Тема 6. Эйлеровы графы

6.1. Эйлеровы графы, необходимые и достаточные условия эйлеровости

Определение. Если граф имеет цикл (не обязательно простой), содержащий все ребра графа по одному разу, то такой цикл называется *эйлеровым циклом*, а граф называется *эйлеровым графом.* Если граф имеет цепь (не обязательно простую), содержащую все ребра графа по одному разу, то такая цепь называется *эйлеровой цепью*, а граф называется *полуэйлеровым графом.*

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие эйлеровости графа. Для ее доказательства нам понадобится вспомогательный результат.

Лемма о цикле. *Если в псевдографе G есть хоть одно ребро и отсутствуют висячие вершины, то в G имеется хотя бы один простой цикл.*

Доказательство(конструктивное). Пусть в G имеется хотя бы одна петля $e = (v, v)$, тогда простой цикл vev. Пусть в G имеются кратные ребра $e_1 = (v, w)$, $e_2 = (v, w)$, тогда простой цикл ve_1we_2v. Пусть в G нет петель и кратных ребер, а v_1, v_2 – смежные вершины, которые найдутся, так как в G есть ребро. Рассмотрим последовательность вершин $v_1, v_2, v_3, ...$, в которой v_i, v_{i+1} смежны, а $v_i \neq v_{i+2}$. Поскольку в G нет висячих вершин, такую последовательность можно продолжать неограниченно. Так как число вершин в графе конечно, то произойдет совпадение $v_i = v_j$, $1 \leq i < j - 2$, тогда $v_i v_{i+1} ... v_j$ – простой цикл.

Теорема. *Для того, чтобы связный граф G был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными.*

Доказательство.

• *Необходимость.* Пусть G – эйлеров граф, следовательно, он обладает эйлеровым циклом. Двигаясь по циклу, будем подсчитывать степени вершин. Так как все ребра в цикле различны, прохождение каждой вершины добавляет 2 в степень этой вершины. Так как в цикл входят все ребра, то когда обход будет закончен, будут определены степени всех вершин, которые будут четными.

• *Достаточность.* Индукция по q. При $q = 1$ связный граф с четными степенями вершин выглядит следующим образом: $V = v$, $E = (v, v)$, а в таком графе есть эйлеров цикл. Пусть для $q \leq 2$ достаточность доказана для всякого псевдографа с числом ребер меньшим q. Докажем ее для графа G с числом ребер q. В силу леммы о цикле, в G существует простой цикл μ_0. Если он содержит все ребра графа G, эйлеров цикл найден. Если нет, удалим входящие в цикл ребра из G, получим граф G'. Степени вершин при этом не изменятся либо уменьшатся на два, так что граф G' состоит из компонент связности, которые либо являются изолированным вершинами, либо графами с четными степенями вершин. Пусть G_i – компоненты связности G', отличные от изолированных вершин. По индуктивному предположению, в каждой из них существует эйлеров цикл μ_i, в силу связности G имеющий хотя бы одну общую вершину v_i с циклом μ_0. Построим эйлеров цикл для G следующим образом: двигаясь по циклу μ_0 и попадая в очередную вершину v_i, присоединяем к циклу μ_i и следуем дальше по μ_0. Полученный цикл будет эйлеровым.

Теорема. *Для того, чтобы связный граф G был полуэйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он содержал ровно две вершины нечетной степени.*

Доказательство.

• *Необходимость.* Пусть G – полуэйлеров граф, следовательно, он обладает эйлеровой цепью $< w, v >$. Добавляя к нему ребро (w, v), получаем граф $G' = G + (v, w)$, обладающий эйлеровым циклом, следовательно, по предыдущей теореме, в графе G' степени всех вершин четны. Но тогда четны степени вершин в G, за исключением вершин v и w.

• *Достаточность.* Пусть G имеет ровно две вершины нечетной степени v иw. Добавляя к нему ребро (w, v), получаем граф $G' = G + (v, w)$, все вершины которого четной степени, следовательно, по предыдущей теореме, в графе G' есть эйлеров цикл. Удаляя из него ребро (w, v), получаем эйлерову цепь.

