О.Л. Крицкий
А.А. Михальчук
А.Ю. Трифонов
М.Л. Шинкеев

Часть I: Теория вероятностей

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для технических университетов

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**О.Л. Крицкий, А.А. Михальчук,
А.Ю. Трифонов, М.Л. Шинкеев**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для технических университетов

I. Теория вероятностей

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
К82

Крицкий О.Л.
К82 Теория вероятностей и математическая статистика для технических университетов. I. Теория вероятностей: учебное пособие / О.Л. Крицкий, А.А. Михальчук, А.Ю. Трифонов, М.Л. Шинкеев; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 212 с.

Настоящее пособие представляет собой изложение первой части курса «Теория вероятностей и математическая статистика» и содержит материал по разделу «Теория вероятностей» этого курса. Оно содержит теоретический материал в объёме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических специальностей и специальности «Прикладная математика» технических университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями для самостоятельного решения по каждому разделу.

Предлагаемое пособие может быть полезно студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области прикладной и финансовой математики, теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов инженерно-физических специальностей, студентов, специализирующимся в области финансовой математики, и студентов, обучающихся в системе элитного технического образования.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

Рецензенты
Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Осетрин К.Е.
Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
Багров В.Г.

Работа частично поддержана АВЦП Министерства образования и науки РФ № 2.1.1/3436; Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238

Содержание

Введение

Во многих вопросах науки и техники, производства и экономики, военного дела и управления приходится встречаться с ситуациями, исход которых не поддается точному прогнозированию. Так, например,

- при стрельбе из орудия нельзя предсказать, что посланный снаряд попадёт в цель;
- при бросании монеты нельзя предсказать, что она упадёт гербом вверх;
- при передаче сообщений (например, телеграфных знаков) по каналу связи могут появиться помехи, которые исказят сообщение или полностью подавят его;
- нельзя предсказать цену акций в заданный момент времени;
- аппаратура может отказать на любом этапе своей работы из-за отказа каких-либо деталей, но мы не можем предсказать, произойдёт это или нет;
- при покупке лотерейного билета нельзя предсказать, выпадет ли выигрыш на купленный билет.

Такого рода примеров можно привести очень много. Что общего в подобных ситуациях?

Дело в том, что в каждом приведённом примере на исход влияет очень большое число разного рода причин, законы действия которых неизвестны. Так, в первом примере — при стрельбе из орудия — можно назвать некоторые из таких причин: скорость и направление ветра, осадки, температура воздуха и т.д.

Все это приводит к тому, что результат опыта не определяется однозначно; говорят, что результат такого опыта случаен.

Выявлением и изучением закономерностей в случайных явлениях занимается специальная область математики — теория вероятностей и её многочисленные ответвления. Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Строят эту теорию дедуктивно, исходя из некоторых аксиом и определений.

Методы теории вероятностей по своей природе приспособлены для исследования массовых явлений, т.е. таких явлений, которые многократно повторяются или которые можно воспроизвести сколько угодно раз при сохранении неизменным основного комплекса условий. Эти методы не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но позволяют предсказать суммарный результат большого числа однородных случайных явлений.

ЧАСТЬ I

Теория вероятностей

ГЛАВА 1

Введение в теорию вероятностей

1. Алгебра событий

Современное построение теории вероятностей как раздела математики основывается на аксиоматическом подходе и опирается на элементарные понятия теории множеств. Теория вероятностей оперирует с действительными или мысленными опытами, имеющими случайный исход.

Одним из основных понятий теории вероятностей является случайное событие или просто событие.

Событие — первичное понятие в теории вероятностей в том смысле, что его нельзя определить через другие, более элементарные понятия.

Под событием понимается всякий факт, который в результате опыта (испытания, эксперимента) может произойти или не произойти.

⧫ Под *испытанием* (*опытом*, *экспериментом*) будем понимать осуществление какого-либо определённого комплекса условий, которые могут быть воспроизведены сколь угодно большое число раз (реально или мысленно).

События обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C и т.д.

Приведём примеры событий:

A — попадание в цель при выстреле (опыт — произведение выстрела, событие — попадание в цель);

B — появление герба при бросании монеты;

C — выход из строя детали сотового телефона при испытании.

Условимся различать составные (или разложимые) и элементарные (неразложимые) события.

Во избежание неясностей при описании случайных явлений, результатов опыта или наблюдений необходимо формализовать эти описания. С этой целью вводится множество Ω элементарных исходов эксперимента (пространство элементарных событий).

⧫ Совокупность (множество) всех мыслимых исходов опыта, таких, что в результате испытания может произойти один и только один из них, назовем *пространством элементарных событий* и будем обозначать его Ω. Каждый элемент $\omega \in \Omega$ (отдельный исход опыта) будем называть *элементарным событием.*

Пространство элементарных событий является первоначальным понятием при построении математической модели явлений, имеющих случайную (стохастическую) природу.

⧫ Любое подмножество множества элементарных событий называется *событием* (или *случайным событием*).

В дальнейшем утверждение «A есть подмножество Ω» записывается в виде $A \subset \Omega$. Говорят, что событие A наступило, если результатом испытания явился исход ω, принадлежащий множеству A ($\omega \in A$).

Рассмотрим ряд примеров, поясняющих выбор множества Ω.

Пример 1.1. При однократном подбрасывании монеты пространство исходов

Ω состоит из двух точек:

$$\Omega = \{\text{Г},\text{Р}\},$$

где Г – «герб», Р – «решётка» (просторечное «решка»).

Мы исключаем возможности типа «монета стала на ребро», «монета исчезла» и т.д.

Пример 1.2. Подбрасывание игральной кости один раз. В этом опыте естественно выбрать

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

где через ω_k обозначен исход опыта, заключающийся в выпадении k очков. В этом опыте возможны шесть исключающих друг друга исходов. Пусть нас интересует событие A — выпадение чётного числа очков:

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \quad A \subset \Omega.$$

В частности, можно рассматривать событие Ω (ведь каждое множество есть свое собственное подмножество).

Пример 1.3 (задача о встрече). Два студента условились встретиться в назначенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами и ждать друг друга в течение 10 мин (но не долее, чем до истечения часа). Каждый из них наудачу и независимо от другого выбирает момент своего прихода. Описать пространство Ω и событие C, означающее, что встреча состоится.

Решение. Обозначим через x время прихода одного студента и через y время прихода второго. Каждый из них может прийти в любой момент между 11 и 12 часами, поэтому

$$11 \leqslant x \leqslant 12 \quad \text{и} \quad 11 \leqslant y \leqslant 12.$$

В системе координат выберем за начало отсчёта число 11, тогда пространство элементарных событий Ω представляет собой множество точек квадрата

$$\Omega = \left\{(x, y): \begin{array}{l} 11 \leqslant x \leqslant 12, \\ 11 \leqslant y \leqslant 12. \end{array}\right\}$$

Не любая точка квадрата определяет ситуацию, благоприятствующую встрече, например точка ($11\frac{1}{6}$, $11\frac{1}{2}$). Первый пришел в 11 час 10 мин, второй – в 11 час 30 мин, но первый уже ушел, прождав его условленные 10 мин.

Какие же исходы опыта будут благоприятствовать встрече? Те, для которых разность между моментами прихода студентов окажется не более 10 мин, т.е.

$$|x - y| \leqslant 1/6.$$

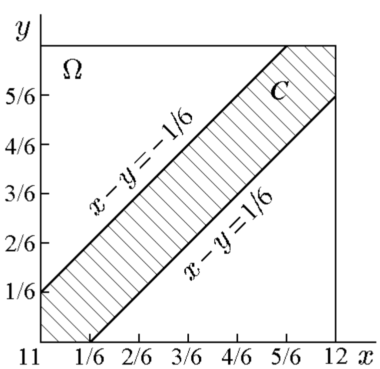


Рис. 1.

Построим область $-1/6 \leqslant x - y \leqslant 1/6$; её граничными линиями будут

$$x - y = -1/6;$$
$$x - y = 1/6.$$

Множество исходов опыта, благоприятствующих встрече, есть область C, заштрихованная на рис. 1.

♦ Событие Ω называется *достоверным*, если оно не может не произойти в условиях данного опыта или явления.

Ко всему пространству элементарных событий добавляется еще пустое множество $\emptyset$. Это множество тоже рассматривается как событие и называется невозможным событием.

♦ Событие $\emptyset = \{\omega \in \emptyset\}$ называется *невозможным*, если оно не может произойти при выполнении условий данного опыта.

Пример достоверного события — выпадение не более 6 очков при бросании игральной кости, пример невозможного события — выпадение 7 очков при бросании игральной кости.

Заметим, что пространство элементарных событий в одном и том же опыте можно задавать по-разному; например, при случайном выборе точки на плоскости её положение можно задавать как декартовыми координатами (x, y), так и полярными (ρ, φ).

♦ Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A или его *дополнением*, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A:

$$\overline{A} = \Omega - A.$$

♢ Для наглядности воспользуемся диаграммами Венна–Эйлера. Будем изображать область Ω в виде прямоугольника, каждая точка которого соответствует элементарному исходу, а событиям — некоторые области внутри Ω. Тогда событию $\overline{A}$, противоположному событию A, можно сопоставить заштрихованную на рис. 2 область.

Очевидно, что событие $\overline{A}$ состоит из элементов множества Ω, которые не входят в множество A (см. рис. 2). Событие, противоположное достоверному, является невозможным, т.е. $\overline{\Omega} = \emptyset$. Событие $\overline{\overline{A}}$, противоположное к противоположному, есть событие A ($\overline{\overline{A}} = A$).

♦ Событие C называется *суммой* или *объединением двух событий* A и B, если оно происходит лишь тогда, когда происходит по крайней мере одно из событий A или B:

$$C = A + B = A \cup B.$$

Определение можно распространить на любое конечное число слагаемых.

На диаграмме Венна–Эйлера сумме двух событий $A+B$ можно сопоставить заштрихованную на рис. 3 область.

♢ Из определения вытекают следующие свойства операции сложения:

$$\begin{aligned}
&A + B = B + A;\\
&(A + B) + C = A + (B + C);\\
&A + A = A;\\
&A + \Omega = \Omega;\\
&A + \emptyset = A;\\
&A + \overline{A} = \Omega.
\end{aligned}$$

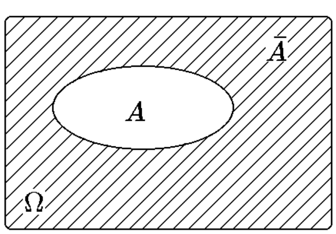


Рис. 2.

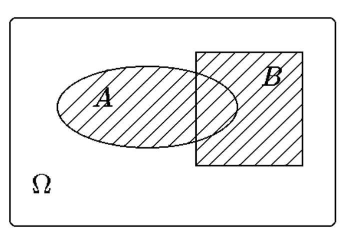


Рис. 3.

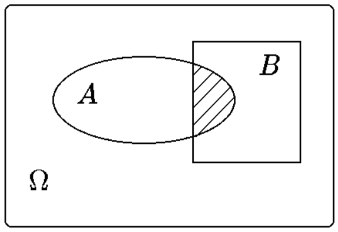


Рис. 4.

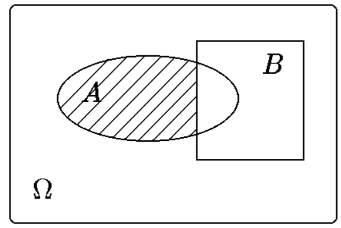


Рис. 5.

♦ Событие C называется *произведением двух событий* A и B, если оно происходит тогда, когда происходят и событие A, и событие B:

$$C = A \cdot B = A \cap B.$$

Таким образом, произведение событий A и B есть множество, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B. На диаграмме Венна–Эйлера произведению двух событий $A \cap B$ сопоставим заштрихованную область на рис. 4.

◊ Из определения вытекают следующие свойства операции умножения:

$$\begin{aligned}
&A \cdot B = B \cdot A;\\
&A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;\\
&A \cdot A = A;\\
&A \cdot \Omega = A;\\
&A \cdot \emptyset = \emptyset;\\
&A \cdot \overline{A} = \emptyset.
\end{aligned}$$

♦ *Разностью двух событий* A и B называется такое событие C, которое происходит лишь тогда, когда происходит событие A, а событие B не происходит:

$$C = A - B = A \setminus B.$$

Событию C сопоставляется заштрихованная область на рис. 5.

Из определения следует, что $A - B = A\overline{B}$, то есть разность событий можно свести к их произведению.

♦ Говорят, что *событие* A *влечёт событие* B ($A \subset B$), если при наступлении события A неизбежно наступает событие B (см. рис. 6).

В этом случае множество A является подмножеством B. Так, при бросании игральной кости событие A — «выпадет два очка» влечёт событие B — «выпадет чётное число очков».

♦ Если $A \subset B$, а $B \subset A$, то A и B называются *эквивалентными* (*равносильными*), что записывается как $A = B$.

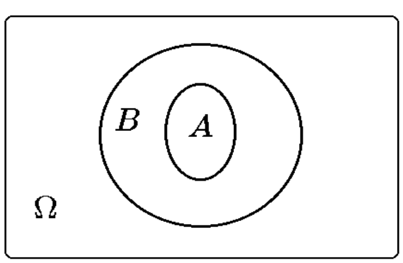


Рис. 6.

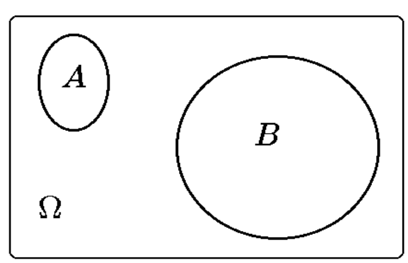


Рис. 7.

Например, при бросании двух костей события: A — «выпадет чётная сумма» и B — «на каждой грани выпадут очки одной чётности» являются эквивалентными.

♦ События A и B *несовместны*, если $A \cdot B = \emptyset$ (см. рис. 7). В частности, несовместными событиями являются противоположные.

♦ События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если хотя бы одно из них обязательно случится в результате опыта.

Иными словами, события $A_1, \ldots, A_n$, $n \leqslant \infty$, образуют полную группу, если их объединение есть достоверное событие:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Помимо отмеченных выше, операции над событиями обладают следующими свойствами:

1. $(A + B)C = AC + DC$.
2. $AB + C = (A + C)(B + C)$.
3. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.
4. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Доказательства этих свойств дословно повторяют доказательства соответствующих свойств операций над множествами в теории множеств.

Из установленных свойств операций над событиями следует, что для любых событий A и B

$$A = A\Omega = A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}. \tag{1.1}$$

Эта формула дает разложение любого события A на два непересекающихся события.

Если $B \subset A$, то $AB = B$, и из (1.1) следует $A = B + A\overline{B}$ или $A = B \cup A\overline{B}$.

Пример 1.4. Установить, справедливо ли соотношение $A - (B - C) = (A - B) + C$.

Решение. Преобразуем правую и левую части, используя свойства операций с событиями: $D = (A - B) + C = A\bar{B} + C$, аналогично $E = A - (B - C) = A(\overline{B - C}) = A\overline{B\bar{C}} = A(\bar{B} + C) = A\bar{B} + AC$. Следовательно, $E \subset D$, так как $AC \subset C$, а соотношение $C \subset AC$ в общем случае не справедливо, то $D \neq E$, и исходное утверждение имеет вид $A - (B - C) \supset (A - B) + C$.

Пример 1.5. Дана система из трех блоков a_1, a_2, b (см. рис. 8), где a_1 и a_2 — дублирующие блоки (схема последовательного соединения блока b с подсистемой a параллельно соединенных блоков a_1 и a_2).

Записать события, состоящие в том, что система 1) исправна, 2) неисправна.

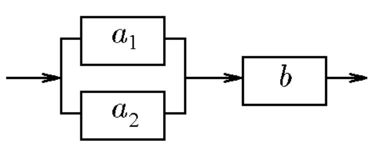


Рис. 8.

Решение. Введём обозначения: A_1 — событие, состоящее в том, что блок a_1 исправен; A_2 — событие, состоящее в том, что блок a_2 исправен; B — событие, состоящее в том, что блок b исправен; S — событие, состоящее в том, что система исправна; S_a — событие, состоящее в том, что подсистема a исправна. Разобьем систему на две подсистемы a и b. Подсистема a дублирующих блоков исправна в том случае, когда исправен хотя бы один из блоков a_k $(k = 1, 2)$ исправен, то есть $S_a = A_1 + A_2$. Для исправности системы необходима исправность подсистемы a и блока b, то есть $S = BS_a$. Таким образом, $S = B(A_1 + A_2)$. Аналогичные рассуждения могут привести к $\bar{S} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 + \bar{B}$.

Заметим, что $\bar{S}$ можно построить по S с помощью свойств противоположных событий.

♦ Множество $\mathcal{F}$, состоящее из подмножеств множества Ω, называется *алгеброй событий*, если

1) множество $\mathcal{F}$ содержит достоверное событие, т.е $\Omega \in \mathcal{F}$;
2) вместе с событием A множество $\mathcal{F}$ содержит противоположное ему событие $\overline{A}$;
3) вместе с любым конечным набором событий множество $\mathcal{F}$ содержит объединение этих событий.

Условия 1–3 называют аксиомами алгебры событий.

Пример 1.6. Два стрелка стреляют по мишени. Пусть событие A — попал в цель первый стрелок, событие B — попал в цель второй стрелок. Записать на языке алгебры событий следующие события: C — оба стрелка попали в цель; D — оба стрелка промахнулись; E — попал в цель ровно один стрелок; F — хотя бы один стрелок попал в цель.

Решение. Событие C заключается в одновременном осуществлении событий A и B, что по определению является произведением этих событий, следовательно $C = AB$.

Событие D заключается в том, что не произойдёт ни событие A, ни событие B, то есть в одновременном осуществлении событий, противоположных событиям A и B, что есть произведение противоположных событий, следовательно, $D = \bar{A}\bar{B}$.

Событие E произойдёт, если в цель попадёт первый стрелок, а второй при этом не попадёт, либо если попадёт в цель второй стрелок, а первый при этом промахнётся. Событие, заключающееся в том, что первый стрелок попал, а второй не попал в цель, есть произведение события A и события, противоположного событию B, то есть это событие $A\bar{B}$. Аналогично событие, заключающееся в том, что второй стрелок попал в цель, а первый не попал, есть $\bar{A}B$. Поскольку нас устраивает любое из этих событий, то событие E есть сумма этих событий: $E = A\bar{B} + \bar{A}B$.

Событию F удовлетворяют следующие элементарные события: попал в цель только первый стрелок, попал в цель только второй стрелок, оба стрелка попали в цель. Следовательно, F есть сумма этих событий: $F = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$. Кроме того, можно заметить, что событие, противоположное к событию F, есть событие «ни один стрелок не попал в цель»; следовательно, событие F можно выразить через противоположное событие следующим образом: $F = \overline{\bar{A}\bar{B}}$. И, наконец, событие F — попал в цель хотя бы один стрелок — по определению есть сумма событий A и B: $F = A + B$. Используя свойства операций над событиями, легко убедиться, что все формулы тождественны. Последняя запись является хоть и самой простой, но не самой удобной, поскольку в ней мы выразили событие через сумму совместных событий. Как правило, если будет идти речь о наступлении хотя бы одного события из группы событий, удобнее всего выразить это событие через противоположное.

♦ Алгебра событий $\mathcal{F}$, замкнутая относительно счётных объединений, называется *σ-алгеброй*.

Алгебра событий обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Невозможное событие принадлежит множеству $\mathcal{F}$ ($\emptyset \in \mathcal{F}$).

Доказательство. Согласно аксиоме 1, $\Omega \in \mathcal{F}$, следовательно, $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$ в силу аксиомы 2.

Свойство 2. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\prod\limits_i A_i \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Согласно свойствам операций над событиями, $\prod\limits_i A_i = \overline{\sum\limits_i \overline{A}_i}$, а в силу аксиом 2 и 3 справедливо $\overline{\sum\limits_i \overline{A}_i} \in \mathcal{F}$.

Таким образом, применение счётного числа операций над событиями, таких как объединение, пересечение, дополнение, к множествам из $\mathcal{F}$ снова даёт множество из $\mathcal{F}$, или, как говорят, множество $\mathcal{F}$ замкнуто относительно этих операций.

Множество $\mathcal{F}$ будем также называть *полем событий*, связанных с данным испытанием.

Пример 1.7. Подбрасывается игральная кость. Привести примеры событий, являющихся и не являющихся σ-алгебрами.

Решение. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, где k-ый исход означает, что выпало k очков. Тогда, например, следующие множества $\mathcal{F}$ являются σ-алгебрами:
1) $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ — тривиальная σ-алгебра;
2) $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$;
3) $\mathcal{F}$ — множество всех подмножеств множества Ω.
Примером множества, не являющегося σ-алгеброй, может служить, например, множество $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$, так как, в частности, $\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \notin \mathcal{F}$.

2. Частота события. Свойства частоты события

Естественно сравнивать события по тому, как часто каждое из них появляется при повторении данного опыта. Если при повторении опыта одно событие появляется чаще, чем другое, то говорят, что первое *вероятнее* второго. Ясно, что для сравнения событий необходимо предположить, что данный опыт можно производить сколько угодно (в принципе, неограниченное число) раз.

♦ *Частотой* (*относительной частотой*) события называется отношение числа его появлений к числу всех произведённых опытов.

Таким образом, частота события A определяется формулой

$$\mu_n(A) = \frac{m}{n} = \frac{m_n(A)}{n},$$

где n — общее число испытаний; $m = m_n(A)$ — число появлений события A в n испытаниях.

Опыт показывает, что при многократном повторении испытаний частота $\mu_n(A)$ случайного события обладает устойчивостью. В качестве иллюстрации рассмотрим данные по проверке симметричности монеты. Пусть m_n — число выпадений герба в n испытаниях, так что m_n/n — частота выпадения герба.

В следующей таблице приведены результаты появления герба при подбрасывании монеты, экспериментально полученные разными исследователями, начиная с XVIII в. Их фамилии помещены в первом столбце таблицы, во втором столбце указано число подбрасываний, а в третьем — частота появления герба.

Бюффон	4040	0,507
Де Морган	4092	0,5005
Джевонс	20480	0,5068
Романовский	80640	0,4923
Пирсон	24000	0,5005
Феллер	10000	0,4979

Таким образом, мы видим, что при большом числе бросаний монеты частота появления герба мало отличается от числа 0,5, т.е. обладает устойчивостью.

Отметим основные свойства частоты.

Свойство 1. Частота любого события представляет собой неотрицательное число, не превосходящее 1, причём частота невозможного события равна нулю, а частота достоверного события равна 1:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \mu_n(A) \leqslant 1, \\ \mu_n(\emptyset) = 0, \quad \mu_n(\Omega) = 1. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Свойство 2. Частота появления одного из несовместных событий, безразлично какого именно, равна сумме их частот. Это следует непосредственно из того, что число появлений сложного события, состоящего из нескольких несовместных событий, равно сумме чисел появления каждого из этих событий

$$\mu_n(A + B) = \mu_n(A) + \mu_n(B) = \frac{m_n(A)}{n} + \frac{m_n(B)}{n}.$$

Очевидно, что если частота события в данной серии опытов равна нулю (или единице), то из этого не следует, что событие невозможно (достоверно). Так, например, если при пяти бросаниях монеты герб не появился ни разу, то из этого не следует, что появление герба невозможно.

Устойчивость частоты события дает основание считать, что с каждым событием связано некоторое число — *вероятность этого события*, — около которого стремится стабилизироваться его частота. Например, частота появления герба при бросании монеты, очевидно, должна стабилизироваться около 1/2. Следовательно, вероятность появления герба равна 1/2.

Вероятность события A обозначается $P(A)$. Это, конечно, не исключает применения сокращенных обозначений, например $P(A) = p$ и т.п.

Понятие вероятности события является первичным и поэтому не нуждается в определении. Оно представляет собой результат абстрагирования, необходимый для построения любой теории. Отвлекаясь от сложных и несущественных колебаний частоты при неограниченном повторении опытов и оставляя основную, существенную закономерность, наблюдаемую в данном явлении, — устойчивость частоты, — мы и вводим абстрактное понятие вероятности события.

Вероятность события в данном опыте — его объективная характеристика. Она имеет вполне определённое значение независимо от того, собираемся мы производить опыты или нет.

♦ Под *статистической вероятностью события* A понимают предел, к которому стремится частота события при неограниченном увеличении числа испытаний.

◊ Таким образом, под статистической вероятностью события понимается число, относительно которого частота события $\mu(A)$ устойчиво колеблется и к которому приближается с незначительными отклонениями, носящими случайный незакономерный характер, при неограниченном увеличении числа испытаний. Математическое содержание понятия «устойчиво колеблется» будет рассмотрено более подробно в главе «Предельные теоремы. Закон больших чисел».

◊ Из определения следует, что если опытным путем установлена относительная частота некоторого события A, то полученное число можно принять за приближённое значение вероятности этого события при условии, что n достаточно велико. Тем не менее, такое определение вероятности оказывается неудобным. Во-первых, всю последовательность частот получить невозможно. Кроме того, относительная частота $\mu(A)$, как мы уже отмечали, обнаруживает устойчивость именно потому, что данному событию A присуща некоторая вероятность $P(A)$. То есть именно устойчивость относительной частоты события порождена вероятностью события, а не наоборот, как в данном определении.

3. Аксиомы теории вероятностей

При аксиоматическом подходе к определению вероятности последняя задается перечислением ее свойств. Простейшие свойства вероятности определяются естественными свойствами частоты $\mu(A)$, указанными выше.

Пусть каждому событию ставится в соответствие некоторое число, называемое *вероятностью события.*

♦ *Вероятностью* называется числовая функция $P(A)$, заданная на множестве событий, образующих σ-алгебру $\mathcal{F}$, если выполняются следующие аксиомы.

Аксиома 1. *Вероятность любого события A неотрицательна:*

$$0 \leqslant P(A). \tag{3.1}$$

Аксиома 2. *Вероятность достоверного события равна единице:*

$$P(\Omega) = 1. \tag{3.2}$$

Аксиома 3 (сложения вероятностей). *Если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — несовместные события, то*

$$P\Bigl(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Bigr) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{3.3}$$

Ныне принятое аксиоматическое определение вероятности было введено в 1933 г. А.Н. Колмогоровым.

Аксиомы теории вероятностей позволяют вычислять вероятности любых событий (подмножеств пространства Ω) с помощью вероятностей элементарных событий. Вопрос о том, как определить вероятности элементарных событий, при этом не рассматривается. На практике они определяются либо из соображений, связанных с симметрией опыта (например, для симметричной игральной кости естественно считать одинаково вероятным выпадение каждой из граней), либо же на основе опытных данных (частот).

◊ Заметим, что вероятность события A, определённая аксиомами 1–3, задается не на пространстве Ω, а на некоторой σ-алгебре событий, определённой на Ω. Можно показать, что существуют множества $A \subset \Omega$, для которых нельзя определить вероятность, которая удовлетворяла бы аксиомам 1–3. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только те множества $A \subset \Omega$, для которых мы можем определить вероятность.

♦ Тройка $R = \langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$, где Ω — пространство элементарных исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра его подмножеств, а P — вероятностная мера на $\mathcal{F}$, называется *вероятностным пространством.*

Итак, вероятность есть функция $P\colon \mathcal{F} \to R$, удовлетворяющая условиям аксиом 1–3, или, как говорят, нормированная (вероятностная) мера, заданная на множестве $\mathcal{F}$.

◊ Можно показать, что аксиома 3 эквивалентна двум следующим аксиомам.

Аксиома 4. *Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.*

Аксиома 5. *Если* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ *и* $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ *или* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ *и* $A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, *то* $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

4. Свойства вероятности

Рассмотрим основные свойства вероятности.

Свойство 1. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\emptyset) = 0. \tag{4.1}$$

Действительно, $\Omega = \Omega + \emptyset$, а события Ω и $\emptyset$ несовместны: $\Omega\emptyset = \emptyset$. Тогда, согласно третьей аксиоме теории вероятностей,

$$P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset).$$

Отсюда следует, что $P(\emptyset) = 0$, так как, согласно аксиоме 2, $P(\Omega) = 1$.

Свойство 2. Для любого события A вероятность противоположного события $\overline{A}$ выражается равенством

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{4.2}$$

Действительно, $\Omega = A + \overline{A}$, а события A и $\overline{A}$ несовместны: $A\overline{A} = \emptyset$. Следовательно,

$$P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

или

$$1 = P(A) + P(\overline{A}).$$

Свойство 3. Если событие A влечёт за собой событие B, т.е. $A \subset B$, то вероятность события C, где C — разность событий B и A, определяется соотношением

$$P(C) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Действительно, если $A \subset B$, то событие B можно представить в виде суммы несовместных событий $B = A + (B \setminus A)$. Тогда

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A),$$

откуда следует, что (см. рис. 6)

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Свойство 4. Если событие A влечёт за собой событие B, т.е. $A \subset B$, то вероятность события A не может быть больше вероятности события B, т.е. $P(A) \leqslant P(B)$.

Действительно, в силу предыдущего свойства, если $A \subset B$, то $P(A) = P(B) - P(B \setminus A)$. Но, согласно аксиоме 1,

$$P(B \setminus A) \geqslant 0,$$

откуда следует, что (см. рис. 6)

$$P(A) \leqslant P(B).$$

Свойство 5. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,$$

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из аксиом 1 и 2 и свойства 4.

Свойство 6 (теорема сложения вероятностей). Вероятность суммы любых двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{4.3}$$

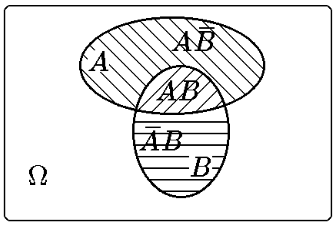


Рис. 9.

Действительно, событие $A+B$ можно представить как сумму несовместных событий: $A+B = B + (A \setminus (AB))$ (см. рис. 9). Тогда

$$P(A+B) = P(B) + P(A \setminus (AB)).$$

Но $AB \subset A$. Следовательно, согласно свойству 3 (см. также рис. 5),

$$P(A \setminus AB) = P(A) - P(AB).$$

В частности, если события A и B несовместны, то $P(AB) = P(\emptyset) = 0$ и

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Свойство 7. Вероятность суммы событий не превосходит сумму вероятностей этих событий:

$$P(A+B) \leqslant P(A) + P(B). \tag{4.4}$$

Справедливость соотношения (4.4) следует непосредственно из предыдущего свойства с учетом аксиомы 1.

Соотношение (4.3) может быть обобщено на любое количество событий.

Свойство 8 (общее правило сложения вероятностей). Вероятность суммы n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ может быть вычислена по формуле

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k}^{n} P(A_iA_jA_k) - \\ - \sum_{1\leqslant i<j<k<l}^{n} P(A_iA_jA_kA_l) + \ldots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{4.5}$$

Соотношение (4.5) доказывается методом математической индукции. Оно справедливо для $n=2$ в силу (4.3). Предположим теперь, что оно справедливо для суммы $n-1$ событий, и докажем его справедливость для суммы n событий.

Для суммы $n-1$ событий $A_2, A_3, \ldots, A_n$ имеем

$$P\left(\sum_{i=2}^{n} A_i\right) = \sum_{i=2}^{n} P(A_i) - \sum_{2\leqslant i<j}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{2\leqslant i<j<k}^{n} P(A_iA_jA_k) - \ldots$$

Для суммы $n-1$ событий $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_n$ по той же формуле имеем

$$P\biggl(\sum_{i=2}^{n} A_1A_i\biggr) = \sum_{i=2}^{n} P(A_1A_i) - \sum_{2\leqslant i<j}^{n} P(A_1A_iA_j) + \sum_{2\leqslant i<j<k}^{n} P(A_1A_iA_jA_k) - \ldots$$

Тогда, представив сумму n событий в виде суммы двух событий: A_1 и $\sum\limits_{i=2}^{n} A_i$, получим

$$P\biggl(\sum_{i=1}^{n} A_i\biggr) = P\biggl(A_1 + \sum_{i=2}^{n} A_i\biggr) = P(A_1) + P\biggl(\sum_{i=2}^{n} A_i\biggr) - P\biggl(A_1\sum_{i=2}^{n} A_i\biggr) =$$
$$= P(A_1) + \sum_{i=2}^{n} P(A_i) - \sum_{2\leqslant i<j}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{2\leqslant i<j<k}^{n} P(A_iA_jA_k) - \ldots$$
$$-\biggl[\sum_{i=2}^{n} P(A_1A_i) - \sum_{2\leqslant i<j}^{n} P(A_1A_iA_j) + \sum_{2\leqslant i<j<k}^{n} P(A_1A_iA_jA_k) - \ldots\biggr] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k}^{n} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

Таким образом, справедливость соотношения (4.5) доказана.

◊ В частности, для трёх событий из (4.5) следует

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

5. Классическое определение вероятности

Как уже отмечалось, аксиомы и теоремы теории вероятностей позволяют вычислять вероятности любых событий с помощью вероятностей элементарных событий, но они не позволяют определить вероятность самих элементарных событий. В тех случаях, когда элементарные события обладают свойством симметрии в том смысле, что все элементарные события находятся в одинаковом отношении к условиям, которые определяют характер испытания, можно использовать классическое определение вероятности. Например, бросание игральной кости или монеты обладает свойством симметрии по отношению к выпадению того или иного числа очков на кости или той или иной стороны монеты. Таким же свойством симметрии обладают правильно организованная жеребьёвка или тираж лотереи.

Для опытов, обладающих симметрией возможных исходов, применяется способ непосредственного вычисления вероятностей событий в так называемой *схеме случаев* (иначе — *схеме урн*). Этот способ основан на допущении о равновероятности (равновозможности) элементарных событий.

♦ Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *равновозможными*, если в силу симметрии условий опыта относительно этих событий вероятности их одинаковы:

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n).$$

Если в каком-либо опыте пространство элементарных событий Ω можно представить в виде полной группы несовместных и равновозможных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

то такие события называются *случаями* (или *шансами*), а про сам опыт говорят, что он *сводится к схеме случаев* (*схеме урн*).

♦ Событие ω_i называется *благоприятствующим* событию A, если наступление события ω_i влечёт за собой наступление события A:

$$\omega_i \in A.$$

Так как случаи (события) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ образуют полную группу событий, то

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \Omega. \tag{5.1}$$

Так как элементарные события $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ несовместны, то, согласно аксиоме сложения вероятностей,

$$\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\right) = P(\Omega) = 1. \tag{5.2}$$

Так как элементарные события $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ равновозможны, то вероятность каждого из них одна и та же и равна $1/n$:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}. \tag{5.3}$$

Отсюда непосредственно следует так называемая классическая формула для вероятности события $A = \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(\omega_i) = P\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i\right) = \frac{m}{n}.$$

♦ Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятностью события называют *отношение числа m благоприятных этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных исходов испытания*:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{5.4}$$

Здесь m — число случаев, благоприятствующих событию A; n — общее число случаев.

Формула (5.4), принимавшаяся когда-то за определение вероятности, при современном аксиоматическом подходе есть следствие аксиомы сложения вероятностей. Ее можно записать так:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}.$$

Это классическое определение вероятности, $|A|$ и $|\Omega|$ есть обозначение числа элементов *конечных* множеств A, Ω.

Таким образом, будем говорить, что имеется *классический случайный опыт*, если

1) пространство Ω конечно,

2) элементарные события равновозможны.

Прежде чем рассматривать примеры на вычисление вероятностей по классическому определению, нужно научиться вычислять $|A|$ и $|\Omega|$, т.е. число элементов множества A и число элементов множества Ω.

Пример 5.1. В корзине два белых и три чёрных шара. Вынимается наугад один шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Общее число элементарных исходов $n = 5$ (можно достать любой из пяти шаров). Среди этих исходов благоприятствуют событию (будет вынут белый шар) два исхода. Следовательно, искомая вероятность: $P(A) = 2/5$.

Пример 5.2. Бросают 2 игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A — сумма числа очков не превосходит 5; B — произведение числа очков не превосходит 4; C — произведение числа очков делится на 8.

Решение. Используем классическую формулу вероятности. Определим общее число исходов: поскольку в случае подбрасывания одной кости имеем 6 исходов, то в случае подбрасывания двух костей имеем $n = 6 \cdot 6 = 36$ исходов. Найдём число благоприятных исходов.

Множество исходов, благоприятных событию A, состоит из 10 исходов:
$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$
Соответственно, вероятность того, что сумма числа очков не превосходит 5: $P(A) = m_A/n = 10/36$.

Множество исходов, благоприятных событию B, состоит из 8 исходов:
$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(4,1)\}.$$
Соответственно, вероятность того, что произведение числа очков не превосходит 4: $P(B) = m_B/n = 8/36$.

Множество исходов, благоприятных событию C, состоит из 5 исходов:
$$\{(2,4),(4,2),(4,4),(4,6),(6,4)\}.$$
Соответственно, вероятность того, что произведение числа очков делится на 8: $P(C) = m_C/n = 5/36$.

Для подсчёта числа исходов в более сложных случаях используют правила комбинаторики, необходимые сведения из которой мы приведём для полноты изложения.

Комбинаторные формулы

1. Правило умножения (основное правило комбинаторики)

Пусть имеется k различных множеств, первое из которых содержит n_1 элементов, 2-е — n_2 элементов, k-е — n_k элементов.

Будем составлять всевозможные новые множества, взяв по одному элементу из каждого данного. Очевидно, что каждое новое множество будет содержать k элементов. Оказывается, что общее число таких новообразованных множеств будет
$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k.$$
Доказывается методом полной математической индукции.

Пример 5.3. Опыт состоит в подбрасывании трёх игральных костей. Сколько различных равновозможных исходов содержит пространство Ω этого испытания?

Решение. Число исходов при подбрасывании каждой из костей равно 6. По правилу умножения общее число исходов при подбрасывании трёх костей $N = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Множество Ω в этом случае можно описать так:
$$\Omega = \{(1,1,1),(1,1,2),\ldots,(6,6,6)\}.$$
Опыт классический, так как исходы равновозможны.

2. Размещения

Пусть из множества, содержащего n различных элементов, отбираются m элементов и размещаются в порядке их появления. Получающиеся таким образом упорядоченные комбинации называются *размещениями* из n элементов по m элементов, а полное число таких выборок определяется формулой

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

3. Перестановки

Пусть имеется n различных элементов, из которых формируются выборки, отличающиеся порядком элементов. Получающиеся таким образом упорядоченные комбинации называются *перестановками* из n элементов, а полное число таких выборок определяется формулой (частный случай размещений при $m = n$)

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

4. Сочетания

Пусть из множества, состоящего из n элементов, отбираются m различных элементов без учета порядка их появления. Получающиеся таким образом комбинации называются сочетаниями из n элементов по m элементов, а полное число таких выборок определяется формулой

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 5.4. В корзине находятся восемь белых и шесть чёрных шаров. Наудачу вынимаются пять шаров. Найти вероятности следующих событий: A — все вынутые шары белые; B — среди вынутых три белых и два чёрных шара; D — среди вынутых хотя бы три белых шара.

Решение. Опыт классический, так как исходы равновозможны. Общее число элементарных исходов n равно числу способов, которыми можно выбрать из 14 шаров по 5 различных шаров, т.е. $n = C_{14}^5$. Число благоприятных событию A исходов равно числу способов, которыми можно выбрать из 8 белых шаров по 5 различных шаров, т.е. $m_A = C_8^5$. Тогда

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{C_8^5}{C_{14}^5} = \frac{8!}{5!3!}\frac{5!9!}{14!} = \frac{4}{143}.$$

При подсчёте благоприятных исходов для события B учтём, что 3 белых шара из 8 имеющихся можно получить C_8^3 способами. При этом для каждой выбранной комбинации из трёх белых шаров два шара из 6 имеющихся чёрных можно выбрать C_6^2 способами. Тогда, согласно основному правилу комбинаторики, $m_B = C_8^3 C_6^2$ и

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{C_8^3 C_6^2}{C_{14}^5} = \frac{60}{143}.$$

Для события D благоприятны исходы, когда выборка содержит либо 3, либо 4, либо 5 белых шаров. Поэтому $m_D = C_8^3 C_6^2 + C_8^4 C_6^1 + C_8^5 C_6^0$ и

$$P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{C_8^3 C_6^2 + C_8^4 C_6^1 + C_8^5 C_6^0}{C_{14}^5} = \frac{94}{143}.$$

Пример 5.5. Числа $1, 2, \ldots, 9$ записываются в случайном порядке. Какова вероятность, что числа 1 и 2 будут рядом в порядке возрастания?

Решение. Общее число исходов n равно числу перестановок из 9 элементов, т.е. $n = P_9 = 9!$. Число 1 в этой последовательности из 9 чисел может занимать 8 различных позиций (с 1-ой по 8-ую), при этом число 2 должно занимать соседнюю позицию. При каждом фиксированном положении чисел 1 и 2, оставшиеся 7 позиций могут быть заняты оставшимися 7-ью числами, как очевидно, 7! способами (число перестановок из 7 элементов). Следовательно,

$$P(A) = \frac{8P_7}{P_9} = \frac{8 \cdot 7!}{9!} = \frac{1}{9}.$$

Пример 5.6. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность, что в нём все цифры различные?

Решение. Так как на каждом из пяти мест в пятизначном номере может стоять любая из цифр: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, то общее количество различных пятизначных номеров равно $n = 10^5$. Номера, у которых все цифры различные, — это размещения из 10 элементов по 5, то есть $m = A_{10}^5$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A_{10}^5}{10^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0{,}3024.$$

Пример 5.7. В партии из N изделий имеется $M < N$ бракованных. Предположим, что вынимаются наугад n изделий. Определить вероятность того, что среди них будет хотя бы одно бракованное.

Решение. Исход опыта — n извлечённых наугад изделий из N. Исходы равновозможны, т.е. $|\Omega| = C_N^n$.

Событие A — хотя бы одно изделие бракованное. Нужно найти, сколько исходов входит в событие A.

Вместо события A удобнее рассмотреть противоположное событие $\overline{A}$ — среди n извлечённых изделий нет ни одного бракованного. Тогда $|\overline{A}| = C_{N-M}^n$ и

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{N-M}^n}{C_N^n},$$

а по второму свойству вероятности

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}),$$

т.е.

$$P(A) = 1 - \frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}.$$

Пример 5.8. Партия товара состоит k_1 изделий 1-го сорта, k_2 изделий 2-го сорта, k_3 изделий 3-го сорта и k_4 изделий 4-го сорта $(\sum\limits_{i=1}^{4} k_i = N)$. Для контроля наудачу выбираются M изделий. Определить вероятность того, что среди них ровно m_1 изделий 1-го сорта, m_2 изделий 2-го сорта, m_3 изделий 3-го сорта и m_4 изделий 4-го сорта.

Решение. Общее число элементарных исходов n равно числу способов, которыми можно выбрать из имеющихся N изделий M различных изделий, т.е. $n = C_N^M$. m_1 изделий 1-го сорта можно выбрать из имеющихся k_1 изделий 1-го сорта $C_{k_1}^{m_1}$ способами, m_2 изделий 2-го сорта можно выбрать из k_2 имеющихся изделий 2-го сорта $C_{k_2}^{m_2}$ способами и т.д. Тогда общее число благоприятных исходов, согласно основному правилу комбинаторики, равно $m_A = C_{k_1}^{m_1} C_{k_2}^{m_2} C_{k_3}^{m_3} C_{k_4}^{m_4}$ и соответствующая вероятность

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{C_{k_1}^{m_1} C_{k_2}^{m_2} C_{k_3}^{m_3} C_{k_4}^{m_4}}{C_N^M}. \tag{5.5}$$

6. Геометрическое определение вероятности

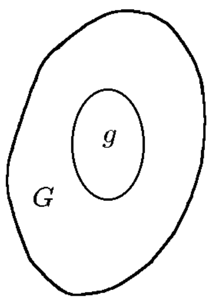


Рис. 10.

Классическое определение вероятности основано на рассмотрении конечного числа равновероятных элементарных событий. Но как вычислить вероятность события, если Ω имеет бесконечное множество элементов, как, например, в «задаче о встрече» (см. пример 1.3)?

Существует формальное определение вероятности для опытов с бесконечным числом исходов. В подобных случаях пространство элементарных исходов может быть некоторой областью G (которую для определённости будем считать расположенной в $\mathbb{R}^2$, т.е. $G \subset \mathbb{R}^2$), и в ней содержится другая область g (рис. 10) с определённой мерой (длиной, площадью, объёмом). Под событием A можно понимать исходы, входящие в область g. Пусть, например, наугад брошена «точка» M. Какова вероятность того, что «точка» M попадёт в область g, являющуюся частью области G?

Хотя каждое из множеств G и g содержит бесконечное количество точек, естественно положить, что вероятность попадания в множество G больше и притом во столько раз, во сколько площадь S_G области G превышает площадь S_g области g. Считая все допустимые способы попадания равновозможными, естественно полагать, что искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}.$$

В общем случае множества G и g могут иметь разную размерность ($\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^3$ и др.), но приведённая формула сохраняет свой смысл с той лишь разницей, что множества в общем случае оцениваются мерой (длиной, площадью, объёмом).

Таким образом, в общем случае

$$P(A) = \frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G}. \tag{6.1}$$

$\Diamond$ Мера множества — обобщение понятия длины отрезка, площади фигуры, объёма фигуры или массы тела при некотором заданном пространственном (поверхностном, линейном) распределении плотности массы.

При этом предполагается, что g и G изображаются некоторыми множествами евклидова пространства $\mathbb{R}^k$, имеющими меру, и равновеликие множества считаются равновероятными.

Проверим выполнение аксиом.

1. $0 \leqslant P(A)$, так как длина, площадь или объём — положительные величины.

2. Аксиома 2 также справедлива, так как

$$P(\Omega) = \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes} G} = 1.$$

3. Справедливость аксиомы 3 следует из свойств аддитивности длины, площади, объёма: мера суммы непересекающихся областей равна сумме их мер.

Таким образом, все аксиомы выполняются.

Пример 6.1. Для условий примера 1.3 («задача о встрече») найти вероятность события C — два студента встретятся.

Решение. Пространство Ω и событие C описаны в примере 1.3 (см. рис. 1). Применив геометрическое определение, получим

$$P(C) = \frac{\operatorname{mes}\{(x,y) \big| \, |x-y| \leqslant 1/6\}}{\operatorname{mes}\left\{(x,y) \middle| \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{array}\right\}} = \frac{1-(5/6)^2}{1^2} = \frac{11}{36}.$$

Пример 6.2. Случайным образом в интервале $(0,1)$ выбираются два числа: a и b. Найти вероятность следующих событий: A: $a+b<1$; B: $ab<1/2$.

Решение. Выберем декартову систему координат, и на оси Ox будем откладывать число a, а на оси Oy — число b. По условиям задачи $0<a<1$, $0<b<1$. Очевидно, что множеству элементарных исходов (область G) при таком подходе будет соответствовать квадрат со стороной, равной единице: $\operatorname{mes} G = S_G = 1$.

Областью g, благоприятствующей событию A, будет являться множество точек данного квадрата, для которых (заштрихованная на рис. 11 область) $\operatorname{mes} g = S_g = 1/2$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

Областью g, благоприятствующей событию B, будет являться множество точек квадрата, для которых $xy<1/2$ (заштрихованная на рис. 12 область):

$$S_g = \frac{1}{2} + \int\limits_{1/2}^{1} \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln x\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}85.$$

Следовательно,

$$P(B) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{(1+\ln 2)/2}{1} \approx \frac{0{,}85}{1} = 0{,}85.$$

Пример 6.3. В отрезке единичной длины наудачу выбираются две точки. Определить вероятность того, что расстояние между точками меньше $1/2$.

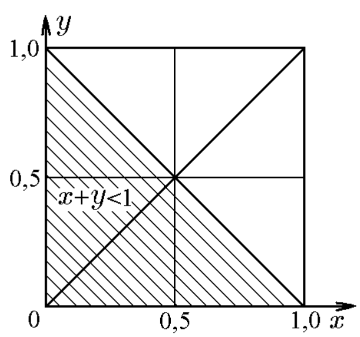


Рис. 11.

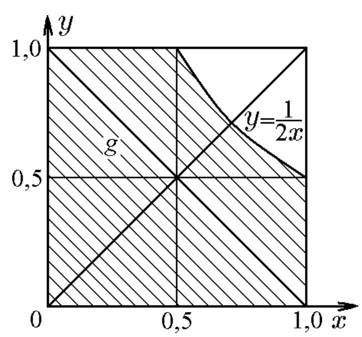


Рис. 12.

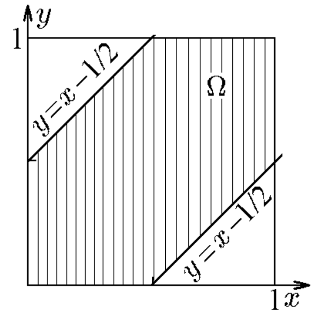


Рис. 13.

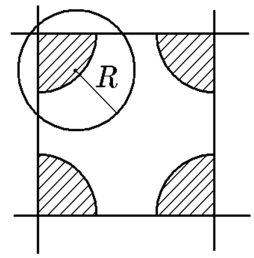


Рис. 14.

Решение. Пусть x — расстояние от конца отрезка до первой точки, а y — расстояние от того же конца отрезка до второй точки. Тогда пространство элементарных исходов: $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Рассматриваемому событию «расстояние между точками меньше $1/2$» соответствует множество A точек множества Ω, для которых $|x-y| < 1/2$. Тогда, согласно геометрическому определению вероятности, вероятность этого события (см. рис. 13)

$$P = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1 - 1/2 \cdot 1/2}{1} = \frac{3}{4}.$$

Пример 6.4. Плоскость разграфлена на квадраты сеткой параллельных линий с шагом 3 см. На плоскость брошена монета диаметром 2 см. Какова вероятность, что монета пересечёт четыре квадрата?

Решение. Будем характеризовать положение монеты положением её центра. Очевидно, что в качестве Ω можно взять множество точек квадрата, в которые попал центр монеты. Монета пересечёт четыре квадрата, если центр монеты будет находиться на расстоянии, меньшем радиуса монеты $R = 1$ см, от одной из четырех вершин квадрата (множество A соответствует заштрихованной фигуре на рис. 14). Тогда вероятность этого события

$$P = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{4 \cdot 1/4 \cdot \pi R^2}{9} = \frac{\pi}{9}.$$

Проведём качественное сравнение сформулированных выше определений вероятности.

Каждое из определений вероятности возникло в результате решения конкретных прикладных задач и, следовательно, отражает закономерности явлений реального мира. К тому же каждое из них обладает своими положительными качествами, но и не лишено недостатков. Узость классического определения связана с выделением конечной полной группы равновероятных событий, что не всегда позволяет представить каждое событие в виде разложения по событиям этой группы.

Наоборот, геометрическое определение теряет смысл в случае конечного множества G: оно оказывается неприменимым, когда равновеликие множества не будут равновероятными. Статистическое определение предполагает повторение одного и того же опыта любое число раз, что практически можно считать неосуществимым, а сама вероятность к тому же не вычисляется – находится лишь некоторое приближение к ней.

Аксиоматическое построение теории вероятностей, данное академиком А.Н. Колмогоровым, объединило различные подходы к определению вероятности и в значительной степени способствовало развитию этой науки.

Однако ни аксиоматический, ни классический, ни геометрический, ни статистический подходы к определению вероятности не исчерпывают реальное понятие «вероятность», а являются лишь приближениями ко всё более полному его раскрытию. Предположение о том, что при данных условиях данному событию отвечает некоторая вероятность, является гипотезой, которая в каждой отдельной задаче требует проверки и обоснования.

7. Условная вероятность. Независимость событий

Рассмотрим пример. Предположим, что эксперимент состоит в трёхкратном подбрасывании монеты. Тогда пространство элементарных событий имеет следующую структуру:

$$\Omega = \{\text{ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР}\},$$

т.е. $|\Omega| = 8$. Исходы равновозможны, т.е. $P(\omega_i) = 1/8$ для всех $\omega_i \in \Omega$, $i = \overline{1, 8}$.

Пусть A – событие, состоящее в том, что герб появится ровно один раз. Событие A – подмножество Ω, $A = \{\text{ГРР, РГР, РРГ}\}$. Воспользовавшись классическим определением вероятности, найдём

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}.$$

Предположим теперь, что об исходе опыта известно, что произошло событие B – число выпавших гербов нечётно:

$$B = \{\text{ГГГ, ГРР, РГР, РРГ}\}.$$

Как изменится вероятность события A при этой дополнительной информации? Или скажем так: чему равна вероятность события A при условии, что произошло событие B?

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно 4, т.е. $|B| = 4$. Событию A благоприятствуют три исхода, входящих в событие B. Естественно новую вероятность события A при условии, что произошло событие B, принять

$$P(A/B) = \frac{3}{4}.$$

Рассмотрим теперь более общий пример.

Пусть имеется классическое пространство Ω:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\};$$
$$|\Omega| = n, \quad P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad \omega_i \in \Omega, \quad i = \overline{1, n},$$

и пусть A, B – некоторые события, причём $|A| = r$, $|B| = m$ и $|A \cdot B| = k$.

Условную вероятность $P(A/B)$ по аналогии с предыдущим можно вычислить так:

$$P(A/B) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)},$$

а

$$P(B/A) = \frac{k}{r} = \frac{k/n}{r/n} = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

♦ Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место событие B, называется *условной вероятностью*, обозначается $P(A/B)$ и определяется соотношениями

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \tag{7.1}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}. \tag{7.2}$$

Из формул (7.1) и (7.2) следует теорема умножения вероятностей.

Теорема 7.1 (теорема умножения вероятностей). *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие имело место:*

$$P(A \cdot B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \tag{7.3}$$

Утверждение теоремы 7.1 может быть обобщено на случай нескольких событий.

Теорема 7.2 (общая теорема умножения вероятностей). *Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причём вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место:*

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{7.4}$$

При этом соответствующие условные вероятности должны быть определены.

Доказательство следует непосредственно из предыдущей теоремы. Соотношение (7.4) доказывается методом математической индукции.

Пример 7.1. В корзине находятся два белых и три чёрных шара. Вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Обозначим события: A — вынуты два белых шара, A_1 — первый вынутый шар белый, A_2 — второй вынутый шар белый. Тогда, в соответствии с классическим определением вероятности, вероятность вынуть первым белый шар $P(A_1) = 2/5$. После того, как из корзины был извлечён белый шар, в корзине осталось 4 шара, среди которых один белый. Следовательно, вероятность вынуть вторым белый шар, при условии, что первым был вынут белый шар, $P(A_2/A_1) = 1/4$. Следовательно,

$$P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{2}{5}\frac{1}{4} = 0{,}1.$$

♢ Условная вероятность обладает всеми свойствами вероятности, поскольку её логично рассматривать как обычную вероятность, определённую на другом пространстве элементарных событий (роль достоверного события Ω играет событие B). Проверим выполнение аксиом теории вероятности для условной вероятности:

1) $P(A/B) \geqslant 0$ для всех A, т.е. аксиома 1 выполняется;

2) если $A = B$, то

$$P(B/B) \equiv \frac{P(B \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1,$$

т.е. аксиома 2 также выполняется;

3) пусть A_1 и A_2 — такие события, что $A_1 \cdot A_2 = \emptyset$ и $P(B) > 0$. Найдём

$$P((A_1 + A_2)/B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P((A_1 + A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B + A_2B)}{P(B)} =$$
$$= \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \frac{P(A_2B)}{P(B)} \stackrel{\text{def}}{=} P(A_1/B) + P(A_2/B),$$

т.е.

$$P((A_1 + A_2)/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B),$$

и аксиома 3 выполняется.

Пример 7.2. Среди 25 экзаменационных билетов имеется 5 «счастливых» и 20 «несчастливых». Студенты подходят за билетами один за другим по очереди. У кого больше вероятность вытащить счастливый билет: у того, кто подошел за билетом первым, или у того, кто подошел вторым?

Решение. Опишем пространство элементарных событий Ω:

$$\Omega = \{1\text{С}2\text{Н},\ 1\text{Н}2\text{С},\ 1\text{С}2\text{С},\ 1\text{Н}2\text{Н}\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

(например, элемент 1С2Н будем понимать так: 1-й студент получил счастливый билет, а 2-й — несчастливый). Воспользовавшись «теоремой умножения вероятностей» (7.3), введём вероятности на пространстве Ω:

$$P(\omega_1) = P(1\text{С}2\text{Н}) = P(1\text{С})P(2\text{Н}/1\text{С}) = \frac{5}{25}\frac{20}{24};$$
$$P(\omega_2) = P(1\text{Н}2\text{С}) = P(1\text{Н})P(2\text{С}/1\text{Н}) = \frac{20}{25}\frac{5}{24};$$
$$P(\omega_2) = P(1\text{С}2\text{С}) = P(1\text{С})P(2\text{С}/1\text{С}) = \frac{5}{25}\frac{4}{24};$$
$$P(\omega_2) = P(1\text{Н}2\text{Н}) = P(1\text{Н})P(2\text{Н}/1\text{Н}) = \frac{20}{25}\frac{19}{24}.$$

Проверим:

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{4} P(\omega_i) = \frac{1}{25 \cdot 24}(5 \cdot 20 + 20 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 20 \cdot 19) = 1.$$

Событие A — 1-й студент получает счастливый билет:

$$A = \{1\text{С}2\text{Н},\ 1\text{С}2\text{С}\} = \{\omega_1, \omega_3\}.$$

Согласно аксиоме 3,

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{20 \cdot 5}{25 \cdot 24} + \frac{5 \cdot 4}{25 \cdot 24} = \frac{1}{5}.$$

Событие B — 2-й студент получает счастливый билет:

$$B = \{1\text{Н}2\text{С},\ 1\text{С}2\text{С}\} = \{\omega_2, \omega_3\}.$$

Согласно аксиоме 3,

$$P(B) = P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{20 \cdot 5}{25 \cdot 24} + \frac{5 \cdot 4}{25 \cdot 24} = \frac{1}{5}.$$

Итак, $P(A) = P(B) = 1/5$.

