

Дополнительные задачи для подготовки к экзамену.

1. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Доказать, что система совместна. Найти решение матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = -7 \\ x + y + z = -4 \\ 4x - 3y - 5z = -11 \end{cases}$$

4. Найти размерность и некоторый базис пространства решений системы однородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

5. Треугольник  $ABC$  – прямоугольный, гипотенуза  $BC$  поделена точкой  $M$  пополам,  $|\overline{AB}| = 3$ ,  $|\overline{AC}| = 4$ . Найти  $np_{\overline{AC}}\overline{CB}$ ,  $np_{\overline{AB}}\overline{CB}$ ,  $np_{\overline{AC}}\overline{AB}$ ,  $np_{\overline{AB}}\overline{2MB}$ .

6. На векторах  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$  построен треугольник. Выразить медианы этого треугольника через векторы  $\overline{a}$  и  $\overline{b}$ .

7. Найти проекцию вектора  $\overline{a} = \overline{m} - 2\overline{n}$  на вектор  $\overline{b} = 2\overline{m} - \overline{n}$ , если  $|\overline{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\overline{n}| = 2$ ,  $(\overline{m} \wedge \overline{n}) = \pi/6$ .

8. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах  $\overline{a} = 2i + j - 3k$ ,  $\overline{b} = i + 2j + k$ ,  $\overline{c} = i - 3j + k$ , опущенную на грань, построенную на векторах  $\overline{b}$  и  $\overline{c}$ .

9. Доказать, что множество  $\mathbf{R}^3$  является линейным пространством.

10. Проверить, является ли множество  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$  подпространством линейного пространства квадратных матриц второго порядка.

11. Проверить, какие из следующих векторов  $\{-12, 7, 6\}$ ,  $\{5, -3, 0\}$ ,  $\{0, -2, 0\}$  являются собственными оператором, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

К каким собственным значениям они относятся?

12. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой  $5x - 2y - 6 = 0$  и проходящей через точку  $(3, -5)$ .

13. Записать уравнение прямой, образующей с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$  и проходящей через точку  $(3, 2)$ .

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось  $Oz$  и точку  $(2, 3, -1)$ .

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $(3, -1, 0)$  параллельно векторам  $\overline{l}_1 = \{1; 2; 1\}$  и  $\overline{l}_2 = \{0; 1; 3\}$ .

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $2x - z = 0$  и  $x + y - z + 5 = 0$ , перпендикулярно к плоскости  $7x - y + 4z - 3 = 0$ .

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y+z-2=0 \\ 2x-3y-7=0 \end{cases}$$

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases}.$$

19. Даны вершины треугольника  $A(6,2)$ ,  $B(3,-2)$ ,  $C(-3,-2)$ . Найти точку пересечения биссектрисы, проведенной из вершины  $B$ , и медианы, проведенной из вершины  $A$ .

20. Найти точку пересечения прямых:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 21 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{1}.$$

21. Найти угол между прямыми  $y = 5x + 7$  и  $y = -1.5x$ .

22. Найти двухгранные углы, которые образуют плоскости  $3y - z = 0$  и  $2y + z = 0$ .

23. Найти угол между плоскостью  $3x + 5y - z - 2 = 0$  и прямой

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

24. Построить плоскости: а)  $2x - 5y + z - 10 = 0$ , б)  $2x - 5y - 10 = 0$ , в)  $2x + z - 10 = 0$ , г)  $z - 10 = 0$ , д)  $-5y + z = 0$ , е)  $2x + z = 0$ , ж)  $2x - 5y + z = 0$ .

25. Доказать, что прямые лежат в одной плоскости:

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 0 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 0 \\ z = t - 3 \end{cases}.$$

26. Доказать, что следующая прямая лежит в плоскости  $4x - 3y + 7z - 7 = 0$ :

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

27. Доказать, что прямая, проходящая через точку  $M_0(1;0;1)$  параллельно вектору  $\vec{l} = \{1; \sqrt{2}; 1\}$ , и плоскость  $x + \sqrt{2}y - z + 2 = 0$  пересекаются.

28. Доказать, что прямая, проходящая через точки  $M_1(-4;3;-3)$  и  $M_2(2;-6;9)$ , пересекается с прямой  $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ .

29. Доказать, что прямые скрещиваются:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -6t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}.$$

30. Даны уравнения двух сторон квадрата  $5x + 2y - 7 = 0$  и  $5x + 2y - 36 = 0$ . Найти его площадь.

31. Точка  $A(4;6)$  является вершиной прямоугольника, две стороны которого лежат на прямых  $x - 2y - 2 = 0$  и  $2x + y + 6 = 0$ . Найти площадь этого прямоугольника.

32. Найти объём куба, если две его грани лежат на плоскостях  $2x - 2y + z - 1 = 0$  и  $2x - 2y + z + 5 = 0$ .

33. Найти расстояние между прямыми:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}.$$

34. Найти расстояние между прямыми:

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$