6.2. Построение эйлерова цикла

Рассмотрим алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе.

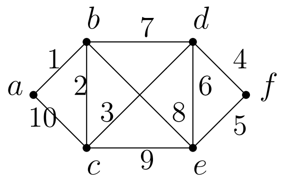
Алгоритм Флери.

Начиная с произвольной вершины, идем по ребрам графа, соблюдая следующие правила:

1. Удаляем ребра по мере их прохождения, и удаляем также изолированные вершины, которые при этом образуются.

2. Идем по мосту только тогда, когда нет других возможностей.

Пример.



По теореме граф является эйлеровым. На диаграмме ребра пронумерованы в порядке их прохождения, таким образом эйлеров цикл $abcdfedbeca$.

6.3. Оценка числа эйлеровых графов

Лемма о числе вершин нечетной степени. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Доказательство. По теореме Эйлера сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер, т. е. четному числу. Сумма степеней вершин четной степени четна, значит, сумма степеней вершин нечетной степени также четна, значит, их четное число.

Пусть $N(p)$ – множество всех графов с p вершинами, а $E(p)$ – множество всех эйлеровых графов с p вершинами.

Теорема. *Эйлеровых графов почти нет, т. е.*

$$\lim_{p\to\infty} \frac{|E(p)|}{|N(p)|} = 0.$$

6.4. Задача почтальона

Неформальная постановка задачи звучит следующим образом: почтальон должен обойти все улицы по крайней мере один раз и вернуться в начальную точку, при этом его маршрут должен быть как можно более коротким.

На языке теории графов ставится задача поиска кратчайшего замкнутого маршрута, содержащего все ребра взвешенного графа.

Если граф является эйлеровым, решением задачи почтальона будет эйлеров цикл. Рассмотрим методы решения задачи для не эйлеровых графов.

6.4.1. Задача почтальона для не ориентированных графов

Пусть граф $G(V, E)$ содержит вершины нечетной степени и, следовательно, не является эйлеровым.

Рассмотрим вершину v нечетной степени. По крайней мере одно ребро, инцидентное v, должно обходиться повторно. Пусть $f(i, j)$ – число повторных обходов ребра (i, j) (т. е. ребро (i, j) обходится $f(i, j) + 1$ раз). Построим новый граф $G^*(V, E^*)$, в котором ребро (i, j) графа $G(V, E)$ повторено $f(i, j)$ раз, тогда $G^*(V, E^*)$ будет эйлеровым. Эйлеров цикл в графе $G^*(V, E^*)$ соответствует маршруту почтальона в графе $G(V, E)$. Значения $f(i, j)$ следует выбирать так, чтобы

$$\sum_{(i,j)\in E} w(i, j) f(i, j) \to \min .$$

Если вершина v в графе $G(V, E)$ нечетной степени, то необходимо повторно обойти нечетное число ребер, инцидентных v. Если вершина v в графе $G(V, E)$ четной степени, то необходимо повторно обойти четное число ребер, инцидентных v. Так как число вершин нечетной степени четно, то если проследить до конца цепь повторно проходимых ребер, то она начнется в одной вершине нечетной степени и закончится в другой. Следовательно, почтальон должен:

1) решить, какие вершины нечетной степени будут соединены цепью повторно проходимых ребер;

2) знать точный состав каждой такой цепи.

Минимальные пути между каждой парой вершин нечетной степени можно найти любым алгоритмом поиска (Дейкстра, Флойда).

Для определения пары вершин с нечетной степенью, которые должны быть соединены цепью повторно обходимых ребер, построим граф $G'(V', E')$, где V' – множество вершин нечетной степени графа G, E' – множество ребер, соединяющих все вершины графа G'

между собой (т. е. G' – полный граф). Вес ребра (i, j) равен некоторому большому числу за вычетом веса минимального пути между вершинами i, j в исходном графе.