♦ События A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого из них не зависит от наступления или ненаступления другого:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{и} \quad P(B/A) = P(B). \tag{7.5}$$

Теорема 7.3. *События A и B независимы тогда и только тогда, когда вероятность их одновременного появления равна произведению вероятностей этих событий*

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{7.6}$$

Доказательство следует непосредственно из теоремы умножения вероятностей (7.3) и определения (7.5).

Теорема 7.4. *Если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$, события $\overline{A}$ и B, события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.*

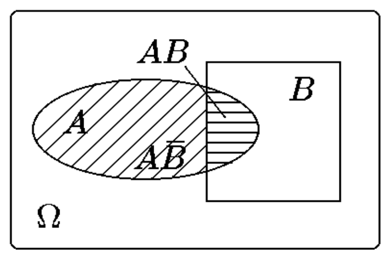


Рис. 15.

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы.

Так как события A и B независимы, то, согласно предыдущей теореме, $P(AB) = P(A)P(B)$. Поскольку (см. рис. 15)

$$AB + A\overline{B} = A, \quad (AB)(A\overline{B}) = \emptyset,$$

то, согласно аксиоме 3, запишем

$$P(AB) + P(A\overline{B}) = P(A),$$

т.е.

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB).$$

Воспользовавшись для $P(AB)$ соотношением (7.6), получим

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)P(B).$$

Отсюда следует

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)[1 - P(\overline{B})]$$

или

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}),$$

что и требовалось доказать.

Второе и третье утверждения теоремы доказываются аналогично.

Пример 7.3. Испытание заключается в подбрасывании игральной кости. Событие A заключается в том, что выпало два очка; B — выпало чётное число очков. Найти $P(A)$, $P(B)$, $P(A/B)$, $P(B/A)$ и выяснить, зависимы или нет события A и B.

Решение. В примере рассматривается классическая вероятность. По формуле (5.4) находим $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/2$. Если событие B наступило, то выпало либо два, либо четыре, либо шесть очков. Следовательно, $P(A/B) = 1/3$. Если событие A наступило, то это событие влечёт событие B, следовательно, $P(B/A) = 1$. Так как $P(A/B) \neq P(A)$ или $P(B/A) \neq P(B)$, то события A и B зависимы.

♦ События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любых k из них ($k \leqslant n$) выполняется соотношение

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}). \qquad (7.7)$$

♦ Если соотношение (7.7) выполняется только при $k = 2$, то события называются *попарно независимыми*.

Пример 7.4. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго 0,8. Определить вероятности следующих событий: а) ровно один стрелок попадёт в цель; б) хотя бы один из стрелков попадёт в цель.

Решение. Пусть событие A — попал в цель первый стрелок, событие B — попал второй стрелок.

а) Событие C — ровно один стрелок попадёт в цель — есть событие $A\bar{B} + \bar{A}B$. Так как события $A\bar{B}$ и $\bar{A}B$ несовместны, а события A и B независимы, то $P(C) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}38$.

б) Событие D — попал в цель хотя бы один стрелок — можно представить в виде суммы событий A и B: $D = A + B$. Следовательно, $P(D) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Так как события A и B независимы, то $P(D) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94$.

Как мы уже отмечали ранее, когда речь идёт о появлении хотя бы одного события в серии испытаний, приведённые выше прямые вычисления $P(D)$ являются не самыми удобными, особенно если число испытаний велико. Лучше в такой ситуации перейти к противоположному событию, определив $\bar{D} = \bar{A}\bar{B}$; тогда с учетом (4.2) запишем

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}94.$$

Пример 7.5. В двух партиях товара, соответственно, 86% и 32% доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) два бракованных; б) одно доброкачественное и одно бракованное; в) хотя бы одно бракованное?

Решение. В соответствии с условием задачи, вероятности выбрать доброкачественное изделие из каждой партии равны соответственно $p_1 = 0{,}86$ и $p_2 = 0{,}32$. Воспользовавшись теоремами сложения и умножения вероятностей, найдём
а) вероятность обнаружить два бракованных:

$$P = (1 - p_1)(1 - p_2) = 0{,}14 \cdot 0{,}68 = 0{,}0952;$$

б) вероятность обнаружить одно доброкачественное и одно бракованное:

$$P = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1) = 0{,}86 \cdot 0{,}68 + 0{,}14 \cdot 0{,}32 = 0{,}6296;$$

в) вероятность обнаружить хотя бы одно бракованное:

$$P = 1 - p_1 p_2 = 1 - 0{,}86 \cdot 0{,}32 = 0{,}7248.$$

Пример 7.6. Монету бросают 10 раз. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится орёл.

Решение. Событие «в десяти испытаниях хотя бы один раз появится орёл» является противоположным событию «в десяти испытаниях ни разу не появится орёл». Так как вероятность того, что орёл не появится в одном испытании, $q = p = 1/2$, то вероятность того, что хотя бы один раз появится орёл в 10 испытаниях

$$P = 1 - q^{10} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}.$$

Пример 7.7. На отрезке $[0; 1]$ выбираются случайным образом 5 точек с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Какова вероятность того, что минимальная из координат точек больше $1/5$?

Решение. Рассмотрим событие $\{\min(x_1, x_2, \ldots, x_5) > 1/5\}$. Данное событие эквивалентно событию $\{$координата каждой точки больше $1/5\}$. Вероятность этого события, согласно теореме умножения,

$$P(\min(x_1, x_2, \ldots, x_5) > 1/5) = P(x_1 > 1/5, x_2 > 1/5, \ldots, x_5 > 1/5) = \\ = P^5(x_1 > 1/5) = (4/5)^5.$$

Пример 7.8. Урна содержит 6 шаров с номерами от 1 до 6. Шары извлекаются по одному без возвращения. Найти вероятность того, что хотя бы у одного шара совпадут номер шара и порядковый номер его извлечения. Найти предельное значение вероятности, если число шаров в урне стремится к бесконечности.

Решение. Обозначим через A_k, $k = \overline{1, 6}$, событие «шар с номером k извлечён k-ым по порядку», а через A событие «хотя бы у одного шара совпал номер с порядковым номером извлечения». На первый взгляд кажется, что вероятность события проще найти, перейдя к противоположному событию, как это обычно делается, когда речь идёт о появления хотя бы одного события. Однако противоположное событие — «ни у одного из шаров не совпал номер с порядковым номером извлечения» — оказывается связанным с еще более трудоемкими расчётами вероятности, чем прямое. Поэтому найдём вероятность данного события по определению как вероятность суммы событий:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_6.$$

Поскольку события A_k, $k = \overline{1, 6}$, совместны, то по общему правилу сложения вероятностей

$$P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) - \sum_{i \leqslant i < j \leqslant 6} P(A_i A_j) + \sum_{i \leqslant i < j < k \leqslant 6} P(A_i A_j A_k) - \ldots - P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6).$$

Найдём $\sum\limits_{i=1}^{6} P(A_i)$. Очевидно, что $P(A_1) = 1/6$. Событие A_2 произойдёт, если первый вынутый шар не будет шаром с номером 2, а второй вынутый шар будет являться шаром с номером 2, следовательно, его вероятность по теореме умножения вероятностей: $P(A_2) = 5/6 \cdot 1/5 = 1/6$. Аналогично можно получить для всех остальных событий: $P(A_3) = \ldots = P(A_6) = 1/6$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{6} P(A_i) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$

Далее можно заметить, что вероятности всех произведений событий попарно, всех произведений событий по три и т.д. также равны между собой. То есть достаточно найти вероятность одного из таких произведений и определить общее количество слагаемых в каждой сумме. В результате получим:

$$\sum_{i \leqslant i<j \leqslant 6} P(A_iA_j) = C_6^2 P(A_iA_j) = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2!};$$

$$\sum_{i \leqslant i<j<k \leqslant 6} P(A_iA_jA_k) = C_6^3 P(A_iA_jA_k) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3!};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$P(\underbrace{A_iA_j \cdots A_k}_{6\ \text{множителей}}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6!}.$$

Окончательно получим

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}.$$

Проведя подобные вычисления при условии, что число шаров в урне стремится к бесконечности, в пределе получим

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{1}{e}.$$

Пример 7.9. Два стрелка по очереди стреляют по мишени. Вероятность попадания для первого при каждом выстреле 1/3, для второго — 2/3. Выигрывает тот, кто первым попадёт в мишень. Какова вероятность, что первый выиграет не позднее своего 3-го выстрела? Каковы вероятности выигрыша для каждого при сколь угодно длительной стрельбе?

Решение. Введём обозначения: A_k — первый попал в мишень при k-ом выстреле, B_k — второй попал при k-ом выстреле. По условию $P(A_k) = p_1 = 1/3$, т.е. $q_1 = 2/3$; $P(B_k) = p_2 = 2/3$. Событие A — «первый выиграл не позднее 3-го выстрела» — через A_k и B_k выразится следующим образом: $A = A_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1A_2 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3$. Тогда вероятность этого события

$$P(A) = p_1 + q_1q_2p_1 + q_1^2q_2^2p_1 = 1/3 + 2(1/3)^3 + 4(1/3)^5 \approx 0{,}424.$$

При сколь угодно длительной стрельбе вероятность выигрыша для первого:

$$P(A) = p_1 + q_1q_2p_1 + q_1^2q_2^2p_1 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} p_1(q_1q_2)^k = \frac{p_1}{1 - q_1q_2} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429.$$

◊ Из попарной независимости событий не следует независимость группы событий в совокупности.

Проиллюстрируем это утверждение следующими примерами.

Пример 7.10 (Бернштейна). Пусть на плоскость бросают правильный тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный (К), синий (С) и зелёный (З), а на четвертую нанесены все три цвета. События К, С, З — тетраэдр упал на плоскость гранью, окраска которой содержит красный, синий, зелёный цвет соответственно. Проверить, являются ли события К, С, З попарно независимыми и независимыми в совокупности.

Решение. Красный (соответственно синий, зелёный) цвет присутствует на двух гранях из четырех. Поэтому

$$P(\text{К}) = P(\text{С}) = P(\text{З}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Три, а значит, и два цвета присутствуют только на одной грани из четырех. Следовательно,

$$P(\text{КС}) = \frac{1}{4}, \quad P(\text{КЗ}) = \frac{1}{4}, \quad P(\text{СЗ}) = \frac{1}{4},$$

т.е. события К, С, З попарно независимы, но

$$P(\text{КСЗ}) = \frac{1}{4} \neq P(\text{К})P(\text{С})P(\text{З}) = \frac{1}{8},$$

т.е. события К, С, З не являются независимыми в совокупности.

Пример 7.11. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке $[0, 3]$, и независимо от нее точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке $[0, 2]$. Проверить, являются ли три события: $A = \{\xi + \eta < 2\}$, $B = \{1 < \xi < 5/2\}$ и $C = \{\eta < 1\}$, независимыми в совокупности.

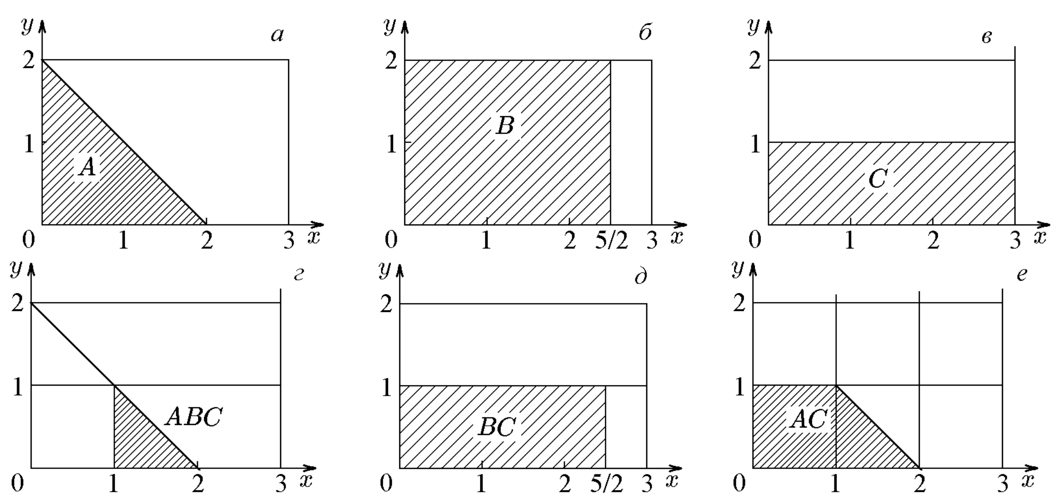


Рис. 16.

Решение. Пространство элементарных исходов Ω есть множество точек плоскости (ξ, η), для которых $0 \leqslant \xi \leqslant 3$, $0 \leqslant \eta \leqslant 2$ и $S_\Omega = 6$. Событию $A = \{\xi + \eta < 2\}$ отвечает множество точек, ограниченных прямыми $x = 0$, $y = 0$, $y = 2 - x$ (рис.

16,*а*): $S_A = 2$ и $P(A) = 1/3$. Событию $B = \{1 < \xi < 5/2\}$ отвечает область, заштрихованная на рис. 16,*б*: $S_B = 3$ и $P(B) = 1/2$. Событию $C = \{\eta < 1\}$ отвечает область, заштрихованная на рис. 16,*в*: $S_C = 3$ и $P(C) = 1/2$. События независимы в совокупности, если для любого сочетания из них вероятность произведения событий равна произведению вероятностей. Найдём $P(ABC)$. Из рис. 16,*г* видно, что $S_{ABC} = 1/2$ и $P(ABC) = 1/12 = P(A)P(B)P(C)$. Однако из этого равенства еще не следует независимость событий. Необходимо проверить все вероятности появлений всех пар событий. Находим $P(AB) = P(A) = 1/3$ (см. рис. 16,*а*), $P(BC) = 5/12$ (рис. 16,*д*), $P(AC) = 1/4$ (рис. 16,*е*). Видим, что $P(AB) \neq P(A)P(B)$, $P(AC) \neq P(A)P(C)$; следовательно, события в совокупности зависимы. Заметим, что $P(BC) = P(B)P(C)$, то есть события B и C попарно независимы.

Пример 7.12. Система S состоит из двух независимых подсистем S_a и S_b (см. рис. 17). Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).

Найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течение некоторого времени, если известно, что надежности блоков a_k и b_k равны соответственно 0,8 и 0,9.

Решение. Введём обозначения: A_k — событие, состоящее в том, что блок a_k исправен; B_k — событие, состоящее в том, что блок b_k исправен; S — событие, состоящее в том, что система исправна; S_a — событие, состоящее в том, что подсистема a исправна; S_b — событие, состоящее в том, что подсистема b исправна. Разобьем систему на две подсистемы a и b. Подсистема a дублирующих блоков исправна в том случае, когда исправен хотя бы один из блоков a_k $(k = 1, 2)$, то есть $S_a = A_1 + A_2$ — сумма двух совместных независимых событий. Следовательно $P(S_a) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}96$. Аналогично $P(S_b) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1P(B_2) = 0{,}9 + 0{,}9 - 0{,}81 = 0{,}99$. Для исправности системы необходима исправность подсистем a и b, то есть $S = S_aS_b$. Таким образом, $P(S) = P(S_a)P(S_b) = 0{,}9504$.

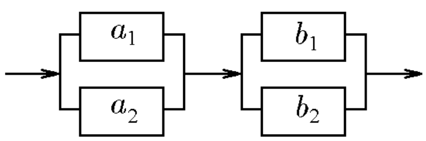


Рис. 17.

8. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

В тех случаях, когда вероятность события A найти трудно, но легко вычисляются (или даны по условию) вероятности этого события относительно полной группы попарно несовместных событий, применяют формулу полной вероятности. Эта формула является основным средством при подсчёте вероятности сложных событий с использованием условных вероятностей.

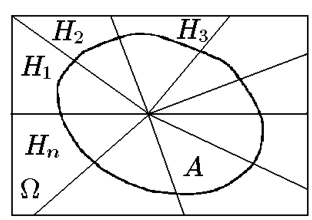


Рис. 18.

Теорема 8.1. *Пусть $\Omega = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$, причём $H_iH_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и A — произвольное событие, $A \in \Omega$ (см. рис. 18), тогда имеет место следующая формула:*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k). \tag{8.1}$$

Соотношение (8.1) *называется формулой полной вероятности.*

Доказательство. С учётом свойств операций над событиями

$$A = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Согласно аксиоме 3 теории вероятностей,

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

Воспользовавшись теоремой умножения, получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)$$

или

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 8.1.1. Пусть выполняются условия предыдущей теоремы и $P(A) > 0$. Тогда

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)P(A/H_j)}. \tag{8.2}$$

Соотношения (8.2) называются *формулами Байеса*.

Доказательство. По определению

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)}. \tag{8.3}$$

По теореме умножения

$$P(H_kA) = P(H_k)P(A/H_k), \tag{8.4}$$

а по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A/H_j). \tag{8.5}$$

Подставив (8.4) и (8.5) в (8.3), получим соотношение (8.2).

◊ События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ часто называют *гипотезами*, так как заранее не известно, с каким из них произойдёт событие A. Формулы Байеса (формулы гипотез) позволяют переоценить вероятности событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ в связи с появлением события A, иными словами — вычислить апостериорные вероятности по априорным.

Пример 8.1. На заводе, изготавливающем микросхемы, 1-я линия производит 25%, 2-я — 35%, а 3-я — 40% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 5, 4 и 2%. Каковы вероятности того, что случайно выбранная микросхема окажется дефектной? Какова вероятность того, что случайно выбранная микросхема произведена на первой, второй и третьей линии, если она оказалась дефектной?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно выбранная микросхема дефектна, а через H_1, H_2, H_3 — события, состоящие в том, что эта микросхема произведёна на первой, второй и третьей линиях (см. рис. 19).

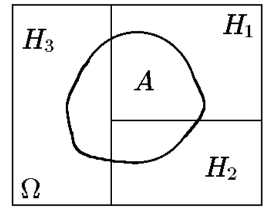


Рис. 19.

Ясно, что
1. $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$;
2. $H_i H_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
3. $A \subset \Omega$.

Следовательно, можно воспользоваться формулой полной вероятности

$$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(H_k) P(A/H_k).$$

По условию

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 0{,}25 \quad \text{и} \quad P(A/H_1) = 0{,}05;\\ P(H_2) &= 0{,}35 \quad \text{и} \quad P(A/H_2) = 0{,}04;\\ P(H_3) &= 0{,}40 \quad \text{и} \quad P(A/H_3) = 0{,}02. \end{aligned}$$

Тогда вероятность того, что выбран дефектный болт, равна

$$P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}40 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345.$$

По формулам Байеса (8.2) имеем

$$P(H_1/A) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}0345} = 0{,}36232;$$
$$P(H_2/A) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}04}{0{,}0345} = 0{,}40580;$$
$$P(H_3/A) = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}02}{0{,}0345} = 0{,}23188.$$

$\Diamond$ Сравните эти вероятности с вероятностями соответствующего события, если не известно, что произошло событие A (т.е. до опыта).

Пример 8.2. В корзине находится один шар — с равной вероятностью белый или чёрный. В корзину опустили белый шар, и после перемешивания извлекли один шар. Он оказался белым. Какова вероятность, что в корзине остался белый шар?

Решение. Пусть гипотеза H_1 состоит в том, что в корзине исходно находится белый шар, гипотеза H_2 — в корзине находится чёрный шар. Так как с равной вероятностью в корзине может находиться как белый, так и чёрный шар, то $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$. После того как в корзину был опущен белый шар, вероятность вынуть белый шар (событие A) в предположении справедливости гипотезы H_1 есть $P(A/H_1) = 1$. Аналогично вероятность вынуть белый шар в предположении гипотезы H_2: $P(A/H_2) = 1/2$. Следовательно, по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Тогда вероятность, что в корзине остался белый шар (то есть верна гипотеза H_1)

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

Пример 8.3. В магазин поступают однотипные изделия с трёх заводов, причём первый завод поставляет 50% изделий, второй — 30%, а третий — 20% изделий. Среди изделий 1-го завода первосортных 70%, второго — 80%, третьего — 90%. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено первым заводом.

Решение. Воспользуемся формулами полной вероятности и Байеса. Введём гипотезы H_1, H_2, H_3 — купленное изделие изготовлено соответственно первым, вторым и третьим заводами. По условию $P(H_1) = 0{,}5$; $P(H_2) = 0{,}3$; $P(H_2) = 0{,}2$. Условные вероятности события A — изделие первосортное — равны, соответственно, $P(A/H_1) = 0{,}7$; $P(A/H_2) = 0{,}8$; $P(A/H_3) = 0{,}9$. Тогда по формуле полной вероятности вероятность того, что купленное изделие окажется первосортным, определится соотношением

$$P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(H_k)P(A/H_k) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}77.$$

Вероятность того, что купленное изделие выпущено первым заводом, если оно оказалось первосортным, найдём по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}7}{0{,}77} \approx 0{,}455.$$

Пример 8.4. Прибор состоит из двух независимых узлов a и b, соединенных последовательно (см. рис. 20). При этом неисправность хотя бы одного узла ведет к неисправности прибора. Прибор в результате испытания вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только узел a, если известно, что надежности узлов a и b равны p_1 и p_2 соответственно.

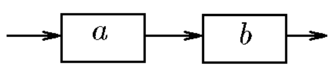


Рис. 20.

Решение. Введём обозначения: A — событие, состоящее в том, что узел a исправен; B — событие, состоящее в том, что узел b исправен; S — событие, состоящее в том, что прибор исправен. Введём гипотезы, характеризующие возможные совокупные состояния узлов: $H_1 = \bar{A}B$ — отказал только узел a; $H_2 = A\bar{B}$ — отказал только узел b; $H_3 = \bar{A}\bar{B}$ — отказали оба узла; $H_4 = AB$ — оба узла исправны. Имеем $P(H_1) = (1-p_1)p_2$; $P(H_2) = p_1(1-p_2)$; $P(H_3) = (1-p_1)(1-p_2)$; $P(H_4) = p_1p_2$. При этом $P(\bar{S}/H_1) = 1$; $P(\bar{S}/H_2) = 1$; $P(\bar{S}/H_3) = 1$; $P(\bar{S}/H_4) = 0$. Тогда, согласно (8.2), находим

$$P(H_1/\bar{S}) = \frac{P(H_1)P(\bar{S}/H_1)}{\sum\limits_{k=1}^{4} P(H_k)P(\bar{S}/H_k)} =$$

$$= \frac{(1-p_1)p_2 \cdot 1}{(1-p_1)p_2 \cdot 1 + p_1(1-p_2) \cdot 1 + (1-p_1)(1-p_2) \cdot 1 + p_1p_2 \cdot 0} = \frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}.$$

Пример 8.5. Два стрелка стреляют по мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка 0,8, для второго 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена только одна пробоина. Воспользовавшись формулой полной вероятности, найти вероятность того, что попал первый стрелок.

Решение. Введём обозначения событий: C — попал в цель только один стрелок, A — первый стрелок попал в цель, B — второй стрелок попал в цель. Тогда $C =$

$A\bar{B} + \bar{A}B$. То есть, можно считать, что событие может наступить в результате осуществления двух гипотез: $H_1 = A\bar{B}$ — попал в цель только первый стрелок, $H_2 = \bar{A}B$ — попал в цель только второй стрелок. Имеем $P(H_1) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$; $P(H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$; $P(C/H_1) = 1$; $P(C/H_2) = 1$; $P(C) = 0{,}48 + 0{,}08 = 0{,}56$. Следовательно,

$$P(H_1/C) = \frac{P(H_1)P(C/H_1)}{P(C)} = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}56} = \frac{6}{7}.$$

Пример 8.6. В первой урне 10 белых и 8 чёрных шаров, во второй 5 белых и 9 чёрных. Из первой урны во вторую переложены 6 шаров, затем из второй извлечён один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый.

Решение. Очевидно, что вероятность вынуть белый шар из второй урны (событие A) зависит от того, какие шары были переложены. Поэтому естественным казалось бы ввести гипотезы, связанные с тем, какие шары были переложены из первой урны во вторую. Таких гипотез будет, очевидно, семь. Однако проще рассмотреть систему гипотез, связанную с тем, из какой изначально урны был вытащенный шар. Обозначим через H_1 гипотезу — вытащенный шар был из первой урны, $P(H_1) = 6/20$, $P(A/H_1) = 10/18$; через H_2 — вытащенный шар был из второй урны, $P(H_2) = 14/20$, $P(A/H_2) = 5/14$. Тогда

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{5}{12}.$$

9. Схема Бернулли

В теории вероятностей большое значение имеет простая схема случайных опытов, называемая схемой Бернулли.

9.1. Формула Бернулли

♦ *Испытаниями Бернулли* (*схемой Бернулли*) называются независимые испытания с двумя исходами и вероятностью «успеха», не меняющейся от испытания к испытанию.

Рассмотрим два примера.

1. Пусть n раз бросают монету. Нас интересует появление герба — «успех», тогда появление решки — «неудача». Вероятность «успеха» равна 0,5 в каждом из n испытаний.

Пространство Ω можно описать таким образом:

$$\Omega = \left\{\underbrace{00\ldots0}_{n};\underbrace{10\ldots0}_{n};\underbrace{01\ldots0}_{n};\ldots;\underbrace{00\ldots1}_{n};\underbrace{110\ldots0}_{n};\ldots;\underbrace{111\ldots1}_{n}\right\},$$

где n — длина цепочки, «успех» обозначен через 1, «неудача» — через 0.

2. Стрельба в цель n одинаково метких стрелков (попадание — «успех»):

$$\Omega = \{00\ldots0,\ 10\ldots0,\ 01\ldots0,\ 00\ldots1,\ \ldots,\ 111\ldots1\}.$$

♢ И в первом, и во втором примерах элементами пространства Ω являются цепочки из нулей и единиц длиной n. Это справедливо и для всех испытаний по схеме Бернулли. Пусть вероятность успеха равна p, а неудачи $q = 1 - p$. Тогда вероятность элементарного события $\omega \in \Omega$, содержащего μ единиц (успехов), согласно теореме умножения,

$$P(\omega) = p^{\mu}q^{n-\mu}, \qquad \omega \in \Omega, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1, \quad q = 1 - p.$$

Теорема 9.1. *Если μ — число успехов в n испытаниях Бернулли, то*

$$P\{\mu = m\} = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{9.1}$$

где $m = \overline{0, n}$; p — вероятность «успеха» в отдельном испытании. Числа $P_n(m)$ (9.1) называются биномиальными вероятностями, а формула (9.1) называется формулой Бернулли.

Доказательство. Рассмотрим те элементарные исходы в Ω, у которых число успехов μ равно m:

$$\{\mu = m\} = \{\omega | \mu = m\}. \tag{9.2}$$

Любой элемент ω из (9.2) имеет одну и ту же вероятность

$$p^m q^{n-m}.$$

А сколько всего таких элементов ω? Элементы ω в (9.1) различаются только расположением нулей и единиц. Количество элементов однозначно определяется выбором m мест для единиц из n возможных. Этот выбор можно осуществить C_n^m способами. Следовательно,

$$P\{\mu = m\} = P\{\omega | \mu = m\} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

т.е. приходим к (9.1), что и требовалось доказать.

Заметим, что

$$\sum_{m=0}^{n} P\{\mu = m\} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} =$$
$$= (1-p)^n + C_n^1 p(1-p)^{n-1} + C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2} + \ldots + p^n = [(1-p) + p]^n = 1,$$

т.е. $P_n(m)$ — члены разложения бинома $(p+q)^n$.

Отметим некоторые частные случаи.

1. Вероятность того, что событие A не наступит ни разу в n испытаниях, равна

$$P_n(0) = q^n.$$

2. Вероятность того, что событие A наступит n раз в n испытаниях, равна

$$P_n(n) = p^n.$$

3. Вероятность того, что событие A произойдёт один раз в n испытаниях, равна

$$P_n(1) = npq^{n-1}.$$

4. Вероятность того, что событие A наступит хотя бы один раз в n испытаниях, равна

$$\sum_{m=1}^{n} P_n(m) = 1 - q^n \tag{9.3}$$

как вероятность события, противоположного событию, что A не произойдёт ни разу.

5. Вероятность того, что событие A произойдёт в n испытаниях не менее r раз, но не более k раз, равна

$$P(A) = \sum_{m=r}^{k} P_n(m).$$

Пример 9.1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

Решение. Здесь $n = 8$, $m = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$. Воспользовавшись формулой (9.1), имеем

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^3 = \frac{8!}{5!(8-5)!} 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}28.$$

Пример 9.2. Для поражения цели нужно не менее 3-х попаданий снаряда. Найти вероятность поражения цели при 7 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 1/3.

Решение. Пусть событие A — цель поражена. Тогда, обозначив через P вероятность m попаданий в n выстрелах, запишем

$$P(A) = P_7(3) + P_7(4) + P_7(5) + P_7(6) + P_7(7) = 1 - [P_7(0) + P_7(1) + P_7(2)] =$$
$$= 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^7 + 7\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \frac{7 \cdot 6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 0{,}43.$$

Пример 9.3. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене:

1) не будут проданы 5 пакетов;
2) будут проданы: а) менее 2 пакетов; б) не более 2; в) хотя бы 2 пакета.

Решение. 1) Вероятность того, что пакет акций не будет продан по первоначально заявленной цене, $p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. По формуле Бернулли (9.1) имеем $P_9(5) = C_9^5 0{,}8^5 0{,}2^4 = 0{,}066$.

2) По условию $p = 0{,}2$. Тогда

2.а) $P_9(m < 2) = P_9(0) + P_9(1) = C_9^0 0{,}2^0 0{,}8^9 + C_9^1 0{,}2^1 0{,}8^8 = 0{,}436$;

2.б) $P_9(m \leqslant 2) = P_9(0) + P_9(1) + P_9((2) =$
$= C_9^0 0{,}2^0 0{,}8^9 + C_9^1 0{,}2^1 0{,}8^8 + C_9^2 0{,}2^2 0{,}8^7 = 0{,}738$;

2.в) $P_9(m \geqslant 2) = 1 - P_9(m < 2) = 1 - 0{,}436 = 0{,}564$.

Пример 9.4. Монета брошена 10 раз. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится орёл.

Решение. Так как в нашем случае $p = q = 1/2$, то вероятность того, что хотя бы один раз появится орёл в 10 испытаниях определится формулой (9.3) при $n = 10$:

$$P(A) = 1 - q^{10} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}.$$

Пример 9.5. Сколько раз надо сыграть в «Спортлото», чтобы с вероятностью, большей 1/2, угадать хотя бы один раз 6 номеров из 49.

Решение. Вероятность угадать 6 номеров из 49 в одном розыгрыше можно определить по классической формуле:

$$p = \frac{1}{C_{49}^6} = \frac{43!6!}{49!} \approx 0{,}72 \cdot 10^{-8}.$$

Вероятность хотя бы одного такого события в n розыгрышах (событие A) выразим через вероятность противоположного события: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Вероятность, что в n испытаниях ни разу не будет угадано 6 номеров: $P(\bar{A}) = (1-p)^n =$

$(1 - 0{,}72 \cdot 10^{-8})^n = 0{,}999999928^n$. Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}999999928^n$. Так как по условиям задачи данная вероятность должна быть больше $1/2$, то получаем уравнение для нахождения n:

$$1 - 0{,}999999928^n > 0{,}5, \quad \text{т.е.} \quad 0{,}999999928^n < 0{,}5.$$

Прологарифмировав, получим $n \ln(0{,}999999928) < \ln(0{,}5)$ или

$$n > \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}999999928)} \approx 9627043{,}8.$$

Пример 9.6. Монету подбрасывают до тех пор, пока орёл не выпадет 4 раза. Найти вероятность того, что решка при этом появится ровно 2 раза.

Решение. Поскольку по условию задачи в последнем испытании должен появиться орёл, то в предыдущих испытаниях должны 3 раза выпасть орёл и 2 раза решка. Тогда интересующее нас событие можно представить в виде произведения двух независимых событий: A — «в серии из пяти подбрасываний орёл выпадет 3 раза» и B — «при шестом подбрасывании выпадет орёл». Вероятность события A находим по формуле Бернулли: $P(A) = C_5^3(1/2)^3(1/2)^2$, а вероятность события B, очевидно, $P(B) = 1/2$. Тогда по теореме умножения $P = P(A)P(B) = C_5^3(1/2)^6 \approx 0{,}156$.

$\Diamond$ Если каждое испытание имеет k исходов, вероятности которых $p_1, p_2, \ldots, p_k$, $\sum\limits_k p_k = 1$, то вероятность того, что в n испытаниях первый исход появится m_1 раз, второй исход появится m_2 раз и т.д., определится по формуле

$$P = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}. \tag{9.4}$$

Доказательство формулы аналогично доказательству для случая двух исходов.

9.2. Наивероятнейшее число «успехов» в схеме Бернулли

Часто необходимо знать, при каком m вероятность принимает наибольшее значение, т.е. требуется найти наивероятнейшее число m_0 наступления события A в данной серии опытов. Число успехов m_0, которому соответствует наибольшая вероятность в испытаниях по схеме Бернулли, называется *наивероятнейшим числом успехов*.

Теорема 9.2. *Пусть $m_0 = [(n+1)p]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $(n+1)p$. Тогда $P_n(k)$ принимает наибольшее значение при $k = m_0$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{n-k+1}{k}\frac{p}{q} = \\ = 1 + \frac{(n-k+1)p - kq}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}.$$

Поэтому, если $k < (n+1)p$, то $P_n(k) > P_n(k-1)$, т.е. с возрастанием k вероятности $P_n(k)$ возрастают; если же $k > (n+1)p$, то $P_n(k) < P_n(k-1)$ и с возрастанием k вероятности $P_n(k)$ убывают. Значит, число m_0 должно удовлетворять двойному неравенству

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p,$$

где $m_0 \in \mathbb{Z}$ — целое число.

Пусть $m_0 = [(n+1)p]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $(n+1)p$. Тогда $P_n(k)$ принимает наибольшее значение при $k = m_0$.

Заметим, что сегмент $[np - q, np + p]$, в котором лежит m_0, имеет длину

$$(np + p) - (np - q) = p + q = 1.$$

Поэтому, если координата какого-либо из его концов не является целым числом, то в этом сегменте лежит единственное целое число и m_0 определено однозначно. В том случае, когда координаты обоих концов — целые числа, имеются два наивероятнейших значения: $m_0^{(1)} = np - q$ и $m_0^{(2)} = np + p$.

Пример 9.7. Вероятность приема сигнала радистом высокого класса равна 0,7. Передано пять сигналов. Определить наиболее вероятное число принятых сигналов.

Решение. Применима схема Бернулли: $n = 5$; $p = 0{,}7$; $q = 0{,}3$. Наиболее вероятным числом принятых сигналов будет то число m_0, при котором вероятность $P_n(m_0)$ будет наибольшей:

$$np + p = 5 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 = 4{,}2;$$
$$np - q = 5 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 = 3{,}2.$$

Наиболее вероятное значение m_0 лежит на сегменте $[3{,}2; 4{,}2]$ и, следовательно, равно 4.

Приведём расчёт вероятностей $P_5(m)$ при $m = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$P_5(0) = 1 \cdot 0{,}3^5 = 0{,}00243;$$
$$P_5(1) = 5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^4 = 0{,}02835;$$
$$P_5(2) = 10 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = 0{,}13230;$$
$$P_5(3) = 10 \cdot 0{,}343 \cdot 0{,}09 = 0{,}30870;$$
$$P_5(4) = 5 \cdot 0{,}2401 \cdot 0{,}3 = 0{,}36015;$$
$$P_5(5) = 1 \cdot 0{,}16807 = 0{,}16807.$$

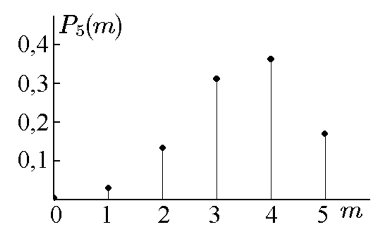


Рис. 21.

Наибольшее значение вероятности отвечает $m = 4$ (рис. 21). Следовательно, наиболее вероятное число сигналов, принятых радистом, равно 4.

Пример 9.8. Вероятность изготовления стандартной детали на автоматическом станке равна 0,9. Определить вероятность того, что из 9 наудачу взятых деталей 6 окажутся стандартными. Найти наивероятнейшее число стандартных деталей.

Решение. Условие задачи соответствует схеме Бернулли. «Успех» — появление стандартной детали. Тогда $n = 9$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Подсчитаем вероятность:

$$P_9(6) = C_9^6 \cdot 0{,}9^6 \cdot 0{,}1^3 \approx 0{,}0446$$

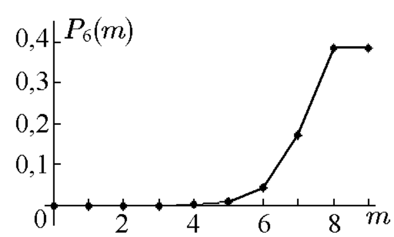


Рис. 22.

и наиболее вероятное число стандартных деталей из 9 взятых наугад:

$$m = [(n+1)p] = [10 \cdot 0{,}9] = [9] = 9.$$

Таким образом, наиболее вероятных значений два: $P_9(9) = P_9(8) \approx 0{,}397$ (рис. 22).

9.3. Предельные теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа

Пример 9.9. Вероятность того, что изделие некоторого производства окажется бракованным, равна 0,005. Чему равна вероятность того, что из 10000 наудачу взятых деталей бракованных окажется: а) ровно 40; б) не более 70.

Решение. По формуле Бернулли

$$\text{а)}\quad P_{10000}(40) = C_{10000}^{40}\cdot 0{,}995^{9960}\cdot 0{,}005^{40}.$$

В случае б) воспользуемся аксиомой 3:

$$\text{б)}\quad P_{10000}(m \leqslant 70) = \sum_{m=0}^{70} P_{10000}(m) = \sum_{m=0}^{70} C_{10000}^{m}\cdot 0{,}995^{10000-m}\cdot 0{,}005^{m}.$$

$\Diamond$ Непосредственное вычисление этих вероятностей очень трудоемко. Возникает вопрос об отыскании простых приближенных формул для вероятностей $P_n(m)$ и $\sum\limits_{m=s}^{k} P_n(m)$ при больших n. Затруднения при вычислениях возникают также при малых значениях p и q.

Теорема 9.3 (Пуассона). *Если $n\to\infty$ и $p\to 0$ так, что $np\to\lambda$, $0<\lambda<\infty$, то*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \to P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \tag{9.5}$$

при любом постоянном целом m.

Доказательство. Совершим предельный переход в формуле Бернулли (9.1):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_n(m) &= \lim_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^m\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-m} = \\
&= \frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n^m}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{n-m} = \\
&= \frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda(n-m)/n} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Таким образом, при больших n и малых p можно воспользоваться приближенной формулой

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad \lambda = np. \tag{9.6}$$

Функция $P_m(\lambda)$ табулирована.

Если мало q, то пуассоновским приближением можно воспользоваться для вычисления числа неудач.

Пример 9.10. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных деталей. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. Условие задачи соответствует схеме Бернулли: $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $\lambda = 1$ (рис. 23)

$$P_{5000}^3 \approx \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} \approx 0{,}06131.$$

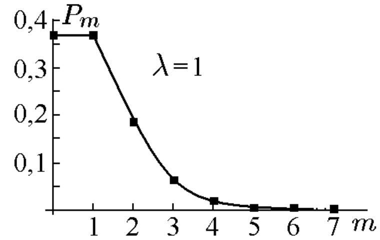


Рис. 23.

Формулу Пуассона (9.6) можно также применять вместо формулы Бернулли, если число испытаний велико и точно не известно, но известно среднее число λ появлений события в этой серии испытаний.

Пример 9.11. Наборщик делает в среднем по одной опечатке на страницу. Предположив, что вероятность опечатки каждого символа одинакова и не зависит от опечаток других символов, найти вероятность того, что на данной странице будет не более двух опечаток, а также вероятность того, что в книге из ста страниц нет страницы, содержащей более двух опечаток.

Решение. Очевидно, что вероятность того или иного числа опечаток на странице определяется формулой Бернулли, однако нам неизвестно ни точное число n символов на данной странице, ни вероятность p опечатки каждого символа. Но, поскольку число символов на странице велико, а вероятность опечатки одного символа мала, то эту вероятность можно приближенно вычислить по формуле Пуассона (9.6) с параметром $\lambda = 1$ (среднее число опечаток на странице). Тогда вероятность того, что страница содержит не более двух опечаток

$$P(m \leqslant 2) = P(m = 0) + P(m = 1) + P(m = 2) \approx \frac{1^0 e^{-1}}{0!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!} + \frac{1^2 e^{-1}}{2!} =$$
$$= e^{-1}\Big(1 + 1 + \frac{1}{2}\Big) = \frac{5}{2e} \approx 0{,}92.$$

Вероятность, что из ста страниц нет страницы, содержащей более двух опечаток: $P = p^{100} \approx (0{,}92)^{100} \approx 2 \cdot 10^{-4}$.

◊ Если оба параметра p и q нельзя считать малыми, используются теоремы Муавра–Лапласа (локальная и интегральная).

Введём функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ следующими соотношениями:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-u^2/2} du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функция $\varphi(x)$ — чётная, функция $\Phi(x)$ — нечётная, для них составлены таблицы (см. рис. 24).

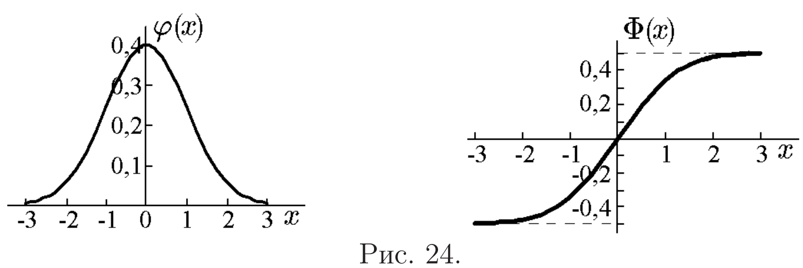


Рис. 24.

Теорема 9.4 (локальная теорема Муавра–Лапласа). *Если $n \to \infty$, а p постоянна $(0 < p < 1)$, то*

$$P_n(m) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{9.7}$$

где

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Доказательство приведём позднее в разделе «Теоремы Муавра–Лапласа и Пуассона».

Таким образом, когда p и q не малы, при больших n можно воспользоваться приближенной формулой

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Подставив сюда x из (9.7), получим

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\left[\frac{m-np}{\sqrt{2npq}}\right]^2\right\}. \tag{9.8}$$

Теорема 9.5 (интегральная теорема Муавра–Лапласа). *Если p постоянна $(0 < p < 1)$ и n достаточно велико, то*

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{9.9}$$

где

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \tag{9.10}$$

$\lozenge$ Из теоремы следует, что, когда p и q не малы, при больших n можно воспользоваться формулой

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Подставив сюда x_1 и x_2 из соотношения (9.10), получим

$$P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi\Big(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\Big). \tag{9.11}$$

Пример 9.12. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что что цель будет поражена а) 200 раз; б) от 200 до 300 раз в серии из 600 выстрелов.

Решение. Условие задачи соответствует схеме Бернулли: $n = 600$; $p = 0{,}4$.

а) Для $P_{600}(200)$ найдём приближение, используя локальную теорему Муавра–Лапласа (9.8):

$$P_{600}(200) \approx \frac{1}{\sqrt{600\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\varphi\Big(\frac{200 - 600\cdot 0{,}4}{\sqrt{npq}}\Big) = \frac{1}{12}\varphi\Big(\frac{40}{12}\Big) =$$
$$= 0{,}083\varphi(3{,}33) \approx 0{,}083\cdot 0{,}00154 \approx 0{,}0001.$$

б) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра–Лапласа (9.11):

$$P_{600}(200 \leqslant m \leqslant 300) \approx \Phi\Big(\frac{300-240}{\sqrt{144}}\Big) - \Phi\Big(\frac{200-240}{\sqrt{144}}\Big) = \Phi\Big(\frac{60}{12}\Big) - \Phi\Big(-\frac{40}{12}\Big) =$$
$$= \Phi(5) + \Phi(3{,}33) = 0{,}5 + 0{,}4996 = 0{,}9996.$$

Пример 9.13. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 480 предприятий; б) не менее 480.

Решение. По условию $p = 0{,}5$. а) Так как можно считать, что n велико ($n \gg 1$), то применим формулу Муавра–Лапласа (9.8):

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{480 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -1{,}265.$$

Тогда

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} \varphi(-1,265) = \frac{\varphi(1,265)}{\sqrt{250}} = \frac{0{,}1793}{\sqrt{250}} = 0{,}0113.$$

б) Необходимо найти $P_{1000}(m \geqslant 480) = P_{1000}(480 \leqslant m \leqslant 1000)$. Воспользуемся соотношением (9.10):

$$x_1 = \frac{480 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -1{,}265, \qquad x_2 = \frac{1000 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 31{,}6;$$

Тогда

$$P_{1000}(480 \leqslant m \leqslant 1000) = \Phi(31,6) - \Phi(-1,265) \approx 0{,}5 + 0{,}397 \approx 0{,}897.$$

Вычисление значения $\Phi(1{,}265)$ с помощью пакета Statistica приведено в третьей части настоящего учебного пособия.

Пример 9.14. В страховой компании 10 тыс. клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 500 руб. При наступлении страхового случая, вероятность которого по имеющимся данным и оценкам экспертов можно считать равной $p = 0{,}005$, страховая компания обязана выплатить клиенту страховую сумму 50 тыс. руб. На какую прибыль может рассчитывать страховая компания с надёжностью 0,95?

Решение. Прибыль компании составляет разность между суммарным взносом всех клиентов и суммой, выплаченной n_0 клиентам при наступлении страхового случая, т.е.

$$\Pi = 500 \cdot 10 - 50 \cdot n_0 = 50(100 - n_0) \text{ тыс. руб.}$$

Для определения n_0 применим интегральную формулу Муавра–Лапласа:

$$P_{10000}(0 \leqslant m \leqslant n_0) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}95,$$

где m — число клиентов, которым будет выплачена страховая сумма;

$$x_1 = \frac{0 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} = -7{,}09; \quad x_2 = \frac{n_0 - 10000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}.$$

Отсюда $\Phi(x_2) = \Phi(x_1) + 0{,}95 = \Phi(-7{,}09) + 0{,}95 \approx -0{,}5 + 0{,}95 \approx 0{,}45$. Из таблицы значений функции Лапласа следует, что $x_2 \approx 1{,}645$. Тогда $n_0 = 50 + x_2\sqrt{49{,}75} \approx 50 + 1{,}645\sqrt{49{,}75} \approx 61{,}6$ и $\Pi \approx 50(100 - 61{,}6) \approx 1920$, т.е. с надёжностью 0,95 ожидаемая прибыль составит 1,92 млн. руб.

Пример 9.15. Из 100 конденсаторов за время T выходят из строя 4 конденсатора. Для контроля выбирают 5 конденсаторов. Найти вероятность того, что среди них за время T выйдет из строя ровно 1 конденсатор, используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа.

Решение. 1) Используя классическое определение вероятности, по формуле (5.5) находим

$$P_1 = \frac{C_{k_1}^{m_1} C_{k_2}^{m_2}}{C_N^M} = \frac{C_4^1 C_{96}^4}{C_{100}^5} = \frac{4 \cdot 3321960}{75287520} \approx 0{,}1765.$$

2) По формуле Бернулли (9.1)

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $m = m_1 = 1$, $n = M = 5$, $p = k_1/N = 0{,}04$, находим

$$P_2 = c_5^1 \cdot 0{,}04 \cdot (0{,}96)^2 \approx 5 \cdot \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}84935 \approx 0{,}1699.$$

3) По формуле Пуассона (9.5):

$$P \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np = 0{,}2$, находим

$$P_3 = \frac{(0{,}2)^1}{1} e^{-0{,}2} \approx 0{,}2 \cdot 0{,}81873 \approx 0{,}16375.$$

4) Используя локальную теорему Лапласа, по формуле (9.7):

$$P \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

находим

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1 - 0{,}2}{\sqrt{5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}96}} \approx \frac{0{,}8}{0{,}438178} \approx 1{,}822574$$

и

$$P_4 \approx \frac{\varphi(1{,}8257)}{0{,}438178} \approx \frac{0{,}7535}{0{,}4382} \approx 0{,}1720.$$

$\Diamond$ Интегральная теорема Муавра–Лапласа позволяет оценить близость частоты и вероятности. Пусть p — вероятность успеха в схеме Бернулли и μ — общее число успехов. Частотой успеха называют отношение μ/n. Оценим вероятность события $A = (|\mu/n - p| < \delta)$.

Событие A можно представить в виде

$$\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \delta\right) = \left(\frac{|\mu - np|}{n} < \delta\right) =$$
$$= (|\mu - np| < \delta n) = (-\delta n + np < \mu < \delta n + np).$$

Если n достаточно велико, то

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \delta\right) = P(-\delta n + np < \mu < \delta n + np) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{\delta n + np - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-\delta n + np - np}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta n}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Итак,

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример 9.16. Вероятность приёма некоторого сигнала равна 0,72. Определить, каково должно быть общее количество принятых сигналов, чтобы частота приёма этого сигнала отличалась от вероятности его приёма не более чем на 0,1 с надёжностью 0,95.

Решение. Условия задачи удовлетворяют схеме Бернулли, в которой $p = 0{,}72$; $\delta = 0{,}1$; n неизвестно, но известно, что

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \delta\right) = 0{,}95$$

или

$$2\Phi\left(\delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}95;$$

$$2\Phi\left(0{,}1\sqrt{\frac{n}{0{,}72\cdot 0{,}28}}\right) = 0{,}95;$$

$$\Phi\left(0{,}1\sqrt{\frac{n}{0{,}72\cdot 0{,}28}}\right) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475.$$

По таблице находим

$$0{,}1\sqrt{\frac{n}{0{,}72\cdot 0{,}28}} = 1{,}96,$$

т.е.

$$n = (1{,}96)^2\cdot 0{,}72\cdot 0{,}28\cdot 100 \approx 77{,}45.$$

Так как n должно быть целым, то общее количество принятых сигналов должно быть не менее 77.

ГЛАВА 2

Случайные величины

10. Одномерная случайная величина

10.1. Одномерная случайная величина. Функция распределения одномерной случайной величины

До сих пор мы имели дело со случайными событиями. Событие является качественной характеристикой результата случайного опыта. Но случайный результат опыта можно характеризовать и количественно, если ввести соответствие между элементарными исходами и некоторыми числами. Количественной характеристикой случайного опыта является случайная величина.

Принято определять случайную величину как числовую функцию, определяемую на множестве элементарных событий.

♦ Числовая функция $\xi = \xi(\omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$, определённая на пространстве элементарных событий Ω, называется *случайной величиной*.

Вообще говоря, если мы имеем дело с вероятностями, определёнными на некоторой σ-алгебре событий $\mathcal{F}$, то случайная величина $\xi(\omega)$ должна быть не произвольной функцией, отображающей Ω в $\mathbb{R}$, а σ-измеримой функцией. То есть для любого $x \in \mathbb{R}$ множество исходов ω, для которых $\xi(\omega) < x$, должно принадлежать σ-алгебре событий $\mathcal{F}$.

Мы будем обозначать случайные величины греческими буквами ξ, η, ζ, μ и т.д., а принимаемые ими значения — строчными латинскими буквами (в англо-американской и иногда в отечественной литературе случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами X, Y, Z).

При таком определении на случайные величины распространяются все правила действий с обычными функциями: их можно складывать, вычитать, перемножать и т.д.

Пример 10.1. В модели двукратного подбрасывания монеты с пространством исходов $\Omega = \{\text{ГГ,ГР,РГ,РР}\}$ или $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ определим случайную величину $\xi = \xi(\omega)$ с помощью таблицы

ω	ГГ	ГР	РГ	РР
$\xi(\omega)$	2	1	1	0

Здесь $\xi(\omega)$ по своему смыслу есть не что иное, как число «гербов», отвечающих исходу ω. Поскольку в рассматриваемом случае Ω состоит из конечного числа точек, то множество значений $\{0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$ случайной величины ξ также конечно.

Пример 10.2. Производятся выстрелы до первого попадания в цель. Обозначим через единицу попадание, через нуль промах. Тогда $\Omega = \{1; 01; 001; 0001; \ldots\}$. Множество исходов счётно. Случайная величина ξ — число выстрелов до первого попадания в цель. Множество её возможных значений счётно:

$$\xi \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Пример 10.3. Время безотказной работы сотового телефона — случайная величина, множество значений которой заполняет интервал $[0, \infty[$.

Пример 10.4. Цена акции — случайная величина ξ. Область изменения случайной величины $]0, +\infty[$.

$\lozenge$ Любое событие может быть охарактеризовано случайной величиной. Справедливо и обратное: каждое значение случайной величины ξ можно трактовать как событие, причём различным значениям ξ соответствуют непересекающиеся события.

Случайная величина считается определённой, если известен закон её распределения.

♦ *Законом распределения случайной величины* называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями или множеством значений случайной величины и соответствующими вероятностями.

$\lozenge$ В законе распределения содержится основная и важная информация о случайной величине. Из него можно получить практически все возможные сведения о случайной величине.

$\lozenge$ В зависимости от возможных значений, принимаемых случайной величиной, и характера закона распределения действительные случайные величины можно разделить на три группы: дискретные, непрерывные и непрерывно-дискретные (смешанные).

Итак, мы приходим к выводу, что для полной характеристики той или иной случайной величины как таковой необходимо и достаточно знать:

1) перечень всех возможных значений этой случайной величины,

2) вероятности, соответствующие этим значениям (или множеству значений).

Наиболее общей формой закона распределения случайной величины является функция распределения.

♦ *Функцией распределения случайной величины* ξ называется функция $F_\xi(x)$, для каждого вещественного значения x равная вероятности события $\xi < x$, где случайная величина принимает значения меньше x, т.е.

$$F(x) = F_\xi(x) = P(\xi < x). \tag{10.1}$$

Определение функции распределения допускает простую геометрическую интерпретацию. Если рассматривать случайную величину как случайную точку ξ оси Ox, которая в результате эксперимента может занять то или иное положение, то функция распределения есть вероятность того, что случайная точка ξ попадёт левее точки x (рис. 25).

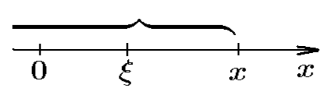


Рис. 25.

$\lozenge$ Функцию распределения $F(x)$ иногда называют также интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Функция распределения — универсальная характеристика случайной величины. Она существует для всех случайных величин: как прерывных, так и непрерывных.

10.2. Свойства функции распределения одномерной случайной величины

Рассмотрим основные свойства функции распределения одномерной случайной величины.

Свойство 1. Функция распределения $F(x)$ есть неубывающая неотрицательная функция своего аргумента, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geqslant F(x_1) \geqslant 0$.

В соответствии с первой аксиомой вероятностей, $F(x) = P(\xi < x) \geqslant 0$. Пусть $x_1 < x_2$. Так как событие $\xi < x_1$ влечёт событие $\xi < x_2$, то $P(\xi < x_1) \leqslant P(\xi < x_2)$, т.е. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

Свойство 2. На минус бесконечности функция распределения равна нулю:

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

Действительно, событие $\xi < -\infty$ является невозможным. Следовательно, $P(\xi < -\infty) = P(\emptyset) = 0$. Тогда по определению $F(-\infty) = 0$.

Свойство 3. На плюс бесконечности функция распределения равна единице:

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1. \tag{10.2}$$

Действительно, событие $\xi < +\infty$ является достоверным. Следовательно, $P(\xi < \infty) = P(\Omega) = 1$. Тогда по определению $F(\infty) = 1$.

Свойство 4. Функция распределения непрерывна слева (рис. 26):

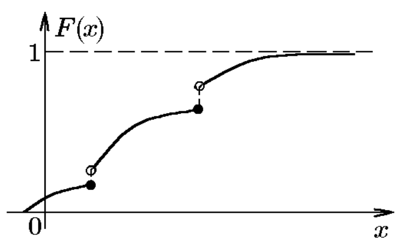


Рис. 26.

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0).$$

Действительно, пусть $\{x_n\}$ — возрастающая последовательность, сходящаяся к x_0. Тогда $\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\} \subset \ldots \subset \{\xi < x_n\} \subset \{\xi < x_{n+1}\} \subset \ldots$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{\xi < x_n\} = \{\xi < x_0\}$. Следовательно, в соответствии с аксиомой 5 теории вероятностей получим

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(\xi < x_n) = P(\xi < x_0) = F(x_0).$$

Свойство 5. Вероятность того, что случайная величина примет значения из заданного интервала, равна приращению функции распределения в этом интервале:

$$P(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Так как событие $(\xi < b)$ можно представить в виде суммы двух несовместных событий: $(\xi < b) = (\xi < a) + (a \leqslant \xi < b)$, то, согласно третьей аксиоме теории вероятности, $P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \leqslant \xi < b)$. Следовательно, $P(a \leqslant \xi < b) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F(b) - F(a)$.

$\Diamond$ В частности, вероятность $P(\xi = x_0)$ того, что случайная величина примет заданное значение, определяется соотношением

$$P(\xi = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0).$$

Из этого соотношения следует, что если функция распределения непрерывна в точке x_0, то $P(\xi = x_0) = 0$.

