

## Математическое моделирование

Доцент, к.ф.-м.н. Демидов Валерий Николаевич

Курс IV

**Цель:** дать студентам необходимые теоретические сведения по методам построения и анализа математических моделей типовых элементов технических систем; научить студентов применять математические методы на практике с использованием современных универсальных программных продуктов (MathCAD).

**Содержание:** техническая система, математическая модель, вычислительный эксперимент, методология математического моделирования, экспериментальная факторная модель, идентификация модели, иерархические уровни моделирования, математическая модель технического объекта на макроуровне, качественный анализ динамических систем, переходные процессы в динамических системах, математические модели систем с распределенными параметрами, постановка задач для гиперболических, параболических и эллиптических уравнений, численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

### 1. Цели и задачи курса:

«Математическое моделирование»

Математическое моделирование оформилось в последние десятилетия в отдельную междисциплинарную область знаний с присущими ей объектами, подходами и методами исследования. И поскольку математика (по словам Н.Винера) – это больше, чем наука, это – язык науки, математическое моделирование проникает сейчас во все области человеческой деятельности. В этой связи все более актуальной становится задача целенаправленной подготовки специалистов, обладающих фундаментальной подготовкой не только в какой-либо предметной области знаний, но и широкой математической эрудицией.

Что касается студентов технических вузов, будущих инженеров, то курс «математического моделирования» является обязательным звеном их общетеоретического образования, поскольку в своей работе - исследовательской, конструкторской, производственной - они постоянно будут сталкиваться с необходимостью построения и исследования математических моделей.

Следует отметить, что такие программные комплексы как ANSYS, NASTRAN, ABAQUS, позволяют без особых творческих усилий решать большинство типовых задач. Но в инженерной практике приходится решать в основном новые, нестандартные задачи, не имеющие близких аналогов. Известны печальные примеры, когда формальное обращение к программным комплексам, без глубокой предварительной проработки концептуальной и математической постановки задачи, приводило к неверным результатам. Поэтому следует помнить, что современные компьютеры и их программное

обеспечение, освобождая нас от многих забот и обязанностей, не освобождает, во всяком случае, от двух из них – от необходимости знать математику и творчески мыслить. Курс «математического моделирования» призван формировать соответствующий стиль мышления.

При подготовке бакалавров по направлению 552900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств» данный курс дает студентам необходимый минимум знаний о методах построения математических моделей технических объектов и прививает навыки исследования этих моделей с использованием компьютерной техники.

Курс лекций ориентирован в основном на научно-исследовательскую работу. При отборе материала для лекционного курса выделены модели, соответствующие трем различным иерархическим уровням декомпозиции объекта моделирования. Это модели микроуровня, описываемые уравнениями в частных производных, модели макроуровня, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями и модели метауровня, описываемые конечными аналитическими соотношениями. Существенное внимание уделено вопросам построения конечно-разностных схем и их численной реализации. Однако ввиду ограниченности курса практически не затрагиваются такие важные вопросы, как оптимизация параметров технических систем, аналитические методы анализа моделей, упрощение моделей методами теории размерностей, имитационное моделирование, метод статистических испытаний.

Студенты, прослушавшие данный курс, должны

- владеть методологией вычислительного эксперимента;
- уметь строить модели технических объектов на микро-, макро- и метауровне;
- владеть техникой метода наименьших квадратов в линейном и нелинейном вариантах;
- знать основные численные методы, применяемые при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных;
- уметь проводить численный анализ математических моделей на персональных компьютерах с использованием системы MatCAD;

## **2. Содержание дисциплины**

### **2.1 Содержание лекционного курса:**

2.1.1 Инженерные задачи и методология вычислительного эксперимента. Основные понятия.

- Основные типы задач (прямые задачи, обратные задачи, задачи идентификации).
- Вычислительный эксперимент (основные этапы решения сложных инженерных задач).

- Источники и структура погрешности при численном решении задач (погрешность модели, погрешность исходных данных, погрешность метода, вычислительная погрешность).
- Понятие о корректных и некорректных задачах.
- Понятие о хорошо и плохо обусловленных задачах. Примеры плохо обусловленных задач.
- Вычислительный алгоритм. Корректность, обусловленность, экономичность вычислительного алгоритма.

### 2.2.2 Классификация математических моделей. Этапы построения математических моделей.

- Классификационные признаки.
- Классификация математических моделей в зависимости:
  - от сложности объекта моделирования;
  - от оператора модели;
  - от параметров модели;
  - от целей моделирования;
  - от методов реализации.
- Этапы построения (и использования) математических моделей:
  - анализ объекта моделирования, постановка проблемы;
  - содержательная и концептуальная постановка задачи моделирования;
  - математическая постановка задачи моделирования;
  - выбор метода решения задачи;
  - разработка алгоритма решения и реализация математической модели в виде компьютерной программы;
  - проверка адекватности модели.
  - практическое использование модели и анализ результатов моделирования;
  - выработка практических рекомендаций.
- Типовая схема проектирования технического объекта в САПР.

### 2.2.3 Задача идентификации моделей. Определение параметров моделей по результатам наблюдений.

- Основные понятия системного анализа (система, декомпозиция, элемент, подсистема, агрегирование). Структурная схема системы, модель черного ящика.
- Основные подходы к построению структурных моделей. Агрегат-оператор, агрегат-имитатор, агрегат-статистик.
- Понятие об имитационном моделировании (пример, клеточные автоматы).
- Экспериментальные факторные модели (регрессионные модели технического объекта).
- Оценка параметров регрессионной модели по методу наименьших квадратов.
- Обобщенные полиномиальные модели; определение оптимальной степени полинома.
- Интерполяционные модели. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и Ньютона.

