Задачи для подготовки к контрольной работе по теме «Линейные пространства»

1. Исследовать на линейную зависимость:

а) $a_1 = (-1, 2, 3, 2)$, $a_2 = (1, 6, 3, 1)$, $a_3 = (2, 4, 0, 1)$

линейно независимая система

б) $f_1(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + 3$, $f_2(x) = x^3 - x + 1$, $f_3(x) = 2x^2 + x + 4$

линейно независимая система

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

линейно зависимая система

г) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = (\sin x)^2$

линейно независимая система

д) $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = -1$, $f_3(x) = e^x$, $f_4(x) = x + e^x$

линейно зависимая система

е) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = e^x$

линейно независимая система

2. Доказать, что e_1', e_2', e_3' – базис. Найти координаты x в базисе e_1', e_2', e_3', если известны его координаты в базисе e_1, e_2, e_3:

а) $x = \{2, -2, 1\}$, $e_1' = e_1 - e_2 + (2/3)e_3$, $e_2' = 2e_1 + 4e_2$, $e_3' = e_1 + 5e_2 - e_3$.

$\Delta = -2$, $\{3, -1, 1\}$

б) $x = \{7, 2, 1\}$, $e_1' = e_1 - e_2 - e_3$, $e_2' = e_1 + (3/4)e_2$, $e_3' = e_1 + e_2 + 3e_3$.

$\Delta = 5$, $\{2, 4, 1\}$

3. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей. Выяснить, является ли этот оператор диагонализируемым:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$\lambda = 1 \quad k_1\{4, 5, 4\}$,

$\lambda = -3 \quad k_2\{0, 1, 0\}$,

$\lambda = 2 \quad k_3\{0, 1, 5\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0 \quad k_1\{-1, 2, 0\}$,

$\lambda = 2 \quad k_2\{0, 1, 0\}$

не диагонализируемый

4. Проверить, является ли отображение f линейным оператором указанного пространства. Если да, то найти его матрицу в стандартном базисе этого пространства:

а) $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $f(x) = (x_2 - x_3,\ x_1 + 4x_2,\ 3x_1 + 2x_3)$

да, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

б) $x = (x_1, x_2) \in R^2$, $f(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_1 x_2)$

нет

5. Оператор f имеет в базисе e_1, e_2 матрицу A. Найти матрицу оператора f в базисе e_1', e_2':

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} e_1' & = & 3e_1 & + & 2e_2 \\ e_2' & = & 4e_1 & + & 3e_2 \end{matrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -17 & -18 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$