$\Diamond$ График функции распределения $F(x)$ в общем случае представляет собой график неубывающей функции, значения которой начинаются от нуля и доходят до единицы, причём в отдельных точках функция может иметь скачки (разрывы) (рис. 26).

Таким образом, универсальной характеристикой, одинаково пригодной как для дискретных, так и для непрерывных одномерных случайных величин, является функция распределения вероятностей $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина ξ примет значение меньше некоторого числа x.

10.3. Дискретная одномерная случайная величина

Наиболее простой вид имеют законы распределения так называемых дискретных величин.

♦ Случайная величина называется *дискретной*, если множество её возможных значений конечно или счётно (счётное множество – такое множество, элементы которого могут быть пронумерованы).

Примерами могут служить:

1. Число вызовов, поступающих оператору сотовой связи в течение суток. Случайная величина ξ может принимать следующее множество значений:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ \ldots$$

2. Число дефектных изделий в партии из n штук. Возможные значения случайной величины ξ следующие: 0, 1, 2, ..., n.

Пусть дискретная случайная величина ξ имеет конечное множество возможных значений

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$$

В результате опыта величина ξ примет одно из этих значений, т.е. произойдёт одно из событий

$$\{\xi = x_1\},\ \{\xi = x_2\},\ \ldots,\ \{\xi = x_n\}.$$

Рассматриваемые события несовместны, так как случайная величина в результате эксперимента может принять только одно значение, и образуют полную группу событий (никаких других событий, кроме указанных, в результате опыта произойти не может), т.е.

$$\{\xi = x_1\} + \{\xi = x_2\} + \ldots + \{\xi = x_n\} = \Omega.$$

Обозначим вероятность событий через

$$P(\xi = x_i) = P_i.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$$

Последнее соотношение остаётся справедливым и при $n \to \infty$.

Простейшей формой закона распределения дискретной величины ξ является *ряд распределения* — таблица, в верхней строке которой перечислены все значения случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ в порядке их возрастания, а в нижней — соответствующие им вероятности

ξ	x_1	x_2	...	x_i	...
P	P_1	P_2	...	P_i	...

.

Графическое изображение ряда распределения называется *многоугольником распределения* (рис. 27).

Для дискретной случайной величины ξ, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функция распределения имеет вид

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i).$$

Суммирование распространяется на все возможные значения, которые по своей величине меньше аргумента x. Из определения следует, что функция распределения дискретной случайной величины разрывна и возрастает скачком при переходе через точки возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причём величина скачка равна вероятности соответствующего значения (рис. 28).

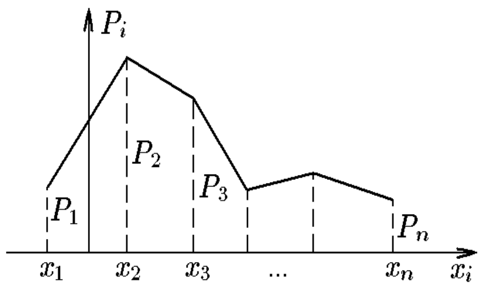


Рис. 27.

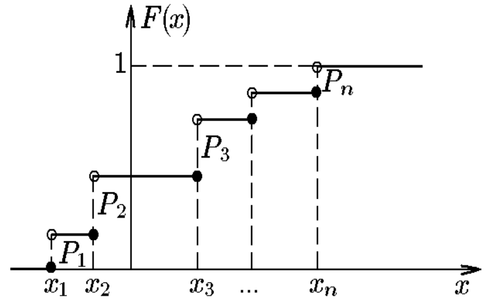


Рис. 28.

Пример 10.5. Дан ряд распределения случайной величины ξ:

ξ	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

Решение. По определению функции распределения найдём, что

если $x \leqslant 0$, то $F(x) = P(\xi < x) = 0$;

если $0 < x \leqslant 1$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = x_1) = p_1 = 0{,}1$;

если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = x_1) + P(\xi = x_2) = P_1 + P_2 = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$;

если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = x_1) + P(\xi = x_2) + P(\xi = x_3) = P_1 + P_2 + P_3 = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}6$;

если $x > 3$, то $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = x_1) + P(\xi = x_2) + P(\xi = x_3) + P(\xi = x_4) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}4 = 1{,}0$.

10.4. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности и функция распределения

Множество возможных значений дискретной случайной величины конечно или счётно; недискретные случайные величины характеризуются тем, что их множество возможных значений не счётно.

♦ Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если для неё существует такая неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f(x)$, что функция распределения случайной величины ξ удовлетворяет равенству

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{10.3}$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей*, или кратко – плотностью распределения.

Примеры непрерывных случайных величин:

1) длительность телефонного разговора $t \in [0, \infty[$;

2) ошибка измерения;

3) величина входного сигнала в радиотехническом устройстве;

4) отклонение сопротивления резистора от номинального – область возможных значений $]-\infty, \infty[$;

5) цена акции или опциона.

Свойства плотности и функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Свойство 1. Плотность распределения вероятностей является неотрицательной функцией ($f(x) \geqslant 0$) для всех $x \in]-\infty, \infty[$.

Доказательство непосредственно следует из определения.

Свойство 2. Если случайная величина имеет непрерывную плотность распределения вероятности, то её функция распределения также непрерывна.

Действительно, непрерывность функции распределения следует из представления

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$$

и непрерывности интеграла как функции переменного верхнего предела.

Свойство 3. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. В случае непрерывной функции $f(x)$ функция $F(x)$ дифференцируема и

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = f(x).$$

Свойство 4. Справедливо соотношение

$$P(a \leqslant \xi < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx. \tag{10.4}$$

Согласно свойству 5 функции распределения вероятности,

$$P(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a)$$

для всех a, b, $a < b$. Из определения непрерывной случайной величины

$$F(b) = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx - \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

т.е.

$$F(b) = F(a) + \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

откуда следует

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Свойство 5. Справедливо соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

Действительно, по свойству 3 функций распределения (10.2): $F(\infty) = 1$, следовательно,

$$F(\infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Свойство 6. Справедливо представление

$$f(x) \approx \frac{P(x \leqslant \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

чем и объясняется термин «плотность вероятности».

Действительно, если $f(x)$ непрерывна, то по теореме о среднем

$$P(x \leqslant \xi < x + \Delta x) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(x)dt = f(c)\Delta x,$$

где $\Delta x > 0$, $x \leqslant c \leqslant x + \Delta x$.

Геометрически $P(x \leqslant \xi < x + \Delta x)$ при малых Δx приближенно равна площади элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок Δx (см. рис. 29)

$$P(x \leqslant \xi < x + \Delta x) = f(x)\Delta x + \beta(x)$$

и

$$f(c) = f(x) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Откуда и следует справедливость утверждения.

Свойство 7. Вероятность того, что непрерывная случайная величина ξ примет фиксированное значение a, равна нулю:

$$P(\xi = a) = \int\limits_{a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Непосредственно следует из соотношения (10.4).

◊ Событие $\xi = a$ возможно, но имеет вероятность, равную нулю. Соответственно этому, имеется противоположное событие, означающее попадание случайной точки ξ в любую точку действительной оси за исключением точки a и являющееся не достоверным, но имеющим вероятность, равную единице.

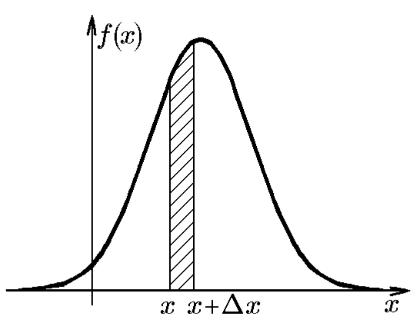


Рис. 29.

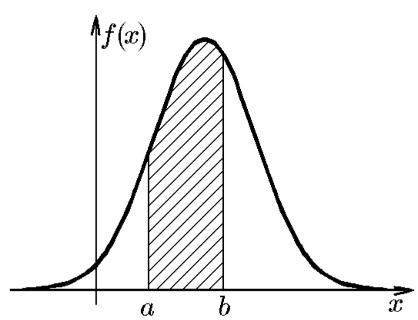


Рис. 30.

◊ Вероятность попадания любой случайной величины (дискретной или непрерывной) на участок оси от a до b (включая a и не включая b) выражается формулой (10.4):

$$P(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Так как для непрерывной случайной величины $P\{\xi = a\} = 0$, знак равенства $(a \leqslant \xi)$ можно отбросить и

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Геометрически эта вероятность равна площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и кривой $y = f(x)$ (см. рис. 30).

Формула (10.3) имеет физическую аналогию. Вероятность $P\{a < \xi < b\}$ можно трактовать как массу неоднородного стержня с линейной плотностью распределения массы $f(x)$, причём масса всего стержня равна единице, так как

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

как вероятность достоверного события.

◊ Пусть построен график функции распределения $F(x)$ некоторой случайной величины ξ (см. рис. 31). Ордината $|AB|$ графика при $\xi = x_1$ геометрически изображает вероятность того, что случайная величина примет какое-нибудь значение, меньшее x_1, а не вероятность того, что она примет значение x_1. Ранее установлено, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение x_1, равна нулю.

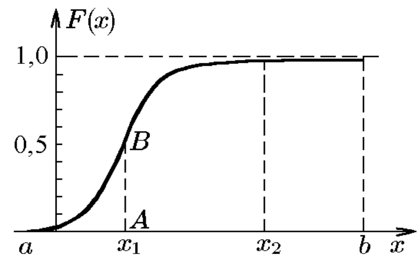


Рис. 31.

Отсюда, в частности, следует, что для непрерывных случайных величин вероятности

$$P(x_1 < \xi < x_2), \quad P(x_1 \leqslant \xi < x_2), \quad P(x_1 < \xi \leqslant x_2), \quad P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2)$$

совпадают и равны $F(x_2) - F(x_1)$.

Если непрерывная случайная величина ξ может принимать только значения в интервале от a до b (где a и b — некоторые постоянные), то её функция распределения равна нулю для всех значений $x \leqslant a$ и единице для всех значений $x > b$, поскольку события $\xi < x$ для любого значения $x < a$ являются в этом случае невозможными, а для любого значения $x > b$ — достоверными.

Сравним свойства $F(x)$ и $f(x)$:

$F(x) = P(\xi < x)$	$f(x) = F'(x)$
1. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \geqslant F(x_1)$ при $x_2 > x_1$	1. $f(x) \geqslant 0$
2. $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$	2. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$
3. $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$	3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
4. $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$	4. $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Пример 10.6. Дана плотность распределения $f(x)$ случайной величины ξ:

$$f(x) = \begin{cases} A\cos x, & |x| \leqslant \pi/2; \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Требуется
1) найти коэффициент A;
2) построить график плотности распределения $f(x)$;
3) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график;
4) найти вероятность попадания величины ξ в интервал от 0 до $\pi/4$.

Решение. 1) Для определения коэффициента A воспользуемся условием нормировки плотности распределения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} A\cos x\,dx = 2A = 1,$$

откуда $A = 1/2$.

2) График плотности $f(x)$ представлен на рис. 32.

3) По определению,

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Так как на интервале $]-\infty, -\pi/2[$ функция $f(x) = 0$, то $F(x) = 0$.

На интервале $]-\pi/2, \pi/2[$ функция $f(x) = 0{,}5\cos x$, следовательно, на этом интервале

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} f(t)dt + \int\limits_{-\pi/2}^{x} f(t)dt = 0 + \int\limits_{-\pi/2}^{x} \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{2}(\sin x + 1).$$

Для интервала $]\pi/2, \infty[$ запишем

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} f(t)dt + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)dt + \int\limits_{\pi/2}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos t\,dt = 1.$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2; \\ \dfrac{1}{2}(\sin x + 1), & |x| \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

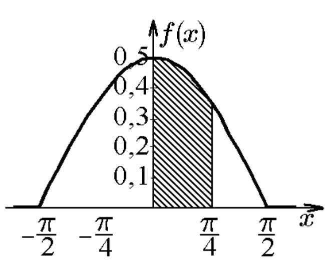


Рис. 32.

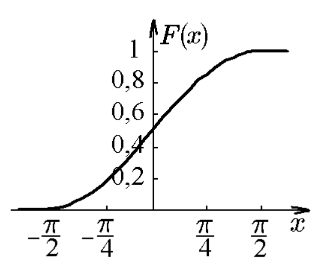


Рис. 33.

График функции $F(x)$ изображен на рис. 33.

4) Вероятность попадания величины ξ на участок от 0 до $\pi/4$ находим по формуле

$$P\Big(0 \leqslant \xi < \frac{\pi}{4}\Big) = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

либо по формуле $P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$:

$$P\Big(0 \leqslant \xi < \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{\pi}{4} + 1\Big) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

С геометрической точки зрения, вероятность $p = \sqrt{2}/4$ равна площади заштрихованной на рис. 32 области.

11. Системы случайных величин. Функция распределения системы случайных величин

◊ В практических задачах часто приходится иметь дело с системами случайных величин $(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$. Свойства системы случайных величин не исчерпываются свойствами её отдельных составляющих, они включают также зависимости между этими величинами. При рассмотрении вопросов, связанных с системами случайных величин, удобно пользоваться геометрической интерпретацией системы. Например, для двух случайных величин $\{\xi, \eta\}$ вектор $\vec{\zeta} = (\xi, \eta)$ — случайный вектор. Для наглядности будем рассматривать системы двух случайных величин. Обобщение на случай произвольной размерности не представляет труда.

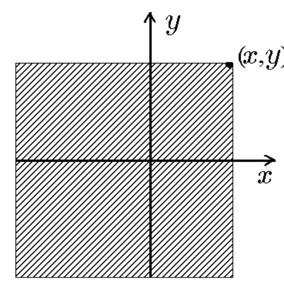


Рис. 34.

⧫ Совокупность случайных величин $\{\xi, \eta\}$, заданных на одном вероятностном пространстве, будем называть *случайным вектором* $\vec{\zeta} = (\xi, \eta)$ или *системой случайных величин.*

⧫ *Функцией распределения системы двух случайных величин* ξ и η называется функция $F(x, y)$, в каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ равная вероятности события $(\xi < x, \eta < y)$:

$$F(x, y) = F_{\xi,\eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y).$$

Если рассматривать случайную величину $\vec{\zeta}$ как случайную точку плоскости xOy, то функция распределения $F(x, y)$ есть вероятность того, что точка с координатами (ξ, η) принадлежит квадранту $\xi < x$, $\eta < y$ (см. рис. 34).

◊ Аналогично определяется функция распределения системы n случайных величин.

11.1. Свойства функции распределения двумерной случайной величины

Свойство 1. Функция $F(x, y)$ — неубывающая функция своих аргументов.

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для одномерной случайной величины.

Свойство 2. Справедливы соотношения $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$.

Действительно, $F(-\infty, y) = P(\xi < -\infty, \eta < y) = 0$, так как событие $\xi < -\infty$ невозможно.

Свойство 3. Справедливы соотношения $F(x,\infty)=F_\xi(x)$, $F(\infty,y)=F_\eta(y)$, где $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$ — функции распределения величин ξ и η соответственно.

Действительно, $F(\infty,y)=P(\xi<\infty,\eta<y)=P(\eta<y)=F_\eta(y)$, так как событие $\xi<\infty$ — достоверное.

Свойство 4. Справедливо соотношение $F(\infty,\infty)=1$.

Действительно, $F(\infty,\infty)=P(\xi<\infty,\eta<\infty)=1$ как вероятность достоверного события.

Свойство 5. Функция $F(x,y)$ непрерывна по каждой из переменных x,y слева.

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства одномерной случайной величины.

Свойство 6. Вероятность попадания случайной точки (x,y) в прямоугольник $\alpha\leqslant x<\beta$, $\gamma\leqslant y<\delta$:

$$P(\alpha\leqslant x<\beta,\gamma\leqslant y<\delta)=F(\beta,\delta)-F(\beta,\gamma)-F(\alpha,\delta)+F(\alpha,\gamma)$$

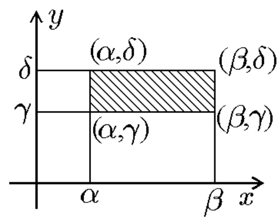


Рис. 35.

(по аналогии с одномерной случайной величиной условимся левую и нижнюю границы включать в интервал, а правую и верхнюю не включать).

Справедливость этого утверждения легко проверить геометрически (рис. 35).

♦ Говорят, что случайный вектор $\vec{\zeta}=\{\xi,\eta\}$ имеет *дискретное распределение*, если множество пар значений его компонент (x_i,y_i) конечно или счётно, причём

$$\sum_i\sum_j P(\xi=x_i,\eta=y_j)=1.$$

♦ Таблица, содержащая перечень возможных комбинаций значений компонент дискретного случайного вектора $\{\xi,\eta\}$ и соответствующих им вероятностей, называется *таблицей совместного распределения* величин ξ и η.

Если известен закон распределения дискретного случайного вектора (таблица распределения), то из него могут быть получены одномерные законы распределения его компонент (обратное в общем случае неверно):

$$P(\xi=x_i)=\sum_j P(\xi=x_i,\eta=y_j),\qquad P(\eta=y_j)=\sum_i P(\xi=x_i,\eta=y_j).$$

♦ Говорят, что случайный вектор $\vec{\zeta}=(\xi,\eta)$ имеет *непрерывное распределение*, если существует неотрицательная функция $f_{\xi,\eta}(x,y)$ такая, что для любой точки $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайного вектора $\{\xi,\eta\}$ представима в виде

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f_{\xi,\eta}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \tag{11.1}$$

Функция $f_{\xi,\eta}(x,y)$ называется *плотностью совместного распределения* величин ξ и η. Плотность совместного распределения обладает свойствами, аналогичными свойствам плотности распределения одномерной величины.

♢ Геометрически функцию $f(x,y)$ можно изобразить поверхностью, которая называется *поверхностью распределения*.

11.2. Свойства плотности распределения двумерной случайной величины

Свойство 1. Плотность распределения является неотрицательной функцией: $f(x,y) \geqslant 0$.

Доказательство непосредственно следует из определения.

Свойство 2. Справедливо соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\ f_{\xi,\eta}(x,y) = 1.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства одномерной случайной величины.

Свойство 3. Справедливо соотношение

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Доказательство непосредственно следует из определения (11.1).

◊ Исходя из данного свойства и определения производной, плотность совместного распределения вероятности можно было бы определить как

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}\Big(\frac{\partial F(x, y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\Big) =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}\Big(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}{\Delta x} -$$
$$- \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}\Big) =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x,y)}{\Delta x \Delta y} =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \leqslant \xi < x+\Delta x, y \leqslant \eta < y+\Delta y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Свойство 4. Вероятность попадания в область D равна объёму цилиндрического тела, направляющей которого является граница области D, а образующая параллельна оси Oz, ограниченного поверхностью распределения $z = f(x,y)$ и опирающегося на эту область:

$$P\big((\xi,\eta) \in D\big) = \iint\limits_D f(x,y) dx\, dy. \tag{11.2}$$

Данное соотношение вытекает непосредственно из предыдущего свойства, позволяющего определить вероятность попадания случайных величин ξ, η в бесконечно малую область $dx\, dy$ как $f(x,y)dx\, dy$. В частности, для прямоугольной области

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta, \gamma \leqslant \eta < \delta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{\gamma}^{\delta} f(x,y) dx\, dy. \tag{11.3}$$

Свойство 5. Если случайный вектор $\vec{\zeta} = (\xi, \eta)$ имеет непрерывное распределение, то и каждая из величин ξ и η имеет непрерывное распределение:

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy; \qquad f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dx. \tag{11.4}$$

Доказательство. По определению $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, при этом величина η может принимать любые значения. Следовательно,

$$F_\xi(x) = F_{\xi,\eta}(x,\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy\Bigg)dx.$$

Таким образом, ξ — непрерывная случайная величина с плотностью

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy.$$

Аналогично доказывается второе соотношение из (11.4).

11.3. Независимые случайные величины

♦ Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если для любых множеств $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_2 \subset \mathbb{R}$, $\ldots$, $\mathcal{D}_n \subset \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$P(\xi_1 \in \mathcal{D}_1, \xi_2 \in \mathcal{D}_2, \ldots, \xi_n \in \mathcal{D}_n) = P(\xi_1 \in \mathcal{D}_1)P(\xi_2 \in \mathcal{D}_2) \cdots P(\xi_n \in \mathcal{D}_n).$$

Можно показать, что это определение равносильно следующему.

♦ Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место равенство

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2) \cdots F_{\xi_n}(x_n). \tag{11.5}$$

Для систем случайных величин, имеющих дискретное или непрерывное распределение, последнее определение можно переформулировать так.

♦ Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, имеющие дискретное распределение, независимы, если для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место равенство

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1)P(\xi_2 = x_2) \cdots P(\xi_n = x_n).$$

♦ Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, имеющие непрерывное распределение, независимы, если для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место равенство

$$f_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2) \cdots f_{\xi_n}(x_n). \tag{11.6}$$

Заметим, что в случае независимых случайных величин закон их совместного распределения полностью определяется одномерными законами распределения этих величин.

♦ *Условной плотностью распределения* величины ξ, входящей в систему $\vec{\zeta} = (\xi, \eta)$, при условии, что величина η приняла определённое значение y, называется функция

$$f_\xi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}. \tag{11.7}$$

Пример 11.1. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Описать закон распределения системы случайных величин (ξ, η) — числа попаданий в мишень, если вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,7, для второго 0,6 (каждый из стрелков производит только один выстрел).

Решение. Так как события $(\xi = x_i)$, $(\eta = y_i)$ независимы, то вероятности p_{ij} могут быть найдены по формуле произведения вероятностей независимых событий:

$$p_{11} = P(\xi = 0, \eta = 0) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12;$$
$$p_{12} = P(\xi = 0, \eta = 1) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18;$$
$$p_{21} = P(\xi = 1, \eta = 0) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28;$$
$$p_{22} = P(\xi = 1, \eta = 1) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42.$$

Закон распределения представим в виде таблицы с двумя входами.

Таблица 1

Закон распределения системы случайных величин (ξ, η) — числа попаданий в мишень

$\xi \diagdown \eta$	0	1	$\sum$
0	0,12	0,18	0,3
1	0,28	0,42	0,7
$\sum$	0,4	0,6	1

Отметим, что сумма всех вероятностей $\sum\limits_{i,j=1}^{2} p_{ij} = 1$, сумма вероятностей по строкам равна вероятностям соответствующих значений величины ξ: $\sum\limits_{j=1}^{2} p_{ij} = p_i$, а сумма вероятностей по столбцам равна вероятностям соответствующих значений величины η: $\sum\limits_{j=1}^{2} p_{ij} = p_j$.

Пример 11.2. Двумерная случайная величина имеет плотность совместного распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)},$$

график которой изображен на рис. 36. Найти функцию распределения $F(x, y)$, плотности распределения компонент $f(x)$, $f(y)$ и $P(|\xi| < 1, |\eta| < 1)$.

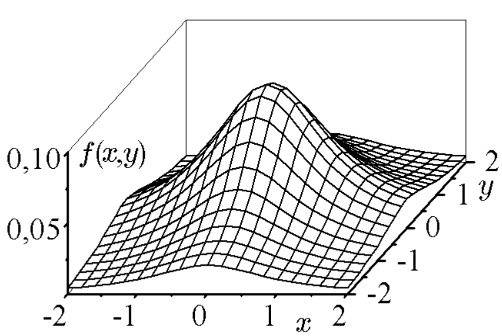


Рис. 36.

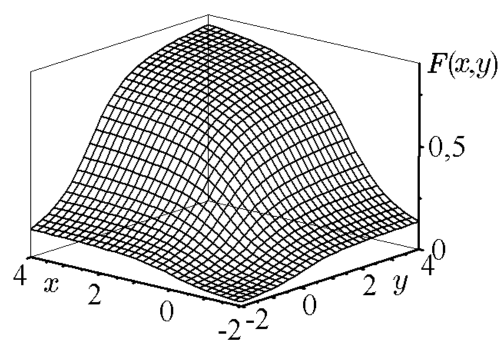


Рис. 37.

Решение. Воспользуемся формулой (11.1):

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\Big(\frac{1}{1+y^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\Big)dy=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+y^2}\Big(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\Big)dy=$$

$$=\Big(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}=\Big(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2}\Big).$$

График полученной функции распределения изображен на рис. 37. Плотности распределения каждой из компонент найдём по формуле (11.4):

$$f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{1+x^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1}{1+y^2}\Big)dy=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{1+x^2}\pi=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2};$$

$$f_\eta(y)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}.$$

Заметим, что, согласно (11.6), (11.7), компоненты ξ и η являются независимыми и их найденные плотности распределения совпадают с условными.

Вероятность попадания в квадрат найдём по формуле (11.3):

$$P(|\xi|<1,|\eta|<1)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\Big(\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{+1}\Big)\Big(\operatorname{arctg}y\Big|_{-1}^{+1}\Big)=\frac{1}{4}.$$

Пример 11.3. Двумерная случайная величина $\vec{\zeta}=(\xi,\eta)$ равномерно распределена внутри треугольника с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ (рис. 38). Найти плотность распределения $f(x,y)$, плотности распределения каждой из компонент $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$, условные плотности распределения каждой из компонент $f_\xi(x/y)$, $f_\eta(y/x)$ и вероятность $P(\xi\geqslant 0{,}5,\ \eta<1)$.

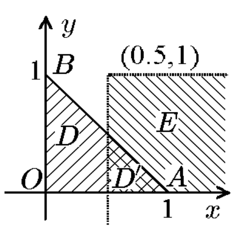


Рис. 38.

Решение. Так как система $\vec{\zeta}=(\xi,\eta)$ равномерно распределена внутри треугольника, то $f(x,y)=C$, если точка (x,y) принадлежит треугольнику OAB, и $f(x,y)=0$ в остальных точках. Найдём C из условия нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{C}=\iint\limits_{D}dx\,dy,$$

где область D — область, ограниченная сторонами треугольника OAB. Отсюда следует

$$\iint\limits_{D}dx\,dy=\frac{1}{2},$$

т.е. $C = 2$ и

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & (x,y) \in D; \\ 0 & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Плотности распределения величин ξ и η находим по формулам (свойство 5)

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int\limits_0^{1-x} 2dy = 2y\Big|_0^{1-x} = 2(1-x), & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x \notin [0,1[; \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int\limits_0^{1-y} 2dx = 2x\Big|_0^{1-y} = 2(1-y), & 0 < y \leqslant 1, \\ 0, & x \notin [0,1[. \end{cases}$$

Условные плотности вероятностей выразим через плотность распределения и полученные плотности вероятностей величин ξ и η:

$$f_\xi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y}, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < x < 1-y;$$

$$f_\eta(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_\xi(x)} = \frac{2}{2(1-x)} = \frac{1}{1-x}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1-x.$$

Вероятность $P(\xi \geqslant 0{,}5, \eta < 1)$ есть вероятность того, что случайная величина ξ примет значения, лежащие в области E (см. рис. 38):

$$P(\xi \geqslant 0{,}5, \eta < 1) = \int\limits_{0{,}5}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{1} f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D'} 2dx\,dy,$$

где область D' — пересечение областей D и E, т.е. часть треугольника OAB, ограниченная слева прямой $x = 0{,}5$ (см. рис. 38). Следовательно,

$$P(\xi \geqslant 0{,}5;\, \eta < 1) = \int\limits_{0{,}5}^{1} \int\limits_{0}^{1-x} 2dx\,dy = -(1-x)^2\Big|_{0{,}5}^{1} = 0{,}25.$$

11.4. Функции случайных величин

Часто при проведении измерений мы получаем информацию не о самой случайной величине, а о некоторой функции от нее. Поэтому необходимо проводить операции с функциями от случайных величин.

Пусть ξ — случайная величина с известным законом распределения $F_\xi(x)$, а случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$, где $\varphi(x)$ — неслучайная функция. Требуется определить закон распределения $F_\eta(x)$ случайной величины η.

Законы распределения непрерывных случайных величин ξ и $\eta = \varphi(\xi)$ взаимосвязаны в силу следующих свойств.

Теорема 11.1. *Пусть ξ — непрерывная случайная величина, имеющая функцию распределения $F_\xi(x)$ и плотность распределения $f_\xi(x)$, а функция φ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема и монотонна. Тогда случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$ имеет плотность распределения*

$$f_\eta(x) = |[\varphi^{-1}(x)]'| f_\xi(\varphi^{-1}(x)). \tag{11.8}$$

Доказательство. Пусть для определённости $\varphi(x)$ — возрастающая функция. Так как $\varphi(x)$ монотонна и дифференцируема, то существует обратная к ней функция $\varphi^{-1}(x)$, которая будет также возрастающей и дифференцируемой. Тогда для функции распределения величины $\eta = \varphi(\xi)$ запишем

$$F_\eta(x) = F_{\varphi(\xi)}(x) = P(\varphi(\xi) < x) = P(\xi < \varphi^{-1}(x)) = F_\xi(\varphi^{-1}(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\varphi^{-1}(x)} f_\xi(t)dt.$$

Проведём в интеграле замену переменных: $t = \varphi^{-1}(z)$, $dt = [\varphi^{-1}(z)]'dz$; $t_1 = -\infty$, $z_1 = -\infty$; $t_2 = \varphi^{-1}(x)$, $z_2 = x$, и получим

$$F_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(\varphi^{-1}(z))[\varphi^{-1}(z)]'dz.$$

Так как $f_\xi(\varphi^{-1}(z))[\varphi^{-1}(z)]' > 0$, то по определению эта функция является плотностью распределения случайной величины η: $f_\eta(x) = [\varphi^{-1}(x)]' f_\xi(\varphi^{-1}(x))$, что и требовалось доказать. Доказательство для случая монотонно убывающей функции $\varphi(x)$ аналогично.

Пример 11.4. Найти распределение случайной величины η, гармонически (квадратично и кубично) зависящей от другой случайной величины ξ:

$$\text{а) } \eta = \sin\xi; \qquad \text{б) } \eta = \xi^2; \qquad \text{в) } \eta = \xi^3,$$

где ξ — положительно определенная случайная величина.

Решение. а) В соотношении (11.8) положим

$$\varphi(x) = \sin x, \qquad \varphi^{-1}(x) = \arcsin x, \qquad (\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(последнее справедливо в соответствующих областях определения рассматриваемых функций). Тогда

$$f_\eta(x) = \frac{f_\xi(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{11.9}$$

Аналогично из (11.8) найдём для $\varphi(x) = x^2$:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_\xi(\sqrt{x}), \tag{11.10}$$

и для $\varphi(x) = x^3$:

$$f_\eta(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f_\xi(\sqrt[3]{x}). \tag{11.11}$$

Следствие 11.1.1. Если $\eta = a\xi + b$, то

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\Big(\frac{x-b}{a}\Big).$$

Доказательство непосредственно следует из (11.8).

Если ξ и $\eta = \varphi(\xi)$ — дискретные случайные величины, то ряд распределения величины η может быть получен непосредственно путем подсчёта вероятностей значений величины η через вероятности значений величины ξ по формуле

$$P(\eta = y_k) = \sum_{i:(\varphi(x_i)=y_k)} P(\xi = x_i), \tag{11.12}$$

т.е. суммирование проводится по всем значениям индекса i, для которых $\varphi(x_i) = y_k$.

Пример 11.5. Дан ряд распределения случайной величины ξ. Построить ряд распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

ξ	-1	0	1
P	$1/8$	$5/8$	$1/4$

Решение. Составим таблицу значений η:

ξ	-1	0	1
η	1	0	1

Видим, что η может принимать два значения: 0 и 1, причём, очевидно, $P(\eta = 0) = 5/8$, а вероятность значения $\eta = 1$ можно подсчитать по теореме сложения вероятностей: $P(\eta = 1) = 1/8 + 1/4 = 3/8$. В результате ряд распределения η имеет вид

ξ	0	1
η	$5/8$	$3/8$

Обобщим формулу (11.8) на многомерный случай. Пусть $\vec{\xi}$ — k-мерная непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_\xi(\vec{x}) = f_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Пусть многомерная случайная величина $\vec{\eta}$ определена как вектор-функция вида $\vec{\eta} = g(\vec{\xi})$, где $\eta_i = g_i(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $i = \overline{1,k}$. Как и ранее, пусть соответствие между $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ взаимно однозначно и существует обратное преобразование $\vec{\xi} = g^{-1}(\vec{\eta})$, такое что $\xi_i = g_i^{-1}(\eta_i, \eta_2, \ldots, \eta_k)$, $i = \overline{1,k}$. Тогда совместная плотность вероятности случайных величин η_i, $i = \overline{1,k}$, равна

$$f_\eta(x_1, \ldots, x_k) = f_\xi(g_1^{-1}(\vec{x}), g_2^{-1}(\vec{x}), \ldots, g_k^{-1}(\vec{x}))|J(\vec{x})|, \tag{11.13}$$

где $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ — вектор аргументов; $J(\vec{x})$ — якобиан преобразования вида

$$J(\vec{x}) = \frac{D(g^{-1}(\vec{x}))}{D(\vec{x})} = \frac{D(g_1^{-1}(\vec{x}), g_2^{-1}(\vec{x}), \ldots, g_k^{-1}(\vec{x}))}{D(x_1, x_2, \ldots, x_k)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1^{-1}(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_1^{-1}(\vec{x})}{\partial x_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial g_k^{-1}(\vec{x})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_k^{-1}(\vec{x})}{\partial x_k} \end{vmatrix}.$$

В частности, при линейном преобразовании $\vec{\eta} = A\vec{\xi} + \vec{\mu}$, где A — невырожденная матрица, а $\vec{\mu}$ — некоторый вектор сдвига, имеем

$$\vec{\xi} = A^{-1}(\vec{\eta} - \vec{\mu}), \qquad g^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}), \qquad \frac{D(g_1^{-1}(\vec{x}))}{D(\vec{x})} = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

и, используя (11.13), получим

$$f_\eta(\vec{x}) = \frac{1}{|\det A|} f_\xi(A^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})). \tag{11.14}$$

♦ Пусть $\{\xi, \eta\}$ — случайный вектор и $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$, где $\varphi(u, v)$ — неслучайная функция, тогда функцию распределения случайной величины ζ можно, очевидно, определить как

$$F_\zeta(z) = P(\zeta < z) = \sum_{\varphi(x_i, y_j) < z}\sum P(\xi = x_i, \eta = y_j)$$

для вектора с дискретным распределением и как

$$F_\zeta(z) = P(\zeta < z) = \iint\limits_{\varphi(x,y)<z} f_{\xi,\eta}(x, y) dx\, dy$$

для вектора с непрерывным распределением.

11.5. Композиция случайных величин

Одной из наиболее важных задач при рассмотрении функций случайного вектора является так называемая задача композиции — задача определения закона суммы случайных величин по известным законам распределения самих величин.

Теорема 11.2 (формула свертки). *Если случайные величины ξ и η независимы и имеют непрерывные распределения с плотностями $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, то*

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z - x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\eta(y) f_\xi(z - y) dy. \tag{11.15}$$

Доказательство. По определению

$$F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi + \eta < z) = \iint\limits_{\xi+\eta<z} f_{\xi\eta}(x, y) dx\, dy = \iint\limits_{\xi+\eta<z} f_\xi(x) f_\eta(y) dx\, dy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_\xi(x) f_\eta(y) dy.$$

Сделаем в интеграле замену переменных: $t = x + y$. Тогда

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z} f_\xi(x) f_\eta(t - x) dx = \int\limits_{-\infty}^{z} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(t - x) dx =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(t - x) dx \right) dt = \int\limits_{-\infty}^{z} f_{\xi+\eta}(t) dt.$$

Следовательно,

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z - x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Аналогичная теорема имеет место и для дискретных случайных величин.

Теорема 11.3. *Если случайные величины ξ и η независимы, то*

$$P(\xi+\eta=z_k)=\sum_i P(\xi=x_i)P(\eta=z_k-x_i). \qquad (11.16)$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Нетрудно заметить, что функция распределения разности случайных величин ξ и η определяется соотношением

$$f_{\xi-\eta}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)f_\eta(z+x)dx.$$

♦ Распределение называется *устойчивым по суммированию*, если сумма двух величин, имеющих одно и то же распределение, имеет то же распределение.

◊ Наряду с суммой и разностью случайных величин в приложениях могут возникать их произведение и частное. Так, плотность распределения произведения $\zeta=\xi\eta$ определяется соотношением (см., например, [14], где рассмотрено большое количество задач по преобразованию функции плотности распределения вероятности)

$$f_\zeta(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{t}f_\xi(t)f_\eta\Big(\frac{x}{t}\Big)dt-\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{t}f_\xi(t)f_\eta\Big(\frac{x}{t}\Big)dt, \qquad (11.17)$$

а плотность распределения частного — соотношением

$$f_\zeta(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}tf_\xi(tx)f_\eta(t)dt-\int\limits_{0}^{\infty}tf_\xi(tx)f_\eta(x)dt. \qquad (11.18)$$

12. Числовые характеристики случайной величины

Законы распределения случайной величины полностью описывают случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако эти функции не всегда известны, да и во многих задачах они не нужны. Зачастую достаточно знать только основные числовые параметры, характеризующие случайную величину, такие как интервал, в котором находится большинство значений случайной величины; среднее значение, относительно которого группируются значения случайной величины; разброс значений случайной величины относительно среднего значения и т.д. Такие характеристики называются *числовыми характеристиками случайной величины.*

12.1. Математическое ожидание случайной величины

Рассмотрим дискретную случайную величину ξ, имеющую возможные значения $\{x_k\}_{k=1}^n$ с вероятностями $\{P_k\}_{k=1}^n$ (для случайной величины, принимающей счётное множество значений, $n=\infty$).

♦ *Математическим ожиданием*, или *средним значением*, дискретной случайной величины ξ называется число

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^n x_iP_i. \qquad (12.1)$$

Математическое ожидание случайной величины может и не существовать, если при $n = \infty$ соответствующая сумма (12.1) расходится. Поэтому предполагается, что при $n = \infty$ ряд (12.1) сходится абсолютно.

Рассмотрим непрерывную случайную величину ξ с плотностью вероятности $f(x)$.

♦ *Математическим ожиданием* непрерывной случайной величины ξ называется число, равное интегралу

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \tag{12.2}$$

если он сходится.

В противном случае считают, что случайная величина ξ не имеет математического ожидания.

Формула (12.2) имеет такой же вероятностный смысл, как и для дискретной случайной величины: математическое ожидание одномерной случайной величины — это некоторое её среднее значение.

◊ В литературе наряду с (12.1), (12.2) используются обозначения

$$M(\xi) = M\xi = m_\xi = M[\xi] = E_\xi = \bar{\xi} = \langle \xi \rangle.$$

В тех случаях, когда возможные значения случайной величины располагаются не по всей оси Ox, а принадлежат интервалу $[a, b]$, можно записать

$$M(\xi) = \bar{\xi} = \int\limits_a^b x f(x) dx.$$

Из определения вытекают следующие свойства математического ожидания, доказательство которых будем проводить на примере либо дискретной, либо непрерывной случайной величины.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной C равно этой постоянной: $M(C) = C$.

Доказательство. Постоянную C можно рассматривать как случайную величину ξ, которая может принимать только одно значение C с вероятностью, равной единице. Поэтому

$$M(\xi) = C \cdot 1 = C.$$

Свойство 2. Для произвольной функции $\eta = \varphi(\xi)$ случайного аргумента ξ

$$M(\eta) = M(\varphi(\xi)) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i) P_i & \text{для дискретной случайной величины;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx & \text{для непрерывной случайной величины.} \end{cases} \tag{12.3}$$

Доказательство. Пусть функция $\varphi(\xi)$ принимает значения $c_1, c_2, \ldots$ с вероятностями $P(\varphi(\xi) = c_m) = \sum\limits_{k:\varphi(x_k)=c_m} P(\xi = x_k)$. Тогда (см. (11.12))

$$M(\eta) = M(\varphi(\xi)) = \sum_m c_m P(\varphi(\xi) = c_m) = \sum_m c_m \sum_{k:(\varphi(x_k)=c_m)} P(\xi = x_k) =$$
$$= \sum_m \sum_{k:(\varphi(x_k)=c_m)} \varphi(x_k) P(\xi = x_k) = \sum_i \varphi(x_i) P(\xi = x_i).$$

Аналогично для непрерывной случайной величины из (11.8) запишем

$$M(\varphi(\xi)) = M(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y) dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y |[\varphi^{-1}(y)]'| f_\xi(\varphi^{-1}(y)) dy.$$

Сделав замену переменных $y = \varphi(x)$, $x = \varphi^{-1}(y)$, $dx = |\varphi^{-1}(y)|' dy$, получим (12.3).

Свойство 2 может быть обобщено и на функцию случайного вектора. Так, для функции двух случайных величин $\varphi(\xi, \eta)$ запишем

$$M(\varphi(\xi, \eta)) = \begin{cases} \sum\limits_i \sum\limits_j \varphi(x_i, y_j) P(\xi = x_i, \eta = y_j) & \text{для дискретного вектора;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f_{\xi,\eta}(x, y) dx\, dy & \text{для непрерывного вектора.} \end{cases}$$

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. математическое ожидание произведения постоянной величины на случайную величину равно произведению этой постоянной на математическое ожидание случайной величины:

$$M(C\xi) = CM(\xi). \tag{12.4}$$

Доказательство. Положим $\varphi(x) = Cx$ и воспользуемся предыдущим свойством:

$$M(C\xi) = \sum_{i=1}^{n} C x_i P_i = C \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = CM(\xi).$$

Свойство 4. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n). \tag{12.5}$$

Доказательство проведём для суммы двух непрерывных величин. Согласно свойству 2,

$$M(\xi + \eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x + y) f_{\xi,\eta}(x, y) dx\, dy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi,\eta}(x, y) dx\, dy + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_{\xi,\eta}(x, y) dx\, dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)dy = M(\xi) + M(\eta).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy \quad \text{и} \quad f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dx.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Свойство 5. Математическое ожидание суммы постоянной и случайной величин равно сумме постоянной величины и математического ожидания случайной величины:

$$M(\xi + C) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + C)P_i = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i + C\sum_{i=1}^{n} P_i = M(\xi) + C. \tag{12.6}$$

Доказательство. Заметим, что постоянную C можно рассматривать как случайную величину ξ, которая может принимать только одно значение C с вероятностью, равной единице. Поэтому (12.6) является частным случаем соотношения (12.5).

Свойство 6. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta). \tag{12.7}$$

Доказательство проведём для непрерывных величин. По определению,

$$M(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy f_\xi(x) f_\eta(y)dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)dy = M(\xi)M(\eta),$$

что и требовалось доказать.

♦ Случайная величина $\hat{\xi} = \xi - M(\xi)$ (отклонение случайной величины от её математического ожидания) называется *центрированной случайной величиной*.

Центрирование случайной величины равносильно переносу начала координат в среднюю, «центральную» точку, абсцисса которой равна математическому ожиданию.

Отметим, что $M(\hat{\xi}) = 0$. В самом деле,

$$M(\hat{\xi}) = M(\xi - M(\xi)) = M(\xi) - M(\xi) = 0.$$

Математическое ожидание является важнейшей из характеристик положения. Среди прочих характеристик положения выделяют моду и медиану случайной величины.

♦ *Модой* x_{mod} дискретной случайной величины называют ее наиболее вероятное значение.

♦ *Медианой случайной величины* ξ называется такое значение x_{med}, для которого $P(\xi < x_{\text{med}}) = P(\xi \geqslant x_{\text{med}})$, то есть медиана является решением уравнения $F(x_{\text{med}}) = 1/2$.

Пример 12.1. Найти математическое ожидание $M(\xi)$ дискретной случайной величины ξ, заданной законом распределения

ξ	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. По определению, $M(\xi) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3$.

12.2. Дисперсия случайной величины и её свойства

Математическое ожидание случайной величины характеризует её среднее значение, дисперсия же служит характеристикой разброса значений случайной величины относительно математического ожидания.

♦ *Дисперсией* случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её среднего значения и обозначается

$$D(\xi) = D\xi = M(\xi - M(\xi))^2. \tag{12.8}$$

Из определения (12.8) следует, что для непрерывной случайной величины ξ дисперсия определяется интегралом

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\xi - M(\xi))^2 f(x)dx, \tag{12.9}$$

если он сходится, а для дискретной случайной величины — суммой

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 P(\xi = x_i). \tag{12.10}$$

Дисперсия $D(\xi)$ имеет размерность квадрата случайной величины, для характеристики рассеивания же удобнее использовать величину, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины.

♦ *Среднеквадратичным отклонением* (*стандартным отклонением*, или *стандартом*) случайной величины ξ называется корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)}.$$

Если воспользоваться свойствами математического ожидания, то из (12.8) получим

$$M(\xi - M(\xi))^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2.$$

Отсюда следует

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Свойства дисперсии

Свойство 1. Для любой случайной величины ξ дисперсия $D(\xi) \geqslant 0$.

Справедливость утверждения следует непосредственно из определения.

Свойство 2. Если C — постоянная, то $D(C) = 0$.

Действительно,

$$D(C) = M([C - M(C)]^2) = M((C - C)^2) = M(0) = 0.$$

Свойство 3. Если C — постоянная, то $D(C\xi) = C^2 D\xi$, $D(\xi + C) = D(\xi)$.

Действительно, согласно свойствам математического ожидания,

$$D(C\xi) = M((C\xi)^2) - M^2(C\xi) = C^2 M(\xi^2) - C^2 M^2(\xi) = C^2 D(\xi).$$

Аналогично

$$D(\xi + C) = M((\xi + C - M(\xi + C))^2) = M((\xi + C - M(\xi) - C)^2) = \\ = M((\xi - M(\xi))^2) = D(\xi).$$

Свойство 4. Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Доказательство. Согласно свойствам математического ожидания,

$$D(\xi + \eta) = M((\xi + \eta)^2) - M^2(\xi + \eta) = M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - [M(\xi) + M(\eta)]^2 = \\ = M(\xi^2) + 2M(\xi\eta) + M(\eta^2) - M^2(\xi) - 2M(\xi)M(\eta) - M^2(\eta) = \\ = M(\xi^2) - M^2(\xi) + M(\eta^2) - M^2(\eta) = D(\xi) + D(\eta)$$

12.3. Моменты случайной величины и их свойства

Помимо математического ожидания и дисперсии, в качестве числовых характеристик случайных величин применяются моменты. На практике чаще всего применяют начальные и центральные моменты.

♦ *Начальным моментом* k-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание величины ξ^k, т.е.

$$\alpha_k(\xi) = M(\xi^k).$$

Для дискретной случайной величины начальный момент определяется соотношением

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i,$$

а для непрерывной случайной величины ξ начальный момент k-го порядка равен интегралу

$$\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \qquad k = \overline{0, \infty}.$$

Начальный момент первого порядка случайной величины есть ни что иное, как математическое ожидание: $\alpha_1 = M(\xi)$.

♦ Число $\mu_k(\xi) = M(\xi - M(\xi))^k$ называется *центральным моментом* k-го порядка. Для дискретной случайной величины центральный момент k-го порядка вычисляется по формуле

$$\mu_k = \mu_k(\xi) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(\xi)]^k P_i.$$

Центральный момент k-го порядка непрерывной случайной величины равен интегралу

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^k f(x)dx, \qquad k = \overline{0, \infty}.$$

◊ Нетрудно заметить, что $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(\xi)$.

♦ *Начальным моментом* порядков k, s системы случайных величин (ξ, η) называется математическое ожидание

$$\alpha_{k,s} = M(\xi^k \eta^s).$$

Для системы величин, имеющих дискретное распределение,

$$\alpha_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s P(\xi = x_i, \eta = y_j);$$

для системы величин, имеющих непрерывное распределение,

$$\alpha_{k,s} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f_{\xi,\eta}(x, y)dx\,dy.$$

Первые начальные моменты совпадают с математическими ожиданиями величин ξ и η:

$$\alpha_{1,0} = M[\xi^1 \eta^0] = M\xi;$$
$$\alpha_{0,1} = M[\xi^0 \eta^1] = M\eta.$$

Действительно, например, для непрерывных величин:

$$\alpha_{1,0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^1 y^0 f_{\xi,\eta}(x, y)dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = M(\xi).$$

♦ *Центральным моментом* порядков k, s системы случайных величин (ξ, η) называется математическое ожидание

$$\mu_{k,s} = M\big([\xi - M(\xi)]^k [\eta - M(\eta)]^s\big). \tag{12.11}$$

Очевидно, что

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j [x_i - M(\xi)]^k [y_j - M(\eta)]^s P(\xi = x_i, \eta = y_j)$$

для системы величин, имеющих дискретное распределение, и

$$\mu_{k,s} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - M(\xi)]^k [y - M(\eta)]^s f_{\xi,\eta}(x, y)dx\,dy$$

для системы величин, имеющих непрерывное распределение.

Можно заметить, что вторые центральные моменты $\mu_{2,0}$ и $\mu_{0,2}$ есть дисперсии величин ξ и η: $\mu_{2,0} = D(\xi)$, $\mu_{0,2} = D(\eta)$.

◊ По определению, плотность вероятности однозначно определяет все моменты. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 12.1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — плотности распределения вероятности случайных величин ξ и ζ и*

$$\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)x^k dx, \quad \beta_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)x^k dx.$$

Тогда если $\alpha_k = \beta_k$, $k = \overline{0,\infty}$, и функция $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ разложима в ряд Тейлора, т.е.

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k,$$

то $f(x) = g(x)$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(f(x) - g(x)\big)^2 dx.$$

Очевидно, что $I > 0$ и

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(f(x) - g(x))dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)(f(x) - g(x))dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\alpha_k - \sum_{k=1}^{\infty} C_k\beta_k = 0.$$

Следовательно, $f(x) = g(x)$.

Если случайная величина распределена симметрично относительно математического ожидания, то все центральные моменты нечётных порядков равны нулю. Для характеристики степени отклонения распределения от симметричного используют центральный момент третьего порядка.

♦ Величина

$$A = A(\xi) = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3}$$

называется *коэффициентом асимметрии* или коэффициентом скошенности.

Коэффициент асимметрии характеризует степень асимметрии распределения случайной величины относительно ее математического ожидания. Для симметричных распределений $A = 0$. Если пик графика функции $f(x)$ смещен в сторону малых значений («хвост» на графике функции $f(x)$ справа), то $A > 0$. В противном случае $A < 0$ (см. рис. 39).

Четвертый центральный момент служит для характеристики островершинности распределения.

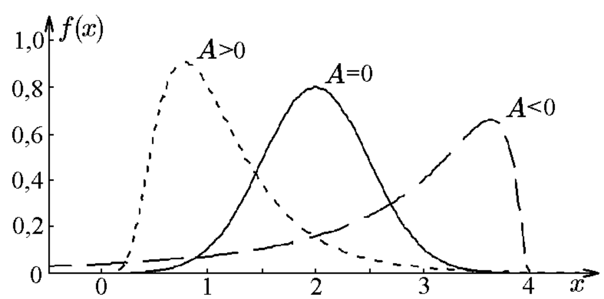


Рис. 39.

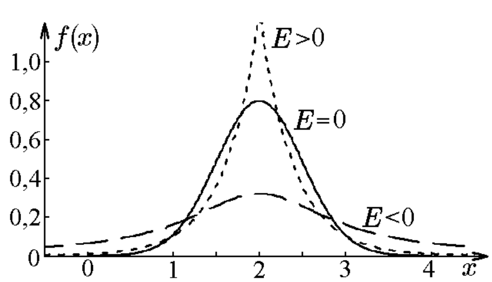


Рис. 40.

♦ Величина

$$E = E(\xi) = \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3$$

называется *эксцессом* случайной величины или *коэффициентом островершинности.*

Эксцесс показывает, насколько распределение отличается от так называемого нормального распределения, для которого $E = 0$.

Коэффициент эксцесса является мерой остроты графика функции плотности распределения $f(x)$ (см. рис. 40).

♦ *Квантилью* порядка β, отвечающей заданной вероятности β, распределения непрерывной случайной величины ξ называется действительное число τ_β, удовлетворяющее уравнению $P(\xi < \tau_\beta) = \beta$ (см. рис. 41).

Квантиль порядка $1/2$ является *медианой.*

Значения $\tau_{0,75}$ и $\tau_{0,25}$ называются соответственно верхней и нижней *квартилями.* Квартильный размах, равный разности верхней и нижней квартилей, представляет собой интервал вокруг медианы, в который случайная величина ξ попадает с вероятностью 0,5.

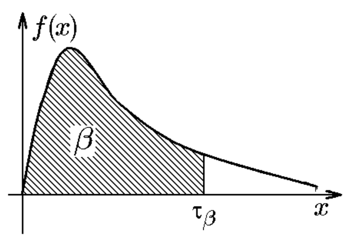


Рис. 41.

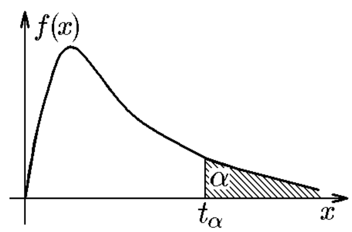


Рис. 42.

♦ *Критической точкой* порядка α распределения непрерывной случайной величины ξ называется действительное число t_α, удовлетворяющее уравнению $P(\xi \geqslant t_\alpha) = \alpha$ (см. рис. 42).

Очевидно, что квантиль порядка β совпадает с критической точкой порядка $\alpha = 1 - \beta$, поскольку

$$P(\xi \geqslant t_\alpha) = 1 - P(\xi \leqslant t_\alpha) = \alpha.$$

12.4. Ковариация и ее свойства

Рассмотрим систему случайных величин

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

♦ *Корреляционным моментом* или *ковариацией* случайных величин ξ_i и ξ_j называется величина

$$K_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i \xi_j) = M\big[(\xi_i - M(\xi_i))(\xi_j - M(\xi_j))\big].$$

Нетрудно заметить, что

$$K_{ii} = D_i, \quad K_{ij} = K_{ji}.$$

Корреляционные моменты и дисперсию удобно записывать в виде матрицы

$$\operatorname{cov}(\vec{\xi}) = A(\vec{\xi}) = \|K_{ij}\|_{n\times n} = M[(\vec{\xi} - M(\vec{\xi}))(\vec{\xi} - M(\vec{\xi}))^{\intercal}]. \tag{12.12}$$

Матрица (12.12) называется *ковариационной матрицей системы* или *матрицей ковариаций.*

Для системы случайных величин (ξ, η), имеющих дискретное распределение, корреляционный момент определяется соотношением

$$K_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j (x_i - M(\xi))(y_j - M(\eta))p_{ij},$$

а для системы непрерывно распределённых случайных величин — соотношением

$$K_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))(y - M(\eta))f(x, y)dx\, dy.$$

Свойства ковариации

Свойство 1. Для ковариации случайных величин ξ и η справедлива формула

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta).$$

Свойство 2. Если случайные величины ξ и η независимы, то $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$. Обратное утверждение в общем случае неверно, т.е. из того, что $K_{\xi\eta} = 0$, не следует, что величины ξ и η независимы.

Свойство 3. Справедливо соотношение $M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta) + \mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

Свойство 4. Справедливо соотношение $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta) + 2\,\mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

Ковариация зависит от размерности случайных величин ξ и η, поэтому удобнее ввести безразмерную величину и использовать ее в качестве характеристики взаимного влияния случайных величин.

♦ Величина

$$\rho(\xi, \eta) = \rho_{\xi,\eta} = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}$$

(при условии, что $D(\xi)$, $D(\eta)$ существуют и не равны нулю) называется *коэффициентом корреляции* случайных величин ξ, η .

♦ Матрица $r = \|\rho_{ij}\|$, где

$$\rho_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad \sigma_i = \sqrt{D_i} = \sqrt{K_{ii}}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

называется *корреляционной матрицей системы.*

Свойства коэффициента корреляции

Ограничим рассмотрение свойствами коэффициента корреляции для двух случайных величин.

Свойство 1. Справедливо соотношение $|\rho_{\xi,\eta}| \leqslant 1$.

Доказательство. Воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии:

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}} = \frac{M(\hat{\xi}\hat{\eta})}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = M\Big(\frac{\hat{\xi}}{\sigma_\xi}\frac{\hat{\eta}}{\sigma_\eta}\Big) = M(\xi_0 \eta_0),$$

где

$$\xi_0 = \frac{\hat{\xi}}{\sigma_x} = \frac{\xi - M(\xi)}{\sigma_x}, \quad \eta_0 = \frac{\eta - M(\eta)}{\sigma_y}$$

— стандартизированные случайные величины. Теперь воспользуемся неравенством $ab \leqslant (a^2+b^2)/2$ и свойством монотонности: если $\xi(\omega_i) \leqslant \eta(\omega_i)$ для всех $\omega_i \in \Omega$, то $M(\xi) \leqslant M(\eta)$. Получим

$$M(\xi_0\eta_0) \leqslant M\Big(\frac{1}{2}[\xi_0^2 + \eta_0^2]\Big) = \frac{1}{2}[M(\xi_0^2) + M(\eta_0^2)] = \frac{1}{2}[D(\xi_0) + D(\eta_0)] = 1.$$

Аналогично, используя неравенство $ab \geqslant -(a^2+b^2)/2$, можно показать, что $\rho(\xi,\eta) \geqslant -1$.

Свойство 2. Если величины ξ и η связаны линейной зависимостью: $\eta = a\xi + b$, то коэффициент корреляции $\rho_{\xi,\eta} = 1$, если $a > 0$, и $\rho_{\xi,\eta} = -1$, если $a < 0$.

