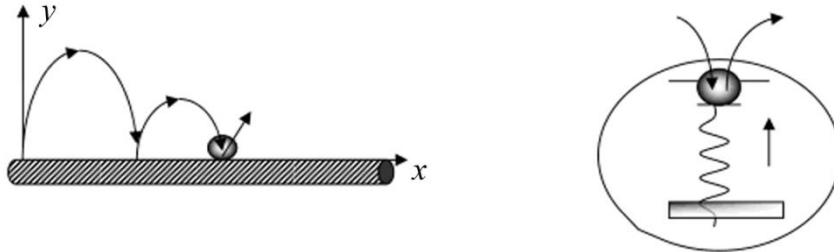


Движение упругого мяча, брошенного под углом к горизонту

Физическая модель. Рассмотрим задачу движения упругого мяча, брошенного под углом к горизонту. Траекторию движения мяча можно представить в виде последовательно убывающих перевернутых парабол (рис.). Задача состоит в проведении компьютерного моделирования этого явления.



2. Математическая модель

Математическое моделирование этой задачи можно провести по следующей схеме. Пусть мяч при своем приземлении падает на некоторую поверхность. Мяч, упав на поверхность, испытывает действие упругой силы $F = -msy$, выталкивающей материальную тело (мяч). Возникает упругий удар и мяч, отскочив от поверхности, продолжает движение.

Уточним систему дифференциальных уравнений (1).

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k \frac{dx}{dt}, & \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} &= v_0 \cos \alpha, & x(0) &= 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -k \frac{dy}{dt} - g, & \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} &= v_0 \sin \alpha, & y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Сила F действует вверх и лишь тогда, когда материальная тело (мяч) находится ниже линии горизонта, т.е. при $y < 0$ так, что

$$F = \begin{cases} 0, & \text{при } y \geq 0, \\ -msy, & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где m – масса мяча; s – упругость мяча. С учетом этого система дифференциальных уравнений (1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -kv_x, & \frac{dx}{dt} &= v_x, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -kv_y - g + \frac{F}{m}, & \frac{dy}{dt} &= v_y, \end{aligned} \quad (3)$$
$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= v_0 \cos \alpha, \\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

3. Задания на моделирование

1. Провести масштабирование дифференциальных уравнений.
2. Построить разностную схему и разностные уравнения. Написать алгоритм решения дифференциальных уравнений (3).
3. Составить программу согласно алгоритму. Выходные данные представить в графической форме.
4. Провести вычислительный эксперимент. При моделировании движения мяча на ЭВМ воспроизвести случай, соответствующий углу бросания $\alpha = \pi/3$, $k = 0,1$ и $0,0$. Пояснить полученные результаты и зарисовать графики $y = \varphi(x)$, $\dot{y} = \psi_1(x)$, $F = \psi_2(x)$.