Затем построим на G' паросочетание максимального веса. Так как G' полный и имеет четное число вершин, то паросочетание максимального веса будет покрывать каждую вершину в точности одним ребром.

Это паросочетание указывает вершины нечетной степени, которые нужно связать цепями из повторно проходимых ребер, т. е. если ребро (i, j) входит в паросочетание, то почтальон должен повторно проходить ребра, входящие в минимальную цепь, соединяющую вершины i и j. Так как паросочетание имеет максимальный вес, то маршрут почтальона будет в итоге иметь наименьшую общую длину.

6.4.2. Задача почтальона для ориентированных графов

Если орграф симметричный, то решением задачи будет эйлеров цикл.

Рассмотрим не симметричный граф $G(V, E)$. Пусть $f(i, j)$ – число повторных обходов дуги $\{i, j\}$. Постальону необходимо решить задачу

$$\sum_{\{i,j\}\in E} w(i, j) f(i, j) \to \min,$$

при условии

$$d^+(i) + \sum_{j\in V} f(i, j) = d^-(i) + \sum_{j\in V} f(j, i).$$

Таким образом граф $G(V, E)$ преобразуется в симметричный граф $G^*(V, E^*)$.

Преобразуем условие:

$$\sum_{j\in V} (f(i, j) - f(j, i)) = d^-(i) - d^+(i) = D(i).$$

В таком виде это – модифицированная задача о потоке минимальной стоимости. Вершины, для которых $D(i) < 0$, являются стоками с предельным значением суммарного входящего потока $-D(i)$, вершины, для которых $D(i) > 0$, являются источниками с предельным значением суммарного входящего потока $D(i)$, вершины, для которых $D(i) = 0$, являются промежуточными. Значения пропускных способностей всех дуг неограничены.

Задача может быть решена путем введения в граф дополнительных источника и стока, пропускные способности дополнительных дуг, соединяющих дополнительный источник с источниками и дополнительный сток со стоками равны указанным предельным значениям суммарных входных и выходных потоков для источников и стоков.

С помощью алгоритма поиска потока минимальной стоимости определим значения $f(i, j)$ для всех дуг и построим граф G^*, в котором дуга $\{i, j\}$ повторена $f(i, j)$ раз. Эйлеров контур, существующий в этом графе, даст решение задачи.

6.4.3. Задача почтальона для смешаных графов

Смешаный граф – граф, в котором часть ребер ориентирована, а часть – не ориентирована.

Для смешаных графов возможны случаи:

1) граф четный, симметричный;

2) граф четный, несимметричный;

3) граф нечетный, несимметричный.

В первом случае оптимальным решением является эйлеров маршрут, который представляет собой объединение двух маршртов: эйлерова контура для ориентированной и эйлерова цикла для не ориентированной частей графа.

Во втором случае неориентированные ребра ориентируются, в результате граф преобразуется в четный ориентированный граф. Однако из-за произвольности выбора направляния обхода неориентированных ребер возникает необходимость корректировки направлений некоторых из них.

Обозначим через A множество неориентированных ребер, через B – множество ориентированных ребер. Для каждого ребра $a \in A$ выберем произвольно направление, получим граф G_d. Для каждой вершины графа G_d вычислим

$$D(i) = d^+(i) - d^-(i)$$

Вершины, для которых $D(i) < 0$, являются стоками с предельным значением суммарного входящего потока $-D(i)$, вершины, для которых $D(i) > 0$, являются источниками с предельным значением суммарного входящего потока $D(i)$, вершины, для которых $D(i) = 0$, являются промежуточными. Если все вершины промежуточные, то получен симметричный ориентированный граф, для которого существует эйлеров цикл. В противном случае строится граф $G'(V, E')$, в котором:

a) каждая дуга $(i, j) \in B$ заменяется дугой $(i, j) \in E'$ с неограниченной пропускной способностью и стоимостью, равной весу дуги $(i, j) \in B$;

b) каждому ребру $(i, j) \in A$ соответствует пара дуг $(i, j) \in E'$ и $(j, i) \in E'$ с неограниченной пропускной способностью и стоимостью, равной весу дуги $(i, j) \in B$;

c) каждому ребру $(i, j) \in A$ соответствует также дуга $(i, j) \in E'$ (направление противоположно принятому в G_d) с пропускной способностью, равной 2, и нулевой стоимостью. Эта дуга называется фиктивной.