Доказательство. Имеем $\rho_{\xi,\eta} = K_{\xi,\eta}/(\sigma_\xi\sigma_\eta)$. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, найдём

$$\begin{gathered} K_{\xi,\eta} = M(\hat{\xi}\hat{\eta}) = M([\xi - M(\xi)][\eta - M(\eta)]) = \\ = M([\xi - M(\xi)][a\xi + b - M(a\xi + b)]) = aM([\xi - M(\xi)]^2) = aD(\xi); \\ \sigma_\eta = \sqrt{D(\eta)} = \sqrt{D(a\xi + b)} = \sqrt{a^2 D(\xi)} = |a|\sigma_\xi. \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{K_{\xi,\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta} = \frac{aD(\xi)}{|a|\sigma_\xi^2} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0; \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Свойство 3. Если коэффициент корреляции $\rho = \pm 1$, то величины ξ и η линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\rho_{\xi,\eta} = 1$, но это означает, что в формуле $M(\xi_0\eta_0) \leqslant M((\xi_0^2 + \eta_0^2)/2)$ стоит знак равенства, или $M((\xi_0 - \eta_0)^2) = 0$, что возможно лишь в том случае, если величина ξ_0 с вероятностью 1 равна величине η_0. Следовательно,

$$\frac{\xi - M(\xi)}{\sigma_\xi} = \frac{\eta - M(\eta)}{\sigma_\eta}, \quad \eta = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\xi - \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M(\xi) + M(\eta) = a\xi + b.$$

♦ Случайные величины ξ и η называются *некоррелированными*, если $\rho_{\xi,\eta} = 0$, *положительно коррелированными*, если $\rho_{\xi,\eta} > 0$, и *отрицательно коррелированными*, если $\rho_{\xi,\eta} < 0$.

Таким образом, коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости между величинами ξ и η, причём если $\rho_{\xi,\eta} > 0$, то возрастанию ξ соответствует возрастание в среднем (условного математического ожидания) η, а если $\rho_{\xi,\eta} < 0$, то возрастанию ξ соответствует убывание в среднем η.

Свойства матрицы ковариаций

Свойство 1. Матрица ковариаций $A(\vec{\xi})$ случайного вектора $\vec{\xi}$ неотрицательно определена.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — произвольный вектор, $\vec{\xi}$ — случайный центрированный вектор, $A = \operatorname{cov}(\vec{\xi})$. Тогда

$$X^{\intercal}AX = X^{\intercal}M(\vec{\xi}\vec{\xi}^{\intercal})X = M(X^{\intercal}\vec{\xi}(X^{\intercal}\vec{\xi})^{\intercal}) = M(X^{\intercal}\vec{\xi})^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что равенство возможно лишь в случае, если $X^{\intercal}\vec{\xi} = 0$ с вероятностью единица, т.е. при условии, что величины ξ_i связаны линейной зависимостью.

Из этого свойства вытекает, что определитель матрицы ковариаций и все её собственные значения неотрицательны. Причем $\det A = 0$ тогда и только тогда, когда координаты $\vec{\xi}$ связаны линейной зависимостью.

Заметим также, что из данного свойства матрицы ковариаций легко получить рассмотренные выше свойства коэффициента корреляции. Действительно, пусть $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2\}$, тогда

$$A = \operatorname{cov}(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как $\det A \geqslant 0$, то $K_{11}K_{22} - K_{12}^2 \geqslant 0$ или $\rho_{12}^2 \leqslant 1$, причем $|\rho_{12}| = 1$ тогда и только тогда, когда $\det A = 0$, т.е. если ξ_1 и ξ_2 линейно зависимы.

Свойство 2. Если вектор $\vec{\eta}$ получен путем линейного преобразования вектора $\vec{\xi}$: $\vec{\eta} = C\vec{\xi} + \vec{\alpha}$, где C — произвольная матрица размера $n \times n$, то

$$\operatorname{cov}(\vec{\eta}) = C\operatorname{cov}(\vec{\xi})C^{\intercal}.$$

Доказательство. По определению,

$$\operatorname{cov}(\vec{\eta}) = M((\vec{\eta} - M(\vec{\eta}))(\vec{\eta} - M(\vec{\eta}))^{\intercal}).$$

Найдём $M(\vec{\eta})$:

$$M(\vec{\eta}) = M(C\vec{\xi} + \vec{\alpha}) = CM(\vec{\xi}) + \vec{\alpha}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\vec{\eta}) &= M((C\vec{\xi} + \vec{\alpha} - CM(\vec{\xi}) - \vec{\alpha})(C\vec{\xi} + \vec{\alpha} - CM(\vec{\xi}) - \vec{\alpha})^{\intercal}) = \\ &= M((C(\vec{\xi} - M(\vec{\xi})))(C(\vec{\xi} - M(\vec{\xi})))^{\intercal}) = \\ &= CM((\vec{\xi} - M(\vec{\xi}))(\vec{\xi} - M(\vec{\xi}))^{\intercal})C^{\intercal} = C\operatorname{cov}(\vec{\eta})C^{\intercal}. \end{aligned}$$

Пример 12.2. Закон распределения системы случайных величин (ξ, η) задан в виде таблицы

$\xi \diagdown \eta$	1	2
-1	0,3	0,2
3	0,1	0,4

Определить математические ожидания и дисперсии для каждой из величин, входящих в систему, а также вычислить корреляционный момент величин ξ и η и коэффициент корреляции.

Решение. Найдём математические ожидания величин ξ и η:

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_ip_{ij}=-1\cdot 0{,}3+(-1)\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}4=1;$$

$$M(\eta)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}y_jp_{ij}=1\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}4=1{,}6.$$

Дисперсии найдём по формулам

$$D(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi),\qquad D(\eta)=M(\eta^2)-M^2(\eta).$$

Для этого определим

$$M(\xi^2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_i^2p_{ij}=(-1)^2\cdot 0{,}3+(-1)^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}1+3^2\cdot 0{,}4=5;$$

$$M(\eta^2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}y_j^2p_{ij}=1^2\cdot 0{,}3+1^2\cdot 0{,}1+2^2\cdot 0{,}2+2^2\cdot 0{,}4=2{,}8.$$

Следовательно,

$$D(\xi)=5-1^2=4;\qquad D(\eta)=2{,}8-1{,}6^2=0{,}24.$$

Корреляционный момент найдём по формуле

$$K_{\xi,\eta}=M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta),$$

для этого определим

$$M(\xi\eta)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_iy_jp_{ij}=(-1)\cdot 1\cdot 0{,}3+(-1)\cdot 2\cdot 0{,}2+3\cdot 1\cdot 0{,}1+3\cdot 2\cdot 0{,}4=2.$$

Отсюда

$$K_{\xi,\eta}=2-1{,}6\cdot 1=0{,}4;\qquad \rho(\xi,\eta)=\frac{0{,}4}{\sqrt{4}\sqrt{0{,}24}}\approx 0{,}408.$$

Пример 12.3. Проводится проверка качества партии изделий. Из отобранных 5 изделий ξ изделий отвечают стандарту; среди них η $(\eta\leqslant 3)$ — высшего качества. Совместное распределение системы (ξ,η) задано двумерной таблицей

$\eta_j\backslash\xi_i$	0	1	2	3	4	5
0	0,02	0,08	0,1	0,06	0,04	0,02
1	0	0,03	0,07	0,09	0,1	0,12
2	0	0	0,02	0,04	0,06	0,08
3	0	0	0	0,01	0,02	0,04

Найти одномерные законы распределения каждой из величин ξ и η. Определить математические ожидания, среднеквадратичные отклонения величин ξ и η и их

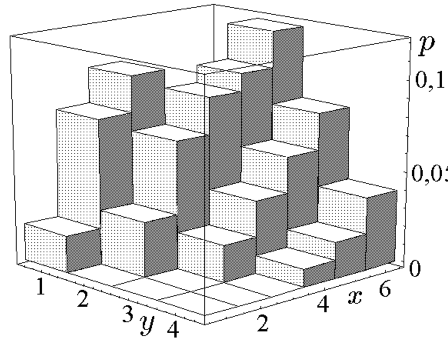


Рис. 43.

Решение. Проверим выполнение условия нормировки:

$$\sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{6} p_{mn} = 1.$$

Графиком вероятностей распределения является гистограмма системы (ξ, η) (рис. 43).

Возможен плоский вариант гистограмм — наложение построчных распределений (см. рис. 44).

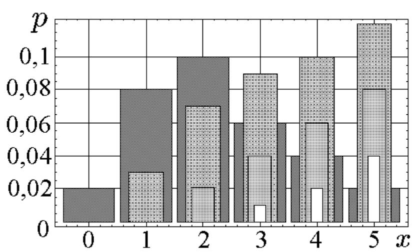


Рис. 44.

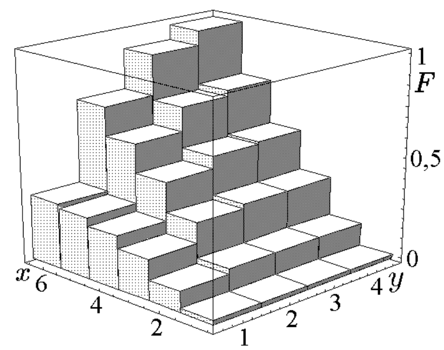


Рис. 45.

Функция распределения вектора $\vec{\zeta} = (\xi, \eta)$ определяется формулой

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = \sum_{y_m < y}\sum_{x_n < x} p_{mn},$$

где суммирование распространяется на все m, для которых $y_m < y$, и все n, для которых $x_n < x$ (табл. 2 и рис. 45)

Таблица 2

Функция распределения системы случайных величин $\vec{\zeta} = (\xi, \eta)$ при проверке качества партии изделий

$y_j \backslash x_i$	0	1	2	3	4	5
0	0,02	0,10	0,20	0,26	0,30	0,32
1	0,02	0,13	0,30	0,45	0,59	0,73
2	0,02	0,13	0,32	0,51	0,71	0,93
3	0,02	0,13	0,32	0,52	0,74	1,00

Найдём одномерные законы распределения по каждой из величин ξ и η и построим графики одномерных законов распределения каждой из величин.

Для построения ряда распределения по ξ элементы матрицы распределения системы (ξ, η) (табл. 2) суммируем по столбцам (распределение по ξ см. в табл. 3 и на рис. 46).

Таблица 3

Ряд распределения случайной величины ξ при проверке качества партии изделий

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,02	0,11	0,19	0,20	0,22	0,26

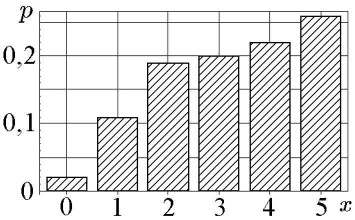


Рис. 46.

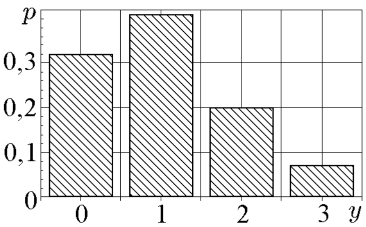


Рис. 47.

Для построения ряда распределения по η элементы матрицы распределения системы (ξ, η) (табл. 12.4.) суммируем по строкам (распределение по η см. в табл. 4 и на рис. 47).

Таблица 4

Ряд распределения случайной величины η при проверке качества партии изделий

y_i	0	1	2	3
p_i	0,32	0,41	0,20	0,07

Числовые характеристики найдём, имея данные табл. 3, 4. Математические ожидания:

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot 0{,}02 + 1 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}19 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}22 + 5 \cdot 0{,}26 = 3{,}27;$$

$$M(\eta) = \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_j y_j p_j = 0 \cdot 0{,}32 + 1 \cdot 0{,}041 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}07 = 1{,}02.$$

Дисперсии и среднеквадратичные отклонения:

$$D(\xi) = \sum_i \sum_j [x_i - M(\xi)]^2 p_{ij} = \sum_i [x_i - M(\xi)]^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - M^2(\xi) = 1{,}9971;$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = 1{,}41319;$$

$$D(\eta) = \sum_i \sum_j [y_j - M(\eta)]^2 p_{ij} = \sum_j [y_j - M(\eta)]^2 p_j = \sum_j y_j^2 p_j - M^2(\eta) = 0{,}7996;$$

$$\sigma_\eta = \sqrt{D(\eta)} = 0{,}894204;$$

$$K_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j [x_i - M(\xi)][y_j - M(\eta)] p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - M(\xi) M(\eta) = 0{,}6346.$$

Коэффициент корреляции системы двух случайных величин:

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{K_{\xi,\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = 0{,}502185.$$

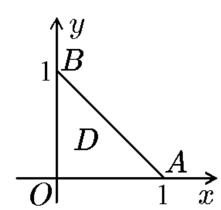


Рис. 48.

Пример 12.4. В треугольнике с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ (рис. 48) выбирают наудачу точку. Пусть ξ, η — координаты этой точки. Найти коэффициент корреляции между величинами ξ и η.

Решение. Так как все точки внутри треугольника равноправны, то плотность совместного распределения $f_{\xi\eta}(x,y)$ величин ξ и η постоянна:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{если } (x,y) \in D; \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Тогда

$$M(\xi) = M(\eta) = 2\iint\limits_D x\,dx\,dy = 2\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{1-x} dy = \frac{1}{3};$$

$$M(\xi\eta) = 2\iint\limits_D xy\,dx\,dy = 2\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{1-x} y\,dy = \frac{1}{12};$$

$$D(\xi) = D(\eta) = 2\iint\limits_D \Big(x - \frac{1}{3}\Big)^2 dx\,dy = \frac{1}{18};$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{1}{12} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{36}$$

и коэффициент корреляции

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{-1/36}{\sqrt{1/18}\sqrt{1/18}} = -\frac{1}{2}.$$

Коэффициент корреляции получился отрицательным, что можно было предсказать, так как (см. рис. 48) чем больше ξ, тем меньше в среднем η.

Пример 12.5. По плотности вероятностей

$$f(x,y) = \frac{a}{(1+x^6)(1+y^6)}$$

двумерной случайной величины $\vec{\zeta} = (\xi,\eta)$ определить коэффициент a, функцию распределения $F(x,y)$, математические ожидания и дисперсии системы случайных величин и их корреляционный момент. Найти одномерные законы распределения каждой из величин.

Решение. Коэффициент a определяется из свойства нормировки:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^6} = a\Big(\frac{2\pi}{3}\Big)^2.$$

Применим стандартную процедуру интегрирования дробно-рациональной функции:

$$\int\frac{dt}{1+t^6} = I(t) + C = \frac{1}{12}\Big[4\operatorname{arctg} t + 2\operatorname{arctg}(2t+\sqrt{3}) + 2\operatorname{arctg}(2t-\sqrt{3}) + \\ +\sqrt{3}\ln\Big|\frac{t^2+\sqrt{3}t+1}{t^2-\sqrt{3}t+1}\Big|\Big] + C.$$

Таким образом, $a = 9/4\pi^2$, а плотность вероятностей двумерной случайной величины принимает вид (см. рис. 49)

$$f(x,y) = \frac{9}{4\pi^2}\frac{1}{(1+x^6)(1+y^6)}.$$

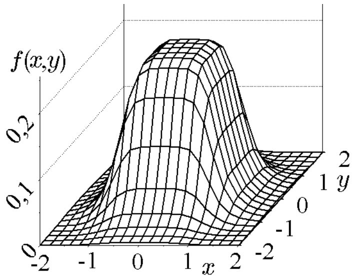


Рис. 49.

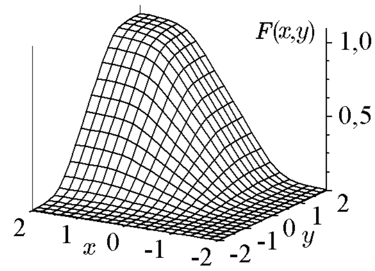


Рис. 50.

Функцию распределения $F(x,y)$ находим по формуле (11.1):

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{9}{4\pi^2}\Big(I(x)+\frac{\pi}{3}\Big)\Big(I(y)+\frac{\pi}{3}\Big) = $$

$$= \Big(\frac{3}{2\pi}I(x)+\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{3}{2\pi}I(y)+\frac{1}{2}\Big).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $I(\infty)=\pi/3$. График функции распределения $F(x,y)$ изображен на рис. 50.

Плотности распределения каждой из компонент найдём по формуле (11.2):

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{9}{4\pi^2}\frac{1}{1+x^6}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1}{1+y^6}\Big)dy = \frac{9}{4\pi^2}\frac{1}{1+x^6}\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2\pi}\frac{1}{1+x^6}$$

и аналогично

$$f_\eta(y) = \frac{3}{2\pi}\frac{1}{1+y^6}.$$

Заметим, что, согласно (11.6), (11.7), компоненты ξ и η являются независимыми и их найденные плотности распределения совпадают с условными.

График плотности распределения $f_\xi(x)$ изображен на рис. 51.

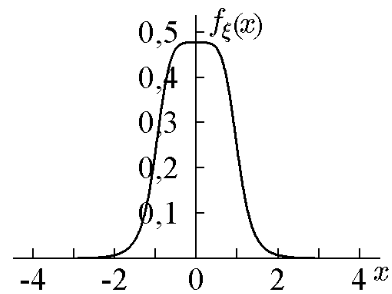


Рис. 51.

Далее находим числовые характеристики случайной величины:

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^6}dx = 0.$$

Аналогично

$$M(\eta) = 0.$$

При вычислении математического ожидания мы воспользовались тем, что определённый интеграл от нечетной функции с симметричными пределами равен нулю. Непосредственное вычисление интеграла приводит к тому же результату, поскольку

$$\int\frac{t\,dt}{1+t^6} = \frac{1}{12}\Big[2\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2t-\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}(2t+\sqrt{3}) +$$

$$+\ln\Big|\frac{(t^2+1)^2}{(t^2+\sqrt{3}t+1)(t^2-\sqrt{3}t+1)}\Big|\Big] + C.$$

Для дисперсий получим

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - M(\xi)]^2 f_\xi(x)\, dx = \frac{3}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx = \frac{3}{2\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{3}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

и аналогично

$$D(\eta) = \frac{1}{2}.$$

Тогда $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$ и корреляционный момент в силу независимости случайных величин ξ и η равен нулю: $K_{\xi\eta} = 0$.

Пример 12.6. Дана плотность вероятности системы случайных величин

$$f(x,y) = \begin{cases} a\sin(x+y) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2;\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2; \\ 0 & \text{при любых других } x \text{ и } y; \end{cases}$$

Определить коэффициент a, функцию распределения системы, математические ожидания и дисперсии системы случайных величин и их корреляционный момент. Найти одномерные законы распределения каждой из величин.

Решение. На основании свойства нормировки определяем коэффициент a:

$$a = 1 \Big/ \Big[\int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy\, dx \Big],$$

где

$$\int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy\, dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2} dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \Big[\cos\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) - \cos x\Big] dx = 2.$$

Тогда $a = 1/2$.

Плотность вероятности системы случайных величин $f(x,y)$ примет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(x+y) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2;\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2; \\ 0 & \text{при любых других } x \text{ и } y; \end{cases}$$

График функции $f(x,y)$ приведен на рис. 52.

Функция распределения вероятности системы случайных величин $F_{\xi,\eta}(x,y)$ определяется следующими условиями: для $\{x \leqslant 0, y \leqslant \pi/2\} \cap \{x \leqslant \pi/2, y \leqslant 0\}$

$$F(x,y) = 0;$$

для $\{0 < x \leqslant \pi/2, 0 < y \leqslant \pi/2\}$

$$F(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y \sin(\xi+\eta) d\xi\, d\eta = -\int\limits_0^y [\cos(x+\eta) - \cos\eta] d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}[\sin x + \sin y - \sin(x+y)];$$

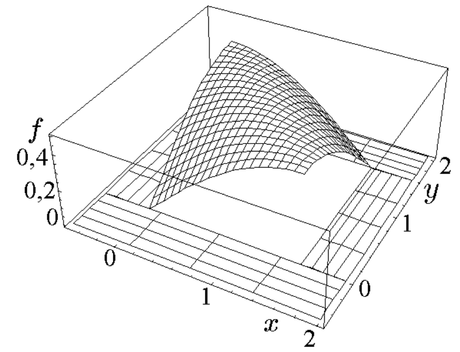


Рис. 52.

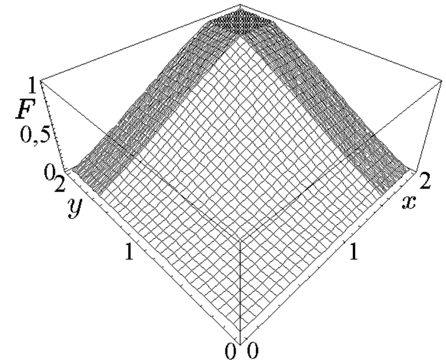


Рис. 53.

для $\{0 < x \leqslant \pi/2, \pi/2 < y < \infty\}$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(\sin x + 1 - \cos x);$$

для $\{\pi/2 < x < \infty, 0 < y \leqslant \pi/2\}$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(\sin y + 1 - \cos y);$$

для $\{x > \pi/2, y > \pi/2\}$

$$F(x,y) = 1.$$

График функции $F_{\xi,\eta}(x,y)$ приведен на рис. 53.

Определяем плотности распределения вероятностей по каждой переменной:

$$f_\xi(x) = \int\limits_0^{\pi/2} f_{\xi,\eta}(x,\eta)d\eta = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+\eta)d\eta = -\frac{1}{2}\cos(x+\eta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\Big(\cos x + \frac{1}{2}\sin x\Big).$$

Аналогично

$$f_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(\xi,y)d\xi = \int\limits_0^{\pi/2} f_{\xi,\eta}(\xi,y)d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin(\xi+y)d\xi = \frac{1}{2}(\cos y + \sin y).$$

График функции f_ξ приведен на рис. 54.

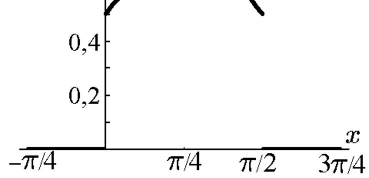


Рис. 54.

Далее найдём числовые характеристики системы случайных величин (ξ,η):

$$M(\xi) = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} x f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy = 0{,}7854; \quad M(\eta) = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} y f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy = 0{,}7854.$$

$$D(\xi) = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} [x - M(\xi)]^2 f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy = 0{,}187647;$$

$$D(\eta) = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} [y - M(\eta)]^2 f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy = 0{,}187647;$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = 0{,}433182; \qquad \sigma_\eta = \sqrt{D(\eta)} = 0{,}433182;$$

$$K_{\xi\eta} = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} [x - M(\xi)][y - M(\eta)] f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy = -0{,}0460539;$$

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = -0{,}245429.$$

♦ Пусть дана система величин (ξ, η). Математическое ожидание величины η, вычисленное при условии, что величина ξ приняла определённое значение, называется *условным математическим ожиданием величины* η.

Для системы дискретных величин

$$M(\eta/\xi = x_i) = \sum_j y_j P(\eta = y_j/\xi = x_i);$$

для системы непрерывных величин

$$M(\eta/\xi = x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_y(y/x) dy.$$

Аналогично может быть определено условное математическое ожидание величины ξ.

Условное математическое ожидание $M(\eta/\xi)$, как это следует из определения, есть некоторая функция аргумента x, которая характеризует зависимость среднего значения величины η от величины ξ. Эту функцию называют *регрессией случайной величины η на случайную величину ξ*, а график этой функции называют *кривой регрессии*.

Предположим, что мы хотим описать зависимость в среднем η от ξ с помощью некой функциональной зависимости $\eta = \varphi(\xi, a, b, c, \ldots)$, где a, b, c — некоторые параметры. Будем называть такую зависимость *моделью регрессии* η на ξ. Функцию $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$ называют *наилучшим приближением* η в смысле метода наименьших квадратов или *среднеквадратичной регрессией η на ξ*, если величина $M([\eta - \varphi(\xi, a, b, c, \ldots)]^2)$ принимает наименьшее значение как функция параметров $a, b, c, \ldots$.

Рассмотрим модель линейной среднеквадратичной регрессии $\varphi(\xi, a, b) = a\xi + b$. Найдём, при каких значениях параметров a и b функция $F(a, b) = M([\eta - \varphi(\xi)]^2)$ принимает наименьшее значение. Используя свойства математического ожидания, можно записать

$$F(a,b) = M([\eta - \varphi(\xi, a, b)]^2) = M([\eta - a\xi - b]^2) =$$
$$= M(\eta^2) + a^2 M(\xi^2) + b^2 - 2aM(\xi\eta) - 2bM(\eta) + 2abM(\xi).$$

Исследуем эту функцию на экстремум. Найдём

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 2aM(\xi^2) - 2M(\xi\eta) + 2bM(\xi), \quad \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 2b - 2M(\eta) + 2aM(\xi).$$

Приравняв $\partial F/\partial a = 0$, $\partial F/\partial b = 0$, получим систему

$$\begin{cases} aM(\xi^2) + bM(\xi) = M(\xi\eta); \\ aM(\xi) + b = M(\eta), \end{cases}$$

решив которую, найдём параметры a и b:

$$\begin{aligned} a &= \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{M(\xi^2) - M^2(\xi)} = \frac{\operatorname{cov}(\xi\eta)}{D(\xi)} = \rho_{\xi,\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}, \\ b &= \frac{M(\xi^2)M(\eta) - M(\xi)M(\xi\eta)}{M(\xi^2) - M^2(\xi)} = \frac{D(\xi)M(\eta) - M(\xi)\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)} = \\ &= M(\eta) - M(\xi)\rho_{\xi,\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись достаточным условием экстремума, легко убедиться, что функция $F(a, b)$ достигает минимума. Следовательно, уравнение линейной среднеквадратичной регрессии η на ξ имеет вид

$$y = M(\eta) + \rho_{\xi,\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\{x - M(\xi)\}. \tag{12.13}$$

При найденных значениях a и b значение функции $F(a, b) = \sigma_\eta^2(1 - \rho_{\xi,\eta}^2)$ называется остаточной дисперсией случайной величины η относительно величины ξ. Она характеризует ошибку линейной регрессии.

12.5. Характеристическая и производящая функции

♦ *Характеристической функцией* $\gamma_\xi(t)$ случайной величины ξ называется комплекснозначная функция действительного аргумента t, определяемая как математическое ожидание случайной величины $e^{it\xi}$:

$$\gamma(t) = \gamma_\xi(t) = M(e^{it\xi}). \tag{12.14}$$

Для дискретной случайной величины:

$$\gamma(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} p_k, \tag{12.15}$$

для непрерывной случайной величины:

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx. \tag{12.16}$$

♢ Как видим, для непрерывной случайной величины характеристическая функция есть обратное преобразование Фурье $\gamma(t) = \sqrt{2\pi}F^{-1}_{x\to t}f(x)$ плотности вероятности распределения. Зная характеристическую функцию, можно с помощью преобразования Фурье найти плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_{t\to x}\gamma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t)e^{-itx}dt.$$

Использование характеристических функций позволяет применять для решения многих вероятностных задач теорию преобразования Фурье, хорошо разработанную в математическом анализе (см., например, [3]).

Свойства характеристической функции

Свойство 1. Характеристическая функция удовлетворяет соотношениям

$$\gamma(0) = 1, \quad |\gamma(t)| \leqslant 1. \tag{12.17}$$

Доказательство. Действительно, по определению

$$\gamma(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

С другой стороны,

$$|\gamma(t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{itx}|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)|e^{itx}|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Свойство 2. Характеристическая функция случайной величины $\eta = a\xi + b$ имеет вид

$$\gamma_\eta(t) = \gamma_\xi(at)e^{ibt}. \tag{12.18}$$

Доказательство. По определению,

$$\gamma_\eta(t) = M(e^{it\eta}) = M(e^{it(a\xi+b)}) = M(e^{ita\xi}e^{itb}) = e^{itb}M(e^{ita\xi}) = \gamma_\xi(at)e^{itb}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Свойство 3. Если существует конечное математическое ожидание случайной величины ξ^k, то

$$\gamma^{(k)}(0) = i^k M(\xi^k). \tag{12.19}$$

Доказательство. Пусть

$$\gamma(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx.$$

Продифференцируем это выражение по t:

$$\gamma'(t) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{itx}dx,$$

следовательно,

$$\gamma'(0) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = iM(\xi).$$

Аналогично можно получить выражения и для производных высших порядков.

С помощью свойства 3 можно вычислять начальные моменты случайной величины по формуле

$$\alpha_k = M(\xi^k) = \frac{1}{i^k}\gamma^{(k)}(0). \tag{12.20}$$

Свойство 4. Если случайная величина ξ имеет конечные моменты любого порядка, то разложение ее характеристической функции $\gamma(t)$ в ряд Маклорена имеет вид

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \alpha_k}{k!} t^k. \tag{12.21}$$

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из предыдущего свойства.

Свойство 5. Характеристическая функция суммы независимых величин равна произведению характеристических функций этих величин:

$$\gamma_{\xi+\eta}(t) = \gamma_\xi(t)\gamma_\eta(t). \tag{12.22}$$

Доказательство. По определению,

$$\gamma_{\xi+\eta}(t) = M(e^{it(\xi+\eta)}) = M(e^{it\xi}e^{it\eta}) = M(e^{it\xi})M(e^{it\eta}) = \gamma_\xi(t)\gamma_\eta(t),$$

что и требовалось доказать. Здесь мы воспользовались соотношением (12.7).

По индукции убеждаемся, что если случайная величина ζ является суммой N независимых случайных величин: $\zeta = \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_j$, то её характеристическая функция определяется соотношением

$$\gamma_\zeta(t) = \prod_{j=1}^{N} \gamma_{\xi_j}(t).$$

♦ *Производящей функцией начальных моментов* случайной величины ξ называется функция $\alpha(t)$, если

$$\alpha(t) = M(e^{t\xi}).$$

♦ *Производящей функцией центральных моментов* случайной величины ξ называется функция $\mu(t)$, если

$$\mu(t) = M(e^{t[\xi - M(\xi)]}).$$

Приведём основные свойства производящей функции, которые аналогичны свойствам характеристической функции.

Свойство 1. Если существуют конечные моменты $\alpha_k = M(\xi^k)$, $\mu_k = M(\xi^k)$, то

$$\alpha_k = \alpha^{(k)}(0), \qquad \mu_k = \mu^{(k)}(0). \tag{12.23}$$

Доказательство. Пусть распределение случайной величины ξ дискретно:

$$\alpha(t) = M(e^{t\xi}) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} P_i.$$

Продифференцируем это соотношение по t:

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{tx_i} P_i$$

и найдём $\alpha'(0)$:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = M(\xi) = \alpha_1.$$

Вычислив производные более высоких порядков, получим (12.23).

Доказательство для непрерывных распределений случайных величин аналогично.

Это свойство позволяет вычислять моменты случайной величины по формуле (12.23), аналогичной формуле (12.20).

Свойство 2. Если для случайной величины ξ существуют моменты любого порядка, то

$$\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} t^k, \qquad \mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} t^k. \tag{12.24}$$

Доказательство следует непосредственно из предыдущего свойства и определения ряда Тейлора.

Свойство 3. Если $\alpha_\xi(t)$ — производящая функция случайной величины ξ, то производящая функция случайной величины $\eta = a\xi + b$ равна

$$\alpha_\eta(t) = \alpha_\xi(at)e^{bt}.$$

Доказательство аналогично доказательству свойства 2 характеристических функций.

♦ *Производящей функцией начальных моментов* $\alpha_{k,s}$ системы случайных величин (ξ, η) называется математическое ожидание

$$\alpha(t, \tau) = M(e^{t\xi + \tau\eta}).$$

♦ *Производящей функцией центральных моментов* $\mu_{k,s}$ системы случайных величин (ξ, η) называется математическое ожидание

$$\mu(t, \tau) = M(e^{t[\xi - M(\xi)] + \tau[\eta - M(\eta)]}).$$

Теорема 12.2. *Функции $\alpha(t, \tau)$ и моменты $\alpha_{k,s}$ связаны соотношением*

$$\alpha(t, \tau) = \sum_{k,s} \frac{1}{k!s!} \alpha_{k,s} t^k \tau^s.$$

Доказательство полностью соответствует доказательству аналогичной теоремы для одномерного случая.

♢ Пусть ξ и η — произвольные случайные величины. Тогда дисперсия суммы этих величин

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) = M(\xi^2) + 2M(\xi\eta) + M(\eta^2) - M^2(\xi) - 2M(\xi)M(\eta) - M^2(\eta) = \\ = D(\xi) + D(\eta) + 2[M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)]. \end{aligned}$$

Если величина $M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)$ не равна нулю, то очевидно, что величины ξ и η в этом случае зависимы (обратное утверждение не верно!). Следовательно, дисперсию можно использовать в качестве индикатора зависимости случайных величин ξ и η.

13. Биномиальное распределение и его частные случаи

13.1. Вырожденное распределение

♦ Говорят, что случайная величина ξ имеет *вырожденное распределение* с параметром a, если она может принять единственное значение $\xi = a$ с вероятностью 1. Математическое ожидание вырожденного распределения $M(\xi) = a$, дисперсия $D(\xi) = 0$.

13.2. Распределение Бернулли

♦ Говорят, что случайная величина ξ имеет *распределение Бернулли* с параметром p, и обозначают $\xi \in B_p$, если она может принимать только два значения: 1 и 0 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, т.е. случайная величина ξ есть число появлений некоторого события в одном испытании по схеме Бернулли с вероятностью успеха p.

Характеристическая функция распределения Бернулли имеет вид

$$\gamma(t) = qe^{it\cdot 0} + pe^{it\cdot 1} = q + pe^{it}.$$

Числовые характеристики найдём из определений:

$$M(\xi) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$
$$D(\xi) = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = pq.$$

♢ Вырожденное распределение можно рассматривать как распределение Бернулли с $q = 0$.

13.3. Биномиальное распределение

Среди законов распределения для дискретных случайных величин наиболее распространенным является *биномиальный*, частным случаем которого является распределение Бернулли. Биномиальное распределение имеет место в следующих условиях.

♦ Говорят, что случайная величина ξ *распределена по биномиальному закону* с параметрами n и p, и обозначают $\xi \in B_{n,p}$, если она может принять одно из n своих возможных значений с вероятностью

$$P(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = \overline{0, n}, \quad q = 1 - p,$$

т.е. случайная величина ξ есть число появлений некоторого события в n испытаниях по схеме Бернулли при вероятности появления события в одном испытании, равной p.

Биномиальное распределение можно записать в виде ряда

$\xi = m$	0	1	2	...	i	...	n
$P_n(m)$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^i p^i q^{n-i}$	...	p^n

♢ Многоугольники биномиального распределения для частных случаев $p = 0{,}1$; $p = 0{,}5$; $p = 0{,}9$ при $n = 20$ приведены на рис. 55.

Функция распределения случайной величины, распределённой по биномиальному закону, определяется соотношением

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ \sum\limits_{0 \leqslant m < x} P_n(m) & \text{при} \quad 0 < x \leqslant n; \\ 1 & \text{при} \quad x > n. \end{cases}$$

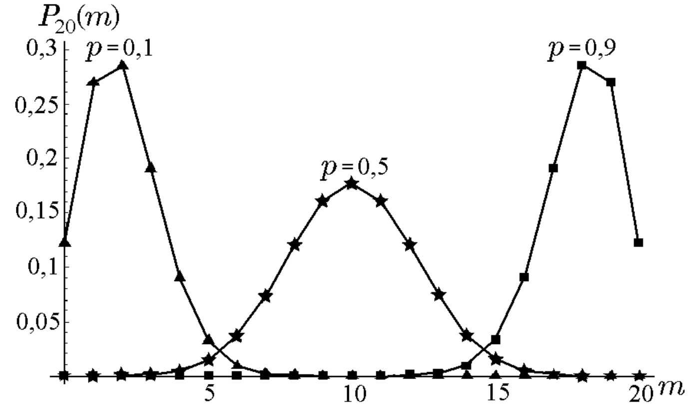


Рис. 55. Многоугольники биномиального распределения

Пример 13.1. Производятся 3 независимых выстрела по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Найти ряд и функцию распределения числа попаданий.

Решение. Величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 3$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$. Случайная величина ξ (число попаданий в цель) может принять следующие значения: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Эти значения случайная величина ξ принимает с вероятностями p_0, p_1, p_2, p_3, которые, в соответствии с формулой Бернулли, равны

$$\begin{aligned}
&p_0 = q^3 = 0{,}064;\\
&p_1 = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}288;\\
&p_2 = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}432;\\
&p_3 = p^3 = 0{,}6^3 = 0{,}216.
\end{aligned}$$

Из вычисленных значений p_i, $i = \overline{0,3}$, видно, что наиболее вероятно попадание в цель двумя пулями, в то время как промах при всех выстрелах маловероятен.

Ряд распределений имеет следующий вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,064	0,288	0,432	0,216

По определению, функция распределения

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i).$$

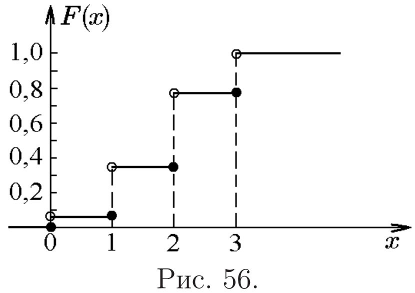


Рис. 56.

При $x \leqslant 0$ $F(x) = P(\xi < 0) = 0$;
при $0 < x \leqslant 1$ $F(x) = P(\xi = x_0 = 0) = 0{,}064$;
при $1 < x \leqslant 2$ $F(x) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}352$;
при $2 < x \leqslant 3$ $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{2} P(\xi = x_i) = 0{,}784$;
при $x > 3$ $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} P(\xi = x_i) = \sum\limits_{i=1}^{3} P_i = 1.$

График функции распределения представлен на рис. 56.

Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей биномиальное распределение, используя производящую функцию. Для биномиального распределения по определению

$$\alpha(t) = M(e^{t\xi}) = \sum_{m=0}^{n} e^{mt} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} e^{mt} C_n^m p^m q^{n-m} =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m (pe^t)^m q^{n-m} = (q + pe^t)^n.$$

Согласно свойствам производящей функции, $\alpha_1 = \alpha'(0)$, $\alpha_2 = \alpha''(0)$, т.е.

$$\alpha'(t) = n(q + pe^t)^{n-1} pe^t, \quad \alpha'(0) = np;$$
$$\alpha''(t) = np[(n-1)(q + pe^t)^{n-2} pe^{2t} + (q + pe^t)^{n-1} e^t], \quad \alpha''(0) = np[(n-1)p + 1].$$

Тогда $M(\xi) = \alpha_1 = np$, $D(\xi) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = npq$, $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{npq}$.

Математическое ожидание и дисперсию можно найти иначе, используя свойства математического ожидания $M(\xi)$ и дисперсии $D(\xi)$.

Искомую случайную величину рассмотрим как сумму случайных величин:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Ясно, что ξ_i попарно независимы. Каждая ξ_i может принимать только два значения: нуль, если событие A не наступит в i-м испытании ($i = \overline{1, n}$), и единица, если событие A наступит. Вероятности этих событий равны соответственно $q = 1 - p$ и p. Следовательно, случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены по закону Бернулли с параметром p.

Поэтому математическое ожидание каждой из случайных величин ξ_i ($i = \overline{1, n}$) есть

$$M(\xi_i) = p,$$

а дисперсия

$$D(\xi_i) = pq$$

для любого i. С учётом свойств математического ожидания и дисперсии суммы одинаково распределённых независимых случайных величин находим

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n) = np;$$
$$D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n) = npq.$$

Заметим также, что в данном случае коэффициент асимметрии определяется соотношением

$$A = \frac{q - p}{\sqrt{npq}} = \frac{1 - 2p}{\sqrt{np(1-p)}},$$

а эксцесс

$$E = \frac{1 - 6pq}{npq} = \frac{6p^2 - 6p + 1}{np(1-p)}.$$

Покажем, что биномиальное распределение устойчиво по суммированию.

Теорема 13.1. *Если ξ и η независимы и $\xi \in B_{n,p}$, $\eta \in B_{m,p}$, то*

$$\zeta = \xi + \eta \in B_{n+m,p}.$$

Здесь $B_{n,p}$ — биномиальное распределение с параметрами n и p.

Для доказательства в данном случае достаточно вспомнить, что случайная величина, распределённая по биномиальному закону, есть число успехов в серии испытаний Бернулли.

Пример 13.2. Случайная величина ξ представляет число бракованных деталей из выборки в 50 штук. Вероятность брака каждой детали $p = 0{,}06$. Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$ и σ числа бракованных деталей в выборке.

Решение. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение. Следовательно,

$$M(\xi) = np = 50 \cdot 0{,}06 = 3 \text{ детали};$$
$$D(\xi) = npq = 50 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}94 = 2{,}82,$$

так как $q = 1 - p = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$;

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2{,}82} = 1{,}6793.$$

Пример 13.3. Случайная величина μ — относительная частота появления события в n испытаниях по схеме Бернулли. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

Решение. Пусть случайная величина ξ — число появлений события в n испытаниях по схеме Бернулли. Тогда $\mu = \xi/n$. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, находим

$$M(\mu) = M\Big(\frac{\xi}{n}\Big) = \frac{1}{n}M(\xi) = \frac{1}{n}np = p,$$
$$D(\mu) = D\Big(\frac{\xi}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}D(\xi) = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n}, \quad \sigma_\mu = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Полученные значения подтверждают факт устойчивости относительной частоты: ее значения группируются вокруг вероятности события ($M(\mu) = p$) и разброс их относительно этого значения тем меньше, чем больше n: ($\sigma_\mu = \sqrt{pq/n}$).

14. Геометрическое распределение

♦ Говорят, что случайная величина ξ имеет *геометрическое распределение* с параметром p, и пишут $\xi \in G_p$, если она может принять одно из своих возможных значений m с вероятностью $P(\xi = m) = P_m = pq^{m-1}$, $m = \overline{1, \infty}$, $q = 1 - p$.

♢ Таким образом, случайная величина ξ есть число попыток до первого «успеха», включая удавшуюся, или номер первого успешного испытания в схеме Бернулли с бесконечным числом испытаний и вероятностью успеха в одном испытании, равной p.

Вероятности P_m для последовательных значений m образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q.

Числовые характеристики геометрического распределения вычисляются стандартным образом:

$$M(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} mpq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty}(q^m)' = p\Big(\sum_{m=1}^{\infty}q^m\Big)' = p\Big(\frac{q}{1-q}\Big)' = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p};$$

$$M(\xi^2)=\sum_{m=1}^{\infty}m^2pq^{m-1}=p\Big(\sum_{m=1}^{\infty}mq^m\Big)'=p\Big(q\sum_{m=1}^{\infty}mq^{m-1}\Big)'=p\Big(q\sum_{m=1}^{\infty}(q^m)'\Big)'=$$
$$=p\Big(q\Big(\sum_{m=1}^{\infty}q^m\Big)'\Big)'=p\Big(q\Big(\frac{q}{1-q}\Big)'\Big)'=p\Big(\frac{q}{(1-q)^2}\Big)'=p\frac{1+q}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{p^2};$$
$$D(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Таким образом, для геометрического распределения ξ:

$$M(\xi)=\frac{1}{p},\quad D(\xi)=\frac{q}{p^2}.$$

Аналогично можно найти коэффициент асимметрии

$$A(\xi)=\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$$

и эксцесс

$$E(\xi)=\frac{6-6p+p^2}{1-p}.$$

Пример 14.1. Монету подбрасывают до первого появления орла. Найти среднее число подбрасываний и дисперсию числа подбрасываний.

Решение. Число подбрасываний до первого появления орла — случайная величина ξ — распределено, очевидно, по геометрическому закону с параметром $p=1/2$. Следовательно, $m=1/p=2$, $D=q/p^2=2$.

◊ На практике рассматривают также случайную величину $\eta=\xi-1$ — число «безуспешных» попыток, — распределённую по геометрическому закону:

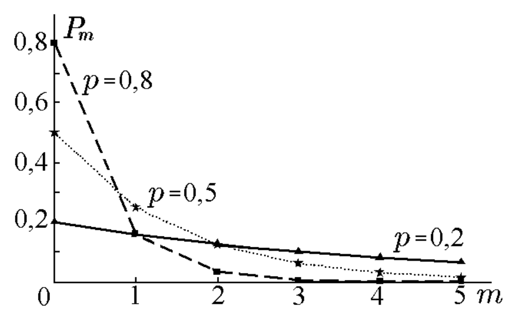


Рис. 57.

$$P(\eta=m)=P_m=pq^m;\quad m=\overline{0,\infty};\quad 0\leqslant p\leqslant 1;\quad q=1-p.$$

Многоугольники распределения для случайной величины η, распределённой по геометрическому закону с параметрами $p=0{,}2$; $p=0{,}5$; $p=0{,}8$ приведены на рис. 57.

Основные числовые характеристики распределения случайной величины η выражаются через параметр распределения p следующим образом:

$$M(\eta)=\frac{1-p}{p},\quad D(\eta)=\frac{1-p}{p^2},$$
$$A(\eta)=\frac{2-p}{\sqrt{1-p}},\quad E(\eta)=\frac{6-6p+p^2}{1-p}.$$

15. Распределение Пуассона

15.1. Числовые характеристики распределения Пуассона

При решении многих практических задач приходится иметь дело с дискретными случайными величинами, распределёнными по закону Пуассона.

♦ Дискретная случайная величина ξ называется *распределённой по закону Пуассона* с параметром $\lambda > 0$ и обозначается $\xi \in \Pi_\lambda$, если она может принимать одно из своих возможных значений k ($\{\xi = k\}$) с вероятностью

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Многоугольники распределения для случайной величины, распределённой по закону Пуассона с различными значениями параметра λ, приведены на рис. 58.

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

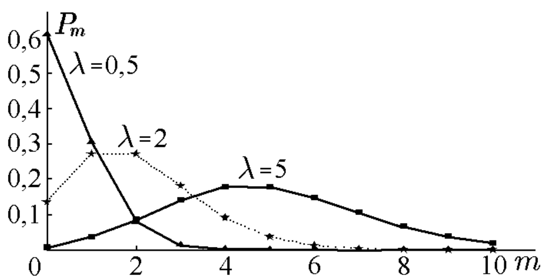


Рис. 58.

Множество значений случайной величины ξ счётно. Пуассоновское распределение является предельным для биномиального при $p \to 0$, $n \to \infty$, если $np = \lambda = \text{const}$. Этим распределением можно пользоваться, если производится большое число независимых опытов, в каждом из которых событие A происходит с малой вероятностью.

Примеры случайных величин, распределённых по закону Пуассона:

1) число отказов сложной аппаратуры за время t;
2) число вызовов, поступивших оператору сотовой связи за определённый промежуток времени;
3) число электронов, вылетающих с катода за время t;
4) число опечаток в корректуре и т.д.

Найдём математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратичное отклонение σ:

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \ldots + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots = e^{\lambda}.$$

Таким образом, $M(\xi) = \lambda$, т.е. параметр λ в распределении Пуассона есть математическое ожидание случайной величины. Воспользовавшись свойством дисперсии

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2,$$

определим теперь $D(\xi)$:

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Так как каждая из сумм равна e^{λ}, то

$$M(\xi^2) = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda.$$

Следовательно,

$$D(\xi) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Таким образом, дисперсия случайной величины, имеющей распределение Пуассона, численно равна её математическому ожиданию.

Тогда

$$\sigma = \sqrt{\lambda}.$$

Итак, $M(\xi) = \lambda$, $D(\xi) = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

$\Diamond$ Заметим, что аналогично можно найти $A(\xi) = 1/\sqrt{\lambda}$, $E(\xi) = 1/\sqrt{\lambda}$.

Покажем, что распределение Пуассона устойчиво по суммированию.

Теорема 15.1. *Если ξ и η независимы и $\xi \in \Pi_\lambda$, $\eta \in \Pi_\mu$, то*

$$\zeta = \xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}.$$

Здесь Π_λ, Π_μ, $\Pi_{\lambda+\mu}$ — распределения Пуассона с параметрами $\lambda, \mu, \lambda+\mu$ соответственно.

Доказательство. Воспользуемся формулой (11.16):

$$P(\xi+\eta=k) = \sum_{m=0}^{k} P(\xi = k-m) = \sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\frac{\mu^{k-m}e^{-\mu}}{(k-m)!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}\lambda^m\mu^{k-m} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{m=0}^{k}C_k^m\lambda^m\mu^{k-m} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!},$$

что и требовалось доказать.

Пример 15.1. Найти характеристическую функцию $\gamma(t)$ дискретной случайной величины ξ, распределённой по закону Пуассона: $P(\xi = m) = \lambda^m e^{-\lambda}/m!$, $m = \overline{0,\infty}$.

Решение. По определению,

$$\gamma(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm}P(\xi = m) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{itm}\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^m}{m!}.$$

Сделав замену переменной $\lambda e^{it} = z$, получим

$$\gamma(t) = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!} = e^{-\lambda}e^{z} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Следовательно,

$$\gamma(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}. \tag{15.1}$$

15.2. Распределение Пуассона как предельный случай биномиального закона распределения

Распределение Пуассона можно получить как предельный случай биномиального, когда число испытаний велико, а вероятность появления события в одном испытании очень мала, причём среднее число «успехов» в бесконечной серии испытаний остается постоянным. В этом смысле закон Пуассона можно интерпретировать как закон редких событий.

Пусть случайная величина ξ распределяется по биномиальному закону $B_{n,p}$. Рассмотрим предел биномиальной вероятности при $n \to \infty$, $p \to 0$, причём так, что $np = \lambda = \mathrm{const}$ (подобная ситуация, как мы убедимся в дальнейшем, реализуется в простейшем потоке событий):

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(m-n+1)}{m!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$
$$= \frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(m-n+1)}{n^m}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$
$$= \frac{\lambda^m}{m!}\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda(n-m)/n} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m,$$

т.е. вероятность в таком пределе является пуассоновской.

Следовательно, когда n велико, а p мало, можно использовать для приближённого вычисления биномиальных вероятностей формулу Пуассона.

Пример 15.2. Пекарь выпекает 160 кексов, кладя в тесто 300 изюминок. Какова вероятность, что случайно выбранный кекс не будет содержать изюминок?

Решение. Пусть ξ — число попавших в кекс изюминок. Очевидно, что ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $p = 1/160$ и $n = 300$. Следовательно,

$$P(\xi = 0) = C_{300}^0\left(\frac{1}{160}\right)^0\left(1-\frac{1}{160}\right)^{300} = \left(\frac{159}{160}\right)^{300} \approx 0{,}152455.$$

Поскольку p мало, а n достаточно велико, эту задачу можно было бы решить и с помощью формулы Пуассона. Среднее число изюминок, приходящихся на один кекс, $\lambda = 300/160 = 1{,}875$, следовательно,

$$P(\xi = 0) \approx P_0 = \frac{e^{-1{,}875}(1{,}875)^0}{0!} =\approx 0{,}153355.$$

15.3. Простейший (пуассоновский) поток событий

Пуассоновскому распределению подчиняется так называемый «простейший поток событий», то есть последовательность однородных событий, наступающих одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов, поступающих операторам сотовой связи, на пункт неотложной медицинской помощи, поток сбоев на ЭВМ, поток α-частиц, испускаемых радиоактивным источником и другие.

Поток называется *простейшим* (пуассоновским), если он обладает свойствами

1) стационарности, то есть вероятность попадания того или иного числа событий на любой участок времени длиной t не зависит от положения этого участка на оси времени, а зависит только от его длины t;

2) ординарности, то есть события возникают поодиночке, а не группами по два, по три и т.д., или вероятность появления двух и более событий в малый промежуток времени длиной τ пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления в этот промежуток одного события;

3) отсутствия последствий, то есть «будущее» потока не зависит от его прошлого, или вероятность попадания того или иного числа событий на заданный участок оси времени не зависит от того, сколько событий попало на любой другой, не пересекающийся с ним участок.

♦ Среднее число событий потока α, появляющихся в единицу времени, называется *интенсивностью потока*.

Пусть в течение времени t действует простейший поток событий интенсивностью α. Требуется вычислить вероятность того, что за время t наступит ровно m событий (случайная величина ξ — число событий за время t, примет значение, равное m).

Разобьем отрезок времени t на n частей (n достаточно велико). Обозначим $\tau = t/n$. По свойству стационарности среднее число событий на отрезке τ есть $\alpha\tau = \alpha t/n$. Так как τ мало, то в соответствии со свойством ординарности будем считать, что на отрезке τ событие не может произойти более одного раза. Следовательно, число событий на отрезке τ подчинено распределению Бернулли с вероятностью успеха $p = \alpha t/n$.

Все n промежутков можно рассматривать как серию испытаний, результатом каждого из которых является наступление события с вероятностью $p = \alpha t/n$ или ненаступление с вероятностью $q = 1 - p = 1 - \alpha t/n$. Так как все n опытов независимы (по свойству 3), то вероятность того, что за время t наступит ровно m событий, определяется формулой Бернулли, причём тем точнее, чем больше n, т.е

$$P(\xi = m) = \lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m \Big(\frac{\alpha t}{n}\Big)^m \Big(1 - \frac{\alpha t}{n}\Big)^{n-m}.$$

Так как $p = \alpha t/n \to 0$ при $n \to \infty$, причём $np = n\alpha t/n = \alpha t = \lambda$, то данная вероятность при $n \to \infty$ стремится к вероятности, определяемой формулой Пуассона

$$P(\xi = m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m \Big(\frac{\alpha t}{n}\Big)^m \Big(1 - \frac{\alpha t}{n}\Big)^{n-m} = P_m = \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^m}{m!}.$$

Следовательно, поток событий на интервале t подчинен закону Пуассона с параметром $\lambda = \alpha t$ (α — интенсивность потока).

Пример 15.3. Среднее число вызовов, поступающих оператору сотовой связи в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 5 минут поступит 1) 2 вызова, 2) менее двух вызовов, 3) не менее двух вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение. По условию $\alpha = 2$, $t = 5$, $m = 2$. Таким образом, $\lambda = 10$, и по формуле Пуассона находим:

1) $P_2 = \dfrac{10^2 e^{-10}}{2!} \approx 0{,}00225$;

2) $P(m < 2) = P_0 + P_1 = \dfrac{10^0 e^{-10}}{0!} + \dfrac{10^1 e^{-10}}{1!} \approx 0{,}000495$;

3) $P(m \geqslant 2) = 1 - P(m < 2) = 1 - 0{,}000495 \approx 0{,}999505$.

Заметим, что параметр t можно рассматривать не только как длину временного интервала, но и как длину интервала на произвольной координатной оси или как площадь некоторой области в пространстве $\mathbb{R}^2$, или как объём произвольной области в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пример 15.4. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 150. Берется на пробу 2 кубических дециметра воздуха. Найти вероятность того, что в них будет обнаружен хотя бы один микроб.

Решение. Предположим, что: 1) вероятность присутствия того или иного числа микробов в выделенном объёме зависит только от величины объёма; 2) в элементарном объёме dv не может содержаться более одного микроба. Но тогда случайная величина ξ — число микробов в выделенном объёме — будет иметь распределение Пуассона. Для 2 кубических дециметров параметр λ этого распределения — среднее число микробов — будет равен $\lambda = 2 \cdot 150 \cdot 10^{-3} = 0{,}3$. Тогда вероятность обнаружить хотя бы один микроб: $P = 1 - P(\xi = 0) = 1 - e^{-0{,}3} \approx 0{,}259$.

Пример 15.5. Деревья в лесу растут в случайных точках, которые образуют пуассоновское поле с плотностью 0,04 деревьев/м^2. Случайная величина ξ — расстояние от произвольной точки в лесу до ближайшего дерева. Найти закон распределения случайной величины ξ и среднее расстояние до ближайшего дерева.

Решение. Найдём функцию распределения ξ. По определению, $F_\xi(x) = P(\xi < x)$. Но событие $\{\xi < x\} = \{$расстояние до ближайшего дерева меньше $x\}$ равносильно событию «на расстоянии x от выбранной точки есть хотя бы одно дерево» или событию «в круге с площадью πx^2 есть хотя бы одно дерево». Поскольку число деревьев на участке леса площадью S, по условию, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 0{,}04S$, то получим

$$F_\xi(x) = 1 - e^{-0{,}04\pi x^2}, \quad x > 0.$$

Тогда плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = 0{,}08\pi x e^{-0{,}04\pi x^2}, \quad x > 0.$$

Соответственно, среднее расстояние до ближайшего дерева равно

$$M(\xi) = \int\limits_0^\infty x f_\xi(x) dx = 2{,}5 \text{ м}.$$

16. Гипергеометрическое распределение

Случайная величина ξ имеет *гипергеометрическое распределение* с $N = 2, 3, \ldots$; $M = 1, 2, \ldots < N$; $n = 1, 2, \ldots < N$, если она принимает конечное множество натуральных значений $\xi = m$, соответственно, с вероятностями

$$P(\xi = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где $m = \overline{0, \min(M, n)}$.

Пользуясь языком «схемы урн», можно сказать, что гипергеометрическое распределение возникает при следующих условиях. В урне находится N шаров, из которых ровно M белых. Пусть одновременно (или один за другим без возврата) извлечены n шаров. Найти вероятность того, что среди этих извлечённых шаров будет m белых шаров.

Таким образом, случайную величину ξ можно трактовать как число успехов в n последовательных испытаниях при условии, что известно общее число M возможных успехов в N возможных испытаниях.

На практике гипергеометрическое распределение применяется при решении задач, связанных с контролем продукции.

