Простейшие неопределенные интегралы

Примеры решения задач

Следующие интегралы сводятся к табличным путем тождественного преобразования подынтегрального выражения.

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 2x^{2/3}/3 + 2x^{1/2} + C.$

>**2.** $\int (x^4 + 1)x^3\, dx = 1/4 \int (x^4 + 1)\, d(x^4 + 1) = 1/8 \int d(x^4 + 1)^2 = 1/8(x^4 + 1)^2 + C.$

3. $\int \frac{x^2\, dx}{1 - x^2} = \int \frac{(x^2 - 1) + 1}{1 - x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1 - x^2}\right) dx = -x + 1/2 \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

4. $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int [(1 + \mathrm{tg}^2 x) - 1]\, dx = \int (1/\cos^2 x - 1)\, dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$

5. $\int \frac{2x+3}{3x+2} dx = \int \frac{2(x+3/2)}{3(x+2/3)} dx = 2/3 \int \frac{[(x+2/3)+5/6]}{(x+2/3)} dx = 2/3x + 5/9 \ln|x + 2/3| + C.$

6. $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}\, dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$ $= \int |\cos x - \sin x|\, dx = (\sin x + \cos x) \cdot \mathrm{sgn}\,(\cos x - \sin x) + C.$

Метод замены переменной

Примеры решения задач

Рассмотрим некоторые приемы вычисления интегралов с помощью замены переменной.

1°. *Тождественное преобразование подынтегрального выражения с выделением дифференциала новой переменной интегрирования* (простейшая замена переменной).

1. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2} d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-1/2} d(1 - x^2) = -\frac{1}{2}\, 2(1 - x^2)^{1/2} + C.$

2. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2} = \int \frac{\frac{1}{4}\,d(x^4)}{(x^4)^2-2} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\,d\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)}{-2[1-(x^4/\sqrt{2})^2]} = -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^4}{\sqrt{2}-x^4}\right| + C.$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+1/x^2}} = \int \frac{-d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+(1/x)^2}} = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right| + C\ (x > 0).$

4. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} = \int \frac{d(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln|\ln\ln x| + C.$

5. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x+2)} = \int \frac{\sqrt{2}\,d\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)}{2[1+(\operatorname{tg} x/\sqrt{2})^2]} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

2°. *Некоторые подстановки.*

1. $I = \int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$. Положим $t = (1-x)^{1/3}$, тогда $x = 1-t^3$, $dx = -3t^2\,dt$. Имеем

$$I = \int (1-t^3)^2 t(-3t^2)\,dt = -3\int (1-t^3)^2 t^3 dt = -3\int (t^3 - 2t^6 + t^9)dt = -3(4^3/4 - 2t^7/7 + t^{10}/10) + C,$$

$$t = (1-x)^{1/3}.$$

2. $I = \int x^5(2-5x^3)^{2/3}\,dx$. Положим $t = 2-5x^3$, тогда $x = \left(\frac{2-t}{5}\right)^{1/3}$, $dt = -15x^2\,dx$. Находим

$$I = \int 1/5(2-t)t^{2/3}(-dt/15) = -1/75\int (2t^{2/3} - t^{5/3})dt = -1/75\cdot 2\cdot 3/5\cdot t^{5/3} + 1/75\cdot 3/8\cdot t^{8/3} + C,\ t = 2 - 5x^3.$$

3. $I = \int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x\cos x[(\cos^2 x+1)-1]}{1+\cos^2 x}\,dx.$

Положим $t = 1+\cos^2 x$, откуда $dt = -2\cos x\sin x\,dx$. Значит,

$$I = -1/2\int \frac{t-1}{t}\,dt = -t/2 + 1/2\ln|t| + C,\ t = 1+\cos^2 x.$$

3°. *Тригонометрические подстановки при интегрировании некоторых иррациональных функций.*

1. $I = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$. Положим $x = \sin t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$; тогда $dx = \cos t\, dt$. Следовательно,

$$I = \int \frac{\cos t\, dt}{\cos^3 t} = \operatorname{tg} t + C,\ t = \arcsin x.$$

2. $I = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. Положим $x = a \operatorname{tg} t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$; тогда $dx = \frac{a\, dt}{\cos^2 t}$. Поэтому

$$I = \int \frac{a \cos^3 t\, dt}{a^3 \cos^2 t} = \frac{1}{a^2} \sin t + C,\ t = \operatorname{arctg}(x/a).$$