Выполним поиск потока минимальной стоимости для $G'(V, E')$, удовлетворяющего потребности всех стоков. Если такого потока нет, то нет и маршрута почтальона. Иначе обозначим через $f(i, j)$ величину потока, который протекает по дуге (i, j) графа $G'(V, E')$. Далее будет показано, что поток в каждой фиктивной дуге равен 0 или 2.

Построим далее граф G^*, в котором

a) каждая не фиктивная дуга $(i, j) \in B$ графа G' заменяется $f(i, j) + 1$ дугами (i, j) графа G^*;

b) каждая нефиктивная дуга $(i, j) \in A$ графа G' заменяется $f(i, j)$ дугами (i, j) графа G^*;

c) если поток в фиктивной дуге (i, j) равен двум единицам, то в граф G^* включается одна такая дуга (i, j);

d) если поток в фиктивной дуге (i, j) равен нулю, то в граф G^* включается одна такая дуга с противоположной ориентацией (j, i).

Граф G^* является четным и симметричным. Так как граф G_d четный, то $d^+(i)+d^-(i)$ является четным числом для всех вершин графа. Значит, $d^+(i)$ и $d^-(i)$ либо оба четные, либо оба нечетные, и в любом случае $D(i)$ должно быть четным. Значит в графе G' величины потоков, выходящих из источников и заходящих в стоки, являются четными числами. Следовательно, пропускные способности всег дуг либо четные, либо бесконечные. С помощью алгоритма поиска потока минимальной стоимости будет получен поток, величина которого в каждой дуге кратна двум (в частности, она может быть равна нулю). Значение степени вершины в G^* есть значение степени вершины в G (четное число) плюс величина потока, входящего в вершину и выходящего из нее по не фиктивным дугам (четное число). Рассмотрим фиктивные дуги. Если поток в фиктивной дуге равен двум, это вызывает изменение исходной ориентации дуги, а значит, изменение потока в концах дуги на две единицы (увеличение или уменьшение). Если поток в фиктивной дуге равен нулю, он никак не изменяет степени вершин. В итоге все степени вершин являются четными. Так как для потока дивергенция равна нулю, граф является симметричным.

Эйлеров цикл графа G^* соответствует оптимальному маршруту почтальона графа G. Предположим, с помощью алгоритма найден не оптимальный маршрут, тогда должен существовать другой маршрут почтальона, в котором повторно обходимые дуги имеют меньшую общую длину. Такому маршруту должен соответствовать поток меньшей стоимости, но поток был найден с помощью алгоритма поиска потока минимальной стоимости.

Если с помощью алгоритма построения потока минимальной стоимости на графе G' не удается найти поток, удовлетворяющий требования всех стоков, то на графе G не существует маршрута почтальона. Так как для графа G_d верно $\sum d^+(i) = \sum d^-(i)$, суммарный выходящий из всех источников поток равен суммарному входящему во все стоки потоку. Таким образом, для удовлетворения потребностей стоков из источников должен вытекать поток с предельным значением. Пусть с помощью алгоритма поиска потока минимальной стоимости не удается найти поток, удовлетворяющий поребности всех стоков. Обозначим через S множество вершин, окрашенных на последней итерации поиска потока минимальной стоимости. По всем дугам, соединяющим окрашенные вершины с не окрашенными, должен проходить поток, равный пропускной способности. Но если в G есть дуга (i, j), то в графе G' этой дуге соответствует дуга с неограниченной пропускной способностью. Значит, в множестве S есть вершина, в которую в графе G дуги только заходят, и маршрута почтальона не существует.