Для того чтобы найти числовые характеристики случайной величины, распределённой по гипергеометрическому закону, представим ξ в виде

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \tag{16.1}$$

где ξ_j — число успехов в j-м испытании. Очевидно, что каждая из величин ξ_j может принять одно из двух значений: 0 или 1, поэтому

$$M(\xi_j) = 0 \cdot P(\xi_j = 0) + 1 \cdot P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = 1).$$

Случайные величины ξ_j зависимы между собой, но для каждой из них вероятность $P(\xi_i = 1)$ одна и та же и равна

$$P(\xi_j = 1) = P(\xi_1 = 1) = \frac{M}{N}.$$

Действительно, для k испытаний общее число исходов равно $N(N-1)\cdots(N-k+1)$. Благоприятными для события $\{\xi_k = 1\}$ являются исходы, дающие в k-м испытании успех. Общее число таких исходов, согласно теореме умножения, равно $M(N-1)\cdots(N-k+1)$. Тогда

$$P(\xi_k = 1) = \frac{M(N-1)\cdots(N-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)} = \frac{M}{N}.$$

Так как математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий, то

$$M(\xi) = M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) = n\frac{M}{N}.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой $D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$. $M(\xi^2)$ найдём также через математическое ожидание как сумму

$$M(\xi^2) = M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i^2) + 2\sum_{1\leqslant i<j}^{n} M(\xi_i\xi_j).$$

Так как ξ_j — число успехов в j-м испытании, то

$$\begin{aligned}
&M(\xi_i^2) = 0^2 \cdot P(\xi_i = 0) + 1^2 \cdot P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = 1) = \frac{M}{N};\\
&M(\xi_i, \xi_j) = 0 \cdot 0 \cdot P(\xi_i = 0, \xi_j = 0) + 0 \cdot 1 \cdot P(\xi_i = 0, \xi_j = 1) + \\
&\qquad +1 \cdot 0 \cdot P(\xi_i = 1, \xi_j = 0) + 1 \cdot 1 \cdot P(\xi_i = 1, \xi_j = 1) = P(\xi_i = 1, \xi_j = 1).
\end{aligned}$$

Можно показать, что для любых пар (ξ_i, ξ_j), $i \neq j$, вероятность $P(\xi_i = 1, \xi_j = 1)$ одна и та же. Найдём эту вероятность для (ξ_1, ξ_2):

$$P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = \frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}.$$

Тогда
$$M(\xi^2) = n\frac{M}{N} + 2C_n^2\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1} = n\frac{M}{N} + n(n-1)\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}$$
и
$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \frac{nM(N-M)(N-n)}{(N-1)N^2}.$$

В данном случае интерес представляют также числовые характеристики: коэффициент асимметрии
$$A = \frac{\sqrt{N-1}(N-2M)(N-2n)}{(N-2)\sqrt{Mn(N-M)(N-n)}},$$
определяющий степень асимметричности многоугольника распределения, и эксцесс
$$E = -3 + \frac{(N-1)N^2}{Mn(N-3)(N-2)(N-M)(N-n)} \times$$
$$\times\left\{N(N+1) - 6n(N-n) + \frac{1}{N^2}[3M(N-M)(6n(N-n) + N^2(n-2) - Nn^2)]\right\},$$
определяющий степень островершинности многоугольника распределения.

Пример 16.1. Из партии, содержащей N изделий, среди которых имеется M стандартных, выбраны случайным образом n изделий для проверки их качества. Построить ряд распределений случайного числа $\xi = m$ стандартных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. Искомая вероятность вычисляется по формуле
$$P(\xi = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Пример 16.2. Имеются 7 электрических ламп, среди которых 3 неисправные, на вид неотличимые от новых. Наугад берутся 4 лампы и вставляются в 4 патрона. Найти ряд распределения и построить многоугольник распределения числа радиоламп ξ, которые будут работать. Найти ее числовые характеристики.

Решение. Величина ξ имеет гипергеометрическое распределение с параметрами $N = 7$; $n = 4$; $M = 4$. Строим ряд распределения величины ξ:
$$P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_3^3}{C_7^4} = \frac{4}{35}; \qquad P(\xi = 2) = \frac{C_4^2 C_3^2}{C_7^4} = \frac{18}{35};$$
$$P(\xi = 3) = \frac{C_4^3 C_3^1}{C_7^4} = \frac{12}{35}; \qquad P(\xi = 4) = \frac{C_4^4 C_3^0}{C_7^4} = \frac{1}{35}.$$

Ряд распределения случайной величины ξ (значения вероятностей P_m округлены до трех знаков после запятой) будет иметь вид

$\xi = m$	1	2	3	4
P_m	0,114	0,514	0,343	0,029

Найдём числовые характеристики случайной величины ξ:
$$M(\xi) \approx 2{,}286; \quad D(\xi) \approx 0{,}490; \quad A \approx 0{,}041; \quad E \approx -0{,}283.$$

В частности, коэффициент асимметрии $A = 0{,}041 > 0$ указывает на скошенность многоугольника распределения влево, а коэффициент эксцесса $E = -0{,}283 < 0$ подчёркивает туповершинность многоугольника распределения, который изображен на рис. 59.

Если M и N велики, а число испытаний n много меньше M и N, то каждое из этих испытаний почти не влияет на вероятность успеха в последующих испытаниях.

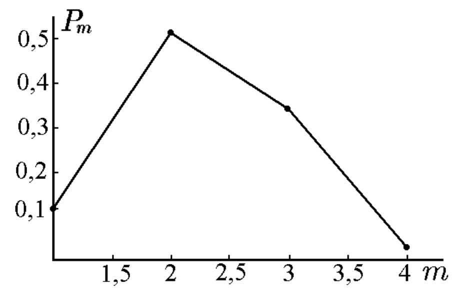


Рис. 59.

Теорема 16.1. *Если $N \to \infty$, $M \to \infty$ так, что $M/N = p = \text{const}$, то для любых n, $0 \leqslant m \leqslant n$,*

$$P(\xi = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \to C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $p = M/N$, $q = 1 - p$.

Доказательство. Рассмотрим предел вероятности случайного события $\{\xi = m\}$ при $N \to \infty$, $M \to \infty$ и учтем, что $M/N = p = \text{const}$. Заметим предварительно, что

$$\text{при } M \to \infty \qquad C_M^m = \frac{M(M-1)\cdots(M-m+1)}{m!} \sim \frac{M^m}{m!};$$

$$\text{при } N \to \infty \qquad C_N^n \sim \frac{N^n}{n!};$$

$$\text{при } M \to \infty,\ N \to \infty \qquad C_{N-M}^{n-m} \sim \frac{(N-M)^{n-m}}{(n-m)!}.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}} \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}} \frac{M^m (N-M)^{n-m}}{N^n} =$$

$$= C_n^m \lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}} \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = P_n(m).$$

Таким образом, гипергеометрическое распределение в пределе $N \to \infty$, $M \to \infty$ переходит в биномиальное с параметрами n и $p = M/N$. Следовательно, при больших N, M для приближенного вычисления вероятностей случайных величин, распределённых по гипергеометрическому закону, можно использовать формулу Бернулли.

17. Равномерное распределение

♦ Случайная величина ξ *равномерно распределена* на отрезке $[a, b]$ и обозначена $\xi \in U_{a,b}$, если плотность её распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b], \end{cases}$$

где $C = \text{const}$ и $a < b$.

Из условия, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

находим C:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dx + \int\limits_{a}^{b} Cdx + \int\limits_{b}^{\infty} 0dx = C(b-a) = 1.$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{b-a}.$$

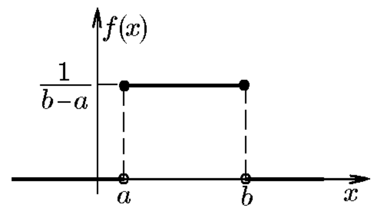


Рис. 60.

Следовательно, плотность вероятности имеет вид (см. рис. 60)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a,b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Найдём функцию распределения $F(x)$ для равномерного распределения на интервале $[a,b]$. Согласно определению,

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

1. Если $x < a$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt = 0.$$

2. Если $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{x} \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

3. Если $x > b$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{b} \frac{dt}{b-a} + \int\limits_{b}^{x} 0dt = 1.$$

Итак (см. рис. 61),

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

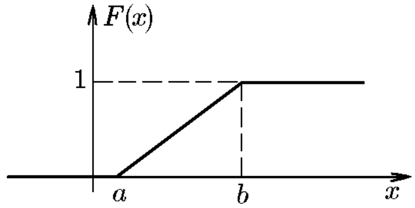


Рис. 61.

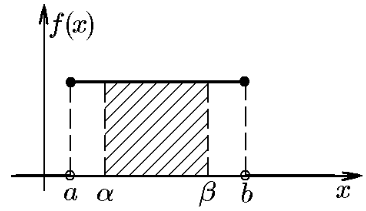


Рис. 62.

Вероятность попадания случайной величины ξ, имеющей равномерное распределение, на участок $[\alpha, \beta]$, который является частью участка $[a, b]$ (рис. 62), определяется по формуле

$$P\Big(\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta\Big) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Найдём основные числовые характеристики случайной величины, имеющей равномерное распределение. Для математического ожидания получим

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int\limits_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Итак, математическое ожидание равномерного распределения равно координате середины интервала $[a, b]$. Дисперсию случайной величины ξ находим по формуле

$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2,$$

но

$$M(\xi^2) = \frac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} x^2 dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

Тогда

$$D(\xi) = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) - \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

откуда

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Аналогичными вычислениями можно получить $A(\xi) = 0$ и $E(\xi) = -1{,}2$, что характеризует равномерное распределение (см. рис. 62) как симметричное и туповершинное.

Равномерное распределение характерно для ошибок грубых измерений. Если измерение какой-либо величины производится с точностью до целых делений шкалы, без определения на глаз доли деления, то ошибка измерения может иметь любое значение, не превосходящее по абсолютной величине половину деления шкалы, причём нет никаких оснований считать вероятности разных значений различными. Более того, можно с уверенностью сказать, что при большом числе таких измерений все значения ошибки в пределах от минус половины деления до плюс половины деления будут встречаться одинаково часто. Поэтому ошибка грубых измерений, производимых с точностью до целых делений шкалы, представляет собой случайную величину, равномерно распределённую в пределах от $-\delta/2$ до $\delta/2$, где δ — цена деления шкалы.

Пример 17.1. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1,3]$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta=\xi^2$.

Решение. Так как ξ равномерно распределена на отрезке $[-1,3]$, то её функция распределения имеет вид

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1;\\ \dfrac{x+1}{4}, & -1<x\leqslant 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найдём функцию распределения величины η. По определению, $F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(\xi^2<x)$.

1) Пусть $x\leqslant 0$. Очевидно, что $F_\eta(x)=P(\xi^2<x)=0$.

2) Пусть $0<x\leqslant 1$. Тогда

$$F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(\xi^2<x)=P(-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x})=F_\xi(\sqrt{x})-F_\xi(-\sqrt{x})=$$
$$=\frac{\sqrt{x}+1}{4}-\frac{-\sqrt{x}+1}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{x}.$$

3) Пусть $1<x\leqslant 9$. Тогда

$$F_\eta(x)=P(\xi^2<x)=P(\xi<\sqrt{x})=F_\xi(\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}+1}{4}.$$

4) Пусть $x>9$. Очевидно, что в этом случае $F_\eta(x)=1$. Таким образом,

$$F_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1;\\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{4}, & 1<x\leqslant 9;\\ 1, & x>9;\end{cases}\qquad f_\eta(x)=F'_\eta(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}}, & 0<x\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{8\sqrt{x}}, & 1<x\leqslant 9;\\ 0, & x>9.\end{cases}$$

Можно было решить данную задачу и иначе, воспользовавшись формулой для преобразования плотности распределения: если ξ — непрерывная случайная величина, имеющая плотность распределения $f_\xi(x)$, а функция $\eta=\varphi(\xi)$ дифференцируема и монотонна на множестве, где $f_\xi(x)>0$, то случайная величина $\eta=\varphi(\xi)$ имеет плотность распределения $f_\eta(x)=|[\varphi^{-1}(x)]'|f_\xi(\varphi^{-1}(x))$.

В нашем случае функция $\eta=\xi^2$ немонотонна на множестве $]-1,3[$. Однако, учитывая свойства плотности равномерно распределённой случайной величины ξ и свойства отображения $\eta=\xi^2$, можно получить, что
$f_\eta(x)=2(\sqrt{x})'f_\xi(\sqrt{x})$, если $x\in]0,1[$ (в интервал $]0,1[$ отображаются два интервала $]-1,0[$ и $]0,1[$);
$f_\eta(x)=(\sqrt{x})'f_\xi(\sqrt{x})$, если $x\in]1,9[$ (в интервал $]1,9[$ отображается один интервал $]1,3[$; $f_\eta(x)=0$ для всех остальных значений x.

Учитывая, что $(\sqrt{x})'f_\xi(\sqrt{x})=1/8\sqrt{x}$, для указанных интервалов получим ту же формулу, что и выше.

Пример 17.2. Случайные величины ξ и η независимы; ξ равномерно распределена на $]0,1[$; η имеет распределение Бернулли с параметром $p=1/3$. Найти функцию распределения и, если существует, плотность распределения случайной величины $\zeta=\xi+\eta$.

Решение. Запишем функцию распределения величины ξ и ряд распределения величины η:

$$F_\xi = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ x, & 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & x > 1; \end{cases}$$

η	0	1
p	2/3	1/3

Заметим, что $\zeta = \xi + \eta$ может принимать значения от 0 до 2. Найдём функцию распределения ζ по определению.

Пусть $z \leqslant 0$. Тогда, очевидно, $F_\zeta(z) = 0$.

Пусть $0 < z \leqslant 1$. В этом случае $\zeta = \xi + \eta$ можно быть меньше z лишь тогда, когда величина η принимает значение, равное нулю. Таким образом,

$$F_\zeta(z) = P(\zeta < z) = P(\xi + \eta < z) = P(\eta = 0, \xi < z) =$$
$$= P(\eta = 0)P(\xi < z) = \frac{2}{3}F_\xi(z) = \frac{2}{3}z.$$

Пусть $1 < z \leqslant 2$. В этом случае, если $\eta = 0$, то сразу выполняется $\zeta < z$. Если же $\eta = 1$, то условие $\xi + \eta < z$ выполняется при $\xi < z - 1$. Таким образом,

$$F_\zeta(z) = P(\xi + \eta < z) = P((\eta = 0) \text{ или } (\eta = 1, \xi < z - 1)) =$$
$$= P(\eta = 0) + P(\eta = 1)P(\xi < z - 1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(z - 1).$$

Пусть $z > 2$. Тогда $F_\zeta(z) = 1$.

Итак,

$$F_\zeta(z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant 0; \\ \dfrac{2}{3}z, & 0 < z \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{3}(z+1), & 1 < z \leqslant 2; \\ 1, & z > 2. \end{cases}$$

Поскольку $F_\zeta(z)$ непрерывна, то ζ — непрерывная случайная величина. Следовательно,

$$f_\zeta(z) = F'_\zeta(z) = \begin{cases} 2/3, & z \in]0,1[; \\ 1/3, & z \in]1,2[; \\ 0, & z \notin]0,2[. \end{cases}$$

Приведём еще одно утверждение, которое имеет исключительно важное значение для моделирования случайных величин.

Теорема 17.1. *Если случайная величина ξ имеет непрерывную и строго монотонную функцию распределения $F_\xi(x)$, то величина $\eta = F_\xi(\xi)$ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$, т.е. $\eta \in U_{0,1}$.*

Доказательство. Заметим, что величина $\eta \in [0,1]$ и в силу взаимно однозначного соответствия между ξ и η имеет также непрерывную функцию распределения $F_\eta(x)$. Пусть $0 < x < 1$, тогда $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(F_\xi(\xi) < x) = P(\xi < \xi_0)$, где ξ_0 определяется из условия $F_\xi(\xi_0) = x$. Но $P(\xi < \xi_0) = F_\xi(\xi_0) = x$. Таким образом,

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ x, & 0 < x \leqslant 1; , \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

т.е. $F_\eta(x)$ есть функция распределения $U_{0,1}$.

Следствие 17.1.1. Если случайная величина ξ имеет непрерывную и строго монотонную функцию распределения $F_\xi(x)$, а величина $\eta \in U_{0,1}$, то $\xi = F_\xi^{-1}(\eta)$, где $F_\xi^{-1}(x)$ — функция, обратная к $F_\xi(x)$.

18. Экспоненциальное (показательное) распределение

♦ Случайная величина ξ распределена по *экспоненциальному закону* с параметром $\lambda > 0$ и обозначена $\xi \in E_\lambda$, если её плотность распределения вероятностей задаётся формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{18.1}$$

Функция распределения случайной величины, распределённой по показательному закону,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{18.2}$$

Экспоненциальное распределение реализуется в теории обслуживания, при этом ξ, например, — время ожидания при техническом обслуживании, и теории надёжности, где ξ, например, — срок службы электронной аппаратуры, компьютерной техники.

Показательное распределение тесно связано с простейшим (пуассоновским) потоком событий: интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром, равным интенсивности потока.

Найдём основные числовые характеристики показательного распределения. Для математического ожидания получим

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \lambda \int\limits_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Вычислим интеграл по частям, положив $U = x$, $dV = e^{-\lambda x}dx$, $dU = dx$, $V = (-1/\lambda)e^{-\lambda x}$, и получим

$$M(\xi) = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \Big(-\frac{1}{\lambda}\Big) \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \Big(-\frac{1}{\lambda}\Big) e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Аналогично для дисперсии $D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2$ получим

$$M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \lambda \int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Проинтегрируем по частям, положив $U = x^2$, $dV = e^{-\lambda x}dx$, $dU = 2x\,dx$, $V = (-1/\lambda)e^{-\lambda x}$, и получим

$$M(\xi^2) = \lambda \Big\{ x^2 \Big(-\frac{x}{\lambda}\Big) e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \int\limits_0^{\infty} \Big(-\frac{2}{\lambda}\Big) e^{-\lambda x} 2x\,dx \Big\} = 2 \int\limits_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} M(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Следовательно,

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \qquad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{18.3}$$

Аналогично можно получить $A(\xi) = 2$ и $E(\xi) = 6$.

Пример 18.1. Время безотказной работы персонального компьютера (ПК) — случайная величина T, имеющая показательное распределение с параметром $\lambda = 5$ (физический смысл величины λ — среднее число отказов в единицу времени, не считая простоев ПК для ремонта). Известно, что ПК уже проработал без отказов время τ. Найти при этих условиях плотность и функцию распределения времени, которое проработает ПК после момента τ до ближайшего отказа. Вычислить вероятность того, что ПК не выйдет из строя в течение среднего времени безотказной работы.

Решение. Число отказов ПК можно рассматривать как пуассоновский (простейший) поток событий, который обладает свойством отсутствия последствий. Поэтому вероятность появления хотя бы одного отказа на участке от τ до $\tau + t$ не зависит от того, появлялись ли отказы ранее момента τ. Следовательно, подставив $\lambda = 5$ в соотношения (18.1) и (18.2), получим

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 5e^{-5t} & \text{при } t \geqslant 0; \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 - e^{-5t} & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Графики плотности и функции полученного показательного распределения изображены на рис. 63.

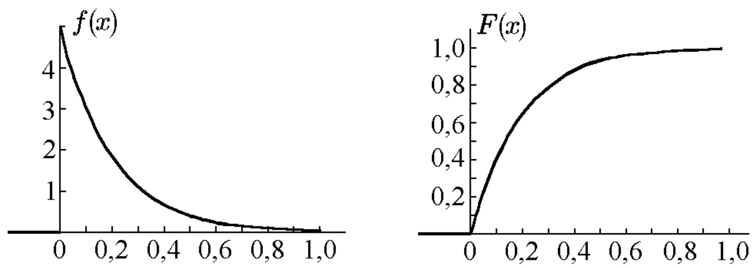


Рис. 63.

Среднее время безотказной работы ПК $M(\xi) = 1/\lambda = 0{,}2$. Тогда $P(0 \leqslant t \leqslant M(\xi)) = F(M(\xi)) - F(0) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$.

Пример 18.2. Система состоит из двух независимых блоков, средний срок службы которых, соответственно, 3 и 5 лет. Найти функцию распределения случайной величины — срока службы системы — и средний срок службы системы, если сроки службы блоков распределены по показательному закону (для выхода системы из строя достаточно выхода из строя одного блока).

Решение. Пусть ξ — срок службы системы, ξ_1, ξ_2 — сроки службы блоков. Функция распределения срока службы системы $F_\xi(x)$, по определению, есть вероятность события, заключающегося в том, что система проработает меньше x лет. Так как система выйдет из строя в том случае, если хотя бы один блок выйдет из строя, то, по определению, событие $\{\xi < x\}$ есть сумма событий

$\{\xi_1 < x\}$ и $\{\xi_2 < x\}$. Поскольку события $\{\xi_1 < x\}$ и $\{\xi_2 < x\}$ совместны, по общей теореме сложения вероятностей получим

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\xi_1 < x \text{ или } \xi_2 < x) =$$
$$= P(\xi_1 < x) + P(\xi_2 < x) - P(\xi_1 < x \text{ и } \xi_2 < x) =$$
$$= P(\xi_1 < x) + P(\xi_2 < x) - P(\xi_1 < x)P(\xi_2 < x) = F_{\xi_1}(x) + F_{\xi_2}(x) - F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(x).$$

Для случайной величины ξ, распределённой по показательному закону $F_\xi(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x > 0$, $\alpha = 1/M(\xi)$, где $M(\xi)$ — математическое ожидание случайной величины. В нашем случае $M(\xi_1) = 3$, $M(\xi_2) = 5$. Тогда

$$F_\xi(x) = (1 - e^{-x/3}) + (1 - e^{-x/5}) - (1 - e^{-x/3})(1 - e^{-x/5}) = 1 - e^{-8x/15}, \quad x > 0.$$

Получили, что ξ также распределена по показательному закону с параметром $\alpha = 8/15$. Следовательно, средний срок службы системы $M(\xi) = 1/\alpha = 15/8 = 1{,}875$ лет.

Пример 18.3. Продолжительность работы микросхемы — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 0{,}01$ ч$^{-1}$. Испорченную микросхему немедленно заменяют новой. Какова вероятность того, что за 100 часов микросхему придется заменять больше двух раз?

Решение. Поскольку продолжительность работы микросхемы — случайная величина, распределённая по показательному закону, то поток отказов микросхем является простейшим с интенсивностью $\alpha = 0{,}01$ мс./ч. Тогда, используя формулу Пуассона с параметром $\lambda = 0,01 \cdot 100 = 1$, найдём вероятность того, что число отказов ξ будет больше двух:

$$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leqslant 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) =$$
$$= 1 - \frac{1^0 e^{-0}}{0!} - \frac{1^1 e^{-1}}{1!} - \frac{1^2 e^{-2}}{2!} \approx 0{,}323.$$

Пример 18.4. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром α. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Решение. Функция $z = x^2$ монотонна для всех $x > 0$. Обратная функция и её производная имеют вид $x = \sqrt{z}$, $x' = 1/(2\sqrt{z})$. Учтя, что $f_\xi(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, и подставив в формулу (21.1), получим

$$f_\eta(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} e^{-\alpha\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Пример 18.5. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет равномерное распределение на $]1, 3[$, η — показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

Решение. Поскольку ξ и η имеют непрерывные распределения, воспользуемся формулой свертки. Имеем

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in]1, 3[; \\ 0, & x \notin]1, 3[; \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \in]0, \infty[; \\ 0, & y \notin]0, \infty[. \end{cases}$$

Заметим, что $\zeta = \xi + \eta$ принимает значения от 1 до ∞, следовательно, $f_\zeta(z) = 0$ для $z < 1$.

Пусть $1 < z < 3$. Тогда, чтобы выполнялись условия $f_\xi(x) > 0$, $f_\eta(y) = f_\eta(z-x) > 0$, необходимо $1 < x < z$. С учетом (11.15) запишем

$$f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)dx = \int\limits_{1}^{z} \frac{1}{2} e^{-(z-x)}dx = \frac{1}{2}(1 - e^{1-z}).$$

Пусть $z > 3$. Тогда $f_\xi(x) f_\eta(y) > 0$ для $1 < x < 3$, следовательно,

$$f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)dx = \int\limits_{1}^{3} \frac{1}{2} e^{-(z-x)}dx = \frac{1}{2} e^{x-z}\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(e^{3-z} - e^{1-z}).$$

Окончательно получим

$$f_\zeta(z) = \begin{cases} 0, & z < 1; \\ \dfrac{1}{2}(1 - e^{1-z}), & 1 < z < 3; \\ \dfrac{1}{2}(e^{3-z} - e^{1-z}), & z > 3. \end{cases}$$

19. Нормальное распределение

19.1. Плотность вероятности

Среди распределений непрерывных случайных величин центральное место занимает нормальное распределение, или закон Гаусса.

Случайная величина ξ *нормально распределена* или *подчиняется закону распределения Гаусса*, если её плотность распределения $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{19.1}$$

где m, σ — параметры распределения, причём $\sigma > 0$.

Принадлежность ξ к нормальному распределению с параметрами m и σ обозначается обычно $\xi \in N_{m,\sigma^2}$ или $\xi \in N(m, \sigma^2)$.

Рассмотрим некоторые особенности функции $f(x)$ и построим её график:

1) функция $f(x)$ определена для всех $x \in \mathbb{R}$;

2) график $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = m$;

3) функция $f(x)$ имеет максимум в точке $x = m$, равный

$$\max_{x=m} f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}};$$

4) график $f(x)$ имеет две точки перегиба: $x = m \pm \sigma$; ординаты точек перегиба одинаковы и равны

$$f(m \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}};$$

5) ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0;$$

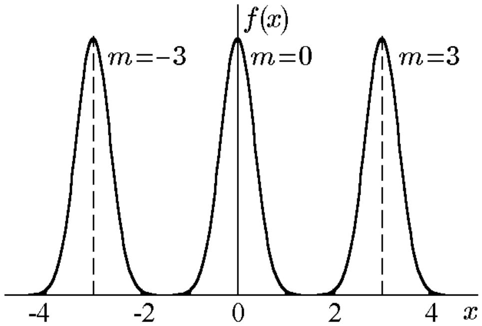


Рис. 64.

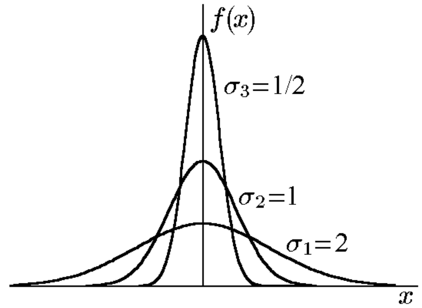


Рис. 65.

6) при постоянном σ с изменением m кривые плотности не меняют форму, но сдвинуты относительно оси Oy вправо при $m > 0$ или влево при $m < 0$ (см. рис. 64); с возрастанием же параметра σ кривая становится более пологой, сжимается к оси Ox и растягивается вдоль неё (см. рис. 65).

Примерами случайных величин, имеющих нормальное распределение, могут служить:

1) ошибки измерений;

2) величина помехи на входе радиоприемного устройства в данный момент;

3) отклонение при стрельбе;

4) многие параметры радиодеталей (ёмкость, индуктивность, сопротивление) при массовом производстве;

5) отклонения действительных размеров деталей, обработанных на станке, от номинальных.

Проверим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{19.2}$$

Действительно, сделав замену переменной $(x - m)/\sigma\sqrt{2} = t$, получим $dx = \sigma\sqrt{2}dt$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

При изучении несобственных интегралов было установлено, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1.$$

Отметим, что ввиду особой важности рассматриваемого закона значения плотности $f(x)$ при $m = 0$ и $\sigma = 1$, т.е. значения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{19.3}$$

затабулированы.

Для общего случая

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

поэтому значения $f(x)$ также могут быть найдены с помощью таблицы значений $\varphi(x)$.

19.2. Функция распределения

Функция распределения нормального закона имеет вид

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2} dt. \qquad (19.4)$$

Интеграл, стоящий в правой части, не может быть сведён к элементарным функциям в конечном виде, однако приводится к специальным функциям, которые табулируются.

Обозначим

$$z = \frac{t-m}{\sigma}, \quad dz = \frac{1}{\sigma}dt, \quad t_1 = x, \quad z_1 = \frac{x-m}{\sigma}, \quad t_2 = -\infty, \quad z_2 = -\infty.$$

Тогда

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{(x-m)/\sigma} e^{-z^2/2} dz. \qquad (19.5)$$

Положим в первом интеграле $z = -y$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\infty}^{0} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \Phi(\infty) = \frac{1}{2}$$

на основании (19.2). Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-z^2/2} dz \qquad (19.6)$$

есть функция Лапласа, для которой составлены таблицы значений. Второе слагаемое в (19.5) отличается от (19.6) только верхним пределом интегрирования. Поэтому функцию распределения нормального закона можно представить в виде

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \qquad (19.7)$$

Функция Лапласа часто встречается в расчётах. Поэтому мы приведём некоторые её свойства (без доказательства):

1. $\Phi(0) = 0$;
2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

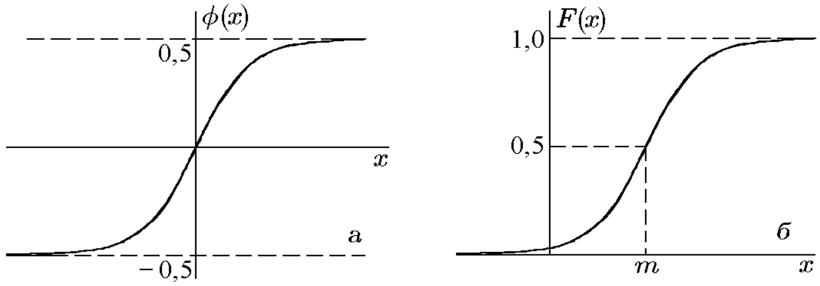


Рис. 66.

3. $\Phi(\infty) = \dfrac{1}{2}$;
4. $\dfrac{d\Phi(x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} > 0$ для всех $x \in]-\infty, \infty[$.

Функция Лапласа монотонно возрастает (рис. 66,*а*).

График функции распределения нормальной случайной величины $F(x)$ получается из графика функции Лапласа при помощи сдвига вдоль оси Oy на $1/2$ в положительном направлении (рис. 66,*б*).

Покажем, что нормальное распределение является устойчивым по суммированию.

Теорема 19.1. *Если ξ и η независимы и $\xi \in N(m_1, \sigma_1^2)$, $\eta \in N(m_2, \sigma_2^2)$, то*

$$\zeta = \xi + \eta \in N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Доказательство. Докажем теорему для $\xi \in N(0,1)$, $\eta \in N(0,1)$ (доказательство для общего случая аналогично). По формуле свертки (11.15) имеем

$$f_{\xi+\eta}(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-(z-x)^2/2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+zx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-z/2)^2+z^2/4} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-z/2)^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/4} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-z^2/2\cdot 2}.$$

Полученное выражение есть плотность нормального распределения с параметрами $m = 0$ и $\sigma^2 = 2$, что и требовалось доказать.

19.3. Числовые характеристики

Определим математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение нормального распределения.

Математическое ожидание определяется соотношением

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx.$$

Сделаем замену переменных:

$$\frac{x-m}{\sigma}=z,\quad x=\sigma z+m,\quad dx=\sigma dz.$$

Тогда

$$M(\xi)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+m)e^{-z^2/2}\sigma dz=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ze^{-z^2/2}dz+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz.$$

Первый интеграл справа равен нулю как интеграл от нечётной функции в симметричных пределах, а второй интеграл есть известный интеграл Эйлера–Пуассона

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz=1. \tag{19.8}$$

Поэтому

$$M(\xi)=m. \tag{19.9}$$

Таким образом, параметр m в нормальном законе распределения равен математическому ожиданию случайной величины.

Дисперсия нормально распределённой случайной величины

$$D(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^2f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx.$$

Произведя в интеграле ту же замену переменных, что и в предыдущем случае, и приняв во внимание, что пределы интегрирования не меняются, получим

$$D(\xi)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-z^2/2}dz=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\big(ze^{-z^2/2}dz\big).$$

Положив $U=z$, $ze^{-z^2/2}dz=dV$ и проинтегрировав по частям, найдём

$$D(\xi)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\Big[-ze^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz\Big].$$

Так как первое слагаемое в квадратных скобках равно нулю, а второе – уже известный интеграл (19.8), равный $\sqrt{2\pi}$, то

$$D(\xi)=\sigma^2. \tag{19.10}$$

Следовательно, второй параметр σ в выражении для плотности нормально распределённой случайной величины есть среднеквадратичное отклонение (стандартное отклонение этой случайной величины)

$$\sigma=\sqrt{D(\xi)}. \tag{19.11}$$

Аналогично вычисляются центральные моменты k-го порядка:

$$\mu_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx.$$

Обозначим $x - m = \sqrt{2}\sigma t$, тогда $dx = \sqrt{2}\sigma\, dt$ и

$$\mu_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma)^k t^k e^{-t^2} dt.$$

Вычислим интеграл по частям. Положим $U = t^{k-1}$, $dV = te^{-t^2}dt$, тогда $dU = (k-1)t^{t-2}dt$ и $V = -e^{t^2}/2$, а

$$\mu_k = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^k}{2\sqrt{\pi}} \left(-t^{k-1}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + (k-1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{k-2}e^{-t^2}dt \right) = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^k}{2\sqrt{\pi}}(k-1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{k-2}e^{-t^2}dt =$$

$$= (k-1)\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma)^{k-2} t^{k-2} e^{-t^2} dt = (k-1)\sigma^2 \mu_{k-2}.$$

Таким образом, для центральных моментов нормальной случайной величины справедлива следующая рекуррентная формула:

$$\mu_k = (k-1)\sigma^2 \mu_{k-2}. \tag{19.12}$$

Так как нормальное распределение симметрично относительно математического ожидания, то все центральные моменты нечётных порядков равны нулю, следовательно, коэффициент асимметрии $A = 0$. Для вычисления эксцесса найдём по рекуррентной формуле (19.12) при $k = 4$ четвёртый центральный момент: $\mu_4 = 3\sigma^2\mu_2 = 3\sigma^4$, откуда

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

В этом смысле кривая плотности нормального распределения является эталонной: $A = 0$, $E = 0$.

19.4. Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал

Известно, что если случайная величина задана плотностью вероятности $f(x)$, то вероятность попадания величины ξ на участок $]\alpha, \beta[$ равна

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Для нормальной случайной величины

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big).$$

Поэтому

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = \frac{1}{2} + \Phi\Big(\frac{\beta - m}{\sigma}\Big) - \frac{1}{2} - \Phi\Big(\frac{\alpha - m}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\beta - m}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{\alpha - m}{\sigma}\Big),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$$

— функция Лапласа. Следовательно,

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = \Phi\Big(\frac{\beta - m}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{\alpha - m}{\sigma}\Big). \tag{19.13}$$

Пример 19.1. Случайная величина ξ распределена по закону $N(1, 4)$. Найти $P(2 \leqslant \xi < 3)$.

Решение. Имеем $m = 1$, $\sigma = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Следовательно, согласно формуле (19.13),

$$P(2 \leqslant \xi < 3) = \Phi\Big(\frac{3 - 1}{2}\Big) - \Phi\Big(\frac{2 - 1}{2}\Big) \approx 0{,}3413 - 0{,}1915 = 0{,}1498.$$

19.5. Правило трёх сигма

С помощью величин m и σ можно вывести два очень полезных правила:
1) 95% распределения лежит между значениями $m - 2\sigma$ и $m + 2\sigma$;
2) более 99% распределения заключено между $m - 3\sigma$ и $m + 3\sigma$.

Последнее правило известно под названием «правила трёх сигма».

Из формулы (19.13) следует

$$\begin{gathered} P(|\xi - m| < \lambda\sigma) = P(-\lambda\sigma < \xi - m < \lambda\sigma) = \\ = P(m - \lambda\sigma < \xi < m + \lambda\sigma) = F(m + \lambda\sigma) - F(m - \lambda\sigma) = \\ = \Phi\Big(\frac{m + \lambda\sigma - m}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{m - \lambda\sigma - m}{\sigma}\Big) = \Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda). \end{gathered}$$

Учитывая, что $\Phi(x)$ — нечётная функция ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$), будем иметь

$$P(|\xi - m| < \lambda\sigma) = 2\Phi(\lambda). \tag{19.14}$$

Используя таблицу для $\Phi(x)$, в частности, получим

$$\text{при } \lambda = 1 \quad P(|\xi - m| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}6827;$$

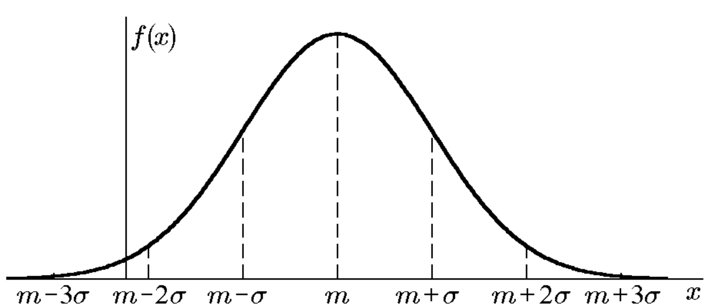


Рис. 67.

$$\text{при } \lambda = 2 \quad P(|\xi - m| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9545;$$
$$\text{при } \lambda = 3 \quad P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973;$$
$$\text{при } \lambda = 4 \quad P(|\xi - m| < 4\sigma) = 2\Phi(4) = 0{,}99994.$$

Вероятность того, что случайная величина ξ меньше чем на 3σ отличается от своего математического ожидания m, составляет 0,9973, т.е. почти равна единице. Таким образом, «практически почти достоверно», т.е. с уверенностью 99,73% распределённая по нормальному закону с параметрами (m, σ) случайная величина ξ принимает лишь значения в пределах «трёх сигмовых границ», т.е. в промежутке $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$.

Отклонение по модулю больше, чем 3σ, встречается в среднем три раза из тысячи.

19.6. Стандартное нормальное распределение

Нормальное распределение $N(m, \sigma^2)$, где $m = 0$, а $\sigma = 1$, называется *стандартным нормальным распределением.*

Плотность стандартного распределения для всех $x \in \mathbb{R}$ задаётся формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

а функция распределения

$$F_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt. \tag{19.15}$$

Нетрудно заметить, что

$$F_{0,1}(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2}, \tag{19.16}$$

поэтому для случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение $N(m, \sigma^2)$, запишем

$$F_\xi(x) = F_{m,\sigma^2}(x) = F_{0,1}\Big(\frac{x - m}{\sigma}\Big);$$
$$P(\alpha < \xi < \beta) = F_{0,1}\Big(\frac{\beta - m}{\sigma}\Big) - F_{0,1}\Big(\frac{\alpha - m}{\sigma}\Big);$$
$$P(|\xi - m| < \delta) = 2F_{0,1}\Big(\frac{\delta}{\sigma}\Big) - 1.$$

19.7. Характеристическая функция нормальной величины

Найдём характеристическую функцию нормальной величины. Для стандартной нормальной величины

$$\gamma(t) = M(e^{it\xi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - 2itx)/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - 2itx - t^2)/2 - t^2/2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-it)^2/2} dx.$$

Сделав замену переменных $z = (x - it)/\sqrt{2}$, получим

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} \sqrt{\pi} = e^{-t^2/2}.$$

Переход от интегрирования по прямой $y = -it/\sqrt{2}$ к интегрированию по прямой $y = 0$ оправдывается аналитичностью подынтегральной функции в части плоскости, ограниченной этими прямыми, и возможностью деформировать контур интегрирования в области аналитичности, согласно теореме Коши. Итак,

$$\gamma(t) = e^{-t^2/2}. \tag{19.17}$$

Так как для случайной величины $\eta = m\xi + b$ характеристическая функция есть $\gamma_\eta(t) = \gamma_\xi(mt)e^{ibt}$, то, положив $\eta = \sigma\xi + m$, с учетом (12.18) получим характеристическую функцию произвольного нормального распределения $N(m, \sigma^2)$:

$$\gamma(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2} e^{imt} = e^{imt - \sigma^2 t^2/2}. \tag{19.18}$$

Нормальное распределения непрерывной случайной величины имеет очень широкое распространение в случайных природных явлениях, так как ему подчиняется распределение случайной величины, представленной в виде суммы слабо зависимых случайных величин. На практике очень часто встречаются случайные величины, образующиеся именно в результате суммирования многих случайных слагаемых, сравнимых по степени своего влияния на их сумму.

Рассмотрим далее некоторые важные распределения, порождённые нормальным распределением непрерывной случайной величины.

19.8. Интеграл ошибок

Для полноты изложения приведём сведения о специальных функциях, связанных с функцией Лапласа и иногда используемых в литературе по теории вероятностей и математической статистике.

♦ *Интегралом* (*функцией*) *вероятности*, или *интегралом ошибок*, называется функция

$$\mathrm{erf}\,(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-x^2} dx; \tag{19.19}$$

$$\mathrm{erf}\,(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-x^2} dx = 2\Phi(t\sqrt{2}). \tag{19.20}$$

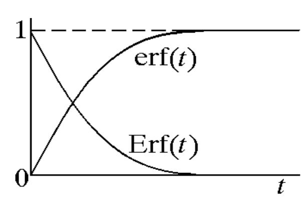


Рис. 68.

Непосредственно из определения следует, что функция erf (t) непрерывна и монотонно возрастает от нуля до erf $(\infty) = 1$, так как

$$\mathrm{erf}\,(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = 1. \tag{19.21}$$

Наряду с функцией $\operatorname{erf}(t)$ рассматривают функцию

$$\operatorname{Erf}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^t e^{-x^2}dx\right]$$

или с учётом (19.21)

$$\operatorname{Erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx - \int\limits_0^t e^{-x^2}dx\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_t^\infty e^{-x^2}dx. \qquad (19.22)$$

Функция $\operatorname{Erf}(t)$ непрерывна и монотонно убывает от $\operatorname{Erf}(0) = 1$ до $\operatorname{Erf}(\infty) = 0$ (см. рис. 68).

Пример 19.2. Найти представление интеграла ошибок в виде ряда по степеням t.

Решение. Согласно (19.19), имеем

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k+1}\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!}.$$

Заметив, что

$$\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k+1}\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!} = \sum_{l=0}^\infty\frac{(-1)^l t^{2l}}{l!}\sum_{s=0}^\infty\frac{2^s t^{2s+1}}{(2s+1)!!},$$

получим

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}\sum_{s=0}^\infty\frac{2^s t^{2s+1}}{(2s+1)!!}.$$

20. Многомерное нормальное распределение

♦ Пусть $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ — случайный вектор, имеющий непрерывное распределение; $\vec{\mu}$ — вектор математических ожиданий величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а A — матрица ковариаций величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Говорят, что $\vec{\xi}$ *распределён нормально* с параметрами $\vec{\mu}$ и A (обозначают $\vec{\xi} \in N(\vec{\mu}, A)$), если его плотность распределения имеет вид

$$f_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\frac{1}{\sqrt{\det A}}\exp\Big[-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^\intercal A^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\Big].$$

Пусть случайный вектор $\{\xi, \eta\}$ имеет двумерное нормальное распределение и матрица ковариаций системы $\{\xi, \eta\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & K_{\xi\eta} \\ K_{\xi\eta} & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда определитель матрицы ковариаций есть $\det A = \sigma_\xi^2\sigma_\eta^2 - K_{\xi\eta}^2 = \sigma_\xi^2\sigma_\eta^2(1-\rho_{\xi\eta}^2)$ и обратная матрица для матрицы ковариаций:

$$A^{-1} = \frac{1}{\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & -K_{\xi\eta} \\ -K_{\xi\eta} & \sigma_\xi^2 \end{pmatrix}.$$

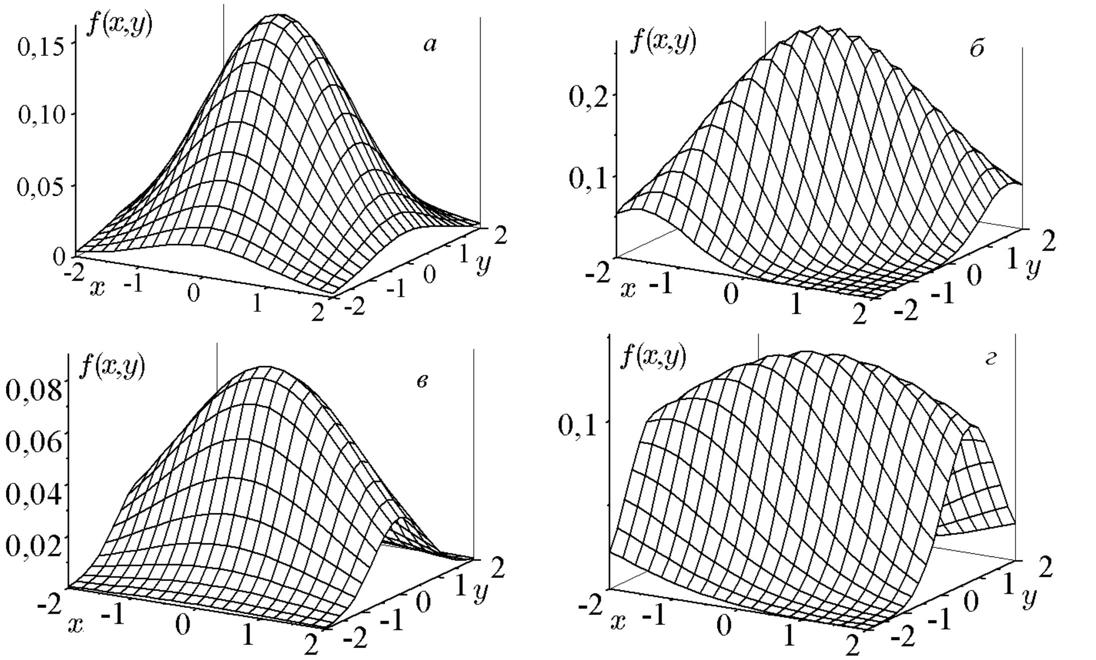


Рис. 69. Графики плотностей двумерного нормального распределения при $m_x = m_y = 0$ и $\sigma_x = \sigma_y = 1$, $\rho = 0$ (*а*); $\sigma_x = \sigma_y = 1$, $\rho = 0{,}8$ (*б*); $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 1$, $\rho = 0$ (*в*); $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 1$, $\rho = 0{,}8$ (*г*)

Пусть

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} m_\xi \\ m_\eta \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

тогда

$$(\vec{x}-\vec{\mu})^\intercal A^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}) = \frac{1}{\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2(1-\rho_{\xi\eta}^2)} \begin{pmatrix} x-m_\xi \\ y-m_\eta \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & -K_{\xi\eta} \\ -K_{\xi\eta} & \sigma_\xi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-m_\xi \\ y-m_\eta \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}[(x-m_\xi)^2\sigma_\eta^2 - 2(x-m_\xi)(y-m_\eta)K_{\xi\eta} + (y-m_\eta)^2\sigma_\xi^2] =$$

$$= \frac{1}{1-\rho_{\xi\eta}^2}\Big[\Big(\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\Big)^2 - 2\rho_{\xi\eta}\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\frac{y-m_\eta}{\sigma_\eta} + \Big(\frac{y-m_\eta}{\sigma_\eta}\Big)^2\Big].$$

♦ Двумерная случайная величина $\{\xi,\eta\}$ *распределена нормально*, если её плотность вероятности $f_{\xi,\eta}(x,y)$ имеет вид

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}} \exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\Big[\Big(\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\Big)^2 -$$

$$-2\rho_{\xi\eta}\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\frac{y-m_\eta}{\sigma_\eta} + \Big(\frac{y-m_\eta}{\sigma_\eta}\Big)^2\Big]\Big\},$$

где m_ξ, m_η — математические ожидания величин ξ и η, σ_ξ, σ_η — их среднеквадратичные отклонения, а $\rho_{\xi\eta}$ — коэффициент корреляции между ξ и η, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Графики плотности двумерного нормального распределения для различных значений коэффициентов приведены на рис. 69.

Свойства многомерного нормального распределения

Свойство 1. Для того чтобы компоненты многомерной нормальной случайной величины были независимы, необходимо и достаточно, чтобы корреляция между ними была равна нулю.

Доказательство. Необходимость вытекает непосредственно из того, что для любых случайных величин из их независимости следует некоррелированность. Докажем достаточность. Пусть ξ_i, $i = \overline{1,n}$, некоррелированы. Тогда A — диагональная матрица с диагональными элементами $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Соответственно обратная матрица — также диагональная с элементами $1/\sigma_1^2, 1/\sigma_2^2, \ldots, 1/\sigma_n^2$, а $\det A = \sigma_1^2\sigma_2^2\cdots\sigma_n^2$. Тогда

$$(\vec{x}-\vec{\mu})^\intercal A^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

или

$$f_\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_i)^2\sigma_i^2\right] = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)\cdots f_{\xi_n}(x_n),$$

т.е. случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы.

Таким образом, для компонент многомерного нормального случайного вектора некоррелированность равносильна независимости (вспомним, что для произвольных величин из некоррелированности не следовала в общем случае независимость). Отметим также, что, согласно определению, не любая совокупность нормальных случайных величин может образовывать нормальный вектор.

Свойство 2. Если $\vec{\xi} \in N(\vec{\mu}, A)$, то любой подвектор вектора $\vec{\xi}$ будет нормально распределённой случайной величиной.

Докажем это свойство для двумерной случайной величины.

Теорема 20.1. *Если вектор $\{\xi, \eta\}$ имеет двумерное нормальное распределение*

$$\{\xi,\eta\} \in N\left[\begin{pmatrix} m_\xi \\ m_\eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_\xi^2 & K_{\xi\eta} \\ K_{\xi\eta} & \sigma_\eta^2\end{pmatrix}\right],$$

то величины ξ и η также распределены нормально: $\xi \in N(m_\xi, \sigma_\xi^2)$, $\eta \in N(m_\eta, \sigma_\eta^2)$.

Доказательство. По свойству плотности распределения

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy.$$

Сделаем замену $u = (y - m_\eta)/(\sigma_\eta)$, получим

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\Big[\Big(\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\Big)^2 - 2\rho_{\xi\eta}u\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi} + u^2\Big]\Big\}du.$$

Выделим полный квадрат в показателе экспоненты:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\Big[\Big(u-\rho_{\xi\eta}\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\Big)^2 + (1-\rho_{\xi\eta}^2)\Big(\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\Big)^2\Big]\Big\}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}}\exp\Big[-\frac{(x-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi}\Big]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\Big(u-\rho_{\xi\eta}\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\Big)^2\Big]du.$$

Положим

$$t = \Big(u - \rho_{\xi\eta}\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\Big)\Big/\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2},$$

получим

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi}\exp\Big[-\frac{(x-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi}\Big]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Big[-\frac{t^2}{2}\Big]dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp\Big[-\frac{(x-m_\xi)^2}{2\sigma_\xi}\Big],$$

что и требовалось доказать.

Найдём условные плотности вероятностей. По определению,

$$f_\xi(x/y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} = \Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\exp\Big[-\frac{(y-m_\eta)^2}{2\sigma_\eta}\Big]\Big\}^{-1}\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}}\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\Big[\Big(\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\Big)^2 - 2\rho_{\xi\eta}\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\frac{y-m_\eta}{\sigma_\eta} + \Big(\frac{y-m_\eta}{\sigma_\eta}\Big)^2\Big]\Big\} =$$
$$= \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\Big[\Big(\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\Big)^2 - 2\rho_{\xi\eta}\frac{x-m_\xi}{\sigma_\xi}\frac{y-m_\eta}{\sigma_\eta} + \rho_{\xi\eta}^2\Big(\frac{y-m_\eta}{\sigma_\eta}\Big)^2\Big]\Big\} =$$
$$= \frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho_{\xi\eta}^2}}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2(1-\rho_{\xi\eta}^2)}\Big[x-\Big(m_\xi+\rho_{\xi\eta}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y-m_\eta)\Big)\Big]^2\Big\}.$$

Таким образом, если случайная величина η приняла значение y, то случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами

$$M[\xi/y] = m_\xi + \rho_{\xi\eta}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y-m_\eta), \qquad D[\xi/y] = \sigma_\xi^2(1-\rho_{\xi\eta}^2).$$

Свойство 3. Пусть $\vec{\xi}$ — многомерная случайная величина, распределённая нормально с параметрами $\vec{\mu}$ и A ($\vec{\xi}\in N(\vec{\mu},A)$). Тогда многомерная случайная величина $\vec{\eta}$, полученная линейным преобразованием $\vec{\eta} = C\vec{\xi}+\vec{d}$, также является нормально распределённой, причем $\vec{\eta}\in N(C\vec{\mu}+\vec{d}, CAC^\intercal)$.

Доказательство. Пусть $\vec{\xi}\in N(\vec{\mu},A)$, тогда для многомерной случайной величины $\vec{\eta} = C\vec{\xi}+\vec{d}$ по формуле (11.14) получим

$$f_\eta(\vec{x}) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|\det C|\sqrt{\det A}}\exp\Big[-\frac{1}{2}[C^{-1}(\vec{x}-\vec{d})-\vec{\mu}]^\intercal A^{-1}[C^{-1}(\vec{x}-\vec{d})-\vec{\mu}]\Big].$$

Представим коэффициент при $\vec{\mu}$ как $C^{-1}C$ и вынесем C^{-1} как общий множитель за скобки, получим

$$f_\eta(\vec{x}) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|\det C|\sqrt{\det A}}\exp\Big[-\frac{1}{2}[C^{-1}(\vec{x}-\vec{d})-C^{-1}C\vec{\mu}]^\intercal A^{-1}[C^{-1}(\vec{x}-\vec{d})-C^{-1}C\vec{\mu}]\Big] =$$
$$= \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|\det C|\sqrt{\det A}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\{C^{-1}[\vec{x}-(\vec{d}+C\vec{\mu})]\}^\intercal A^{-1}\{C^{-1}[\vec{x}-(\vec{d}+C\vec{\mu})]\}\Big] =$$
$$= \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|\det C|\sqrt{\det A}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}[\vec{x}-(\vec{d}+C\vec{\mu})]^\intercal (C^{-1})^\intercal A^{-1}C^{-1}[\vec{x}-(\vec{d}+C\vec{\mu})]\Big] =$$
$$= \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|\det C|\sqrt{\det A}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}[\vec{x}-(\vec{d}+C\vec{\mu})]^\intercal (CAC^\intercal)^{-1}[\vec{x}-(\vec{d}+C\vec{\mu})]\Big],$$

что есть плотность многомерной нормальной случайной величины с параметрами $C\vec{\mu}+\vec{d}$ и $CAC^\intercal$.

Заметим, что если $\vec{\xi} \in N(\vec{0}, E)$, т.е. компоненты вектора $\vec{\xi}$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение, то $\vec{\eta} = C\vec{\xi} + \vec{\mu}$ будет иметь нормальное распределение с параметрами $M(\vec{\eta}) = \vec{\mu}$ и $A(\vec{\eta}) = CC^{\intercal}$. Таким образом, любую нормальную случайную величину $\vec{\eta}$ с параметрами $\vec{\mu}$ и A можно получить путем линейного преобразования $\vec{\eta} = C\vec{\xi} + \vec{\mu}$ величины $\vec{\xi} \in N(\vec{0}, E)$, где матрицы C и A связаны соотношением $A = CC^{\intercal}$.

21. Распределения, связанные с нормальным

21.1. Логнормальное распределение

♦ Непрерывная случайная величина ξ имеет *логнормальное распределение*, если $\eta = \ln \xi$ подчинена нормальному закону $\eta \in N(m, \sigma^2)$.

Из определения логнормального распределения следует, что если случайная величина η распределена нормально, то $\xi = e^{\eta}$ распределена логнормально. Таким образом, логнормальному распределению подчиняется распределение случайной величины, представленной в виде произведения слабо зависимых случайных величин, сравнимых по порядку их влияния.

Из соотношения (11.8) при $\varphi(x) = e^x$ для плотности распределения вероятностей получим (см. рис. 70)

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2}, \quad \mu = \ln m, \quad 0 < x < \infty. \tag{21.1}$$

Логнормальное распределение часто встречается в экономике, например в формуле Блэка–Скоулза цены европейских опционов (см. также [20]).

Найдём числовые характеристики случайной величины, распределённой по логнормальному закону. По определению,

$$M(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2} dx.$$

Сделаем замену переменных: $t = (\ln x - \mu)/\sigma$. Тогда $x = e^{\mu} e^{\sigma t}$, $dx = \sigma e^{\mu} e^{\sigma t} dt$; $t = -\infty$ при $x = 0$ и $t = \infty$ при $x = \infty$. Получим

$$M(\xi) = \frac{e^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma t} e^{-t^2/2} dt = \frac{e^{\mu} e^{\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\sigma)^2/2} d(t - \sigma) = e^{\mu} e^{\sigma^2/2} = m e^{\sigma^2/2}.$$

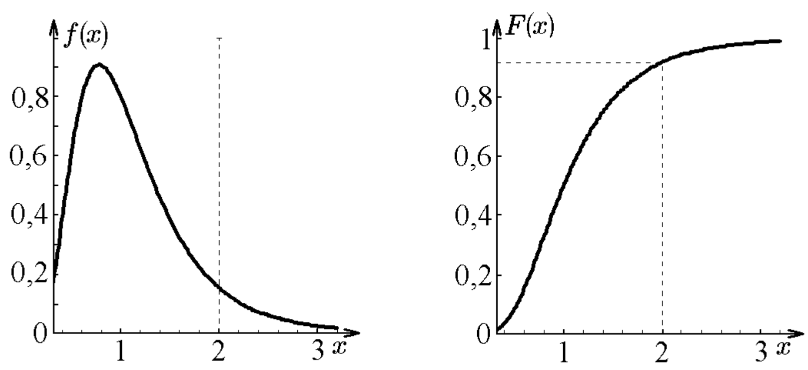


Рис. 70. Графики $f(x)$ и $F(x)$ логнормального распределения

Вычислим далее $M(\xi^2)$:

$$M(\xi^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty x e^{-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2} dx.$$

Сделав ту же замену переменных: $t = (\ln x - \mu)/\sigma$, получим

$$M(\xi^2) = \frac{e^{2\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{2\sigma t} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2\mu} e^{2\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-(t-2\sigma)^2/2} d(t - 2\sigma) = e^{2\mu} e^{2\sigma^2}.$$

И, наконец, найдём дисперсию:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = e^{2\mu} e^{2\sigma^2} - e^{2\mu} e^{\sigma^2} = e^{2\mu} e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) = m^2 e^{\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

Медиана логнормального распределения совпадает с математическим ожиданием: $x_{\text{med}} = m$, мода этого распределения определяется выражением $x_{\text{mod}} = me^{-\sigma^2}$, а для коэффициента асимметрии и эксцесса получим

$$A = (e^{\sigma^2} + 2)\sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)},$$
$$E = (e^{\sigma^2} - 1)(e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} + 6e^{\sigma^2} + 6).$$

Логнормальное распределение используется для описания распределения доходов, банковских вкладов, месячной зарплаты и т.д.

