $x^*(t)$ при увеличении числа N членов ряда.

Как отмечалось выше, функция, разлагаемая в ряд Фурье, должна удовлетворять условиям Дирихле. Эти условия формулируются следующим образом.

Функция $x(t)$ на интервале $[-T/2, T/2]$:

- 1) должна иметь конечное число максимумов и минимумов;
- 2) может иметь разрывы непрерывности первого рода при некоторых значениях аргумента $t = t_i$, число которых должно быть конечно;
- 3) должна иметь конечные (равные или неравные между собой) предельные значения $x(-T/2 + 0)$ и $x(T/2 - 0)$.

На рис. 2.10 показан график функции, имеющей пять разрывов непрерывности первого рода и неравные предельные значения $x(-T/2 + 0)$ и $x(T/2 - 0)$. Такая функция удовлетворяет приведенным выше условиям Дирихле.

Если функция удовлетворяет условиям Дирихле, то в отношении ее может быть доказана следующая теорема, называемая теоремой Дирихле.

Теорема. Если заданная функция $x(t)$ в промежутке от $-T/2$ до $T/2$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для всех значений t этого же промежутка предел суммы N первых членов ряда Фурье при неограниченном увеличении числа N :

- 1) равен $x(t)$ во всех точках непрерывности внутри промежутка;
- 2) равен $[x(t_i - 0) + x(t_i + 0)]/2$ во всех точках разрыва;

3) равен $[x(-T/2 + 0) + x(T/2 - 0)]/2$ на концах промежутка.

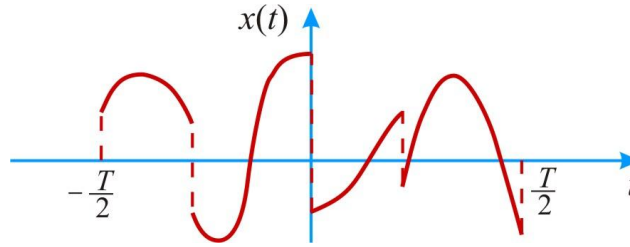


Рис.2.10. Пример сигнала, удовлетворяющего условиям Дирихле

Ряд Фурье обеспечивает наилучшее в смысле среднеквадратической погрешности приближение к исходной функции. Это значит, что если число членов ряда Фурье ограничено и исходный сигнал $x(t)$ аппроксимирован функцией $x^*(t)$, то наименьшая среднеквадратическая ошибка

$$M = \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - x^*(t)]^2 dt \quad (2.31)$$

имеет место в том случае, когда коэффициенты ряда Фурье определены по формулам (2.9) - (2.11). С увеличением числа членов ряда Фурье ранее подсчитанные коэффициенты не изменяются, а среднеквадратическая ошибка (2.31) уменьшается.

Явлением Гиббса называется особенность поведения усеченного ряда (2.30) Фурье в окрестности точки разрыва функции, проявляющаяся в виде выбросов. Впервые это явление было обнаружено в 1848 г. Уилбрейамом и позже переоткрыто в 1898 г. Дж. Гиббсом.

При добавлении гармоник все более высоких порядков аппроксимирующая функция $x^*(t)$ приближается к исходной во всех точках за исключением точек разрыва. Согласно теореме Дирихле аппроксимирующая функция $x^*(t)$ стремится к значению, равному среднеарифметическому значений слева и справа от точки разрыва. Однако это не единственная особенность, обусловленная наличием разрыва функции $x(t)$. Вблизи точки разрыва, слева и справа от нее, функция $x^*(t)$ имеет выбросы (рис. 2.11). Добавление новых гармоник сдвигает эти выбросы к точкам разрыва и уменьшает их длительность, но размах выброса остается постоянным и составляет 18%.

Для многих аналитических исследований наличие явления Гиббса вызывает определенные трудности.

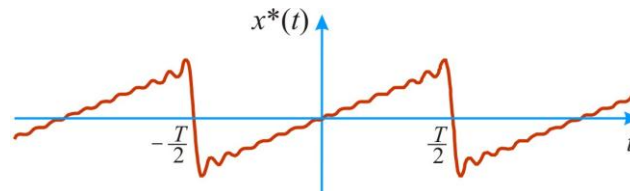


Рис. 2.11. Аппроксимация пилообразного колебания усеченным рядом Фурье при $N = 15$

2.6. Распределение мощности в спектре периодического сигнала

Пусть сигнал $x(t)$ (ток, напряжение) представляет собой сложную периодическую функцию времени с периодом T . Энергия такого сигнала, длящегося от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, бесконечно велика. Основным интересом представляет средняя мощность периодического сигнала и распределение этой мощности между отдельными гармониками. Очевидно, что средняя мощность периодического сигнала совпадает со средней мощностью за период и она в предположении, что сопротивление нагрузки равно 1 Ом, записывается в виде