### 2.2.4 Динамические системы с сосредоточенными параметрами. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

- Динамическая модель технического объекта на макроуровне. Дискретные элементы: инерционные, упругие, диссипативные, трансформаторные, фрикционные. Построение математической модели на основе уравнений Лагранжа второго рода.
- Качественный анализ динамической системы. Фазовый портрет, обыкновенные и особые фазовые траектории (особые точки, предельные циклы, сепаратрисы).
- Оценка физических свойств технической системы по спектру матрицы Якоби. Характер переходных процессов в системе.
- Пример (устойчивая техническая система, описываемая линейной системой двух дифференциальных уравнений).

#### 2.2.5 Моделирование переходных процессов в технических системах. Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

- Анализ переходного процесса: решение системы дифференциальных уравнений, определение показателя качества переходного процесса, оценка степени выполнения технических требований к проектируемой системе.
- Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши: явные и неявные методы, одношаговые и многошаговые методы.
- Метод Эйлера, метод Рунге-Кутты.
- Понятие о жестких (плохо обусловленных) системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Гира (дифференцирования назад) для жестких систем.
- Примеры (колебательные системы, генератор Ван дер Поля, регулярные и странные аттракторы, детерминированный хаос, аттрактор Лоренца, генератор Анищенко-Астахова, хаотический аттрактор).

#### 2.2.6 Методы механики (физики) сплошных сред для построения математических моделей микроуровня.

- Микроуровень – нижний иерархический уровень декомпозиции технических объектов. Объекты с распределенными параметрами.
- Законы сохранения – массы, импульса, энергии – и различные формы их записи. Определяющие уравнения сплошных сред.
- Классификация уравнений в частных производных (гиперболические, параболические, эллиптические уравнения).
- Задачи с начальными условиями (Коши), краевые задачи и смешанные (нестационарные) краевые задачи. Корректная постановка задач.
- Математические модели механических, гидравлических и тепловых систем в одномерном случае. Постановка начальных и граничных условий.

#### 2.2.7 Уравнения в частных производных. Общие вопросы теории разностных схем.

- Методы построения конечно-разностных схем. Явные и неявные схемы.
- Аппроксимация и ее порядок.
- Устойчивость разностных схем. Методы исследования устойчивости.
- Теорема о сходимости разностных схем.

- Понятие о качественных свойствах разностных схем (диссипативные и дисперсионные свойства, монотонность, консервативность, полная консервативность).
- Понятие о схемах расщепления.

#### 2.2.8 Математические модели типовых элементов технических систем на микроуровне и численные методы их анализа.

- Одномерные нестационарные и двумерные стационарные модели механических, гидравлических и тепловых систем. Постановка задач, начальных и граничных условий.
- Разностная схема «крест» для волнового уравнения (уравнений акустических колебаний).
- Схема Кранка-Николсона для решения задач теплопроводности и диффузии.
- Краевые задачи для двумерного уравнения Лапласа и Пуассона.
- Примеры (упругие волны, колебание стержней, струн, пластин, мембран).

### **2.2 Содержание лабораторно-практических работ на ЭВМ:**

2.2.1. Линейные и нелинейные регрессионные модели. Метод наименьших квадратов.

2.2.2. Модели интерполяционного типа. Интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона.

2.2.3. Модели переходных процессов. Численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.2.4. Модели нестационарных процессов. Численное решение уравнений гиперболического типа.

2.2.5. Модели нестационарных процессов. Численное решение уравнений параболического типа.

2.2.6. Модели стационарных процессов. Численное решение уравнений эллиптического типа.

### **2.3.Содержание самостоятельной работы**

#### **Программа самостоятельной познавательной деятельности**

На самостоятельную работу выносятся следующие темы:

2.3.1. Работа с конспектом лекций, методической и учебной литературой в соответствии с программой - 20 часов.

2.3.2. Знакомство с основными средствами системы Mathcad, применяющимися в инженерно-технических расчетах (операторы, встроенные математические функции, инструменты для построения графиков, текстовые комментарии) – 12 часов.

2.3.3. Подготовка к лабораторным занятиям - 8 часов.

2.3.4. Оформление отчета по лабораторно-практической работе - 8 часов.

### **3. Перечень рекомендуемой литературы:**

#### Литература основная:

1. Введение в математическое моделирование./ Под ред. П. В. Трусова. - М.: Интермет Инжиниринг, 2000.
2. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем, - Минск.: ДизайнПРО, 2004.
3. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука, 2002.
4. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994.
5. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. – М.: Наука, 1984.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
8. Очков В.Ф. Mathcad 7 Pro для студентов и инженеров. – М.: Компьютер Пресс, 1998.

#### Литература дополнительная:

9. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.
10. Бордовский Г.А., Кондратьев А.С., Чоудери А.Д.Р. Физические основы математического моделирования. – М.: Издательский центр «Академия», 2005.
11. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980.
12. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978.
13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
14. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
15. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.
16. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров. – М.: Финансы и статистика, 2000.

#### 4. Учебно-методическое обеспечение дисциплины.

Для выполнения индивидуальных лабораторно-практических работ с использованием системы Mathcad подготовлено 60 различных вариантов заданий – по 10 вариантов на каждую тему. В комплект учебно-методического материала для проведения лабораторных работ входит дополнительно следующее:

1. Краткое изложение теоретического материала, необходимого для выполнения каждой лабораторной работы.
2. Подробное описание последовательности действий при выполнении задания в системе Mathcad.
3. Конкретный пример выполнения задания (для каждой лабораторной работы), с иллюстрацией применения того или иного метода и встроенных функций системы Mathcad.

Кроме этого, на компьютерах кафедры подготовлено краткое изложение всего лекционного курса, оформленного в виде документов PowerPoint, обратившись к которому студент может получить справку по всем вопросам, необходимым для выполнения индивидуальных заданий.