21.2. Гамма-распределение

♦ Случайная величина ξ называется *гамма-распределённой* с параметрами $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, если распределение её плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \tag{21.2}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция (см. [2]), и обозначается $\xi \in \Gamma_{\lambda,\alpha}$ (рис. 71).

♦ При $\alpha = 1$ случайная величина ξ называется *распределённой по показательному закону*, а при $\alpha = k$, $k = \overline{2, \infty}$, — *распределённой по закону Эрланга.*

Найдём числовые характеристики гамма-распределения. По определению, математическое ожидание запишется как

$$M(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \lambda^\alpha x^\alpha e^{-\lambda x} dx.$$

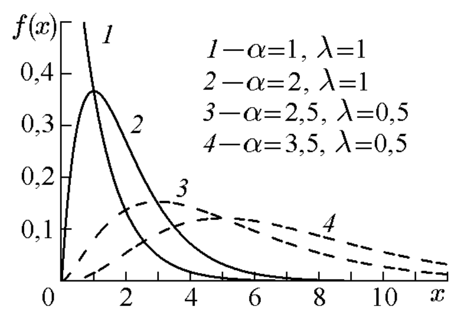


Рис. 71.

Сделав замену переменных $\lambda x = t$, $dx = dt/\lambda$, получим

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Следовательно,
$$M(\xi) = \frac{\alpha}{\lambda}. \tag{21.3}$$

Вычислим дисперсию. По определению,
$$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2,$$
но
$$M(\xi^2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \lambda^\alpha x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx.$$
Сделав замену переменных $\lambda x = t$, $dx = dt/\lambda$, запишем
$$M(\xi^2) = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha+1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$
Следовательно, для дисперсии получим
$$D(\xi) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \tag{21.4}$$
а для среднеквадратичного отклонения найдём
$$\sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}. \tag{21.5}$$
Заметим также, что $A(\xi) = 2/\sqrt{\lambda}$, $E(\xi) = 6/\alpha$.

Вычислим теперь производящую функцию центрированных моментов:
$$\mu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} e^{t(x-\alpha/\lambda)} dx.$$
Сделаем замену переменных $(\lambda - t)x = u$ и $dx = du/(\lambda - t)$ и получим
$$\mu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big)^\alpha \int\limits_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du\, e^{-\alpha t/\lambda}$$
или
$$\mu(t) = \Big(1 - \frac{t}{\lambda}\Big)^{-\alpha} e^{-\alpha t/\lambda}. \tag{21.6}$$

Аналогично найдём характеристическую функцию гамма-распределения:
$$\gamma(t) = \Big(1 - \frac{it}{\lambda}\Big)^{-\alpha}. \tag{21.7}$$

Свойства Γ-распределения

Свойство 1. Распределение $\Gamma_{\lambda,1}$ есть показательное распределение с параметром λ.

Действительно, если $\xi \in \Gamma_{\lambda,1}$, то

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

есть плотность распределения случайной величины, распределённой по показательному закону с параметром λ.

Свойство 2. Если $\xi \in N(0,1)$, то $\eta = \xi^2 \in \Gamma_{1/2,1/2}$.

Доказательство. Найдём функцию распределения случайной величины $\eta = \xi^2$. Для положительных x ($x \geqslant 0$) запишем

$$F_\eta(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = 2\int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

Сделаем замену переменных $z = t^2$. Тогда $t = \sqrt{z}$, $dt = dz/2\sqrt{z}$ и

$$F_\eta(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2} dz = \int\limits_0^x \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} z^{1/2-1} e^{-z/2} dz = F_{\Gamma_{1/2,1/2}}(x).$$

Свойство 3. Гамма-распределение устойчиво по суммированию, т.е. если ξ и η независимы и $\xi \in \Gamma_{\lambda,\alpha_1}$, $\eta \in \Gamma_{\lambda,\alpha_2}$, то

$$\zeta = \xi + \eta \in \Gamma_{\lambda,\alpha_1+\alpha_2}.$$

Согласно свойствам преобразования Фурье (теорема умножения), для характеристической функции запишем

$$\gamma_\zeta(t) = \gamma_\xi(t)\gamma_\eta(t) = \Big(1 - \frac{it}{\lambda}\Big)^{-\alpha_1}\Big(1 - \frac{it}{\lambda}\Big)^{-\alpha_2} = \Big(1 - \frac{it}{\lambda}\Big)^{-\alpha_1-\alpha_2},$$

а это и есть характеристическая функция распределения $\Gamma_{\lambda,\alpha_1+\alpha_2}$ (21.7).

21.3. Бета-распределение

♦ Случайная величина ξ называется *бета-распределённой*, если её плотность распределения вероятностей имеет вид (рис. 72)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{B}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & x \in [0,1], \\ 0 & x \notin [0,1], \end{cases} \tag{21.8}$$

где $a > 0$, $b > 0$, $\mathrm{B}(a,b)$ — бета-функция (см. [2]).

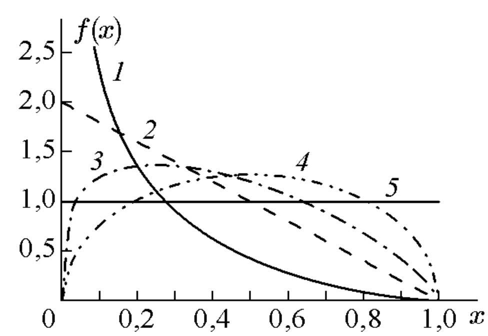


Рис. 72.

Очевидно, что

$$F_{\mathrm{B}}(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{\mathrm{B}(a,b)} \int\limits_0^x u^{a-1}(1-u)^{b-1} du, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Найдём числовые характеристики бета-распределения:

$$M(\xi) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} = \int\limits_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx = \frac{\mathrm{B}(a+1,b)}{\mathrm{B}(a,b)} = \frac{a}{a+b}$$

и

$$M(\xi^2) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} = \int\limits_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\mathrm{B}(a+2,b)}{\mathrm{B}(a,b)} = \frac{(a+1)a}{(a+b+1)(a+b)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \frac{a}{a+b}\Big(\frac{a+1}{a+b+1} - \frac{a}{a+b}\Big) = \\ = \frac{a}{a+b}\frac{(a+1)(a+b) - a(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)} = \\ = \frac{a}{(a+b)^2}\frac{a(a+b) + (a+b) - a(a+b) - a}{a+b+1} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \frac{2(-a+b)\sqrt{1+a+b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}(2+a+b)}; \\ E(\xi) &= -3 + \frac{3(1+a+b)[(-6+a+b) + 2(a+b)^2]}{ab(2+a+b)(3+a+b)}. \end{aligned}$$

♦ Функция

$$\mathrm{B}_{ab}(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(x-1)^{b-1}dx \tag{21.9}$$

называется *неполной бета-функцией.*

21.4. χ-Распределение. χ^2-Распределение. Распределения Стьюдента и Фишера

Пусть ξ_j, $j = \overline{0,k}$, — независимые случайные величины, распределённые по нормальному закону с $\sigma = 1$, $m = 0$ ($\xi_j \in N(0,1)$).

♦ Случайная величина η

$$\eta = \sum_{j=1}^{k} \xi_j^2 \tag{21.10}$$

называется χ^2-*распределённой* с k степенями свободы.

♦ Случайная величина ζ

$$\zeta = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \xi_j^2} \tag{21.11}$$

называется χ-*распределённой* с k степенями свободы.

♦ χ-распределение при $k = 3$ называется *распределением Максвелла.*

♦ Случайная величина τ

$$\tau = \frac{\xi_0}{\sqrt{\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_j^2}} \tag{21.12}$$

называется *распределённой по закону Стьюдента с k степенями свободы* (t-распределение Стьюдента) и обозначается $\tau \in S_k$. (Здесь ξ_0 — случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению с $m = 0$, $\sigma = 1$ и не зависящая от величин ξ_i.)

Теорема 21.1. *Плотность вероятности χ-распределения имеет вид*

$$f_\chi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k-1}}{2^{k/2-1}\Gamma(k/2)}e^{-x^2/2} & x \geqslant 0; \\ 0 & x < 0. \end{cases} \tag{21.13}$$

Доказательство. Вероятность события $x < \zeta < x + dx$ можно получить из k-мерной плотности распределения нормального закона

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sigma^k}e^{-\vec{x}^{\,2}/2\sigma^2}, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_k),$$

интегрируя её по k-мерному сферическому слою радиуса x и толщины dx. В результате, поскольку $(k-1)$-мерный объём $(k-1)$-мерной сферы x пропорционален x^{k-1}, получим

$$f_\chi(x) = C_k x^{k-1} e^{-x^2/2}.$$

Из условия нормировки

$$\int\limits_0^\infty f(x)dx = 1$$

найдём постоянную C_k:

$$C_k = \int\limits_0^\infty x^{k-1}e^{-x^2/2}dx = 2^{k/2-1}\Gamma(k/2)C_k = 1.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 21.2. *χ^2-Распределение является частным случаем гамма-распределения с $\alpha = k/2$, $\lambda = 1/2$, т.е. функция*

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k/2-1}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}e^{-x^2/2} & x \geqslant 0; \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{21.14}$$

является плотностью вероятности для χ^2-распределения.

Доказательство. Используя связь (11.11) между плотностями

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}f_\chi(\sqrt{x}),$$

получим утверждение теоремы. Здесь мы воспользовались тем, что если положительная случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x)$, то случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$ имеет плотность распределения $\Phi(x) = \varphi'(x)f\bigl(\varphi(x)\bigr)$. Таким образом, теорема доказана.

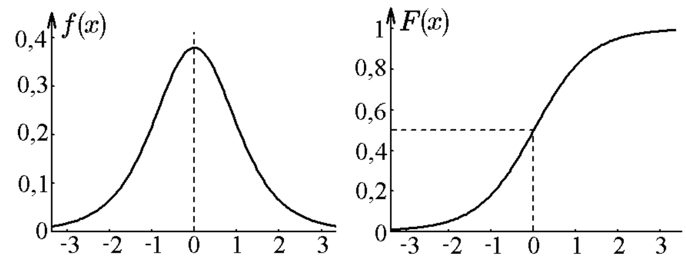


Рис. 73. Графики $f_S(x)$ и $F_S(x)$ t-распределения при $\nu = \omega = 10$

Теорема 21.3. *Плотность распределения случайной величины τ, распределённой по закону Стьюдента, имеет вид* (*см. рис.* 73)

$$f_{S_k}(x) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k\pi}\Gamma(k/2)}\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{21.15}$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Числовые характеристики t-распределения:

$$M(\xi) = x_{\mathrm{med}} = x_{\mathrm{mod}} = 0, \quad D(\xi) = \frac{k}{k-2}, \quad A = 0, \quad E = \frac{6}{k-4}.$$

Можно показать, что при $k \to \infty$

$$\frac{\chi_k^2}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2 \xrightarrow{p} M(\xi^2) = M(\chi_1^2) = 1,$$

поэтому $S_k \to N(0,1)$ при $k \to \infty$.

Таким образом, при больших степенях свободы ($k > 30$) t-распределение Стьюдента практически совпадает с нормальным распределением $N(0;\,1)$.

На рис. 74 приведены для сравнения графики плотностей распределения:
- нормального с $m = 0$, $\sigma = 1$ (штриховая линия) — $f(x)$ для $N(0,1)$;
- Стьюдента с $m = k$ (тонкая сплошная линия) — $f_{\mathrm{St}}(x)$ для $\mathrm{St}(5)$;
- Стьюдента с $k = 1$ (жирная сплошная линия) — $f_{\mathrm{St}}(x)$ для $\mathrm{St}(1)$.

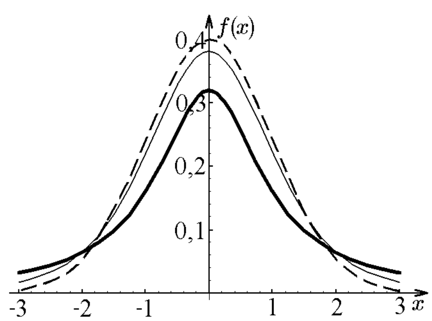


Рис. 74.

Эти графики наглядно иллюстрируют, что с увеличением степени свободы k распределение Стьюдента стремится к нормальному:

$$\lim_{k\to\infty} f_S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

$\Diamond$ В частном случае при $k = 1$ распределение Стьюдента переходит в распределение Коши.

Плотность вероятности для распределения Коши имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}. \tag{21.16}$$

Найдём функцию распределения:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} = \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}. \tag{21.17}$$

Характеристическая функция распределения Коши определится соотношением

$$\gamma(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{1+x^2}.$$

Вычислив интеграл (см., например, [2]), получим

$$\gamma(t) = e^{-|t|}. \tag{21.18}$$

Пример 21.1. Случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти закон распределения случайной величины $\zeta = \eta/\xi$.

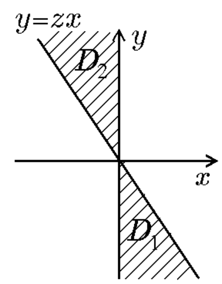


Рис. 75.

Решение. Так как случайные величины ξ и η имеют стандартное нормальное распределение, то их плотность распределения имеет вид

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Так как эти величины независимы, то плотность совместного распределения этих величин равна произведению плотностей:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\eta(x)f_\xi(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2/2+y^2/2)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

Найдём функцию распределения величины ζ. По определению,

$$F_\zeta(z) = P(\mu < z) = P(\eta/\xi < z) = \iint\limits_{D_1: y/x<z} f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D_2: y<zx, x>0} f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy + \iint\limits_{D_2: y>zx, x<0} f_{\xi,\eta}(x,y)dx\,dy.$$

Пусть $z < 0$ (см. рис. 75). Перейдём к полярным координатам:

$$F_\zeta(z) = \frac{1}{2\pi}\Bigg(\iint\limits_{D_1: y<zx, x>0} e^{-(x^2+y^2)/2}dx\,dy + \iint\limits_{D_2: y>zx, x<0} e^{-(x^2+y^2)/2}dx\,dy\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Bigg(\int\limits_{-\pi/2}^{\operatorname{arctg} z} d\varphi \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\rho^2/2}\rho\,d\rho + \int\limits_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} z+\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\rho^2/2}\rho\,d\rho\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\operatorname{arctg} z + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} z + \pi - \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\operatorname{arctg} z + \frac{\pi}{2}\Big).$$

Легко показать, что в случае $z > 0$ получим такой же результат. Таким образом, функция распределения определяется соотношением

$$F_\zeta(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{z} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\Big(\operatorname{arctg} z + \frac{\pi}{2}\Big),$$

т.е. ζ имеет распределение Коши.

Найдём числовые характеристики рассматриваемых распределений.

1. Поскольку распределение χ^2 является частным случаем гамма-распределения с $\lambda = 1/2$, $\alpha = k/2$, то

$$M(\xi) = \frac{\alpha}{\lambda} = k, \quad D(\xi) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = 2k, \quad \sigma = \sqrt{2\alpha}, \quad A = \sqrt{\frac{8}{k}}, \quad E = \frac{12}{k}.$$

2. Для χ-распределения получим

$$M(\xi^l) = \int\limits_0^\infty \frac{x^{k+l-1}}{2^{k/2-1}\Gamma(k/2)} e^{-x^2/2} dx.$$

Сделав замену переменных

$$\frac{x^2}{2} = u, \quad x = \sqrt{2u}, \quad dx = \frac{du}{\sqrt{2u}},$$

получим

$$M(\xi^l) = \frac{2^{l/2}}{\Gamma(k/2)} \int\limits_0^\infty u^{(k+l)/2-1} e^{-u^2} du = \frac{\Gamma((k+l)/2)}{\Gamma(k/2)} 2^{l/2}.$$

В частности,

$$M(\xi) = \sqrt{2}\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)}, \quad M(\xi^2) = 2\frac{\Gamma((k+2)/2)}{\Gamma(k/2)}$$

и

$$D(\xi) = \frac{2}{\Gamma(k/2)}\left[\Gamma\Big(\frac{k+2}{2}\Big) - \frac{\Gamma^2((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)}\right].$$

3. Моменты $M(\xi^l)$ для распределения Стьюдента существуют только для $l < k$, при этом начальные моменты равны нулю, а для центральных моментов получим

$$\mu[\xi^{2l}] = k^l \frac{\Gamma(l/2 + 1/2)\Gamma(k/2 - l)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k/2)}, \quad 2 \leqslant 2l < k.$$

Теорема 21.4. *Функция распределения $F_{S_k}(x)$ выражается через неполную бета-функцию:*

$$F_{S_k}(x) = 1 - \frac{1}{2\mathrm{B}(k/2, 1/2)} \int\limits_0^{k/(k+x^2)} u^{k/2-1}(1-u)^{k/2-1} du.$$

Доказательство. Действительно,

$$F_{S_k}(x) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k}\sqrt{\pi}\Gamma(k/2)} \int\limits_{-\infty}^x \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} dx.$$

Сделаем замену переменных

$$u = \frac{k}{k+x^2}, \qquad x = \sqrt{\frac{k}{u} - k} = \sqrt{k}\sqrt{\frac{1-u}{u}},$$

тогда

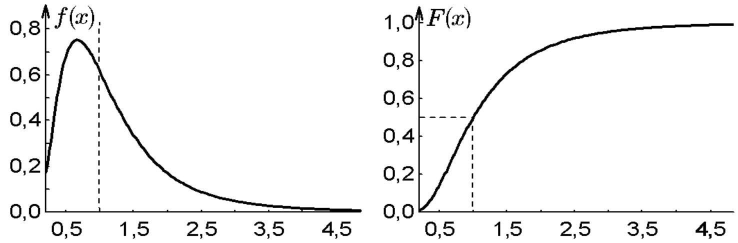


Рис. 76. Графики $f(x)$ и $F(x)$ закона F-распределения Фишера

$$dx = \frac{\sqrt{k}}{2}\frac{1}{\sqrt{1/u-1}}\frac{-du}{u^2} = -\frac{\sqrt{k}}{2}\sqrt{\frac{u}{1-u}}\frac{du}{u^2},$$

$x_1 = -\infty$, $u_1 = 0$, $x_2 = x$, $u_2 = k/(k+x^2)$. Таким образом,

$$F_{S_k}(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}\mathrm{B}(k/2,1/2)}\int\limits_0^{k/(k+x^2)} u^{(k+1)/2}(1-u)^{k/2-1}u^{k/2-2}\Big(-\frac{\sqrt{u}}{2}\Big)du =$$

$$= 1 - \frac{1}{2\mathrm{B}(k/2,1/2)}\int\limits_0^{k/(k+x^2)} u^{k/2-1}(1-u)^{k/2-1}du,$$

что и требовалось доказать.

◊ Распределение Стьюдента ($k = 1, 3, 5$) используется в экономике для описания флуктуаций стоимости ценных бумаг. Флуктуации, описываемые распределением Стьюдента, в силу степенного характера функции плотности распределения многократно превосходят флуктуации, описываемые нормальным распределением.

♦ Непрерывная случайная величина ξ имеет *F-распределение Фишера*, если она представима в виде отношения двух независимых случайных величин, распределённых по закону хи-квадрат со степенями свободы ν и ω, и плотность распределения вероятностей имеет вид (см. рис. 76)

$$f_F(x) = \frac{\Gamma((\nu+\omega)/2)}{\Gamma(\nu/2)\Gamma(\omega/2)}\Big(\frac{\nu}{\omega}\Big)^{\nu/2}x^{\nu/2-1}\Big(1+\frac{\nu}{\omega}x\Big)^{-(\nu+\omega)/2}, \quad 0 < x < \infty. \qquad (21.19)$$

Основные числовые характеристики F-распределения:

$$M(\xi) = \frac{\omega}{\omega-2}, \quad D(\xi) = \frac{2\omega^2(\nu+\omega-2)}{\nu(\omega-2)^2(\omega-4)},$$

$$A(\xi) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{-4+\omega}(-2+2\nu+\omega)}{\sqrt{\nu}(-6+\omega)\sqrt{-2+\nu+\omega}},$$

$$E(\xi) = \frac{12[(-4+\omega)(-2+\omega)^2+\nu(-2+\nu+\omega)(-22+5\omega)]}{\nu(-8+\omega)(-6+\omega)(-2+\nu+\omega)}.$$

Графики плотности $f_F(x)$ для F-распределения Фишера для различных параметров ν и ω представлены на рис. 77.

◊ Если случайная величина ξ распределена по закону Фишера с параметром λ ($\xi \in F_\lambda$) и $a > 0$, то случайная величина $\eta = a\xi$ также распределена по закону Фишера с параметром λ/a ($\eta = a\xi \in F_{\lambda/a}$).

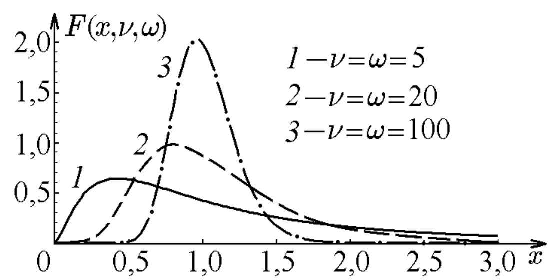


Рис. 77.

♦ Распределение Фишера–Снедекора при целых $\nu = m$ и $\omega = n$ называется *распределением F-отношения*

$$\bar{F} = \frac{\frac{1}{m}\chi^2(m)}{\frac{1}{n}\chi^2(n)},$$

где $\chi^2(m)$ и $\chi^2(n)$ — случайные величины, имеющие χ^2-распределение с m и n степенями свободы соответственно.

Эллипсоид рассеяния

Пусть случайная величина $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ имеет нормальное распределение с вектором средних $\vec{\mu} = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и матрицей ковариаций A.

Рассмотрим в пространстве переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ область, определяемую неравенством

$$(\vec{\xi} - \vec{\mu})^\intercal A^{-1}(\vec{\xi} - \vec{\mu}) < \delta,$$

где δ — некоторое положительное число (вектор рассматриваем как матрицу-столбец). Левая часть неравенства есть положительно определённая квадратичная форма (при условии, что хотя бы один из коэффициентов корреляции $|\rho_{ij}| < 1$). Следовательно, данное неравенство определяет в пространстве $\mathbb{R}^n$ область, ограниченную эллипсоидом. Центр эллипсоида находится в точке $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, оси параллельны собственным векторам матрицы A, а полуоси пропорциональны $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A.

С другой стороны, $\vec{\eta} = (\vec{\xi} - \vec{\mu})^\intercal A^{-1}(\vec{\xi} - \vec{\mu})$ есть некоторая одномерная случайная величина, являющаяся функцией величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Найдём закон распределения $\vec{\eta}$. Как известно (см. свойство 3), многомерную нормальную случайную величину $\vec{\eta}$ с параметрами $\vec{\mu}$ и A можно получить путем линейного преобразования вектора $\vec{\xi}$, компоненты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение

$$\vec{\xi} = B\vec{\zeta} + \vec{\mu},$$

где матрица B связана с матрицей ковариаций A соотношением $BB^\intercal = A$. Но тогда

$$\eta = (B\vec{\zeta})^\intercal (BB^\intercal)^{-1}(B\vec{\zeta}) = \vec{\zeta}^\intercal\vec{\zeta} = \sum_{i=1}^{n}\zeta_i^2,$$

т.е. η есть сумма квадратов независимых стандартных нормальных случайных величин. Следовательно, η имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Тогда по таблицам распределения χ^2 для заданной вероятности β можно определить значение δ, для которого $P(\eta < \delta) = \beta$, т.е. δ будет квантилью χ^2-распределения уровня β. Соответственно, с вероятностью β многомерная случайная величина $\vec{\xi}$ будет принадлежать области, ограниченной эллипсоидом

$$(\vec{x} - \vec{\mu})^\intercal A^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}) < \delta, \qquad \vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Такой эллипсоид называется *эллипсоидом рассеяния.*

Пример 21.2. Для системы $\{\xi, \eta\}$, имеющей нормальное распределение с параметрами

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

построить эллипс рассеяния, соответствующий вероятности 0,9.

Решение. Пусть $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, тогда

$$(\vec{x} - \vec{\mu})^\intercal A^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}) = 2x^2 - 2xy + y^2.$$

По таблицам распределения χ^2 для числа степеней свободы $\nu = 2$ найдём квантиль уровня 0,9: $\tau_{0,9} = 4{,}506$. Соответствующий эллипс рассеяния будет определяться уравнением

$$2x^2 - 2xy + y^2 = 4{,}506.$$

Заметим, что при числе степеней свободы $\nu = 2$ распределение χ^2 совпадает с показательным распределением с параметром $\lambda = 1/2$. Поэтому τ_β можно было бы найти как корень уравнения $F(\tau_\beta) = \beta$, где $F(x)$ — функция распределения показательного закона $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Положив $\lambda = \tau_\beta$ и приравняв $F(x)$ к β, получим $1 - e^{-\tau_\beta/2} = \beta$ или $\tau_\beta = -2\ln(1 - \beta)$.

22. Распределения Леви, Парето и логистическое распределение

В заключение рассмотрим ряд распределений, широко распространённых в экономических и биологических приложениях.

22.1. Распределение Леви

В экономических моделях часто встречается распределение Леви. Так распределены флуктуации индексов и курсов акций. Главная особенность экономических флуктуаций в том, что в отличие от физических величин, у которых больших флуктуаций мало, поскольку эти флуктуации имеют в основном гауссов характер и в силу этого малы, распределения флуктуаций в экономике имеют так называемые «тяжёлые хвосты», т.е. значительное количество больших флуктуаций.

♦ Случайная величина ξ называется *распределённой по закону Леви*, если её характеристическая функция распределения имеет вид

$$\gamma_L(t) = \exp(-|t|^\alpha), \quad 0 < \alpha \leqslant 2. \tag{22.1}$$

Проведя обратное преобразование Фурье для функции плотности распределения, запишем

$$f_L(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}e^{-|t|^\alpha}dt.$$

С учётом чётности характеристической функции можно записать

$$f_L(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-|t|^\alpha}dt. \tag{22.2}$$

Соотношение (22.2) определяет так называемое двустороннее распределение Леви, когда $x \in \mathbb{R}$. Пример распределения Леви с $\alpha = 1/2; 1; 3/2; 2$ приведён на рис. 78.

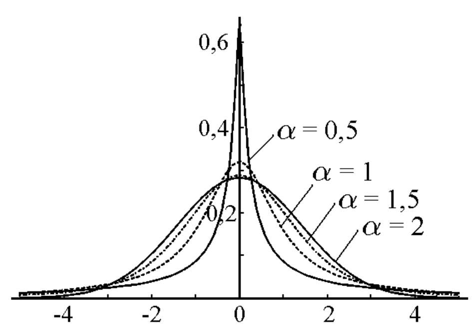


Рис. 78.

Если $x \in [0, \infty[$, получим так называемое одностороннее распределение Леви:

$$f_L = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \cos(xt) e^{-t^\alpha} dt. \tag{22.3}$$

$\lozenge$ При $\alpha = 2$ формула (22.1) совпадает с (19.7), а распределение Леви совпадает с нормальным распределением (19.1); при $\alpha = 1$ соотношение (22.1) совпадает с (19.8), а распределение Леви — с распределением Коши (21.16).

22.2. Распределение Парето

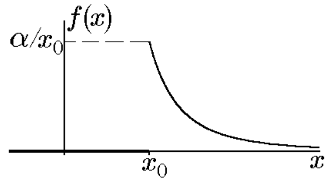


Рис. 79.

$\blacklozenge$ Говорят, что величина ξ имеет *распределение Парето* с параметрами (x_0, α), если (см. рис. 79)

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x_0}\Big(\dfrac{x_0}{x}\Big)^{\alpha+1}, & x > x_0; \\ 0, & x \leqslant x_0. \end{cases}$$

$\lozenge$ Нетрудно заметить, что распределение Парето усечением на интервале $]x_0, \infty[$ степенного распределения с параметром α и плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{-(\alpha+1)}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что у распределения Парето существуют моменты k-го порядка $(k < \alpha)$:

$$\alpha_k = \frac{\alpha}{\alpha - k} x_0^k, \qquad D\xi = \begin{cases} \dfrac{\alpha x_0^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}, & \alpha > 2; \\ \infty, & \alpha \leqslant 2. \end{cases}$$

22.3. Логистическое распределение

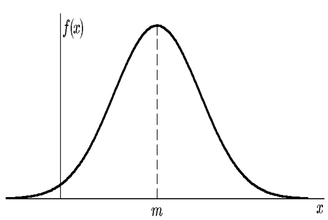


Рис. 80.

$\blacklozenge$ Говорят, что величина ξ имеет *логистическое распределение* с параметрами (m, σ^2), если (см. рис. 80)

$$f_\xi(x) = \frac{\pi \exp\Big[-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} \dfrac{(x-m)}{\sigma}\Big]}{\sigma\sqrt{3}\Big\{1 + \exp\Big[-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\dfrac{(x-m)}{\sigma}\Big]\Big\}^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\lozenge$ Функция плотности вероятности логистического распределения по форме мало отличается от функция плотности вероятности нормального распределения и наряду с последней широко используется в приложениях.

Логистическое распределение лежит в основе теории популяций (бактерий, человека и т.д.). Было обнаружено, что высота и вес растений и животных подчиняется логистическому закону.

Характеристическая функция логистического распределения имеет вид

$$\gamma_\xi(t) = e^{imt}\Gamma\Big(1 - i\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}t\Big)\Gamma\Big(1 + i\frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi}t\Big).$$

Основные числовые характеристики случайной величины ξ определяются соотношениями

$$M\xi = m, \quad D\xi = \sigma^2, \quad A = 0, \quad E = 1{,}2.$$

ГЛАВА 3

Предельные теоремы. Закон больших чисел

Выше мы уже неоднократно отмечали, что экспериментально замечена устойчивость относительной частоты m/n реальных событий (m — число появлений события A в n опытах).

Относительная частота — это простейший пример среднего случайных величин ξ_k ($k = \overline{1, n}$), каждая из которых есть число появлений события A в k-м опыте

$$\mu^*(A) = \frac{m}{n} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} P(A).$$

Связь относительной частоты и вероятности этого события устанавливается теоремой Бернулли. Исторически теорема Бернулли — первая из доказанных предельных теорем (1713 г.). После неё было доказано довольно большое число теорем такого рода, выясняющих поведение среднего различных случайных величин при $n \to \infty$.

Суть предельных теорем состоит в том, что среднее при неограниченном увеличении числа опытов теряет характер случайного, и поэтому его поведение можно предсказать.

Это положение, доказанное в ряде предельных теорем, называется *законом больших чисел*. Накопленный опыт отмечает хорошее согласие предельных теорем с реальной действительностью.

На предельных теоремах фактически основана вся математическая статистика, поскольку они позволяют приближённо вычислить характеристики случайной величины на основе экспериментальных данных.

Из всего множества предельных теорем рассмотрим теоремы Чебышева, Бернулли, а также центральную предельную теорему Ляпунова и её частный случай — теорему Муавра–Лапласа.

Здесь нами будут рассматриваться только одномерные случайные величины, потому с целью упрощения будем называть их просто случайными величинами.

23. Сходимость случайных последовательностей

Напомним, что случайная величина есть функция, определённая на пространстве элементарных событий Ω. Следовательно, сходимость последовательности случайных величин можно понимать в разных смыслах, аналогично тому, как для функциональных последовательностей существуют поточечная сходимость, равномерная, сходимость по норме и т.д.

♦ Говорят, что *последовательность случайных величин* $\{\xi_n(\omega)\}$ *сходится к величине* $\xi(\omega)$ *с вероятностью единица* или «почти наверное», и пишут $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega$ кроме, может быть, $\omega \in A$, где множество A (событие A) имеет нулевую вероятность.

Заметим, что в общем случае, чтобы говорить о сходимости с вероятностью единица, необходимо знать структуру отображений $\omega \to \xi_n(\omega)$, в задачах же теории вероятностей известны, как правило, не сами случайные величины, а их распределения. Поэтому более распространёнными оказываются следующие определения сходимости.

♦ Говорят, что *последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к величине* ξ *по вероятности*, и пишут $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \xi$, если для любого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{или} \quad P(|\xi_n - \xi < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Кроме сходимостей «почти наверное» и по вероятности, в теории вероятностей используется также сходимость по распределению.

♦ Говорят, что *последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к величине* ξ *по распределению*, и пишут $\xi_n \Rightarrow \xi$ или $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x)$, если функциональная последовательность $\{F_{\xi_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится поточечно к функции $F_\xi(x)$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$$

для любого x, принадлежащего к области непрерывности функции $F_\xi(x)$.

Свойства сходимости по вероятности

Свойство 1. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности случайных величин, определённых на вероятностном пространстве Ω. Если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \xi$, $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \eta$, то предел по вероятности суммы (произведения) последовательностей равен сумме (произведению) их пределов, т.е.

$$\xi_n + \eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \xi + \eta, \qquad \xi_n\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \xi\eta.$$

Свойство 2. Пусть $g(x)$ — непрерывная функция. Тогда случайная функция $g(\xi_n)$ непрерывна по вероятности, т.е. для любой случайной последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящейся по вероятности к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \xi$), справедливо $g(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{p} g(\xi)$.

Свойство 3. Из сходимости с вероятностью единица следует сходимость по вероятности, т.е. если $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин, сходящаяся с вероятностью единица к случайной величине ξ ($\xi_n \to \xi$), то $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$.

Свойство 4. Если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по распределению к ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$), а последовательность $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по вероятности к постоянной c ($\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} c$), то справедливо $\xi_n\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c\xi$, $\eta_n + \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c + \xi$.

Свойство 5. Если последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по распределению к постоянной ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$), то последовательность $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к постоянной c по вероятности, т.е. $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} c$.

Свойство 6. Из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению, т.е. если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$.

Свойство 7. Пусть $\gamma_{\xi_n}(t)$, $\gamma_\xi(t)$ — характеристические функции величин ξ_n и ξ. Тогда если $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$, то $\gamma_{\xi_n}(x) \to \gamma_\xi(x)$, и наоборот: если $\gamma_{\xi_n}(x) \to \gamma_\xi(x)$, то $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$.

Свойство 8. Если последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по распределению к ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$) и функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна в точках a и b, то $P(\xi_n \in [a,b]) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\xi \in [a,b])$.

Докажем первое свойство. Рассмотрим $P(|\xi_n+\eta_n-\xi-\eta|>\varepsilon)$. Заметим, что $|\xi_n+\eta_n-\xi-\eta| \leqslant |\xi_n-\xi|+|\eta_n-\eta|$. Тогда, если $|\xi_n+\eta_n-\xi-\eta|>\varepsilon$, то и $|\xi_n-\xi|+|\eta_n-\eta|>\varepsilon$, причем $P(|\xi_n+\eta_n-\xi-\eta|>\varepsilon) \leqslant P(|\xi_n-\xi|+|\eta_n-\eta|>\varepsilon)$, так как событие $\{\xi_n+\eta_n-\xi-\eta|>\varepsilon\}$ влечет событие $\{|\xi_n-\xi|+|\eta_n-\eta|>\varepsilon\}$. Следовательно,

$$\begin{gathered}P(|\xi_n+\eta_n-\xi-\eta|>\varepsilon) \leqslant P(|\xi_n-\xi|+|\eta_n-\eta|>\varepsilon) \leqslant \\ \leqslant P(|\xi_n+\eta_n-\xi-\eta|>\varepsilon) \leqslant P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon/2 \text{ или } |\eta_n-\eta|>\varepsilon/2) \leqslant \\ \leqslant P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon/2)+P(|\eta_n-\eta|>\varepsilon/2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{gathered}$$

Остальные свойства доказываются аналогично.

Пример 23.1. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность случайных величин, каждая из которых может принимать два значения: 0 и n с вероятностями $(n-1)/n$ и $1/n$ соответственно. Показать, что эта последовательность сходится по вероятности к нулю.

Решение. Действительно, для произвольного ε, начиная с некоторого $n>\varepsilon$, будет выполнено

$$P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)=P(|\xi_n|>\varepsilon)=P(\xi_n=n)=\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\Diamond$ В отличие от сходимости по вероятности сходимость с вероятностью единица зависит от отображения $\omega\to\xi_n(\omega)$. Пусть, например, ω — точка, случайным образом выбранная на отрезке $[0,1]$, а $\xi_n(\omega)=0$, если $\omega\in[0,(n-1)/n]$, и $\xi_n(\omega)=n$, если $\omega\in](n-1)/n,1]$. Тогда для любого $\omega\in[0,1[$, начиная с некоторого n, $\omega\in[0,(n-1)/n]$ и, следовательно, $\xi_n(\omega)=0$, т.е. последовательность ξ_n сходится к нулю с вероятностью единица. Пусть теперь ω — точка, случайным образом выбранная на окружности, и $\xi_n(\omega)=n$, если ω принадлежит интервалу углов $2\pi[S_{n-1},S_{n-1}+1/n]$, где $S_{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n-1}1/k$ $(n>1)$, и $\xi_n(\omega)=0$ в противном случае. То есть интервал длиной $2\pi/n$, соответствующий значениям случайной величины $\xi_n(\omega)=n$, перемещается по окружности так, что конец предыдущего интервала является началом следующего. Поскольку гармонический ряд является расходящимся, то этот интервал бесконечное число раз накроет любую точку ω, и, следовательно, говорить о сходимости с вероятностью единица неправомерно. Заметим, что если бы вероятности $P(\xi(\omega)=n)$ стремились к нулю достаточно быстро (например, $P(\xi(\omega)=n)=1/n^2$), то построенная аналогичным образом случайная величина уже сходилась бы к нулю с вероятностью единица.

Пример 23.2. Пусть $\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n$ — независимые, равномерно распределённые на отрезке $[1,4]$ случайные величины. Доказать, что $\max\{\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 4$.

Решение. Обозначим $\max\{\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n\}=\eta_n$. Найдём функцию распределения $F_{\eta_n}(x)$. По определению,

$$\begin{gathered}F_{\eta_n}(x)=P(\eta_n<x)=P(\text{все } \xi_i<x,\ x=\overline{1,n})= \\ =P(\xi_1<x)P(\xi_2<x)\cdots P(\xi_n<x)=P^n(\xi_1<x)=F^n_{\xi_1}(x).\end{gathered}$$

Так как ξ_1 имеет равномерное на $[1, 4]$ распределение, то

$$F_{\xi_1} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ \dfrac{x-1}{3}, & 1 < x \leqslant 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Тогда

$$F_{\eta_n} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ \left(\dfrac{x-1}{3}\right)^n, & 1 < x \leqslant 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

В задаче требуется доказать, что $P(|\eta_n - 4| > \varepsilon) \to 0$ для всех $\varepsilon > 0$. Найдём $P(|\eta_n - 4| > \varepsilon)$. Так как $\eta_n \leqslant 4$, то

$$P(|\eta_n - 4| > \varepsilon) = P(4 - \eta_n > \varepsilon) = P(\eta_n < 4 - \varepsilon) =$$
$$= F_{\eta_n}(4 - \varepsilon) = \left(\frac{3-\varepsilon}{3}\right)^n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^n.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$, то при $n \to \infty$

$$P(|\eta_n - 4| > \varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^n \to 0.$$

Следовательно, $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 4$, что и требовалось доказать.

Можно было бы решить задачу и иначе. Найдём предел при $n \to \infty$ функции распределения $F_{\eta_n}(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} F_{\eta_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 4; \\ 1, & x \geqslant 4. \end{cases}$$

Значения этого предела в точках непрерывности совпадают со значениями функции распределения постоянной величины, равной 4, т.е. $F_{\eta_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$. Следовательно, согласно свойствам сходимости по распределению, $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 4$.

24. Неравенство Чебышева

Теорема 24.1 (первое неравенство Чебышева). *Если неотрицательная случайная величина ξ имеет конечное математическое ожидание $M(\xi)$, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M(\xi)}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad P(\xi < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{M(\xi)}{\varepsilon}. \tag{24.1}$$

Доказательство. Доказательство проведём для непрерывной случайной величины. По определению, для положительной случайной величины

$$M(\xi) = \int_0^\infty x\, f(x)dx \geqslant \int_\varepsilon^\infty x\, f(x)dx \geqslant \varepsilon \int_\varepsilon^\infty f(x)dx = \varepsilon P(\xi \geqslant \varepsilon).$$

Следовательно,

$$P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{M(\xi)}{\varepsilon},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 24.2 (второе неравенство Чебышева). *Для любой случайной величины ξ, имеющей конечную дисперсию $D(\xi)$, при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство*
$$P\big\{|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon\big\} \leqslant \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}. \tag{24.2}$$
Это неравенство Чебышева дает оценку вероятности того, что отклонение любой случайной величины ξ от центра распределения $m = M(\xi)$ превзойдёт заданное положительное число ε.

Доказательство. *1 способ.* Положим $\eta = [\xi - M(\xi)]^2$. Заметим, что $M(\eta) = D(\xi)$. В соответствии с первым неравенством Чебышева для величины η имеем
$$P(\eta \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{M(\eta)}{\varepsilon^2} = \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$
Учтя, что событие $(\eta \geqslant \varepsilon^2) = \{[\xi - M(\xi)]^2 \geqslant \varepsilon^2\}$ эквивалентно событию $|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon$, получим
$$P(|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

2 способ. Пусть величина ξ непрерывна. Изобразим некоторые её частные значения и математическое ожидание в виде точек на числовой оси Ox (рис. 81).

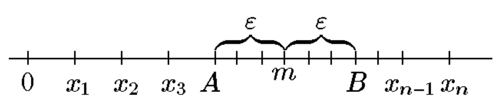


Рис. 81.

Зададим некоторое значение $\varepsilon > 0$ и вычислим вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания $m = M(\xi)$ больше, чем на ε:
$$P\big(|\xi - M(\xi)| \geqslant \varepsilon\big) = P\big(|\xi - m| \geqslant \varepsilon\big). \tag{24.3}$$
Для этого отложим от точки m вправо и влево по отрезку длиной ε; получим отрезок AB. Вероятность (24.3) есть не что иное, как вероятность того, что при случайном бросании точка ξ попадёт не внутрь отрезка AB, а вовне его:
$$P\big(|\xi - m| \geqslant \varepsilon\big) = P(\xi \notin [A, B])$$
Нужно просуммировать вероятности для всех x, которые лежат вне отрезка $[A, B]$.

Пусть $f(x)$ есть плотность вероятности случайной величины ξ:
$$P\big(|\xi - m| \geqslant \varepsilon\big) = \int\limits_{|x-m|>\varepsilon} f(x)dx.$$

Для дисперсии имеем
$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x-m|^2 f(x)dx \geqslant \int\limits_{|x-m|>\varepsilon} |x-m|^2 f(x)dx,$$
где выражение $|x - m| > \varepsilon$ означает, что интегрирование распространяется на внешнюю часть отрезка $[A, B]$.

Заменив $|x-m|$ под знаком интеграла на ε, получим

$$D(\xi) \geqslant \varepsilon^2 \int\limits_{|x-m|>\varepsilon} f(x)dx = \varepsilon^2 P\big(|\xi - m| \geqslant \varepsilon\big),$$

откуда и вытекает неравенство Чебышева для непрерывных величин (24.2).

$\Diamond$ Очевидно, что утверждение этой теоремы равносильно утверждению

$$P\big\{|\xi - M(\xi)| < \varepsilon\big\} \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}, \tag{24.4}$$

на том основании, что события $|\xi - m| < \varepsilon$ и $|\xi - m| \geqslant \varepsilon$ противоположны.

$\Diamond$ Неравенство Чебышева дает оценку вероятности отклонения случайной величины от её математического ожидания, по существу, при любом заданном законе распределения.

Причём речь идёт только о верхней границе вероятности заданного отклонения, которую последняя не может превзойти ни при каком законе распределения. Для большинства законов данная оценка является очень грубой. Так, мы знаем, что отклонение значений нормально распределённой случайной величины от математического ожидания на величину, большую чем 3σ, возможно с вероятностью $P \approx 0{,}0027$. Если оценить эту же вероятность, используя неравенство Чебышева, то получим

$$P(|\xi - M(\xi)| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111,$$

т.е. в 49 раз (!!!) больше.

Пример 24.1. Число пасмурных дней в году является случайной величиной ξ со средним значением 100 дней. Оценить вероятность события: число пасмурных дней в году больше двухсот ($\xi \geqslant 200$), если а) значение $D(\xi)$ неизвестно; б) известно, что $\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = 20$ дням.

Решение. а) Заданная случайная величина ξ является положительной случайной величиной с $M(\xi) = 100$. Следовательно, в соответствии с (24.1), $P(\xi \geqslant 200) \leqslant 100/200 = 0{,}5$ для $\varepsilon = 200$.

б) Так как событие $\{\xi \geqslant 200\}$ эквивалентно событию $\{\xi - M(\xi) \geqslant 100\}$, которое, в свою очередь, является подмножеством события $\big\{|\xi - M(\xi)| \geqslant 100\big\}$, то

$$P(\xi \geqslant 200) \leqslant P(|\xi - M(\xi)| \geqslant 100) \leqslant \frac{20^2}{100^2} = 0{,}04.$$

Пример 24.2. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия — 0,1. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5 см.

Решение. Пусть ξ — длина случайно взятой детали. Из условия задачи следует, что $M(\xi) = 50$, а $D(\xi) = 0{,}1$. Требуется оценить величину $P(49{,}5 < \xi < 50{,}5)$. Так как неравенство $49{,}5 < \xi < 50{,}5$ равносильно неравенству $|\xi - 50| < 0{,}5$, то требуется оценить вероятность $P(|\xi - 50| < 0{,}5)$. Согласно неравенству Чебышева (24.4), при $\varepsilon = 0{,}5$ получим

$$P(|\xi - 50| < 0{,}5) \geqslant 1 - \frac{D_\xi}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}1}{0{,}5^2} = 0{,}6.$$

25. Теорема Чебышева

Пусть имеется последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимых и одинаково распределённых случайных величин, имеющих конечные математические ожидания и дисперсии. Так как все величины одинаково распределены, то математические ожидания и дисперсии у них также одинаковы и равны, например, $M(\xi_1)$, $D(\xi_1)$. Составим случайную величину

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

Очевидно, что η_n — случайная величина с числовыми характеристиками

$$M(\eta_n) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_1) = M(\xi_1),$$
$$D(\eta_n) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_1) = \frac{D(\xi_1)}{n}.$$

Таким образом, среднее арифметическое η_n есть случайная величина с тем же математическим ожиданием, что и у величин ξ_i, и с дисперсией, которая неограниченно убывает с ростом n, то есть при больших n ведёт себя, почти как неслучайная величина. Применим к величине η_n неравенство Чебышева:

$$P(|\eta_n - M(\eta_n)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(\eta_n)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{D(\xi_1)}{n\varepsilon^2}.$$

Заметим, что при $n \to \infty$ эта вероятность стремится к 1. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - M(\eta_n)| < \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - M(\xi_i)\right| < \varepsilon\right) \geqslant \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{D(\xi_1)}{n\varepsilon^2}\right] = 1.$$

Таким образом, если $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание $M(\xi_1)$ и дисперсию $D(\xi_1)$, то среднее арифметическое этих величин сходится по вероятности к их математическому ожиданию.

Это утверждение можно обобщить и на случай, когда случайные величины имеют различные математические ожидания и дисперсии.

Теорема 25.1 (закон больших чисел в форме Чебышева). *Если $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной C, т.е.*

$$D(\xi_n) \leqslant C, \qquad n = \overline{1, \infty},$$

то для любых постоянных $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k)\right| < \varepsilon\right\} = 1, \tag{25.1}$$

где

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

— среднее арифметическое n величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Доказательство. Так как ξ_k — взаимно независимые величины, то

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k).$$

Следовательно,

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \leqslant \frac{C}{n},$$

так как $D(\xi_k) \leqslant C$. Согласно неравенству Чебышева (24.4),

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k)\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \geqslant 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k)\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1,$$

а так как вероятность не может быть больше единицы, то утверждение этой теоремы справедливо.

$\Diamond$ Если случайные величины ξ_k имеют одинаковые математические ожидания ($M(\xi_k) = M(\xi_1)$) и дисперсии ($D(\xi_k) = D(\xi_1)$), то из приведённого доказательства следует, в частности,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - M(\xi_1)\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{D[\xi_1]}{n\varepsilon^2},$$

или

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - M(\xi_1)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{D(\xi_1)}{n\varepsilon^2} \tag{25.2}$$

Пример 25.1. Результат измерения некоторой физической величины является случайной величиной со значением среднеквадратичного отклонения $\sigma = 0{,}02$. Проводится серия независимых измерений и вычисляется среднее этих измерений, которое используется в качестве оценки математического ожидания результатов измерения. Требуется: а) определить с вероятностью, не меньшей 0,95, верхнюю границу абсолютной погрешности среднего пяти измерений; б) число измерений, которое необходимо произвести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, получить абсолютную погрешность среднего, меньшую чем 0,01.

Решение. а) Необходимо определить ε, для которого

$$P\left(\left|\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\xi_i - M(\xi_1)\right| < \varepsilon\right) \geqslant 0{,}95.$$

Так как результаты измерений есть одинаково распределённые случайные величины, то в соответствии с (25.2)

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - M(\xi_1)\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{D(\xi_1)}{n\varepsilon^2}.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{D(\xi_1)}{n\varepsilon^2} = 0{,}95,$$

откуда следует, что

$$\varepsilon^2 = \frac{\sigma_{\xi_1}^2}{0{,}05n} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0{,}05 \cdot 5} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \quad \text{и} \quad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-2}.$$

б) С помощью этого же соотношения (25.2) для $\varepsilon = 0{,}01$ и $P = 0{,}95$ получим

$$n \geqslant \frac{D(\xi_1)}{0{,}05 \cdot \varepsilon^2} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0{,}05 \cdot 10^{-4}} = 80.$$

Отметим, что поскольку погрешность характеризуется значением среднеквадратичного отклонения σ, а для среднего арифметического

$$\sigma\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \sqrt{\frac{D(\xi_1)}{n}} = \frac{\sigma_{\xi_1}}{\sqrt{n}},$$

то погрешность среднего как оценки математического ожидания убывает пропорционально $\sqrt{n}$. Поэтому, чтобы сделать погрешность меньшей в четыре раза, потребовалось бы в 16 раз больше измерений.

♦ Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет закону больших чисел*, если

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0.$$

Фактически это означает, что среднее арифметическое последовательности случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий. Под средним арифметическим математических ожиданий здесь понимается предел при $n \to \infty$ величины

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i).$$

◊ Предположение об ограниченности моментов второго порядка в законе больших чисел связано исключительно с приведённым способом доказательства. Закон больших чисел остается верным и в случае существования только первых моментов последовательности случайных величин. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 25.2 (закон больших чисел в форме Хинчина). *Если $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание $M(\xi_1)$, то среднее арифметическое этих величин сходится с вероятностью единица к их математическому ожиданию:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to M(\xi_1). \tag{25.3}$$

Доказательство см., например, в [22].

Пример 25.2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины. При любом $k \geqslant 1$ величина ξ_{2k-1} имеет распределение Пуассона с параметром $\alpha = 2$, а величина $\xi_{2k} \in N_{0,1}$. Найти предел η по вероятности последовательности $\{\eta_k\}_{n=1}^{\infty}$, где $\eta_n = (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/n$.

Решение. Поскольку дисперсии величин ξ_n ограничены ($D(\xi_{2k-1}) = 2$, $D(\xi_{2k}) = 1$), то в соответствии с законом больших чисел среднее арифметическое этих величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е.

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \eta = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i).$$

Найдём $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} M(\xi_i)$. Для четных $n = 2k$:

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{2k} M(\xi_i) = \frac{2k + 0 \cdot k}{2k} = 1,$$

и, соответственно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{2k} M(\xi_i) = 1.$$

Для нечетных $n = 2k - 1$:

$$\frac{1}{2k-1} \sum_{i=1}^{2k-1} M(\xi_i) = \frac{2k + (k-1) \cdot 0}{2k-1} = \frac{2k}{2k-1},$$

и, соответственно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k-1} \sum_{i=1}^{2k-1} M(\xi_i) = 1.$$

Таким образом, $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 1$.

Пример 25.3. Дана последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$, каждая из которых равномерно распределена на отрезке $[a_n, b_n]$, причем $b_0 - a_0 = 0$ и

$$b_n - a_n = b_{n-1} - a_{n-1} + \frac{1}{n}$$

для $n \geqslant 1$. Удовлетворяет ли эта последовательность закону больших чисел?

Решение. Последовательность случайных величин $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет закону больших чисел, если

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0.$$

Согласно неравенству Чебышева, если

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \to 0,$$

то последовательность удовлетворяет закону больших чисел.

Найдём
$$D\biggl(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\biggr).$$
Для равномерно распределённой на отрезке $[a, b]$ величины дисперсия определяется выражением
$$D = \frac{(b-a)^2}{12}.$$
Тогда
$$\begin{aligned}
D(\xi_1) &= \frac{1^2}{12};\\
D(\xi_2) &= \frac{(1+1/2)^2}{12};\\
D(\xi_3) &= \frac{(1+1/2+1/3)^2}{12};\\
\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
D(\xi_n) &= \frac{1}{12}\biggl(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\biggr)^2.
\end{aligned}$$
Поскольку ξ_i независимы, то
$$D\biggl(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\xi_l\biggr) = \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}D(\xi_l) = \frac{1}{n^2}\biggl[\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{12}\biggl(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}\biggr)^2\biggr] = \frac{1}{12n^2}\sum_{l=1}^{n}\biggl(\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}\biggr)^2.$$
Оценим сумму, стоящую в скобках:
$$\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k} < 1 + \int_1^l \frac{dx}{x} = 1 + \ln l.$$
Следовательно,
$$D\biggl(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\xi_i\biggr) < \frac{1}{12n^2}\sum_{l=1}^{n}(1+\ln l)^2 < \frac{1}{12n^2}n(1+\ln n)^2 = \frac{(1+\ln n)^2}{12n}.$$
Тогда
$$\lim_{n\to\infty} D\biggl(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\xi_l\biggr) \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\ln n)^2}{12n} = 0,$$
т.е. последовательность удовлетворяет закону больших чисел.

26. Теорема Бернулли

Одним из важных следствий закона больших чисел является так называемая теорема Бернулли, объясняющая факт устойчивости относительной частоты события в серии независимых испытаний и дающая теоретическое обоснование статистическому определению вероятности события.

Теорема 26.1. *Пусть μ — число наступлений события A в n независимых испытаниях и p — вероятность наступления события A в каждом из испытаний. Тогда, каково бы не было $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

т.е. каким бы малым положительным числом ε ни было, вероятность события

$$\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon$$

стремится к единице.

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $\xi = \mu/n$. В разделе «Схема Бернулли» мы убедились, что для распределения Бернулли $M(\mu) = np$ и $D(\mu) = npq$. Тогда

$$M\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{1}{n}M(\mu) = \frac{np}{n} = p; \tag{26.1}$$

$$D\left(\frac{\mu}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D(\mu) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}. \tag{26.2}$$

Запишем теорему Чебышева в форме (24.4). Для нашего случая с учётом (26.1) и (26.2) получим

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{26.3}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, найдём

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1. \tag{26.4}$$

Таким образом, вероятность того, что отклонение относительной частоты μ/n от вероятности p события A превзойдёт заданное число $\varepsilon > 0$, стремится к нулю при неограниченном увеличении числа опытов ($n \to \infty$). Иными словами, можно записать следующую теорему.

Теорема 26.2 (Бернулли). *Большие отклонения относительной частоты μ/n от вероятности события при любом сколь угодно большом n маловероятны.*

♢ Теорема Бернулли в символическом виде записывается следующим образом:

$$\frac{\mu}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} p$$

и читается так: относительная частота μ/n стремится по вероятности к числу p при $n \to \infty$.

Пример 26.1. Монету подбрасывают 10 000 раз. Оценить вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности выпадения орла составит менее 0,01.

Решение. Имеем $n = 10000$, $\varepsilon = 0{,}01$, $p = q = 0{,}5$. Тогда в соответствии с (26.3)

$$P(|\mu - p| < \varepsilon) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}25}{10000\cdot(0{,}01)^2} = 0{,}75.$$

27. Центральная предельная теорема Ляпунова

Иногда приходится иметь дело со случайной величиной, которая является суммой большого числа малых и независимых между собой случайных величин, законы распределения которых неизвестны. Такой случайной величиной будет, например, ошибка при измерении, являющаяся суммой большого числа малых и независимых между собой ошибок, порождаемых различными факторами (состояние измерительного прибора, зрения, влажности, температуры, атмосферного давления, ошибка наблюдения и т.д.). Наблюдатель имеет дело лишь с суммарным действием отдельных факторов, и его интересует закон распределения «суммарной ошибки».

Ответ на вопрос о поведении функции распределения суммы таких величин даёт так называемая центральная предельная теорема Ляпунова.