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt. \quad (2.32)$$

Представим сигнал $x(t)$ рядом Фурье

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n). \quad (2.33)$$

Подставив (2.33) в (2.32), получим

$$\begin{aligned} P_{\text{cp}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^T \frac{A_0^2}{4} dt + \frac{A_0}{T} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^T \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) dt + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n,m=1, n \neq m}^{\infty} A_n A_m \int_0^T \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \cos(m\omega_1 t + \varphi_m) dt + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_0^T \cos^2(n\omega_1 t + \varphi_n) dt \right). \end{aligned}$$

Вторая и третья группы слагаемых в силу ортогональности гармонических функций обращаются в нуль. Интегрирование оставшихся слагаемых дает

$$P_{\text{cp}} = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

Таким образом, *средняя мощность периодического сигнала равна сумме средних мощностей, выделяемых отдельными гармониками и его постоянной составляющей.*

Для усеченного ряда будем иметь

$$P_{\text{cp}}^* = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2.$$

Отметим, что средняя мощность не зависит от фаз отдельных гармоник. Это означает, что изменение формы сигнала, получающегося при нарушении фазовых соотношений внутри спектра, не связано с изменением средней мощности сигнала. Отсюда также следует, что для определения средней мощности выбор начала отсчета при разложении в ряд Фурье не играет роли.

Пример. Рассмотрим пилообразный сигнал, описываемый функцией (2.24). Средняя мощность, выделяемая сигналом в активном сопротивлении $R = 1 \text{ Ом}$, равна

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{2D}{T} t \right)^2 dt = \frac{8D^2}{T^3} \int_0^{T/2} t^2 dt = \frac{D^2}{3} = 0.333D^2$$

Согласно (2.26) и (2.27) амплитуды гармоник равны

$$A_n = |b_n| = \frac{2D}{\pi n}.$$

Средняя мощность, выделяемая в активном сопротивлении $R = 1 \text{ Ом}$ N гармониками, равна

$$P_{\text{ср}}^* = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 = \frac{2D^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}. \quad (2.34)$$

При $N = 10$ из (2.34) получим $P_{\text{ср}}^* = 0.314D^2 = 0.943P_{\text{ср}}$. При $N = 50$ будем иметь $P_{\text{ср}}^* = 0.329D^2 = 0.988P_{\text{ср}}$.

2.7. Практическая ширина спектра

Реальные устройства и системы из-за наличия в них инерционных элементов не могут передавать колебания сколь угодно высоких частот. Следовательно, при решении практических задач, связанных с передачей периодических сигналов через устройства и системы, может быть учтено лишь определенное количество гармонических составляющих.

В связи с этим вводится понятие *практической ширины спектра*. Очевидно, необходимо учитывать ту часть спектра сигнала, которая содержит гармонические составляющие с относительно большими амплитудами. Поэтому под *практической шириной спектра* сигнала понимается та область частот, в пределах которой лежат гармонические составляющие сигнала с амплитудами, превышающими наперед заданную величину. С энергетической точки зрения практическая ширина спектра может быть определена как область частот, в пределах которой сосредоточена подавляющая часть мощности сигнала.

Пример. Рассмотрим периодическую последовательность прямоугольных импульсов (рис.2.8) с амплитудой D , периодом следования T и длительностью $\tau = T/2$.

Определим практическую ширину спектра, если требуется учесть все гармонические составляющие сигнала, амплитуды которых более 10% от амплитуды первой гармоники.

Согласно формуле (2.29) амплитуды гармонических составляющих при $\tau = T/2$ равны

$$A_n = \frac{2D}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Число подлежащих учету гармоник n может быть получено из выражения

$$\frac{A_n}{A_1} = \frac{2D}{n\pi} \cdot \frac{\pi}{2D} = \frac{1}{n} = 0.1.$$

Отсюда $n = 10$. Практическая ширина спектра составляет $10\omega_1$.

Контрольные задания

1. Поясните свойства периодических функций.
2. Охарактеризуйте основные особенности базисной системы, состоящей из тригонометрических функций.
3. Докажите соотношение (2.3).
4. Какие формы записи гармонических функций используются в рядах Фурье?
5. Как отразится на значениях A_n и φ_n тригонометрического ряда Фурье изменение положения отсчета времени $t = 0$?
6. Поясните причины, которые позволяют упростить расчеты коэффициентов a_n, b_n тригонометрического ряда Фурье для нечетных и четных функций.
7. Как возникает понятие отрицательной частоты?
8. Поясните отличия спектральных диаграмм, построенных на основе тригонометрической и комплексной форм записи ряда Фурье.
9. Как изменится спектр последовательности прямоугольных импульсов, если уменьшить длительность τ и период T импульсов в два раза?