3. $I = \int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$. Положим $x = 1/\sin t$, $-\pi/2 < t < 0$ и $0 < t < \pi/2$; тогда $dx = -\frac{\cos t\, dt}{\sin^2 t}$. Таким образом,

$$I = \int \frac{-\cos t\, dt}{\sin^2 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)^{3/2}} = -\int \frac{\sin t\, dt}{\cos^2 t} = \int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} = -\frac{1}{\cos t} + C,\ t = \arcsin(1/x).$$

Метод интегрирования по частям

Примеры решения задач

1. $I = \int \operatorname{arctg} x\, dx$. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Следовательно,

$$I = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - 1/2 \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - 1/2 \ln(1+x^2) + C.$$

2. $I = \int x^2 e^{-x}\, dx$. Положим $u = x^2$, $dv = e^{-x}\, dx$. Тогда $du = 2x\, dx$, $v = -e^{-x}$. Значит,

$$I = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx) = -x^2e^{-x} - xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

3. $I = \int \sin(\ln x)\,dx$. Положим $u = \sin\ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = 1/x \cos\ln x\,dx$, $v = x$. Имеем

$$I = x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,dx = x\sin\ln x - (x\cos\ln x + \int \sin\ln x\,dx).$$

Мы получили линейное относительно I уравнение

$$I = x(\sin\ln x - \cos\ln x) - I,$$

откуда находим

$$I = x/2\,(\sin\ln x - \cos\ln x) + C.$$

4. $K_\alpha = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. Положим $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}$, $dv = dx$. Тогда

$$K_\alpha = \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} - \int x\,d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}\right) =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{\alpha+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\left[\int \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\alpha+1}}\right] =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\,[K_\alpha - a^2 K_{\alpha+1}],$$

откуда

$$K_{\alpha+1} = \frac{1}{2\alpha a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + \frac{2\alpha-1}{2\alpha a^2}\,K_\alpha.$$

Мы получили рекуррентную формулу, с помощью которой $K_{\alpha+1}$ выражается через K_α. При $\alpha = 1$ интеграл K_α есть "почти" табличный интеграл:

$$K_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = 1/a\,\mathrm{arctg}(x/a) + C.$$

Полагая в рекуррентной формуле $\alpha = 1$ и зная K_1, найдем K_2. Полагая $\alpha = 2$ и зная K_2, найдем K_3 и т. д.

Замечание. С помощью методов замены переменной и интегрирования по частям получаются следующие часто употребляемые формулы.

1. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = 1/a \operatorname{arctg}(x/a) + C$ $(a \neq 0)$.
2. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ $(a \neq 0, |x| \neq |a|)$.
3. $\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm 1/2 \ln |a^2 \pm x^2| + C$.
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin(x/a) + C$ $(a > 0, |x| < a)$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$.
6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$.
7. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x/2 \sqrt{a^2 - x^2} + a^2/2 \arcsin(x/a) + C$ $(a > 0, |x| < a)$.
8. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = x/2 \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2/2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$.

Интегрирование рациональных функций

Контрольные вопросы и задания

---

1. Всякая ли рациональная дробь интегрируема в элементарных функциях?

2. Почему исследуется вопрос об интегрировании только правильной дроби?

3. Что значит "выделить целую часть неправильной дроби"?

4. На какие простейшие вещественные множители можно разложить многочлен с вещественными коэффициентами?

5. Известно, что число $2 - i$ является корнем многочлена с вещественными коэффициентами. Верно ли, что число $2 + i$ есть корень того же многочлена?

6. На какие простейшие дроби разлагается дробь $\frac{x+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$?

7. Что такое метод неопределенных коэффициентов при разложении дроби на сумму простейших дробей?

8. Что такое метод вычеркивания при вычислении неопределенных коэффициентов?

9. Найдите методом вычеркивания неопределенные коэффициенты в разложении дроби $\frac{x}{(x+2)(x-3)}$.

10. Найдите методом вычеркивания неопределенные коэффициенты в разложении дроби $\frac{x^2}{(x^2-2)(x^2+3)}$. *Указание*: Положите $x^2 = y$ и затем примените метод вычеркивания.

