

**Задачи для подготовки к контрольной работе по теме
«Линейная алгебра»**

1. Найти значение матричного многочлена:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

б) $f(x) = 2x^2 + 5x - 2$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Выполнить все возможные операции умножения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad E = (2 \quad -3)$$

$$F = (-2 \quad 0 \quad 5 \quad 0)$$

3. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -5 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

4. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 10 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

5. Доказать, что решение системы единственное, найти его матричным методом и методом

$$\text{Крамера: } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_3 = 5 \\ 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

6. Исследовать систему на совместность. Если решение существует, найти общее и одно частное решение.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ 4x - 3y + 3z = 3 \\ x + 3y = 0 \\ 5x + 3z = 3 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 20 \end{cases}$$

7. Найти фундаментальную систему решений.

$$\text{а) } \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$
$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Ответы

1. а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 7 & 22 \end{pmatrix}$

2. $AC = \begin{pmatrix} 20 & -4 & -11 & 0 \\ 35 & 1 & -8 & 13 \end{pmatrix}$ $AD = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 12 & 26 & 23 \end{pmatrix}$

$$CD = \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} \quad DE = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \\ 0 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \quad DF = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \quad EA = (2 \quad -2 \quad -13 \quad -6)$$

$$EB = (3 \quad -17) \quad FC = (11 \quad 11 \quad 8 \quad 17) \quad FD = 2$$

3. а) 8 б) -80 в) 90 г) -6

4. а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

5. 2, 4, -5

6. а) $r(A) = 2$ б) $r(A) = 2$ в) $r(A) = 3$, $x_3 = -7$, $x_4 = 0$ г) несовместна

7. а) $r(A) = 3$ б) $r(A) = 2$