Интегрирование иррациональных функций

---

1. $I = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$. Положим $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, откуда $dx = -\frac{6t^2\,dt}{(t^3-1)^2}$. Следовательно,

$$I = -3\int\frac{dt}{t^3-1} = -1/2\ \ln\frac{(1-t)^2}{1+t+t^2} + \sqrt{3}\ \operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

---

2. $I = \int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} = \int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}} = \int$

$$\frac{dx}{\frac{5\sqrt{5}}{4\cdot 2}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{3}{5}\right]\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2-1}}.$$

Положим $t = \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$, тогда $\sqrt{5}\ dt = 2dx$ и, значит,

$$I = 4/5\int\frac{dt}{(t^2+3/5)\sqrt{t^2-1}}.$$

Положим теперь $\frac{1}{t} = \sin u$, откуда $-\frac{dt}{t^2} = \cos u\, du$. Поэтому

$$I = -4/5 \int \frac{\cos u \sin u\, du}{\left(1 + \frac{3}{5}\sin^2 u\right)\cos u} = -4/5 \int \frac{\sin u\, du}{\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\cos^2 u} =$$

$$= 4/3 \int \frac{d(\cos u)}{8/3 - \cos^2 u} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{8} + \sqrt{3}\cos u}{\sqrt{8} - \sqrt{3}\cos u}\right| + C,$$

где $u = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{2x+1}$. Окончательно получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}}\right| + C.$$

---

3. Вычислим интеграл примера 2 без применения тригонометрических подстановок. Интеграл имеет вид (3), где $p = 1$, $q = 1$, $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$, т. е. выполнены условия $a/1 = b/p \neq c/q$.

Полагая $x = y - 1/2$, приходим к интегралу $I = \int \frac{dy}{(y^2 + 3/4)\sqrt{y^2 - 5/4}}$ типа (7), который рационализируется подстановкой

$$t = \left(\sqrt{y^2 - \frac{5}{4}}\right)' = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 5/4}}. \qquad (8)$$

Из соотношения (8) получаем $t^2(y^22 - 5/4) = y^2$, откуда

$$y^2 + 3/4 = \frac{2t^2 - 3/4}{t^2 - 1}. \qquad (9)$$

Записывая формулу (8) в виде $t\sqrt{y^2-5/4} = y$ и дифференцируя, получаем $dt\sqrt{y^2-5/4} + t(\sqrt{y^2-5/4})'dy = dy$, или, с учетом (8), $dt\sqrt{y^2-5/4} + t \cdot t\,dy = dy$, откуда

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-5/4}} = \frac{dt}{1-t^2}. \qquad (10)$$

Подставляя выражения (9) и (10) в интеграл I, имеем

$$I = \int \frac{dt}{3/4-2t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}\,t}{\sqrt{3}-\sqrt{8}\,t}\right| + C,$$

где $t = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, т. е.

$$I = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right| + C.$$

---

4. $I = \int \dfrac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$. Положим $t = 1/(x-1)$, тогда $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$ и $I = -\int \dfrac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$. Далее воспользуемся формулой (1):

$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = (At+B)\sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = A\sqrt{5t^2+5t+1} + \frac{(At+B)(10t+5)}{2\sqrt{5t^2+5t+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Приводя к общему знаменателю и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим $A = 1/10$, $B = -3/20$, $\lambda = 11/40$. Далее,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d(t+1/2)}{\sqrt{(t+1/2)^2-1/20}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C.$$

Окончательно имеем

$$I = -(t/10 - 3/20)\sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C,$$

где $t = 1/(x-1)$, или

$$I = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right| + C.$$

Интегрирование тригонометрических функций

---

1. $I = \int \cos^5 x\, dx$. Подынтегральная функция относится к случаю б). Поэтому положим $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x\, dx$, $\cos^4 x = (1-\sin^2 x)^2 = (1-t^2)^2$ и

$$I = \int (1-t^2)^2\, dt = t - 2/3\, t^3 + t^5/5 + C,$$

где $t = \sin x$.

---

2. $I = \int \sin 5x \cos x\, dx$. В данном случае проще вычислить интеграл, не прибегая к подстановкам и представив подынтегральную функцию в виде $1/2\, (\sin 4x + \sin 6x)$. Тогда

$$I = 1/2 \int (\sin 4x + \sin 6x)\, dx = -1/8 \cos 4x - 1/12 \cos 6x + C.$$

---

3. $I = \int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$. Здесь можно сделать универсальную подстановку $t = \mathrm{tg}\,(x/2)$. Тогда $x = 2\,\mathrm{arctg}\, t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и интеграл I сводится к интегралу от рациональной функции. Однако проще сначала преобразовать подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{a\cos x + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)},$$

где $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, и положить далее $t = \operatorname{tg}\dfrac{x+\varphi}{2}$. Тогда $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x+\varphi) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ и, следовательно,

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dt}{t}\bigg|_{t=\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\varphi}{2}\right| + C.$$