Рассмотрим систему n взаимно независимых случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^n$:

$$\sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Центрируем и нормируем её. Так как

$$M\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n m_k;$$

$$D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n D_k,$$

где обозначено $m_k = M(\xi_k)$, $D_k = D(\xi_k)$, то величины

$$\eta_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^n \xi_k - M\left(\sum\limits_{k=1}^n \xi_k\right)}{\sigma\left(\sum\limits_{k=1}^n \xi_k\right)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^n \xi_k - \sum\limits_{k=1}^n m_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n D_k}}$$

являются нормированными. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 27.1 (Ляпунова). *Пусть простые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы, имеют конечные математические ожидания $m_1, m_2, \ldots$, конечные дисперсии $D_1, D_2, \ldots$ и конечные третьи центральные моменты $\beta_1, \beta_2, \ldots$ Тогда функция распределения нормированной и центрированной случайной величины*

$$\eta_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^n \xi_k - \sum\limits_{k=1}^n m_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n D_k}} \tag{27.1}$$

стремится при $n \to \infty$ к функции распределения нормальной случайной величины с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$ равномерно относительно x:

$$F_{\eta_n}(x) = P(\eta_n < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x), \tag{27.2}$$

если выполнено условие Ляпунова

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}D_k\right)^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{27.3}$$

Здесь $\Phi(x)$ — *функция Лапласа* (19.6).

Доказательство. Доказательство проведём при упрощающем предположении, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеют одинаковые математические ожидания $M(\xi_1) = m$ и дисперсии $D(\xi_1) = \sigma^2$. Тогда случайная величина (27.1) запишется в виде

$$\eta_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k - \sum\limits_{k=1}^{n}M(\xi_1)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}D(\xi_1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i - M(\xi_1)}{\sqrt{D(\xi_1)}}. \tag{27.4}$$

Поскольку $[\xi_i - M(\xi_i)]/\sqrt{D(\xi_1)}$ — центрированные и нормированные величины, то, не нарушая общности, будем считать, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — стандартные случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице, и рассмотрим величину

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

Заметим, что $M(\eta_n) = 0$, $D(\eta_n) = 1$. Пусть $\gamma_\xi(t)$ — характеристическая функция величин ξ_i. Согласно свойствам (12.18) и (12.22) характеристической функции, запишем $\gamma_{\eta_n}(t) = \gamma_\xi^n(t/\sqrt{n})$. Разложим $\gamma_\xi(t/\sqrt{n})$ в ряд Маклорена, учитывая, что, согласно (12.17), $g(0) = 1$, а согласно (12.19), $\gamma^{(k)}(t)|_{t=0} = i^k m_k$:

$$\gamma_{\eta_n}(t) = \left(1 + im_1\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{i^2m_2t^2}{2!n} + \ldots\right)^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2/n)\right]^n$$

или

$$\ln[\gamma_{\eta_n}(t)] \sim n\ln\left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right] = n\left[-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right] = -\frac{t^2}{2} + n\cdot o\left(\frac{t^2}{n}\right).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\ln[\gamma_{\eta_n}(t)] = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{t^2}{2} + n\cdot o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right] = -\frac{t^2}{2}$$

или $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{\eta_n}(t) = e^{-t^2/2}$, то есть $\gamma_\eta(t)$ стремится к характеристической функции (12.18) стандартного нормального закона $N(0,1)$. Следовательно, по свойству сходимости по распределению функция распределения величины

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

стремится к функции распределения $F_{0,1}(x)$ стандартной нормальной величины (19.15), что и требовалось доказать.

Иначе говоря, при выполнении условий теоремы нормальный закон

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

является предельным для закона распределения центрированной и нормированной суммы (или, что то же самое, среднего) случайных величин (27.1).

Итак, при выполнении условий теоремы и большом n

$$F_{\eta_n}(x) \approx \frac{1}{2} + \Phi(x). \tag{27.5}$$

Тогда закон распределения $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ является приближенно нормальным с математическим ожиданием $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ и стандартным отклонением $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} D_k}$, т.е.

$$P_k\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k < x\right) \approx \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - \sum\limits_{k=1}^{n} m_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} D_k}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \tag{27.6}$$

Следствие 27.1.1. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, одинаково распределены и имеют конечное математическое ожидание $M(\xi_1)$ и дисперсию $D(\xi_1)$, то при $n \to \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i - M(\xi_1)}{\sqrt{D(\xi_1)}} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{0,1}(x). \tag{27.7}$$

Пример 27.1. Случайная величина ξ является средним арифметическим независимых и одинаково распределённых случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Сколько нужно взять таких величин, чтобы ξ с вероятностью, не меньшей 0,9973, имела отклонение от своего математического ожидания, не превосходящее 0,1. Решить задачу, используя: а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

Решение. Согласно определениям и условию задачи,

$$\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad M(\xi) = M(\xi_1), \quad D(\xi) = \frac{D(\xi_1)}{n} = \frac{5}{n}.$$

а) Согласно неравенству Чебышева,

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$$

или

$$P(|\xi - M(\xi)| < 0{,}1) \geqslant 1 - \frac{5}{0{,}1^2 n},$$

откуда получим $n \approx 185185$.

б) Согласно центральной предельной теореме, распределение ξ является приближенно нормальным с параметрами

$$M(\xi) = M(\xi_1), \qquad D(\xi) = \frac{D(\xi_1)}{n}.$$

Тогда

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \approx 2\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{D(\xi)}}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{0{,}1}{\sqrt{5/n}}\Big).$$

По условию $P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) = 0{,}9973$, т.е.

$$2\Phi\Big(\frac{0{,}1}{\sqrt{5/n}}\Big) = 0{,}9973.$$

По таблицам функции Лапласа найдём x, для которого $\Phi(x) = 0{,}9973/2$: $x = 3$. Тогда

$$\frac{0{,}1}{\sqrt{5/n}} = 3, \qquad n = 150.$$

Оцените разницу!!! Таким образом, оценка, полученная с помощью неравенства Чебышева, является более грубой, чем аналогичная оценка, полученная с помощью центральной предельной теоремы.

28. Теоремы Муавра–Лапласа и Пуассона

Теорема 28.1 (Муавра–Лапласа). *Пусть ξ — случайная величина, распределённая по биномиальному закону с параметрами n и p, тогда при $n \to \infty$ случайная величина*

$$\eta_n = \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} \tag{28.1}$$

является стандартной нормальной случайной величиной ($\eta_\infty \in N(0,1)$).

Доказательство. Пусть ξ — число успехов в n испытаниях по схеме Бернулли. Представим ξ как $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i — число успехов в i-том испытании. Очевидно, что каждая из величин ξ_i может принимать два значения: $\xi_i = 1$ с вероятностью p и $\xi_i = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда $M(\xi_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, $D(\xi_i) = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q = pq$.

Следовательно, при $n \to \infty$ для случайной величины $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ справедлива центральная предельная теорема:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i - nM[\xi_1]}{\sqrt{nD[\xi_1]}} = \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} = \eta_n, \qquad \eta_\infty \in N(0,1),$$

что и требовалось доказать.

Как следствие теоремы Муавра–Лапласа сразу же получаем интегральную формулу Лапласа.

Теорема 28.2 (интегральная теорема Муавра–Лапласа). *Пусть ξ — число появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$ (схема Бернулли). Тогда*

$$P(\alpha < \xi < \beta) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{28.2}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$$

— функция Лапласа.

Эта теорема находит применение в приближённых вычислениях биномиальных вероятностей и их сумм.

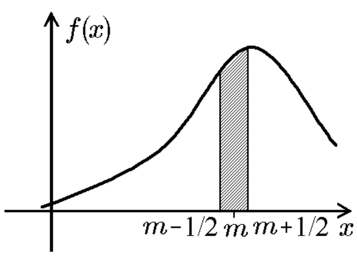


Рис. 82.

Вероятность того, что биномиальная случайная величина примет значение m, можно считать приближённо равной вероятности попадания нормальной случайной величины в малый интервал $(m - 1/2, m + 1/2)$ (рис. 82). Поскольку в пределах этого интервала плотность вероятности можно считать постоянной и равной $f(m)$, то эта вероятность приближённо равна площади прямоугольника:

$$P(\xi = m) \approx f(m) \cdot 1 = f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-(m-np)^2/(2npq)}.$$

Таким образом, мы приходим к локальной формуле Муавра–Лапласа.

Теорема 28.3 (локальная формула Муавра–Лапласа). *Пусть ξ — случайная величина, распределённая по биномиальному закону с параметрами n и p, тогда при $n \to \infty$*

$$P(\xi = m) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-(m-np)^2/(2npq)} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{28.3}$$

Пример 28.1. Произведено 700 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,7. Найти вероятность того, что частота появления события A окажется заключённой между 460 и 600.

Решение. Применим интегральную теорему (формулу) Муавра–Лапласа (28.2), где $\alpha = 460$; $\beta = 600$; $n = 700$; $np = 700 \cdot 0{,}7 = 490$; $npq = 490 \cdot 0{,}3 = 147$; $\sqrt{npq} \approx 12{,}124$ и

$$\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}} = \frac{460 - 490}{12{,}124} = -2{,}47;$$
$$\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}} = \frac{600 - 490}{12{,}124} = 9{,}07.$$

Тогда

$$P(460 < \xi < 600) = \Phi(9{,}09) - \Phi(-2{,}47) = \Phi(9{,}09) + \Phi(2{,}47) = \\ = \frac{1}{2} + 0{,}49324 = 0{,}9932.$$

Пример 28.2. Найти вероятность того, что в результате 1000 бросаний монет число выпаданий герба будет заключено в интервале]475,525[.

Решение. Воспользуемся формулой (27.5), где $\alpha = 475$; $\beta = 525$; $n = 1000$; $p = q = 0{,}5$; $np = 500$; $npq = 250$; $\sqrt{npq} \approx 15{,}8114$ и

$$\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}} = \frac{475 - 500}{15{,}8114} = -1{,}58;$$
$$\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}} = \frac{525 - 500}{15{,}8114} = 1{,}58.$$

Тогда

$$P(475 < \xi < 525) = \Phi(1{,}58) - \Phi(-1{,}58) = 2\Phi(1{,}58) = 0{,}8858.$$

Теорема 28.4 (Пуассона). *Пусть ξ — случайная величина, распределённая по закону Пуассона с параметром λ, тогда при $\lambda \to \infty$ случайная величина $(\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ сходится по распределению к нормальному закону $N(0, 1)$.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся свойствами характеристических функций. Рассмотрим величину $\eta = (\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda}$. Так как $M(\xi) = D(\xi) = \lambda$, то $M(\eta) = 0$, $D(\eta) = 1$. Поскольку характеристическая функция величины ξ определяется соотношением (12.14): $\gamma_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$, то, согласно свойству характеристической функции $\gamma_{a\xi+b}(t) = \gamma_\xi(at)e^{ibt}$, для величины η получим

$$\gamma_\eta(t) = \gamma_\xi\Big(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\Big)e^{-it\sqrt{\lambda}} = e^{\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}}-1)}e^{-it\sqrt{\lambda}} = e^{\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}}-1)-it\sqrt{\lambda}}.$$

Разложим экспоненту в ряд Маклорена по степеням $t/\sqrt{\lambda}$ с точностью до слагаемых второго порядка малости и получим

$$\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}} - 1) - it\sqrt{\lambda} = \lambda\Big[1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}} + \frac{(it)^2}{\lambda 2!} + o\Big(\frac{t^2}{\lambda}\Big) - 1\Big] - it\sqrt{\lambda} = -\frac{t^2}{2} + \lambda o\Big(\frac{t^2}{\lambda}\Big).$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \gamma_\eta(t) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-t^2/2+\lambda o(t^2/\lambda)} = e^{-t^2/2},$$

что совпадает с характеристической функцией стандартного нормального закона. Таким образом, закон распределения η при $\lambda \to \infty$ стремится к закону $N(0, 1)$, что и требовалось доказать.

Задания для самоконтроля

Теоретические вопросы

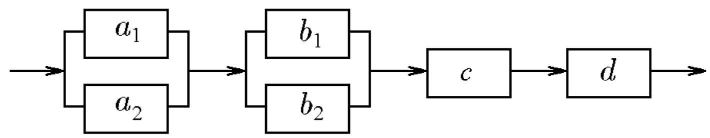
1. Случайное событие. Правила действия над событиями. Элементарное, достоверное, невозможное, противоположное события. Пространство событий, полная группа событий.
2. Частота. Свойства частоты.
3. Аксиомы теории вероятностей.
4. Свойства вероятности. Комбинаторные формулы.
5. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности.
6. Условная вероятность. Попарная независимость событий и независимость в совокупности.
7. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
8. Схема Бернулли. Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли.
9. Предельные теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа.
10. Случайная величина. Функция и закон распределения случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
11. Числовые характеристики дискретной случайной величины и их свойства (математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратичное отклонение, моменты и их производящая функция).
12. Числовые характеристики непрерывной случайной величины и их свойства (математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратичное отклонение, моменты и их производящая функция).
13. Дискретная случайная величина. Биномиальное распределение. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение.
14. Дискретная случайная величина. Распределение Пуассона. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение.
15. Непрерывная случайная величина. Равномерное и показательное распределения. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение.
16. Непрерывная случайная величина. Нормальное распределение (закон Гаусса). Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение.
17. Непрерывная случайная величина. Гамма-распределение. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение, производящая функция.
18. Непрерывная случайная величина. Бета-распределение. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение.
19. Понятие многомерной случайной величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины. Свойства.
20. Числовые характеристики двумерной случайной величины и их свойства. Коэффициент корреляции.
21. Предельные теоремы. Закон больших чисел. Сущность и назначение предельных теорем.
22. Неравенство Чебышева.
23. Теоремы Чебышева и Бернулли.
24. Центральная предельная теорема Ляпунова (формулировка). Центрированная и нормированная случайная величина.

Индивидуальные задания

Случайные события и их вероятность

Вариант № 1

1.1 Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_b состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

1.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}8$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c) = 0{,}99$; $P(d) = 0{,}95$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

1.3. Доказать тождество: $\overline{(A - B) + (A - C)} = \bar{A} + BC$.

1.4. Колода карт (36 листов) делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой пачке будет по два туза.

1.5. На одной полке наудачу расставляется 8 книг. Найти вероятность того, что определённые 3 книги окажутся поставленными рядом.

1.6. Среди 10 лотерейных билетов 6 выигрышных. Наудачу взяли 4 билета. Определить вероятность того, что среди них хотя бы 2 выигрышных.

1.7. В лифт 6-этажного дома вошли 4 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, трое вышли на одном этаже.

1.8. В отрезке единичной длины наудачу выбираются две точки. Определить вероятность того, что расстояние между точками не превосходит $1/4$.

1.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 200 минут. Одно из событий длится 10 мин., другое — 5 мин. Определить вероятность того, что: а) события «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

1.10. В сфере радиуса 2 случайно и независимо друг от друга разбросаны 10 точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей точки не меньше 1.

1.11. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Произведено 3 выстрела. Какова вероятность, что будет: а) три попадания; б) один промах; в) хотя бы одно попадание?

1.12. Урна содержит 12 шаров с номерами от 1 до 12. Шары извлекаются по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: A — номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1,2,...,12; B — хотя бы один раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения; C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий A, B, C. Найти предельные значения вероятностей, если число шаров в урне стремится к бесконечности.

1.13. Бросают три монеты. Определить, зависимы или нет события $A = \{$выпал орёл на первой монете$\}$ и $B = \{$выпала хотя бы одна решка$\}$.

1.14. Мышь может выбрать наугад один из 5 лабиринтов. Известно, что вероятности её выхода из различных лабиринтов за три минуты равны 0,5; 0,6; 0,2; 0,1;

0,1. Пусть оказалось, что мышь выбралась из лабиринта через три минуты. Какова вероятность того, что она выбрала первый лабиринт? Второй лабиринт?

1.15. В первом ящике из 6 шаров 4 красных и 2 чёрных, во втором ящике из 7 шаров 2 красных и 5 чёрных. Из первого ящика во второй переложили один шар, затем из второго в первый переложили один шар. Найти вероятность того, что шар, извлечённый после этого из первого ящика, чёрный.

1.16. Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трёх подгрупп. В первой подгруппе 1 человек, во второй 4 и в третьей 5. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,8; эксперты второй подгруппы — с вероятностью 0,6; эксперты третьей подгруппы — с вероятностью 0,5. Наудачу вызванный эксперт принимает 3 независимых решения. Найти вероятность того, что: а) ровно 3 решения приняты верно; б) принимал решения эксперт из первой подгруппы, если 3 решения приняты верно.

1.17. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплены 10 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

1.18. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадет 3 раза. Определить вероятность того, что при этом решка выпадет 2 раза.

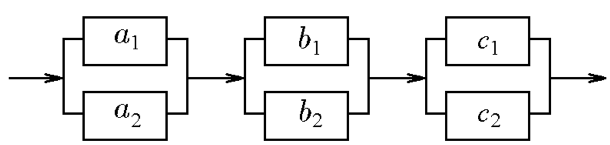
1.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,003. Поступило 500 вызовов. Определить вероятность того, что будет более 2 «сбоев».

1.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $80 \leqslant m \leqslant 90$.

1.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом 6 изделий для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 6 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 2

2.1. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков a_k, b_k и c_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

2.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}8$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}7$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

2.3. Установить, справедливо ли соотношение $A + (B - C) = (A + B) - C$.

2.4. Из колоды, содержащей 52 карты, вынимается наугад 3. Найти вероятность того, что это тройка, семёрка и туз.

2.5. 7 человек рассаживаются случайным образом за круглым столом. Найти вероятность того, что два определённых лица окажутся рядом.

2.6. Имеются 2 изделия 1-го сорта, 2 изделия 2-го сорта, 4 изделия 3-го сорта и 2 изделия 4-го сорта. Для контроля наудачу выбирается 5 изделий. Определить вероятность того, что среди них ровно 1 изделие 1-го сорта, 1 изделие 2-го сорта, 1 изделие 3-го сорта и 2 изделия 4-го сорта.

2.7. В лифт 7-этажного дома вошли 4 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на одном этаже; б) по крайней мере трое вышли на одном этаже.

2.8. В отрезке единичной длины наудачу выбираются две точки. Определить вероятность того, что расстояние между точками меньше $1/2$.

2.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 200 мин. Одно из событий длится 10 мин, другое — 15 мин. Определить вероятность того, что события а) «перекрываются» по времени, б) «не перекрываются».

2.10. На глобусе случайным образом выбирается точка. Найти вероятность того, что она окажется за северным полярным кругом (66,5° северной широты).

2.11. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,62, вторым — 0,54. Первый сделал 3, второй 2 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

2.12. Урна содержит 8 шаров с номерами от 1 до 8. Шары извлекаются по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: A — номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1,2,...,8; B — хотя бы один раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения; C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий A, B, C. Найти предельные значения вероятностей, если число шаров в урне стремится к бесконечности.

2.13. Доказать, что если события A и B несовместны, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, то события A и B зависимы.

2.14. В первой урне 4 белых и 1 чёрный шар, во второй 2 белых и 5 чёрных. Из первой во вторую переложены 3 шара, затем из второй урны извлечён один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый.

2.15. Из 1000 ламп 430 принадлежат первой партии, 180 второй, остальные третьей. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа бракованная.

2.16. В альбоме 7 чистых и 6 гашеных марок. Из них наудачу извлекаются 2 марки, подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекаются 3 марки. Определить вероятность того, что все они чистые.

2.17. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплены 14 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

2.18. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 7 раз. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 3 раза.

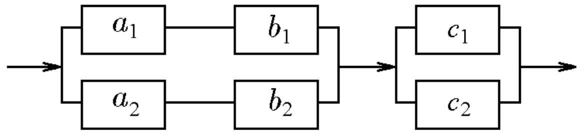
2.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,004. Поступило 500 вызовов. Определить вероятность, что при этом будет не более 6 «сбоев».

2.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $85 \leqslant m \leqslant 95$.

2.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 7 конденсаторов. Для контроля выбирают 5 конденсаторов. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Вариант № 3

3.1. Система S состоит из двух независимых подсистем S_{ab} и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков ab_k и c_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Блок ab_k состоит из последовательно соединенных блоков a_k и b_k.



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

3.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}85$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}95$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

3.3. Установить, справедливо ли соотношение $A + B = (A - AB) + B$.

3.4. Игральная кость подброшена два раза. Найти вероятность того, что: а) сумма очков на верхних гранях составит 7; б) два очка появятся хотя бы при одном подбрасывании.

3.5. В коробке находятся жетоны с цифрами то 1 до 10. Наудачу извлекаются два жетона. Какова вероятность того, что будут вынуты: а) оба жетона с нечётными номерами; б) хотя бы один жетон с нечётным номером; в) один жетон с чётным номером.

3.6. Четыре шарика случайным образом разбрасывают по четырем лункам. Каждый шарик с равной вероятностью и независимо от других попадает в любую лунку. Определить вероятность того, что в одной из лунок окажется ровно три шарика.

3.7. В лифт 8-этажного дома вошли 5 пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере двое вышли на одном этаже.

3.8. В круге радиуса 11 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны 2,25 и 3,52.

3.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 100 минут. Одно из событий длится 10 мин, другое 12 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

3.10. Плоскость разграфлена параллельными линиями с шагом 2 см. На плоскость бросают монету диаметром 1,5 см. Определить вероятность того, что она не пересечёт ни одну из линий.

3.11. В двух партиях доброкачественных изделий 87% и 31% соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное?

3.12. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает орёл. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т,д. Найти вероятность события «выиграл A до 6-го броска». Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

3.13. Из колоды в 36 карт наудачу извлекается одна карта. Установить, зависимы или не зависимы следующие события: $A = \{$вынутая карта туз$\}$ и $B = \{$вынутая карта чёрной масти$\}$.

3.14. В группе спортсменов 10 лыжников, 6 боксеров и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжников составляет 0,8, для боксеров 0,7, для бегунов 0,9. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационную норму.

3.15. В первой урне 2 белых и 3 чёрных шара, во второй 5 белых и 4 чёрных. Из первой во вторую переложены 2 шара, затем из второй урны извлечён один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый.

3.16. Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трёх подгрупп. В первой подгруппе 4 человека, во второй 3 и в третьей 2. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,6; эксперты второй подгруппы — с вероятностью 0,7; эксперты третьей подгруппы — с вероятностью 0,8. Наудачу вызванный эксперт принимает 5 независимых решений. Найти вероятность того, что: а) ровно 3 решения приняты верно; б) принимал решения эксперт из первой подгруппы, если 3 решения приняты верно.

3.17. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 4 раза. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 7 раз.

3.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,15 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,15 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 15 билетов. Определить вероятность получения 2 крупных выигрышей и 2 мелких.

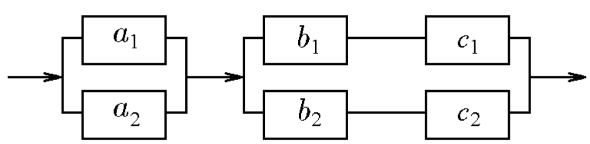
3.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,008. Поступило 500 вызовов. Определить вероятность того, что будет более 2 «сбоев».

3.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $70 \leqslant m \leqslant 95$.

3.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 8 нестандартных, выбраны случайным образом 4 изделия для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 4 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 4

4.1. Система S состоит из двух независимых подсистем S_a и S_{bc}. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Каждая подсистема состоит из двух независимых дублирующих блоков a_k и bc_k ($k = 1, 2$) (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Блок bc_k состоит из последовательно соединенных блоков b_k и c_k.



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

4.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}85$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}95$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

4.3. Каков смысл равенств: а) $ABC = A$; б) $A + B + C = A$?

4.4. Из 30 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 20. Найти вероятность того, что студент ответил правильно на экзаменационный билет, состоящий из 2-х вопросов.

4.5. Из корзины, содержащей 5 красных, 7 зелёных и 4 синих шара, наудачу вынимают три шара. Какова вероятность, что все они разного цвета?

4.6. Бросают две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит 6; б) произведение числа очков не превосходит 6; в) произведение числа очков делится на 6.

4.7. В лифт 9-этажного дома вошли 5 пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере трое вышли на одном этаже.

4.8. В круге радиуса 14 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадёт в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны 2,55 и 1,57.

4.9. Отрезок разбивают двумя точками случайным образом на три части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник?

4.10. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 200 мин. Одно из событий длится 10 мин, другое 20 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

4.11. Вероятность того, что хотя бы один из трёх покупателей купит определённый товар, равна 0,784. Вероятности покупки товара покупателями одинаковы. Определить вероятность того, что: а) два покупателя из трёх совершат покупки; б) три покупателя совершат покупки.

4.12. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,64, вторым — 0,32. Первый сделал 2, второй 4 выстрела. Определить вероятность того, что цель не поражена.

4.13. Тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, желтый и синий цвета, а четвертая грань содержит все три цвета, бросают наудачу на плоскость. События A, B, C состоят в том, что тетраэдр упал на грань, содержащую соответственно красный, желтый, либо синий цвет. Проверить, зависимы ли попарно события A, B, C.

4.14. В первой урне 8 белых и 2 чёрных шара, во второй 3 белых и 2 чёрных. Из первой во вторую переложены 5 шаров, затем из второй урны извлечён один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый.

4.15. В магазин поступают однотипные изделия с трёх заводов, причём первый завод поставляет 60% изделий, второй 20%, третий 20% изделий. Среди изделий 1-го завода первосортных 70%, второго — 60%, третьего — 80%. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено третьим заводом.

4.16. Три стрелка стреляют по мишени (каждый по разу). Вероятности попадания для стрелков равны соответственно 0,5; 0,6 и 0,7. После стрельбы зафиксированы две пробоины в мишени. Какова вероятность, что промахнулся третий стрелок?

4.17. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,2. Куплены 20 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

4.18. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 4 раза. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 3 раза.

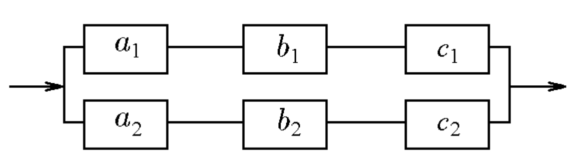
4.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,009. Поступило 600 вызовов. Определить вероятность того, что будет не более 3 «сбоев».

4.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 200 независимых испытаний равна 0,4. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $75 \leqslant m \leqslant 90$.

4.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 9 конденсаторов. Для контроля выбирают 3 конденсаторов. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Вариант № 5

5.1. Система S содержит подсистему S_{abc}, состоящей из двух независимых дублирующих блоков abc_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Блок abc_k состоит из трех последовательно соединенных блоков a_k, b_k и c_k.



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

5.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}9$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}8$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

5.3. Установить, справедливо ли соотношение $A - (B + C) = (A - B) + (A - C)$.

5.4. Из колоды, содержащей 36 карты, вынимают наугад 5. Найти вероятность того, что это две шестерки, две семёрки и туз.

5.5. Найти вероятность того, что на определённую карточку в «Спортлото — 5 из 36» будет получен минимальный выигрыш (угадано ровно три числа).

5.6. Четыре шарика случайным образом разбрасывают по шести лункам. Каждый шарик с равной вероятностью и независимо от других попадает в любую лунку. Определить вероятность того, что в первых четырех лунках будет по одному шарику.

5.7. В лифт 10-этажного дома вошли 6 пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, четверо вышли на одном этаже.

5.8. В круге радиуса R наудачу ставят точку. Определить вероятность того, что она попадёт во вписанный в этот круг равносторонний треугольник.

5.9. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + 2bx + c$ вещественны, если коэффициенты b и c — любые числа, удовлетворяющие условиям $0 < c < 4$, $-2 < b < 2$.

5.10. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 200 мин. Одно из событий длится 10 мин, другое 20 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

5.11. На спортивных соревнованиях вероятность показать рекордный результат для первого спортсмена 0,5, для второго 0,3, для третьего 0,1. Какова вероятность того, что: а) рекорд будет установлен одним спортсменом; б) рекорд будет установлен хотя бы одним спортсменом; в) рекорд не будет установлен?

5.12. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью не менее 0,99 хотя бы один раз появился орел?

5.13. Тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, желтый и синий цвета, а четвертая грань содержит все три цвета, бросают наудачу на плоскость. События A, B, C состоят в том, что тетраэдр упал на грань, содержащую соответственно красный, желтый, либо синий цвет. Проверить, зависимы ли в совокупности события A, B, C.

5.14. В первой урне 6 белых и 4 чёрных шара, во второй 1 белый и 7 чёрных. Из первой во вторую переложены 2 шара, затем из второй урны извлечён один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый.

5.15. В магазин поступают телевизоры четырех заводов. Вероятность того, что в течение года телевизор не будет иметь неисправность, равна для первого завода 0,9, для второго 0,8, для третьего 0,8 и для четвертого 0,99. Случайно выбранный телевизор в течение года вышел из строя. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

5.16. Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трёх подгрупп. В первой подгруппе 3 человека, во второй 5 и в третьей 2. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,7; эксперты второй подгруппы — с вероятностью 0,9; эксперты третьей подгруппы — с вероятностью 0,8. Наудачу вызванный эксперт принимает 5 независимых решений. Найти вероятность того, что: а) ровно 4 решения приняты верно; б) принимал решения эксперт из первой подгруппы, если 4 решения приняты верно.

5.17. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,12. Куплены 14 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

5.18. Пару игральных костей подбрасывают 10 раз. Какова вероятность, что сумма очков, равная 10, выпадет более 2 раз?

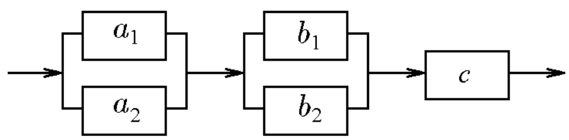
5.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,003. Поступило 600 вызовов. Определить вероятность того, что будет более 2 «сбоев».

5.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 200 независимых испытаний равна 0,3. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $70 \leqslant m \leqslant 120$.

5.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 5 нестандартных, выбраны случайным образом 7 изделий для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 7 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 6

6.1. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_b состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

6.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}8$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c) = 0{,}85$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

6.3. Установить, справедливо ли соотношение $(A - B) + (B - C) = A - C$.

6.4. Из полной колоды карт (36 листов) вынимаются 4 карты. Найти вероятность того, что все карты разной масти.

6.5. На стеллаже 12 учебников, 4 из них в переплёте. Наудачу выбирают 3 учебника. Какова вероятность, что хотя бы один из них будет в переплёте?

6.6. Бросают две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит 8; б) произведение числа очков не превосходит 8; в) произведение числа очков делится на 8.

6.7. В лифт 11-этажного дома вошли 4 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, двое вышли на одном этаже.

6.8. В круге радиуса 12 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны 2,39 и 5,57.

6.9. На плоскость, разграфленную параллельными линиями с шагом 1 см, бросают монету диаметром 1,4 см. Определить вероятность того, что она пересечёт только одну линию.

6.10. Два судна могут подойти к причалу в любое время в течение суток независимо. На причале одно место для разгрузки. Разгрузка длится 2 часа. Какова вероятность того, что одному из судов придётся ждать.

6.11. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,01. Сколько надо купить билетов, чтобы выиграть хотя бы на один с вероятностью 0,9?

6.12. В двух партиях доброкачественных изделий 86% и 32% соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное?

6.13. Бросают две игральных кости. Событие $A = \{$на первой кости выпало нечётное число очков$\}$, событие $B = \{$на второй кости выпало нечётное число очков$\}$, событие $C = \{$сумма очков на обеих костях нечётна$\}$. Выяснить зависимы или нет события A, B, C а) попарно; б) в совокупности.

6.14. Пассажир за получением билета может обратиться в одну из касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, во вторую — 0,35 и в третью — 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3, для второй 0,4, для третьей 0,6. Найти вероятность того, что пассажир купит билет.

6.15. Из множества чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадёт в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

6.16. Имеются 3 урны. В первой из них 4 белых и 5 чёрных шаров, во второй 7 белых и 3 чёрных шара, в третьей 2 белых и 4 чёрных шара. Некто наугад выбирает одну из урн и вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут из третьей урны.

6.17. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 6 раз. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 5 раз.

6.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,06 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,2 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,74 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 14 билетов. Определить вероятность получения 2 крупных выигрышей и 3 мелких.

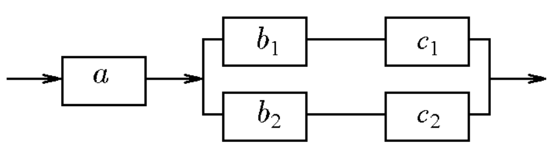
6.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,002. Поступило 600 вызовов. Определить вероятность того, что будет не более 1 «сбоя».

6.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 300 независимых испытаний равна 0,3. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $65 \leqslant m \leqslant 90$.

6.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 4 конденсаторов. Для контроля выбирают 8 конденсаторов. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Вариант № 7

7.1. Система S состоит из двух независимых подсистем S_a и S_{bc}. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_{bc} состоит из двух независимых дублирующих блоков bc_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Блок bc_k состоит из последовательно соединенных блоков b_k и c_k.



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

7.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0{,}95$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}8$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

7.3. Доказать тождество $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$.

7.4. Несколько раз бросают игральную кость. Какова вероятность того, что шесть очков появится впервые при третьем бросании?

7.5. На карточках написаны буквы К, А, Р, Т, О, Ч, К, А. Карточки перемешивают и кладут в порядке их появления. Какова вероятность того, что получится слово «КАРТОЧКА»?

7.6. Колода карт (36 листов) делится на три равные части. Какова вероятность, что в каждой пачке будет хотя бы по одному тузу?

7.7. В лифт 12-этажного дома вошли 4 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере трое вышли на одном этаже.

7.8. На отрезке $[0, 1]$ случайным образом выбираются две точки: x и η. Событие A: $x > 1/2$, событие B: $\eta > 2/3$. Определить вероятности событий AB и $A + B$.

7.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 50 мин. Одно из событий длится 10 мин, другое 5 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

7.10. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата 4 см бросают монету радиусом 1,5 см. Определить вероятность того, что монета целиком попадёт на чёрное поле.

7.11. Вероятность того, что стрелок попадёт хотя бы один раз при трёх выстрелах, равна 0,992. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле, предполагая её постоянной при каждом выстреле.

7.12. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает орёл. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т, д. Найти вероятность события «выиграл A не позднее 4-го броска». Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

7.13. Бросают три игральных кости. Событие A: {на первой и второй костях выпало одинаковое число очков}, событие B: {на первой и третьей костях выпало одинаковое число очков}, событие C: {на второй и третьей костях выпало одинаковое число очков}. Выяснить зависимы или нет события A, B и C а) попарно; б) в совокупности.

7.14. Перед посевом 95% семян обрабатываются специальным раствором. Всхожесть семян после обработки 99%, необработанных 85%. а) Какова вероятность того, что случайно взятое семя взойдёт? б) Случайно взятое семя взошло. Какова вероятность того, что оно выращено из обработанного семени?

7.15. В урне 7 белых и 4 чёрных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался чёрным. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, тоже чёрный.

7.16. Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трёх подгрупп. В первой подгруппе 2 человека, во второй 3 и в третьей 5. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,5, эксперты второй подгруппы — с вероятностью 0,6, эксперты третьей подгруппы — с вероятностью 0,7. Наудачу вызванный эксперт принимает 7 независимых решений. Найти вероятность того, что: а) ровно 5 решений приняты верно; б) принимал решения эксперт из первой подгруппы, если 5 решений приняты верно.

7.17. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 3 раза. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 5 раз.

7.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,08 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,22 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 10 билетов. Определить вероятность получения 2 крупных выигрышей и 1 мелкого.

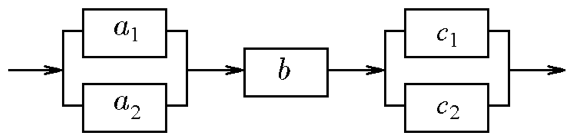
7.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,001. Поступило 700 вызовов. Определить вероятность того, что будет более 2 «сбоев».

7.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 120 независимых испытаний равна 0,3. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leqslant 30$.

7.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 3 нестандартных, выбраны случайным образом 9 изделий для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 9 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 8

8.1. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_c состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и c_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

8.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}8$, $P(b) = 0{,}95$; $P(c_k) = 0{,}85$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

8.3. Упростить и изобразить графически $\overline{\overline{(A - B) + C} - ABC}$.

8.4. В урне имеется 5 чёрных и 7 красных шаров. Последовательно (без возвращения) извлекается три шара. Найти вероятность того, что а) все три шара будут красными, б) все три шара будут чёрными.

8.5. Шесть шариков случайным образом разбрасывают по трем лункам. Каждый шарик с равной вероятностью и независимо от других попадает в любую лунку. Определить вероятность того, что в первой лунке будет один шарик, во второй два шарика, а в третьей три шарика.

8.6. Из полной колоды карт (36 листов) вынимают сразу 4 карты. Найти вероятность того, что все эти карты будут одной масти.

8.7. На шахматную доску произвольно ставится два слона: белый и чёрный. Какова вероятность того, что слоны побьют друг друга?

8.8. Внутри квадрата с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ наудачу выбирается точка $M(x, y)$. Найти вероятность события $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 0{,}36\}$.

8.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 100 мин. Одно из событий длится 8 мин, другое 12 мин. Определить вероятность того, что события а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

8.10. Плоскость разграфлена на квадраты со стороной 3 см. На плоскость бросают монету диаметром 1 см. Определить вероятность того, что монета пересечёт ровно три квадрата.

8.11. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,68, вторым — 0,45. Первый сделал 1, второй 2 выстрела. Определить вероятность того, что цель поражена.

8.12. Вероятность сдать экзамен в одной попытке равна 0,1 и не меняется от попытки к попытке. Сколько надо сделать попыток, чтобы сдать экзамен с вероятностью, не меньшей 0,99.

8.13. Точка с координатой ξ выбирается наудачу на отрезке $[0; 1]$ и независимо от неё точка с координатой η выбирается наудачу на отрезке $[0; 2]$. Проверить, являются ли три события $\{\xi + \eta < 1\}$, $\{\xi > 1/2\}$ и $\{\eta < 1\}$ независимыми в совокупности.

8.14. В первом ящике из 6 шаров 4 красных и 2 чёрных, во втором ящике из 7 шаров 2 красных и 5 чёрных. Из первого ящика во второй переложили один шар, затем из второго в первый переложили один шар. Найти вероятность того, что шар, извлечённый после этого из первого ящика, чёрный.

8.15. Покупатель с равной вероятностью посещает три магазина. Вероятность того, что покупатель купит товар в первом магазине, равна 0,4, втором 0,6 и третьем 0,8. а) Определить вероятность того, что покупатель купит товар в каком-то магазине. б) Покупатель купил товар. Найти вероятность того, что он купил его во втором магазине.

8.16. В первой урне 13 белых и 12 чёрных шаров, во второй 4 белых и 6 чёрных. Из первой во вторую переложены 3 шара, затем из второй урны извлечены два шара. Определить вероятность того, что выбранные из второй урны шары — белые.

8.17. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 8 раз. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 4 раза.

8.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,05 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,35 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,6 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 12 билетов. Определить вероятность получения ровно 2 крупных выигрышей и 1 мелкого.

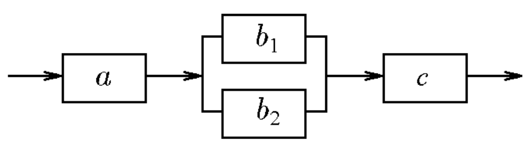
8.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,002. Поступило 400 вызовов. Определить вероятность того, что будет более 3 «сбоев».

8.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,4. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leqslant 25$.

8.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 7 конденсаторов. Для контроля выбирают 5 конденсаторов. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Вариант № 9

9.1. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_b состоит из двух независимых дублирующих блоков b_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

9.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0{,}95$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c) = 0{,}99$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

9.3. Упростить и изобразить графически $A - BC + \overline{A + BC}$.

9.4. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 7 цифр. Определить вероятность того, что все цифры в нём различны.

9.5. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что: а) хотя бы на одной появится 2 очка, б) на них выпадет по одинаковому числу очков.

9.6. Имеются 3 изделия 1-го сорта, 2 изделия 2-го сорта, 3 изделия 3-го сорта и 2 изделия 4-го сорта. Для контроля наудачу выбирается 7 изделий. Определить вероятность того, что среди них ровно 2 изделия 1-го сорта, 1 изделие 2-го сорта, 3 изделия 3-го сорта и 1 изделие 4-го сорта.

9.7. В лифт 14-этажного дома вошли 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже.

Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) все вышли на одном этаже.

9.8. В круге радиуса 11 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны 2,29 и 3,52.

9.9. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + 2bx + c$ вещественны, если коэффициенты b и c любые числа, по абсолютной величине не превышающие 1.

9.10. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 130 мин. Одно из событий длится 20 мин, другое 23 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

9.11. В мешке смешаны нити трёх цветов: 30% белых, 50% красных, остальные зелёные. Определить вероятность того, что при последовательном вытягивании наугад трёх нитей окажется, что все они одного цвета.

9.12. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает орёл. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т, д. Найти вероятность события «выиграл A не позднее 6-го броска». Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

9.13. Тетраэдр, три грани которого окрашены соответственно в красный, желтый и синий цвета, а четвертая грань содержит все три цвета, бросается наудачу на плоскость. События A, B, C состоят в том, что тетраэдр упал на грань, содержащую соответственно красный, желтый, либо синий цвет. Проверить, зависимы ли в совокупности события A, B, C.

9.14. В первой урне 1 белый и 5 чёрных шаров, во второй 1 белый и 6 чёрных. Из первой во вторую переложены 4 шара, затем из второй урны извлечены два шара. Определить вероятность того, что выбранные из второй урны шары — белые.

9.15. В магазин поступают однотипные изделия с трёх заводов, причём первый завод поставляет 10 % изделий, второй 15%, третий 75% изделий. Среди изделий 1-го завода первосортных 70%, второго завода — 55%, третьего завода — 20%. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено третьим заводом.

9.16. Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трёх подгрупп. В первой подгруппе 2 человека, во второй 3 и в третьей 5. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,8; эксперты второй подгруппы — с вероятностью 0,6; эксперты третьей подгруппы — с вероятностью 0,55. Наудачу вызванный эксперт принимает 3 независимых решения. Найти вероятность того, что: а) ровно 3 решения приняты верно; б) принимал решения эксперт из третьей подгруппы, если 3 решения приняты верно.

9.17. Игральную кость бросают 10 раз. Определить вероятность того, что: а) шесть очков появилось хотя бы один раз; б) шесть очков не появилось ни разу; в) шесть очков появилось ровно два раза.

9.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,06 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,14 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,8 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 14 билетов. Определить вероятность получения 1 крупного выигрыша и 2 мелких.

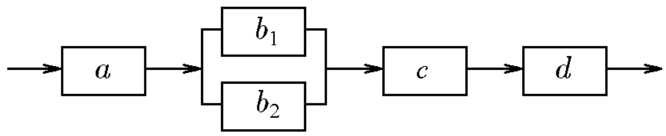
9.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,002. Поступило 800 вызовов. Определить вероятность того, что будет не менее 3 «сбоев».

9.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,4. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $30 < m < 40$.

9.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 4 нестандартных, выбраны случайным образом 6 изделий для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 6 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 10

10.1. Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_b состоит из двух независимых дублирующих блоков b_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

10.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0{,}95$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c) = 0{,}8$; $P(d) = 0{,}8$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

10.3. Для событий A, B, C справедливо: $A + B = C$. Можно ли утверждать, что $B = C - A$? Ответ обосновать.

10.4. Из колоды, содержащей 36 карт, вынимается наугад 3. Найти вероятность того, что среди них два туза и пиковый король.

10.5. На каждой из 11 карточек написана одна из следующих букв: А, Б, Р, А, К, А, Д, А, Б, Р, А. Карточки перемешаны. Определить вероятность того, что из вынутых наудачу и положенных в ряд карточек получится слово «АБРАКАДАБРА».

10.6. 10 студентов расселят случайным образом в две четырехместных и одну двухместную комнату. Какова вероятность, что два конкретных студента окажутся в двухместной комнате?

10.7. В лифт 14-этажного дома вошли 3 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) все вышли на одном этаже.

10.8. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная внутрь круга, окажется внутри квадрата.

10.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 30 мин. Одно из событий длится 2 мин, другое 10 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

10.10. Плоскость разграфлена на квадраты со стороной 4 см. На плоскость бросают монету диаметром 1,5 см. Какова вероятность того, что она пересечёт четыре квадрата?

10.11. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,13. Сколько надо купить билетов, чтобы выиграть хотя бы на один с вероятностью не меньше 0,8?.

10.12. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает орёл. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т, д. Найти вероятность события «выиграл A не позднее 7-го броска». Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

10.13. Внутри квадрата с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ наудачу выбирается точка $M(x, y)$. При каких значениях q независимы события $A = \{|x - y| > q\}$ и $B = \{x + y < 3q\}$?

10.14. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 10 стандартных, во втором 30 деталей, из них 25 стандартных, в третьем 10 деталей, из них 8 стандартных. Из случайно взятого ящика наудачу взята одна деталь, которая оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она взята из второго ящика.

10.15. В первой урне находятся 1 белый и 4 чёрных шара, во второй 1 белый и 2 чёрных. Из первой во вторую переложены 3 шара, затем из второй урны извлечён шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый.

10.16. Три стрелка стреляют по мишени (каждый по разу). Вероятности попадания для стрелков равны соответственно 0,5, 0,6 и 0,7. После стрельбы зафиксированы две пробоины в мишени. Какова вероятность, что промахнулся третий стрелок?

10.17. Пару игральных костей бросают 12 раз. Определить вероятность того, что сумма очков, меньшая четырех, выпадет более трёх раз.

10.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,12 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,24 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,64 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 8 билетов. Определить вероятность получения 2 крупных выигрышей и 2 мелких.

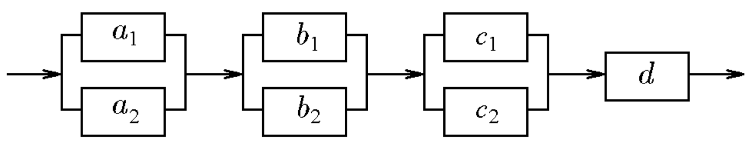
10.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,006. Поступило 100 вызовов. Определить вероятность того, что будет менее 2 «сбоев».

10.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 200 независимых испытаний равна 0,7. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m < 120$.

10.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 3 конденсатора. Для контроля выбирают 7 конденсаторов. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Вариант № 11

11.1. Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a , S_b, S_c состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k, b_k и c_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

11.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}8$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}85$; $P(d) = 0{,}95$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

11.3. Для событий A, B, C справедливо $A + B = C$. В каком случае можно утверждать, что $B = C - A$? Ответ обосновать.

11.4. В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд. Какова вероятность того, что 2 наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

11.5. В организации работают 12 мужчин и 8 женщин. Для них выделены 3 премии. Определить вероятность того, что премию получат: а) двое мужчин и одна женщина; б) только женщины; в) хотя бы один мужчина.

11.6. Несколько раз бросают игральную кость. Какова вероятность того, что шесть очков появятся впервые при шестом бросании?

11.7. Четыре шарика случайным образом разбрасывают по семи лункам. Каждый шарик с равной вероятностью и независимо от других попадает в любую лунку. Определить вероятность того, что: а) все шарики попадут в разные лунки; б) хотя бы два шарика попадут в одну лунку.

11.8. На отрезке $[0,1]$ случайным образом выбираются три числа x, y и z. Найти вероятность того, что их сумма больше 1.

11.9. В круге с проведённым диаметром случайным образом выбирается хорда перпендикулярно этому диаметру. Определить вероятность того, что эта хорда будет меньше радиуса круга.

11.10. Два судна могут подойти к причалу в любое время в течение суток независимо. На причале одно место для разгрузки. Разгрузка длится 4 часа. Какова вероятность того, что одно из судов будет ждать более часа?

11.11. В двух партиях доброкачественных изделий 82% и 36% соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное?

11.12. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает орёл. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т, д. Найти вероятность события «выиграл B не позднее 3-го броска». Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

11.13. На отрезок $[0,2]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами ξ и η. Проверить, являются ли события $\xi \leqslant 1$ и $\min(\xi,\eta) > 1/2$ независимыми.

11.14. Из 1000 ламп 810 принадлежат 1-й партии, 70 второй, остальные третьей. В первой партии 10%, во второй 1%, в третьей 2% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа бракованная.

11.15. В альбоме 4 чистых и 8 гашеных марок. Из них наудачу извлекают 6 марок, подвергают специальному гашению и возвращают в альбом. После этого вновь наудачу извлекают 4 марки. Определить вероятность того, что все они чистые.

11.16. Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трёх подгрупп. В первой подгруппе 2 человека, во второй 7 и в третьей 3. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,85; эксперты второй подгруппы — с вероятностью 0,5; эксперты третьей подгруппы — с вероятностью 0,6. Наудачу вызванный эксперт принимает 6 независимых решений. Найти вероятность того, что: а) ровно 4 решения приняты верно; б) принимал решения эксперт из третьей подгруппы, если 4 решения приняты верно.

11.17. Игральную кость бросают 24 раза. Определить вероятность того, что: а) шесть очков появилось хотя бы один раз; б) шесть очков не появилось ни разу; в) шесть очков появилось больше двух раз.

11.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,35 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,55 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 10 билетов. Определить вероятность получения ровно 0 крупных выигрышей и 4 мелких.

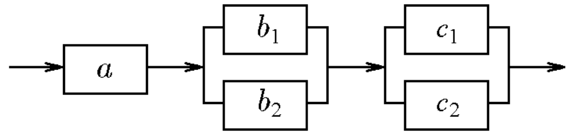
11.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,007. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность того, что будет не менее 2 «сбоев».

11.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,7. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leqslant 295$.

11.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 5 нестандартных, выбраны случайным образом 6 изделий для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 6 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 12

12.1. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_c. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_b и S_c состоят из двух независимых дублирующих блоков b_k и c_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

12.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}85$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}75$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

12.3. В каком случае справедливо $B = A + (B - A)$? Ответ обосновать.

12.4. Из колоды, содержащей 54 карты (2 Джокера), вынимают наугад 5. Найти вероятность комбинации «каре»: четыре карты одного номинала (Джокер заменяет любую карту).

12.5. Готовясь к вступительному экзамену по математике, абитуриент должен подготовить 20 вопросов по элементам математического анализа и 25 по геометрии. Однако он успел подготовить только 15 вопросов по элементам математического анализа и 20 по геометрии. Билет содержит 3 вопроса, 2 из них — по элементам математического анализа и 1 — по геометрии. Какова вероятность, что: а) студент сдаст экзамен на отлично (ответит на все три вопроса); б) на хорошо (ответит на любые два вопроса)?

12.6. На карточках написаны буквы К, А, Р, Т, О, Ч, К, А. Карточки перемешивают и кладут в порядке их вытаскивания. Какова вероятность того, что при вытаскивании 5 карточек получится слово «КАРТА»?

12.7. В лифт 8-этажного дома вошли 7 пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) все вышли на одном этаже.

12.8. В сфере радиуса 3 случайно и независимо друг от друга разбросаны 5 точек. Найти вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей точки не меньше 2.

12.9. Студент и студентка условились встретиться в определённом месте между девятью и десятью часами вечера. Студентка ждёт десять минут и уходит, а студент ждёт 20 минут. Чему равна вероятность встречи, если каждый из них в течение указанного часа может прийти в любое время?

12.10. Электрон вылетает из случайной точки прямолинейной нити накала и движется по перпендикуляру к нити. С какой вероятностью он свободно пройдёт через сетку, окружающую нить и имеющую вид винтовой линии радиуса R, толщины δ и шага H?

12.11. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,24, вторым — 0,12. Первый сделал 3, второй 5 выстрелов. Определить вероятность того, что цель поражена.

12.12. Урна содержит 5 шаров с номерами от 1 до 5. Шары извлекают по одному, запоминают их номера и возвращают в урну. Рассматриваются следующие события: A — номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1,2,...,5; B — хотя бы один раз совпадают номер шара и порядковый номер извлечения; C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий A, B, C.

12.13. Точку с координатой ξ выбирают наудачу на отрезке $[-1, 1]$ и независимо от неё точку с координатой η выбирают наудачу на отрезке $[0, 2]$. Проверить, являются ли три события $\{\xi + \eta < 1\}$, $\{\xi > 0\}$ и $\{\eta < 1\}$ независимыми в совокупности.

12.14. Из 5 винтовок, из которых 3 снайперские и 2 обычные, наудачу выбирается одна, и из неё производится выстрел. Найти вероятность попадания, если вероятность попадания из снайперской винтовки 0,95, а из обычной 0,7.

12.15. В альбоме 12 чистых и 5 гашеных марок. Из них наудачу извлекают 6 марок, подвергают специальному гашению и возвращают в альбом. После этого вновь наудачу извлекают 3 марки. Определить вероятность того, что все они чистые.

12.16. Имеется три урны. В первой 1 белый и 5 чёрных шаров, во второй и третьей по 4 белых и 3 чёрных шара. Из случайно выбранной урны извлекают шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар взят из первой урны?

12.17. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,02. Куплены 120 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

12.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,12 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,38 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,6 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 13 билетов. Определить вероятность получения ровно 2 крупных выигрышей и 0 мелких.

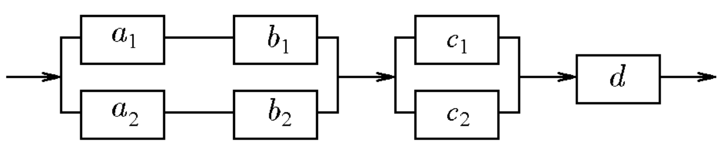
12.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,0085. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность того, что будет не менее 5 «сбоев».

12.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 600 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \geqslant 500$.

12.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 3 конденсатора. Для контроля выбирают 5 конденсаторов. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Вариант № 13

13.1. Система S состоит из трех независимых подсистем S_{ab}, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_{ab}, S_c состоят из двух независимых дублирующих блоков ab_k и c_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Блок ab_k состоит из последовательно соединенных блоков a_k и b_k.



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

13.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}85$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}95$; $P(d) = 0{,}99$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

13.3. Установить, справедливо ли соотношение $(A - \bar{B}) + (A - B) = A$.

13.4. Из 30 вопросов, входящих в экзаменационный билет, студент подготовил 20. Найти вероятность того, что студент ответил правильно на экзаменационный билет, состоящий из 3-х вопросов.

13.5. Найти вероятности того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

13.6. В коробке из 25 изделий 15 повышенного качества. Наудачу извлекают 3 изделия. Определить вероятность того, что: а) одно из них повышенного качества; б) все три изделия повышенного качества; в) хотя бы одно изделие повышенного качества.

13.7. Четыре шарика случайным образом разбрасывают по четырем лункам. Каждый шарик с равной вероятностью и независимо от других попадает в любую лунку. Определить вероятность того, что все шарики окажутся в одной из лунок.

13.8. На отрезке $[0,1]$ случайным образом выбирают два числа x и y. Определить вероятность того, что сумма этих чисел больше 1, а абсолютная величина разности меньше 0,5.

13.9. Два парохода независимо подходят к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов равновозможно в течение данных суток. Время стоянки первого парохода один час, а второго — два часа. Какова вероятность, что одному из пароходов придётся ожидать освобождения причала.

13.10. В круг вписан правильный шестиугольник. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная внутрь круга, окажется внутри шестиугольника.

13.11. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,21, вторым — 0,1. Первый сделал 2, второй 5 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

13.12. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает орёл. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т, д. Найти вероятность события «выиграл B не позднее 5-го броска». Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

13.13. Точку с координатами (x, y) бросают наудачу в треугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Являются ли события $A = \{x < 1/2\}$ и $B = \{y < 1/2\}$ независимыми?

13.14. В первой урне 7 белых и 2 чёрных шара, во второй 3 белых и 1 чёрный. Из первой во вторую переложены 4 шара, затем из второй урны извлечён шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый.

13.15. Два предприятия выпускают однотипные изделия, причём второе выпускает 55% всех изделий. Вероятность выпуска нестандартного изделия первым предприятием 0,1, вторым 0,15. а) Определить вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется нестандартным. б) Взятое изделие оказалось нестандартным. Какова вероятность, что оно выпущено на втором предприятии?

13.16. Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трёх подгрупп. В первой подгруппе 6 человек, во второй 2 и в третьей 2. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,7; эксперты второй подгруппы — с вероятностью 0,8; эксперты третьей подгруппы — с вероятностью 0,85. Наудачу вызванный эксперт принимает 6 независимых решений. Найти вероятность того, что: а) ровно 4 решения приняты верно; б) принимал решения эксперт из второй подгруппы, если 4 решения приняты верно.

13.17. Пару игральных костей бросают 20 раз. Определить вероятность того, что сумма очков, равная 12, появилась хотя бы два раза.

13.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,02 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,18 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,8 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 15 билетов. Определить вероятность получения ровно 0 крупных выигрышей и 3 мелких.

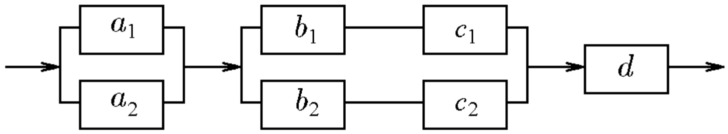
13.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,002. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность того, что будет менее 4 «сбоев».

13.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 700 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $545 \leqslant m \leqslant 575$.

13.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 5 нестандартных, выбраны случайным образом 4 изделия для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 4 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 14

14.1. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_{bc} и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы



соединены последовательно). Подсистемы S_a, S_{bc} состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и bc_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Блок bc_k состоит из последовательно соединенных блоков b_k и c_k.

Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

14.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}85$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}95$; $P(d) = 0{,}7$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

14.3. Установить, справедливо ли соотношение $A+B+C = A+(B-AB)+(C-AC)$.

14.4. Из колоды, содержащей 36 карт, вынимают наугад 4. Найти вероятность того, что среди них три туза и шестерка пик.

14.5. В урне имеются 5 чёрных и 7 красных шаров. Последовательно извлекаются четыре шара с запоминанием цвета каждого шара и возвращением его в урну. Найти вероятность того, что а) все четыре шара будут красными, б) цвет шаров будет чередоваться, начиная с красного.

14.6. Из последовательности чисел $1, 2, \ldots, n$ наугад выбирают два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$ — произвольное целое число?

14.7. В лифт 12-этажного дома вошли 7 пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) все вышли на одном этаже.

14.8. В круге радиуса 10 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны 3,25 и 5,22.

14.9. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + 2bx + c$ вещественны, если коэффициенты b и c — любые числа, по абсолютной величине не превышающие 2.

14.10. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 60 мин. Одно из событий длится 7 мин, другое 13 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

14.11. Игральная кость сделана так, что вероятность выпадения определённого числа очков пропорциональна числу очков. Какова вероятность, что при двух подбрасываниях такой кости оба раза выпадет шесть очков?

14.12. Урна содержит 11 шаров с номерами от 1 до 11. Шары извлекают по одному, запоминают их номера и возвращают в урну. Рассматриваются следующие события: A — номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1,2,...,11; B — хотя бы один раз совпадают номер шара и порядковый номер извлечения; C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий A, B, C. Найти предельные значения вероятностей при числе шаров в урне стремящемся к бесконечности.

14.13. Имеются три попарно независимых события с одной и той же вероятностью p. Предполагая, что эти события одновременно произойти не могут, найти наибольшее возможное значение p.

14.14. В первой урне 7 белых и 7 чёрных шаров, во второй 3 белых и 5 чёрных. Из первой урны во вторую переложены 2 шара, затем из второй извлечён шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый.

14.15. Семена для посева в хозяйство поступают из трёх семеноводческих хозяйств.

Причём первое и второе хозяйства присылают по 40% всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства 90%, второго 85%, третьего 95%. а) Определить вероятность того, что наудачу взятое семя не взойдёт. б) Наудачу взятое семя не взошло. Какова вероятность, что оно получено от второго хозяйства?

14.16. Вероятность того, что мишень поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,45, вторым — 0,72. Первый сделал 3, второй 2 выстрела. После стрельбы в мишени обнаружены три пробоины. Определить вероятность того, что первый стрелок попал только один раз.

14.17. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,07. Куплены 50 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,05 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,25 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 8 билетов. Определить вероятность получения ровно 2 крупных выигрышей и 2 мелких.

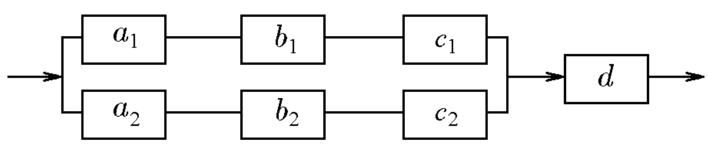
14.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,0025. Поступило 300 вызовов. Определить вероятность того, что будет более 1 «сбоя».

14.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,15. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $45 \leqslant m \leqslant 60$.

14.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 4 конденсатора. Для контроля выбирают 3 конденсатора. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Вариант № 15

15.1. Система S состоит из двух независимых подсистем S_{abc} и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_{abc} состоит из двух независимых дублирующих блоков abc_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Блок abc_k состоит из трех последовательно соединенных блоков a_k, b_k и c_k.



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

15.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}9$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}8$; $P(d) = 0{,}75$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

15.3. Установить, справедливо ли соотношение $A + B + C = A + (B - AB) + ((C - AC) - BC)$.

15.4. В урне имеется 10 белых, 5 чёрных и 15 красных шаров. Извлекаются последовательно 3 шара. Рассматриваются 2 события: A — хотя бы один шар из трёх вынутых красный; B — хотя бы один вынутый шар белый. Найти вероятность события $C = A \cdot B$.

15.5. В двух группах обучается по 25 студентов. В первой группе сессию на «отлично» сдали 7 человек, во второй 4 человека. Из каждой группы наудачу вызывают по одному студенту. Какова вероятность того, что: а) оба студента отличники; б) только один отличник; в) хотя бы один отличник.

15.6. Гардеробщица одновременно выдала номерки пяти лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы, и повесила их наугад. Найти вероятность того, что она каждому выдаст его собственную шляпу.

15.7. В лифт 9-этажного дома вошли 5 пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, трое вышли на одном этаже.

15.8. В отрезок единичной длины наудачу бросается 5 точек. Определить вероятность того, что две точки будут находиться от правого края отрезка на расстоянии, меньшем $1/2$, а три — на расстоянии, большем $1/2$.

15.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 100 мин. Одно из событий длится 10 мин, другое 6 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

15.10. Плоскость разбита параллельными линиями с шагом 1 см. На плоскость бросают монету диаметром 1,3 см. Определить вероятность того, что она пересечёт две линии.

15.11. В двух партиях доброкачественных изделий 71% и 47% соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное?

15.12. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,61, вторым — 0,65. Первый сделал 2, второй 3 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

15.13. Точку с координатами (x, y) бросают наудачу в квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$. Являются ли события $A = \{x < 1/2\}$ и $B = \{y < 1/2\}$ независимыми?

15.14. В альбоме 8 чистых и 5 гашеных марок. Из них наудачу извлекают 4 марки, подвергают спецгашению и возвращают в альбом. После этого вновь наудачу извлекают 4 марки. Определить вероятность того, что все они чистые.

15.15. В магазин поступают однотипные изделия с трёх заводов, причём первый завод поставляет 50% изделий, второй — 30%, а третий — 20% изделий. Среди изделий 1-го завода первосортных 70%, второго — 80%, третьего — 90%. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено первым заводом.

15.16. Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трёх подгрупп. В первой подгруппе 2 человека, во второй 5 и в третьей 3. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,7; эксперты второй подгруппы — с вероятностью 0,8; эксперты третьей подгруппы — с вероятностью 0,6. Наудачу вызванный эксперт принимает 4 независимых решения. Найти вероятность того, что: а) ровно 3 решения приняты верно; б) принимал решения эксперт из первой подгруппы, если 3 решения приняты верно.

15.17. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 4 раза. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 2 раза.

15.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,2 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 15 билетов. Определить вероятность получения 1 крупного выигрыша и 2 мелких.

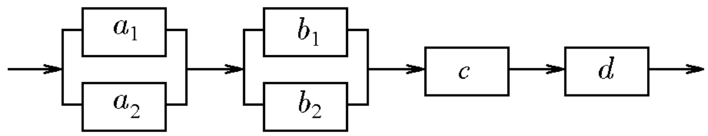
15.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,03. Поступило 100 вызовов. Определить вероятность ровно 3 «сбоев».

15.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leqslant 85$.

15.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 4 нестандартных, выбраны случайным образом 7 изделий для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 7 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 16

16.1. Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_b состоят из двух независимых дублирующих блоков a_k и b_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

16.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}8$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c) = 0{,}85$; $P(d) = 0{,}7$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

16.3. Установить, справедливо ли соотношение $A - (B - C) = (A - B) + C$.

16.4. Из 15 строительных рабочих 10 — штукатуры, а 5 — маляры. Наудачу отбирается бригада из 5 рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет 3 маляра и 2 штукатура?

16.5. Из колоды, содержащей 52 карты (без джокеров), вынимаются наугад 5. Найти вероятность того, что из этих карт можно составить комбинацию «флешьрояль» (карты одной масти по порядку).

16.6. Бросают две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит 4; б) произведение числа очков не превосходит 4; в) произведение числа очков делится на 4.

16.7. В лифт 7-этажного дома вошли 5 пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере двое вышли на одном этаже.

16.8. В круге радиуса 10 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она не попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны 2,47 и 3,58.

16.9. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + 2bx + c$ вещественны, если коэффициенты b и c любые числа, по абсолютной величине не превышающие $1/2$.

16.10. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 140 мин. Одно из событий длится 10 мин, другое 15 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

16.11. В двух партиях доброкачественных изделий 78% и 39% соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное?

16.12. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает орёл. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т, д. Найти вероятность события «выиграл A до 5-го броска». Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

16.13. Выяснить, какими должны быть события A и B, чтобы события $A + B$ и AB были независимыми.

16.14. В магазин поступают однотипные изделия с трёх заводов, причём первый завод поставляет 60% изделий, второй 30%, а третий 10% изделий. Среди изделий

1-го завода 50% первосортных, второго завода — 80%, третьего завода — 95%. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено первым заводом.

16.15. В сентябре вероятность дождливого дня равна 0,3. Команда «Политехник» выигрывает в ясный день с вероятностью 0,8, а в дождливый день эта вероятность равна 0,3. Известно, что в сентябре они выиграли некоторую игру. Какова вероятность, что в тот день а) шел дождь; б) был ясный день?

16.16. В первой урне 7 белых и 3 чёрных шара, во второй 5 белых и 1 чёрных. Из первой во вторую переложены 4 шара, затем из второй урны извлечён один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — белый.

16.17. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 7 раз. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 5 раз.

16.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,15 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,15 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 15 билетов. Определить вероятность получения 2 крупных выигрышей и 1 мелкого.

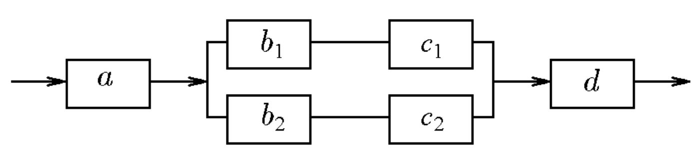
16.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,004. Поступило 500 вызовов. Определить вероятность менее 6 «сбоев».

16.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leqslant 75$.

16.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 5 конденсаторов. Для контроля выбирают 8 конденсаторов. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Вариант № 17

17.1. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_{bc} и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_{bc} состоит из двух независимых дублирующих блоков bc_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Блок bc_k состоит из последовательно соединенных блоков b_k и c_k.



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

17.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0{,}95$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}8$; $P(d) = 0{,}85$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

17.3. Установить, справедливо ли соотношение $A + (B - C) = (A + B) - (A + C)$.

17.4. Бросают две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит 3; б) произведение числа очков не превосходит 3; в) произведение числа очков делится на 3.

17.5. Из колоды, содержащей 54 карты (2 джокера), вынимают наугад 5. Найти вероятность того, что эти карты составляют комбинацию «покер» (пять карт одного номинала, джокер заменяет любую карту).

17.6. Среди 20 лотерейных билетов 7 выигрышных. Наудачу взяли 5 билетов. Определить вероятность того, что среди них хотя бы 3 выигрышных.

17.7. В лифт 8-этажного дома вошли 6 пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере трое вышли на одном этаже.

17.8. В отрезке единичной длины наудачу выбираются две точки. Определить вероятность того, что расстояние между точками превосходит 1/2.

17.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 100 мин. Одно из событий длится 2 мин, другое 20 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

17.10. Плоскость разграфлена параллельными линиями с шагом 2 см. На плоскость бросают монету диаметром 1,3 см. Определить вероятность того, что она не пересечёт ни одну из линий.

17.11. Игральная кость сделана так, что вероятность выпадения определённого числа очков пропорциональна числу очков. Какова вероятность выпадения трёх очков, если известно, что выпало нечётное число очков.

17.12. Урна содержит 5 шаров с номерами от 1 до 5. Шары извлекают по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: A — номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1,2,...,5; B — хотя бы один раз совпадают номер шара и порядковый номер извлечения; C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий A, B, C. Найти предельные значения вероятностей при числе шаров в урне, стремящемся к бесконечности.

17.13. Точку с координатой ξ выбирают наудачу на отрезке $[-1, 1]$ и независимо от нее точку с координатой η выбирают наудачу на отрезке $[0, 2]$. Проверить, являются ли три события $\{\xi + \eta < 0\}$, $\{\xi > 0\}$ и $\{\xi + 1 > \eta\}$ независимыми в совокупности.

17.14. Из 1000 ламп 170 принадлежат 1-й партии, 540 второй, остальные третьей. В первой партии 1%, во второй 5%, в третьей 6% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа бракованная.

17.15. У рыбака имеются 2 места ловли рыбы, которые он посещает с одинаковой вероятностью. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью 0,6, на втором — с вероятностью 0,7. Рыбак, выйдя на ловлю в одно из мест, 2 раза закинул удочку. Найти вероятность того, что рыба клюнет только один раз.

17.16. В альбоме 6 чистых и 8 гашеных марок. Из них наудачу извлекают 3 марки, подвергают специальному гашению и возвращают в альбом. После этого вновь наудачу извлекают 1 марку. Определить вероятность того, что она чистая.

17.17. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 4 раза. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 5 раз.

17.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,15 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,15 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 15 билетов. Определить вероятность получения ровно 0 крупных выигрышей и 5 мелких.

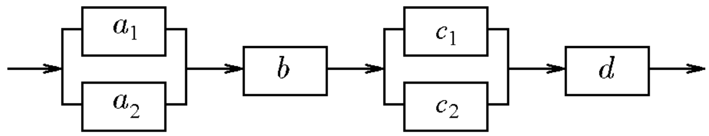
17.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,008. Поступило 500 вызовов. Определить вероятность не более 4 «сбоев».

17.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leqslant 75$.

17.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 4 нестандартных, выбраны случайным образом 9 изделий для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 9 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 18

18.1. Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_a и S_c состоят из двух независимых



дублирующих блоков a_k и c_k $(k = 1,2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).

Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

18.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a_k) = 0{,}8$; $P(b) = 0{,}95$; $P(c_k) = 0{,}85$; $P(d) = 0{,}9$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

18.3. Упростить и изобразить графически $\overline{AB - \overline{\overline{BC}}} - \overline{A\overline{\overline{BC}}}$.

18.4. Среди 20 лотерейных билетов 5 выигрышных. Наудачу взяли 5 билетов. Определить вероятность того, что среди них ровно 4 выигрышных.

18.5. В первой урне 10 шаров: 6 чёрного и 4 белого цвета; во второй 3 чёрных и 7 белых шаров. Из каждой урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что вынуты: а) 2 белых шара; б) хотя бы один шар чёрный; в) белый и чёрный в любой последовательности.

18.6. Из колоды, содержащей 52 карты (без джокеров), вынимают наугад 5. Найти вероятность того, что из этих карт можно составить комбинацию «фул-хаус» (две карты одного номинала + три карты другого номинала).

18.7. В лифт 9-этажного дома вошли 5 пассажиров. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере трое вышли на одном этаже.

18.8. В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит $1/9$.

18.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 120 мин. Одно из событий длится 10 мин, другое 30 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

18.10. Плоскость разбита на квадраты сеткой параллельных линий с шагом 2 см. На плоскость бросают монету диаметром 1,2 см. Найти вероятность того, что она не пересечёт ни одну из линий.

18.11. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведены два залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,46, второго 0,6.

18.12. Урна содержит 11 шаров с номерами от 1 до 11. Шары извлекают по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: A — номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1,2,...,11; B — хотя бы один раз совпадают номер шара и порядковый номер извлечения; C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий A, B, C. Найти предельные значения вероятностей при числе шаров в урне, стремящемся к бесконечности.

18.13. На отрезок $[0, 2]$ наудачу и независимо друг от друга брошены две точки с координатами ξ и η. Проверить, являются ли события $\{\eta - \xi \geqslant 1\}$ и $\{\xi < 1\}$ независимыми.

18.14. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата в 3 раза больше производительности второго. Вероятность изготовления не бракованной детали первым автоматом равна 0,95, а вторым 0,8. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной.

18.15. Из 1000 ламп 520 принадлежат 1-й партии, 390 второй, остальные третьей.

В первой партии 5%, во второй 3%, в третьей 2% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа бракованная.

18.16. Имеются три урны. В первой 3 белых и 2 чёрных шара, во второй и третьей по 4 белых и 3 чёрных шара. Из случайно выбранной урны извлекают шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар взят из третьей урны?

18.17. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплены 10 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

18.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,05 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,15 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,8 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 10 билетов. Определить вероятность получения 1 крупного выигрыша и 2 мелких.

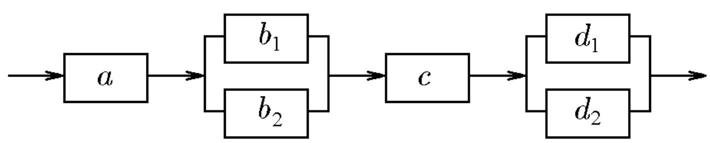
18.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,009. Поступило 600 вызовов. Определить вероятность того, что будет менее 3 «сбоев».

18.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 200 независимых испытаний равна 0,4. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $60 \leqslant m \leqslant 80$.

18.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 7 конденсаторов. Для контроля выбирают 6 конденсаторов. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Вариант № 19

19.1. Система S состоит из четырех независимых подсистем S_a, S_b, S_c и S_d. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистемы S_b и S_d состоят из двух независимых дублирующих блоков b_k и d_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах).



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

19.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0{,}95$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c) = 0{,}85$; $P(d_k) = 0{,}8$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

19.3. Упростить и изобразить графически $(A - B) + (C - B) + (\bar{A} - \bar{C})$.

19.4. Из колоды, содержащей 36 карты, вынимают наугад 3. Найти вероятность того, что все карты одной масти, причём одна из них туз.

19.5. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что: а) хотя бы на одной появится 2 очка; б) на них выпадет по одинаковому числу очков.

19.6. Имеются 4 изделия 1-го сорта, 2 изделия 2-го сорта, 2 изделия 3-го сорта и 2 изделия 4-го сорта. Для контроля наудачу выбираются 7 изделий. Определить вероятность того, что среди них ровно 3 изделия 1-го сорта, 1 изделие 2-го сорта, 2 изделия 3-го сорта и 1 изделие 4-го сорта.

19.7. Четыре шарика случайным образом разбрасывают по шести лункам. Каждый шарик с равной вероятностью и независимо от других попадает в любую лунку. Определить вероятность того, что в каждой лунке будет не более одного шарика.

19.8. В круге радиуса 9 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны 2,31 и 4,57.

19.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 200 мин. Одно из событий длится 10 мин, другое 25 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

19.10. На плоскость, разграфленную параллельными линиями с шагом 1,8 см, бросают монету диаметром 1,2 см. Определить вероятность того, что она не пересечёт ни одну из линий.

19.11. Сколько раз надо бросить монетку, чтобы появился орел с вероятностью не менее 0,999?

19.12. Урна содержит 7 шаров с номерами от 1 до 7. Шары извлекают по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события: A — номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1,2,...,7; B — хотя бы один раз совпадают номер шара и порядковый номер извлечения; C — нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения. Определить вероятности событий A, B, C. Найти предельные значения вероятностей при числе шаров в урне, стремящемся к бесконечности.

19.13. Верны ли равенства: а) $P(B/A) + P(B/\bar{A}) = 1$; б) $P(B/A) + P(\bar{B}/A) = 1$?

19.14. Имеются три урны. В первой 3 белых и 3 чёрных шара, во второй и третьей по 2 белых и 5 чёрных шара. Из случайно выбранной урны извлекают шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар взят из третьей урны?

19.15. Из 1000 ламп 360 принадлежат первой партии, 600 второй, остальные третьей. В первой партии 10%, во второй 5%, в третьей 1% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа бракованная.

19.16. Вероятность того, что мишень поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,65, вторым — 0,51. Первый сделал 2, второй 3 выстрела. После стрельбы в мишени обнаружены две пробоины. Определить вероятность того, что оба раза попал второй стрелок.

19.17. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 3 раза. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 6 раз.

19.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,05 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,25 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 12 билетов. Определить вероятность получения 3 крупных выигрышей и 3 мелких.

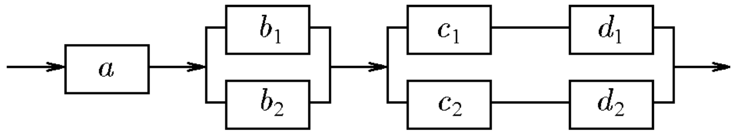
19.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,003. Поступило 600 вызовов. Определить вероятность того, что будет не более 2 «сбоев».

19.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 200 независимых испытаний равна 0,3. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leqslant 50$.

19.21. Из 100 изделий, среди которых имеется 3 нестандартных, выбраны случайным образом 6 изделий для проверки их качества. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, определить вероятность того, что среди выбранных 6 изделий окажется ровно 1 нестандартное изделие.

Вариант № 20

20.1. Система S состоит из трех независимых подсистем S_a, S_b и S_{cd}. Неисправность хотя бы одной подсистемы ведет к неисправности всей системы (подсистемы соединены последовательно). Подсистема S_b состоит из двух независимых дублирующих блоков b_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Подсистема S_{cd} состоит из двух независимых дублирующих блоков cd_k $(k = 1, 2)$ (схема параллельного соединения блоков в подсистемах). Блок bc_k состоит из последовательно соединенных блоков b_k и c_k.



Используя определения суммы и произведения событий, записать событие, состоящее в том, что а) система исправна, б) система неисправна. Для контроля использовать свойство противоположного события.

20.2. В условиях предыдущей задачи найти надежность системы — вероятность того, что система будет исправна в течении некоторого времени, если известны надежности блоков $P(a) = 0{,}95$; $P(b_k) = 0{,}9$; $P(c_k) = 0{,}8$; $P(d_k) = 0{,}85$. Для контроля использовать свойство связи вероятности события с вероятностью противоположного события.

20.3. Упростить и изобразить графически $\overline{\overline{AB + C} + AB\bar{C}}$.

20.4. На отдельных карточках написаны цифры $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Все карточки перемешивают, после чего наугад берут 5 карточек и раскладывают их в ряд. Определить вероятность того, что цифры будут расположены в порядке возрастания (например, 12345, 45678 и т.д.).

20.5. В группе из 25 человек 10 учится на «отлично», 8 на «хорошо» и 7 на «удовлетворительно». Найти вероятность того, что из взятых наугад 8 человек хотя бы 3 человека учатся на «отлично».

20.6. Из колоды 36 карт вынимают 10 карт. Одну из них смотрят; она оказывается тузом, после чего ее смешивают с остальными вынутыми. Затем вновь смотрят одну из 10 карт. Какова вероятность, что это туз (не обязательно тот же самый)?

20.7. В лифт 10-этажного дома вошли 4 пассажира. Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что: а) все вышли на разных этажах; б) трое вышли на одном этаже.

20.8. На отрезке $[0, 1]$ случайным образом выбирают три числа. Определить вероятность того, что одно из них больше, чем сумма двух других.

20.9. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени длиной 200 мин. Одно из событий длится 20 мин, другое 5 мин. Определить вероятность того, что события: а) «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».

20.10. Стеклянный стержень разбивается на три части. Найти вероятность того, что из полученных частей можно составить треугольник.

20.11. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, 0,66, вторым — 0,49. Первый сделал 3, второй 2 выстрела. Определить вероятность того, что цель не поражена.

20.12. Два игрока A и B поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадает орёл. Первый бросок делает игрок A, второй — B, третий — A и т.д. Найти вероятность события «выиграл A до 9-го броска». Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?

20.13. Точку с координатами (x, y) бросают наудачу в круг радиуса 1 с центром в начале координат. Являются ли события $A = \{x < 1/2\}$ и $B = \{y < 1/2\}$ независимыми?

20.14. Из 1000 ламп 700 принадлежат первой партии, 90 второй, остальные третьей. В первой партии 8%, во второй 3%, в третьей 1% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа бракованная.

20.15. В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй 4 белых и 4 чёрных. Из первой во вторую переложены 3 шара, затем из второй урны извлечён один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар — чёрный.

20.16. Для проверки геодезических работ назначена группа экспертов, состоящая из трёх подгрупп. В первой подгруппе 1 человек, во второй 2 и в третьей 7. Эксперты первой подгруппы принимают верное решение с вероятностью 0,65; эксперты второй подгруппы — с вероятностью 0,75; эксперты третьей подгруппы — с вероятностью 0,5.

Наудачу вызванный эксперт принимает 4 независимых решения. Найти вероятность того, что: а) ровно 4 решения приняты верно; б) принимал решения эксперт из второй подгруппы, если 4 решения приняты верно.

20.17. Монету бросают до тех пор, пока орёл не выпадает 6 раз. Определить вероятность того, что при этом решка выпадает 1 раз.

20.18. На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,06 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,2 мелкий выигрыш и с вероятностью 0,74 билет может оказаться без выигрыша. Куплены 14 билетов. Определить вероятность получения 0 крупных выигрышей и 3 мелких.

20.19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,002. Поступило 600 вызовов. Определить вероятность того, что будет не более 3 «сбоев».

20.20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 300 независимых испытаний равна 0,3. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leqslant 80$.

20.21. Из 100 конденсаторов за время T из строя выходят 3 конденсатора. Для контроля выбирают 8 конденсаторов. Используя классическое определение вероятности, формулу Бернулли, формулу Пуассона и локальную теорему Лапласа, найти вероятность того, что среди них за время T из строя выйдет ровно 1 конденсатор.

Случайные величины

Вариант № 1

1.1. Имеются 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Случайная величина ξ — число проб при открывании замка (испробованный ключ в последующих пробах не участвует). Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

1.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = A\cos(x)$ при $x \in [-\pi/2; \pi/2]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [-\pi/2; \pi/2]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]-3; \pi/4[$.

1.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -2, \\ Ax + B & \text{при } -2 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 4. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[-3; 1]$, г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

1.4. Случайная величина ξ может принимать два значения: 2 и -2 с равной вероятностью. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

1.5. При записи программы на неисправном накопителе появляется в среднем 4 ошибки (поток ошибок предполагается простейшим). Какова вероятность безошибочной записи? Сколько раз в среднем надо записывать программу, чтобы получить безошибочную запись?

1.6. Вероятность выиграть хотя бы на один билет из 100 в лотерею равна 0,8. Сколько в среднем из 100 билетов выигрышных? Каково наивероятнейшее число выигрышных билетов? Предполагается, что вероятность выигрыша на каждый билет одинакова.

1.7. Время работы элемента до отказа подчинено показательному закону распределения с параметром $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$. Найти среднее время между появлением двух смежных отказов и вероятность безотказной работы к моменту среднего времени после включения технического устройства.

1.8. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически: их масса есть нормальная случайная величина со средним 1.06 кг. Найти среднеквадратичное отклонение случайной величины — массы коробок, если известно, что 5% коробок имеют массу меньше 1 кг.

1.9. Случайная величина ξ распределена равномерно на интервале $]-\pi/2, \pi/2[$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \operatorname{tg}\xi$.

1.10. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-2;1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi^2$.

Вариант № 2

2.1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взяты 2 детали. Случайная величина ξ — число стандартных деталей в выборке. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

2.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = Ax^2$ при $x \in [-1;1]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [-1;1]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$, найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]1/2, 2[$.

2.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ: $F_\xi(x) = A + B\operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[-1, 1]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

2.4. Случайная величина ξ может принимать три значения: 1, 0 и -1 с равной вероятностью. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

2.5. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,9. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется найти среднее и дисперсию количества выданных стрелку патронов.

2.6. Из корзины, содержащей 8 белых шаров и 5 чёрных шаров, наудачу вынимаются 6 шаров. Найти среднее и дисперсию числа чёрных шаров в выборке.

2.7. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 100. Берутся на пробу 2 кубических дециметра воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.

2.8. Деталь изготавливается на станке. Ее размер ξ представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами $a = 20$ см, $\sigma = 0{,}2$ см. Найти вероятность того, что из трёх наугад выбранных деталей, размеры хотя бы одной отличаются от стандарта больше, чем на 0,5 см.

2.9. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$. Найти закон распределения обратной ей величины $\eta = 1/\xi$.

2.10. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-1, 2]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Вариант № 3

3.1. Производится три независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,4. Случайная величина ξ — число появлений события A в указанных испытаниях. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

3.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = Ax^3$ при $x \in [0, 3]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [0, 3]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]-1, 2[$.

3.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ A\sin x + B & \text{при } 0 < x \leqslant \pi/4, \\ 1 & \text{при } x \geqslant \pi/4. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[-1, 1/2]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

3.4. Случайная величина ξ может принимать значения $-2, -1, 1, 2$ с равной вероятностью. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

3.5. Вероятность сдать экзамен в одной попытке равна 0,2 и не меняется от попытки к попытке. Требуется найти среднее и дисперсию числа попыток, необходимых для сдачи экзамена.

3.6. В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени 7,5 секунд испускало в среднем 3,87 альфа-частиц. Найти вероятность того, что за 1 секунду это вещество испустит хотя бы одну альфа-частицу.

3.7. Сколько значений случайной величины ξ, распределённой по нормальному закону $N(25, 9)$ нужно взять, чтобы с вероятностью 0,99 хотя бы одно из них попало на интервал $]20, 28[$.

3.8. Продолжительность работы электролампы — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 0{,}02$ ч$^{-1}$. Перегоревшую лампу немедленно заменяют новой. Какова вероятность того, что за 100 часов лампу не придётся заменять?

3.9. Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения величины $\eta = \exp(\xi)$.

3.10. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-1, 4]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi^2$.

Вариант № 4

4.1. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красных. Из этой коробки наудачу извлекается 3 карандаша. Случайная величина ξ — число красных карандашей в выборке. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

4.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = A\sin(x)$ при $x \in [0, \pi]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [0, \pi]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]-1, \pi/3[$.

4.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ Ax^2 + B & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[1, 3]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

4.4. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

4.5. Из двух орудий поочередно ведётся стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,4 вторым

— 0,6. Начинает стрельбу первое орудие. Требуется найти среднее и дисперсию числа выстрелов произведённых обоими орудиями.

4.6. Сколько изюма должна в среднем содержать булочка, чтобы вероятность содержания хотя бы одной изюминки в булочке была не менее 0,99? Предполагается, что при выпечке каждая изюминка с равной вероятностью попадает в каждую из булочек.

4.7. Время работы элемента до отказа подчинено показательному закону распределения с параметром $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$. Найти среднее время между появлением двух смежных отказов и вероятность безотказной работы к моменту среднего времени после включения технического устройства.

4.8. При измерении детали её длина ξ является случайной величиной, распределённой по нормальному закону с математическим ожиданием 22 мм и среднеквадратическим отклонением 0,2 мм. Найдите интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9545 попадает ξ.

4.9. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-2, 3]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

4.10. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in]-\infty, +\infty[.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$.

Вариант № 5

5.1. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично», наугад извлекаются 3 работы. Случайная величина ξ — число работ, оцененных на «отлично», среди извлечённых. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

5.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f(x) = Ae^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]0, 1[$.

5.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ Ax^2 + B & \text{при } 1 < x \leqslant 9, \\ 1 & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[-1, 5]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

5.4. Случайная величина ξ может принимать значение 0 с вероятностью S, и значения -1 и 1 с вероятностями $1/4$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

5.5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Определить, сколько в среднем необходимо выстрелов для попадания в цель.

5.6. Частица движется в разреженном газе, вероятность её столкновения на пути dl с другой частицей $p = Nq\,dl$, где N — концентрация частиц в газе, q — сечение столкновения. Найти среднюю длину свободного пробега.

5.7. Случайная величина ξ подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M[\xi] = 0$. Задан отрезок $[\alpha, \beta]$, не включающий начало координат. При каком значении среднеквадратического отклонения $\sigma[x]$ вероятность попадания случайной величины в отрезок $[\alpha, \beta]$ достигает максимума?

5.8. Продолжительность работы электролампы — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 0{,}002$ ч$^{-1}$. Какова вероятность того, что лампа за месяц (30 дней) не перегорит?

5.9. Случайная величина ξ распределена по закону Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in R.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \operatorname{arctg} \xi$.

5.10. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсии случайной величины $\eta = \max(\xi, 1 - \xi)$.

Вариант № 6

6.1. В урне 5 белых и 20 чёрных шаров. Вынули 3 шара. Случайная величина ξ — число вынутых белых шаров. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

6.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = A/\sqrt{c^2 - x^2}$ при $x \in [-c, c]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [-c, c]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]-2c, c/2[$.

6.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} Ae^{Bx} & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[-\infty, -\ln 2]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

6.4. Случайная величина ξ распределена по закону Лапласа: $f_\xi(x) = \alpha e^{-\alpha|x|}/2$, $x \in \mathbb{R}$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

6.5. В некотором эксперименте появление новой частицы может произойти с вероятностью 0,01. Появившаяся частица может быть зарегистрирована с вероятностью 0,2. Какое среднее число экспериментов надо произвести, чтобы зарегистрировать частицу.

6.6. Среднее время безотказной работы блока равно 1 году. Отказавший блок немедленно заменяется на исправный. Какова вероятность, что за год придётся дважды заменять неисправный блок?

6.7. Найти среднее число λ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

6.8. Завод изготовляет шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков $d_0 = 5$ мм. Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр есть случайная величина, распределённая по нормальному закону со средним значением d_0 и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}05$. При контроле бракуются шарики, диаметр которых отличается от номинального больше чем на $\varepsilon = 0{,}1$ мм. Определить, какой процент шариков в среднем будет отбраковываться.

6.9. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = -\ln(1 - \xi)$.

6.10. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром α. Случайная величина η определяется как целая часть случайной величины ξ, т.е. $\eta = [\xi]$. Найти ряд распределения случайной величины η.

Вариант № 7

7.1. С вероятностью попадания 0,9 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4-х выстрелов. Случайная величина ξ — число промахов. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

7.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f(x) = Axe^{-x^2}$, $x > 0$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]0,2[$.

7.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1/e, \\ A\ln x + B & \text{при } 1/e < x \leqslant e, \\ 1 & \text{при } x > e. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[1, e^2]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

7.4. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром α. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

7.5. Среднее число попыток необходимое для сдачи экзамена равно 4. Какова вероятность сдать экзамен с одной попытки (предполагается, что вероятность сдачи экзамена от попытки к попытке не меняется).

7.6. Среднее число опечаток на странице равно 2,5. Найти вероятность того, что на данной странице нет опечаток (вероятность опечатки каждого символа предполагается одинаковой и не зависящей от других опечаток).

7.7. Время, затрачиваемое преподавателем на экзамене на одного студента, есть случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 3$ ч$^{-1}$. Какова вероятность того, что преподаватель за три часа примет группу из пятнадцати студентов?

7.8. Случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами $a = 3$ и $\sigma^2 = 2$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,8 попадает каждое значение случайной величины.

7.9. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\alpha = 1$. Найти закон распределения случайной величины $\eta = e^{-\xi}$.

7.10. Точка брошена наудачу внутрь круга радиусом R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию расстояния точки до центра круга.

Вариант № 8

8.1. Бросают три монеты. Случайная величина ξ — число выпавших решек. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

8.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = Ax^2$ при $x \in [0,2]$, $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [0,2]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$, найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]1,3[$.

8.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1; \\ A \ln x + B & \text{при } 1 < x \leqslant e^2; \\ 1 & \text{при } x > e^2. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[0, e]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

8.4. Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону с параметрами n и p. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

8.5. Среднее число выстрелов, необходимое для попадания в мишень равно 5 (предполагается вероятность попадания в мишень для каждого выстрела одинаковой). Какова вероятность поражения цели с двух выстрелов?

8.6. Радиоаппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа каждого элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Найдите среднее значение числа элементов, отказывающих в течение года. Какова вероятность того, что в течение года откажут: а) 2 элемента; б) не менее 2 элементов? Найдите среднее число элементов, отказывающих в течение 2 лет.

8.7. Среднее число опечаток на странице равно 0,1. Найти вероятность того, что в книге из 100 страниц не более 5 страниц с опечатками.

8.8. Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $m = 10$. Вероятность попадания ξ в интервал $]10, 20[$ равна 0,3. Чему равна вероятность попадания ξ в интервал $]20, 30[$?

8.9. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = -\ln(\xi)$.

8.10. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in]-\infty, +\infty[.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$.

Вариант № 9

9.1. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка — 0,5, для второго — 0,4. Случайная величина ξ — число попаданий в мишень. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

9.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = A/x^2$ при $x \in [1/3, 3]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [1/3, 3]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$, найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]2, 4[$.

9.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ A(x^3 - x^2) + B, & 1 < x \leqslant 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[3/2, 5/2]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

9.4. Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

9.5. Среднее число попыток необходимое для сдачи экзамена равно 10. Какова вероятность сдать экзамен с десяти попыток.

9.6. Рыбак забросил спиннинг 100 раз. Какова вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 100 забрасываний?

9.7. Время безотказной работы устройства — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 0{,}007$ дней$^{-1}$. Какова вероятность того, что за год (365 дней) устройство не выйдет из строя?

9.8. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $a = 1$ и $\sigma^2 = 3$. Найти 1) вероятность попадания ξ в интервал $]-\infty, -3[$; 2) границы интервала, симметричного относительно $M(\xi)$, в котором будет находиться 70% значений случайной величины.

9.9. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in]-\infty, +\infty[.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/(1+\xi^2)$.

9.10. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = -\ln \xi$.

Вариант № 10

10.1. Из партии в 20 изделий, среди которых имеются 4 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Случайная величина ξ число бракованных изделий, содержащихся в выборке. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

10.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = A/x$ при $x \in [1/2, 2]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [1/2, 2]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]1, 3[$.

10.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ Ax^3 + B & \text{при } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[1, 3]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

10.4. Случайная величина ξ имеет непрерывное распределение с плотностью вида $f_\xi(x) = 2x$ при $0 < x < 1$ и $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin]0, 1[$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

10.5. В итоговой контрольной по теории вероятностей студенты (каждый) делают в среднем по две ошибки. Какова вероятность, что конкретная работа не содержит ошибок? Сколько в среднем надо проверить работ, чтобы обнаружить безошибочную.

10.6. В трёхмерном пространстве случайным образом расположены точки. Число точек в некотором объёме ν пространства есть случайная величина, подчиненная закону Пуассона с математическим ожиданием $\lambda = a\nu$, где a — среднее число точек, находящихся в единичном объёме. Требуется найти закон распределения расстояния ρ от любой точки пространства до ближайшей к ней случайной точки.

10.7. Время безотказной работы устройства — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 0{,}005$ дней$^{-1}$. Какова вероятность того, что за год (365 дней) устройство не выйдет из строя?

10.8. Случайная величина распределена нормально с дисперсией 2,5 и средним 2. Найти вероятность того, что она примет значение в интервале $]0, 4[$.

10.9. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $N(0,1)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sqrt[3]{|\xi|}$.

10.10. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения величины $\eta = \max\{0, \xi\}$.

Вариант № 11

11.1. Три стрелка независимо друг от друга сделали по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка 0,9, для второго 0,8, для третьего 0,7. Случайная величина ξ — число попаданий в мишень. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

11.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = A + x$ при $x \in [-A, 0]$; $f_\xi(x) = A - x$ при $x \in [0, A]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [-A, A]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]A/2, 2A[$.

11.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1; \\ A + B\arcsin x, & -1 < x \leqslant 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[-1/2, 1/2]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

11.4. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[0,4]$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

11.5. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью 0,004. Переналадка линии производится после первого же бракованного изделия. Найдите среднее число всех изделий, изготовленных между двумя переналадками линии.

11.6. Батарея дала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.

11.7. Продолжительность работы электролампы — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 0{,}001$ ч$^{-1}$. Какова вероятность того, что лампа за два месяца (60 дней) не перегорит?

11.8. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $a = -1$ и $\sigma^2 = 2$. Найти 1) вероятность попадания ξ в интервал $]0, \infty[$; 2) границы интервала, симметричного относительно $M(\xi)$, в котором будет находиться 90% значений случайной величины.

11.9. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найти плотности распределения случайной величины $\eta = e^\xi$.

11.10. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\alpha = 1/5$. Найти закон распределения случайной величины $\eta = (\xi - 1)^2$.

Вариант № 12

12.1. В первой урне 5 шаров: 2 белых и 3 чёрных. Во второй 3 шара: 1 белый и 2 чёрных. Из первой урны наудачу переложили во вторую 1 шар, после чего, из второй в первую переложили 1 шар. Случайная величина ξ — число белых шаров в первой урне. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

12.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = -Ax$ при $x \in [-2, 0]$; $f_\xi(x) = Ax$ при $x \in [0, 2]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [-2, 2]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]-1/2, 3[$.

12.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1; \\ A + B\arccos x, & -1 < x \leqslant 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[-1/2, 1/2]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

12.4. Случайная величина ξ имеет непрерывное распределение с плотностью вида $f_\xi(x) = x^2$ при $0 < x < 1$ и $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin]0, 1[$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

12.5. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 90. Найти вероятность того, что за 2 секунды на АТС поступит не более двух вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

12.6. Для постройки здания нужно забить в землю не менее 300 свай на глубину 5 м. Если свая на меньшей глубине натыкается на камень, ее спиливают и в число несущих свай она не входит. Вероятность «встретить» такой камень в толще земли глубиной 1 м равна 0,02. Известно, что среднее число камней в толще земли прямо пропорционально толщине слоя. Сколько нужно заготовить свай, чтобы с вероятностью 0,95 их хватило на постройку здания?

12.7. Время, затрачиваемое преподавателем на экзамене на одного студента, есть случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 5$ ч$^{-1}$. Какова вероятность того, что преподаватель за два часа примет ровно пять студентов?

12.8. Случайная величина ε распределена нормально с дисперсией $\sigma^2 = 3$. Найти $P(|\varepsilon - E\varepsilon|) > 4$.

12.9. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $N(a, \sigma^2)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^\xi$.

12.10. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\alpha = 2$. Найти закон распределения случайной величины $\eta = (\xi - 2)^2$.

Вариант № 13

13.1. Охотник стреляет до первого попадания и успевает сделать три выстрела с вероятностями попадания соответственно 0,9; 0,7; 0,5. Случайная величина ξ — число промахов. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

13.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = A\cos(2x)$ при $x \in [-\pi/4, \pi/4]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [-\pi/4, \pi/4]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]1/5, 1/2[$.

13.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ Ax^3 + B & \text{при } 1 < x \leqslant 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[0,3]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

13.4. Случайная величина ξ имеет непрерывное распределение с плотностью вида $f_\xi(x) = x^3$ при $0 < x < 1$ и $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin]0,1[$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

13.5. Из хорошо перетасованной колоды (52 карты) на стол последовательно выкладываются карты лицевой стороной вверх, после чего аналогичным образом выкладывается вторая колода, так что каждая карта первой колоды лежит под картой из второй колоды. Каково среднее число совпадений нижней и верхней карт? Каково среднее число совпадений масти нижней и верхней карт?

13.6. Среднее число аварий на дорогах города в сутки равно 3. Найти вероятность того, что за неделю произойдёт меньше 5 аварий. Поток аварий считать простейшим.

13.7. Продолжительность работы электролампы — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 0{,}01$ ч$^{-1}$. Перегоревшую лампу немедленно заменяют новой. Какова вероятность того, что за 100 часов лампу придётся заменять больше двух раз?

13.8. Случайная величина ξ распределена нормально с дисперсией $\sigma^2 = 4$. Какова вероятность, что хотя бы одно из 6 наблюдаемых значений этой величины отклонится от $E\xi$ на величину, большую 6?

13.9. Случайная величина μ равномерно распределена на интервале $[0,2\pi]$. Найти плотность распределения случайной величины $\nu = \cos\mu$.

13.10. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения величины $\eta = (\xi + |\xi|)/2$.

Вариант № 14

14.1. Бросают две игральных кости. Случайная величина ξ — сумма выпавших очков. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

14.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f(x) = Ae^{-|x|/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]0,2[$.

14.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -2, \\ \dfrac{x^3 + A}{B} & \text{при } -2 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[1,3]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

14.4. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma_\xi(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

14.5. Среднее число дождливых дней в году для данной местности равно 32 (каждый день с равной вероятностью может оказаться дождливым). Какова вероятность того, что в ближайшую неделю дождей в данной местности не будет?

14.6. Время, затрачиваемое преподавателем на экзамене на одного студента, есть случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 4$ ч$^{-1}$. Какова вероятность того, что преподавателю на группу из 10 студентов потребуется больше 4 часов?

14.7. Сколько изюма должна в среднем содержать булочка, чтобы вероятность содержания хотя бы одной изюминки в булочке была не менее 0,95? Предполагается, что при выпечке каждая изюминка с равной вероятностью попадает в каждую из булочек.

14.8. Случайная величина ξ распределена нормально с дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что в результате 3 испытаний ровно одно значение ξ отклонится от своего математического ожидания на величину, большую 4.

14.9. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-2, 4]$. Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсии случайной величины $\eta = 1/\xi^2$.

14.10. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \ln(\alpha\xi)$.

Вариант № 15

15.1. Игральную кость бросают до выпадения единицы, но не более пяти раз. Случайная величина ξ — число выпавших шестерок. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

15.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f(x) = Axe^{-x^2/4}$, $x > 0$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]1, 5[$.

15.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \dfrac{x^4 + A}{B} & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[0, 3/2]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

15.4. Случайная величина ξ имеет гамма распределение с параметрами $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, с плотностью распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция, $\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1)\Gamma(\lambda - 1)$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma_\xi(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

15.5. Вероятность сдать экзамен с трёх попыток рана 0,6. Какова вероятность сдать экзамен с одной попытки? Сколько надо в среднем сделать попыток, чтобы сдать экзамен?

15.6. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью p. Переналадка линии производится после первого же бракованного изделия. Найдите среднее число всех изделий, изготовленных между двумя переналадками линии.

15.7. Найти среднее число λ бракованных изделий в партии, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,9. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

15.8. Случайная величина ξ распределена нормально с дисперсией $\sigma^2 = 5$. Найти вероятность того, что в результате 5 испытаний все значения ξ отклонятся от математического ожидания ξ на величину, меньшую 6.

15.9. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $N(0,1)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/(1+\xi^2)$.

15.10. Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения величины $\eta = -\ln(F(\xi))$.

Вариант № 16

16.1. Экзамен можно сдавать до трёх раз, при этом вероятность сдачи в n-ой попытке равна $n/4$. Случайная величина ξ — число затраченных попыток. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

16.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = -Ax + A^2$ при $x \in [-1,0]$; $f_\xi(x) = Ax + A^2$ при $x \in [0,1]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [-1,1]$. Найти коэффициент A $(A > 0)$ и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]1/2, 2[$.

16.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ: $F_\xi(x) = A + B\operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[\pi/4, +\infty]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

16.4. Случайная величина ξ имеет распределение «хи-квадрат» с k степенями свободы с плотностью распределения

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

Здесь $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция: $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma_\xi(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

16.5. Среднее число выстрелов, необходимое для поражения цели, равно 4. Какова вероятность поражения цели с двух выстрелов? Вероятность поражения цели с каждого выстрела предполагается одинаковой.

16.6. Среднее число дождливых дней в году для данной местности равно 60 (каждый день с равной вероятностью может оказаться дождливым). Какова вероятность того, что в ближайшую неделю дождей в данной местности не будет?

16.7. Деревья в лесу растут в случайных точках, которые образуют пуассоновское поле с плотностью 0,1 дерево/м^2. Случайная величина ξ — расстояние от произвольной точки в лесу до ближайшего дерева. Найти $F_\xi(x)$, $M(\xi)$, $D(\xi)$.

16.8. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $a = 1$ и $\sigma^2 = 3$. Найти 1) вероятность попадания ξ в интервал $]-\infty, -3[$; 2) границы интервала, симметричного относительно $M(\xi)$, в котором будет находиться 70% значений случайной величины.

16.9. Диаметр круга — случайная величина ξ, которая равномерно распределена на отрезке $[a,b]$. Найти функцию распределения площади круга.

16.10. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \min(\xi, \xi^2)$.

Вариант № 17

17.1. Зачёт можно сдавать до пяти раз, при этом вероятность сдачи с любой попытки одинакова и равна 0,3. Случайная величина ξ — число затраченных попыток. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

17.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f(x) = 2A/(e^{-x}+e^{x})$, $x \in \mathbb{R}$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]1, \infty[$.

17.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ Ax^2 - Bx, & 1 < x \leqslant 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[2, +\infty]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

17.4. Найти характеристическую функцию $\gamma_\xi(t)$ дискретной случайной величины ξ, распределённой по закону Паскаля: $P(\xi = k) = pq^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

17.5. Из двух орудий поочередно ведётся стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,3, вторым 0,4. Начинает стрельбу первое орудие. Требуется найти среднее число выстрелов, произведённых обоими орудиями.

17.6. Время, затрачиваемое преподавателем на экзамене на одного студента, есть случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром$\alpha = 4$ ч$^{-1}$. Какова вероятность того, что преподавателю на группу из 10 студентов потребуется больше 3 часов?

17.7. Деревья в лесу растут в случайных точках, которые образуют пуассоновское поле с плотностью 0,04 деревьев/м^2. Случайная величина ξ — расстояние от произвольной точки в лесу до ближайшего дерева. Найти $F_\xi(x)$, $M(\xi)$, $D(\xi)$.

17.8. Результат измерения физической величины — нормальная случайная величина ξ с параметрами $M(\xi) = 1$, $D(\xi) = 0{,}1$. Какова вероятность, что результаты трёх измерений этой величины лежат в интервале $[0{,}9, 1{,}1]$?

17.9. Точка брошена наудачу внутрь круга радиусом R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади области. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию расстояния точки до центра круга.

17.10. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $N(0, \sigma^2)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Вариант № 18

18.1. В урне 3 белых и 7 чёрных шаров. Вынули 5 шаров. Случайная величина ξ — число вынутых белых шаров. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

18.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = Ax$ при $x \in [0, 3]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [0, 3]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]2, 4[$.

18.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -3; \\ A/x + B, & -3 < x \leqslant -1; \\ 1, & x > -1. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[-2, 2]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

18.4. Случайная величина ξ имеет непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x) = \lambda^2 x \exp[-\lambda x]$, $x > 0$ (параметр $\lambda > 0$). Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma_\xi(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

18.5. При записи программы на неисправном накопителе появляется в среднем 3 ошибки. Какова вероятность безошибочной записи? Сколько раз в среднем надо записывать программу, чтобы получить безошибочную запись?

18.6. Из урны, содержащей 10 белых и 3 чёрных шара, вынимается наудачу 5 шаров. Каково среднее и наивероятнейшее число чёрных шаров в выборке?

18.7. Продолжительность работы электролампы — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 0{,}01$ ч$^{-1}$. Перегоревшую лампу немедленно заменяют новой. Какова вероятность того, что за 100 часов лампу придётся заменять больше двух раз?

18.8. Случайная величина ξ подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием $M[\xi] = 0$. При каком значении среднего квадратического отклонения $\sigma[x]$ вероятность попадания случайной величины в отрезок $[1, 4]$ достигает максимума?

18.9. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром α. Случайная величина η определяется как целая часть случайной величины ξ, т.е. $\eta = [\xi]$. Найти ряд распределения случайной величины η.

18.10. Случайная величина μ равномерно распределена на интервале $[0, 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\nu = \mu - 1/\mu$.

Вариант № 19

19.1. В урне 4 белых и 8 чёрных шаров. Вынимают последовательно шары до появления чёрного шара. Случайная величина ξ — число вынутых шаров. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

19.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = A/x$ при $x \in [1/e, e]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [1/e, e]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]1, 3[$.

19.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ Ax^3 - Bx, & 1 < x \leqslant 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[2, +\infty[$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

19.4. Случайная величина ξ распределена по закону Эрланга n-го порядка с параметром $\lambda > 0$ с плотностью $f_\xi(x) = \lambda(\lambda x)^n e^{-\lambda x}/n!$, $x > 0$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma_\xi(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

19.5. Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,95. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется найти среднее число выданных стрелку патронов.

19.6. Рыбак забросил спиннинг 50 раз. Какова вероятность того, что он поймал хотя бы одну рыбу, если одна рыба приходится в среднем на 100 забрасываний?

19.7. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 150. Берутся на пробу 2 кубических дециметра воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.

19.8. Результат измерения физической величины — нормальная случайная величина ξ с параметрами $M(\xi) = 2$, $D(\xi) = 0{,}04$. Какова вероятность, что результаты 10 измерений отклонится от математического ожидания на величину, не большую 0,2?

19.9. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\alpha = 5$. Найти функцию распределения (а если существует, то и плотность распределения) случайной величины $\eta = 1 - 5\xi$. Найти дисперсию η.

19.10. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-2, 2]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Вариант № 20

20.1. В партии из 20 деталей имеется 16 стандартных. Из этой партии наудачу взяты 4 детали. Случайная величина ξ — число стандартных деталей в выборке. Найти 1) ряд распределения случайной величины ξ; 2) функцию распределения; 3) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, коэффициент асимметрии и эксцесс распределения.

20.2. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины ξ: $f_\xi(x) = A\sin(x/3)$ при $x \in [0, 3\pi]$; $f_\xi(x) = 0$ при $x \notin [0, 3\pi]$. Найти коэффициент A и функцию распределения $F_\xi(x)$; построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$; найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$, коэффициент асимметрии $A(\xi)$ и эксцесс распределения $E(\xi)$; найти вероятность попадания случайной величины в интервал $]-1, \pi[$.

20.3. Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2; \\ A/x^2 + B, & -2 < x \leqslant -1; \\ 1, & x > -2. \end{cases}$$

Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f_\xi(x)$; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $[-3/2, 0]$; г) $M(\xi)$, $D(\xi)$. Построить графики $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

20.4. Случайная величина ξ имеет непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x) = \lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}/6$, $x > 0$ (параметр $\lambda > 0$). Найти характеристическую функцию случайной величины $\gamma_\xi(t)$ и, используя ее, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

20.5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Определить, сколько в среднем необходимо выстрелов для попадания в цель.

20.6. Время, затрачиваемое преподавателем на экзамене на одного студента, есть случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром $\alpha = 6$ ч$^{-1}$. Какова вероятность того, что преподаватель за три часа примет группу из двадцати студентов?

20.7. Для постройки здания нужно забить в землю не менее 200 свай на глубину 4 м. Если свая на меньшей глубине натыкается на камень, её спиливают и в число несущих свай она не входит. Вероятность «встретить» такой камень в толще земли глубиной 1 м равна 0,03. Известно, что среднее число камней в толще земли прямо пропорционально толщине слоя. Сколько нужно заготовить свай, чтобы с вероятностью 0,95 их хватило на постройку здания?

20.8. Сколько значений случайной величины ξ, распределённой по нормальному закону $N(25, 9)$ нужно взять, чтобы с вероятностью 0,99 хотя бы одно из них попало на интервал $]20, 28[$.

20.9. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $N(0,4)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^{\xi}$.

20.10. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $f(x)$. Найти плотность распределения величины $\min\{\xi, \xi^2\}$.

Системы случайных величин

Вариант № 1

1.1. Двумерная случайная величина $\{\xi, \eta\}$ распределена равномерно в области D, ограниченной снизу осью Ox, а сверху кривой $\eta = e^{-x^2}$. Найти совместную плотность распределения $f_{\xi,\eta}(x,y)$, плотности распределения $f_{\xi}(x)$ и $f_{\eta}(y)$, условные плотности распределения $f_{\xi}(x/y)$ и $f_{\eta}(y/x)$, основные числовые характеристики величин ξ и η, коэффициент корреляции между ξ и η.

1.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет равномерное на отрезке $[-1,1]$ распределение, а η имеет биномиальное распределение с параметрами 2 и 1/2. Найти функцию и плотность распределения суммы $\xi + \eta$.

1.3. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие показательные распределения с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что случайные величины $\xi - \eta$ и $\min\{\xi, \eta\}$ независимы.

1.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины. При любом $k \geqslant 1$ величина ξ_{2k-1} имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 3$, а величина $\xi_{2k} \in N_{0,1}$. Найти предел по вероятности последовательности $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/n$.

1.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Случайная величина ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ может принимать два значения: $\pm \ln^2 n$ с вероятностями, равными 1/2. Удовлетворяет ли эта последовательность закону больших чисел Чебышева?

1.6. Складывается 10^4 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-m}. Предполагается, что ошибки от округления независимы и равномерно распределены в интервале $]-0{,}5\cdot 10^{-m}, 0{,}5\cdot 10^{-m}[$. Используя центральную предельную теорему, найти пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет суммарная ошибка.

1.7. Случайная величина ξ является средней арифметической независимых и одинаково распределённых случайных величин, среднеквадратичное отклонение каждой из которых равно 2. Сколько нужно взять таких величин, чтобы случайная величина ξ с вероятностью, не меньшей 0,92, имела отклонение от своего математического ожидания, не превосходящее 0,05. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

Вариант № 2

2.1. Двумерная случайная величина $\{\xi, \eta\}$ распределена равномерно в области D, ограниченной окружностью радиуса R с центром в начале координат. Найти совместную плотность распределения $f_{\xi,\eta}(x,y)$, плотности распределения $f_{\xi}(x)$ и $f_{\eta}(y)$, условные плотности распределения $f_{\xi}(x/y)$ и $f_{\eta}(y/x)$, основные числовые характеристики величин ξ и η, и коэффициент корреляции между ξ и η.

2.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-1,1]$, а η — показательное распределение с параметром 2. Найти функцию распределения, плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi + \eta$.

2.3. Пусть ξ и η — независимые, распределённые по закону $N(0, \sigma^2)$ случайные величины. Показать, что случайные величины $\xi^2 + \eta^2$ и ξ/η независимы.

2.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = 2 - 2x$, $x \in [0,1]$. Доказать, что $\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \xrightarrow{p} 1$.

2.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, каждая из которых распределена по закону Коши: $f_{\xi_n}(x) = 1/[\pi(1 + x^2)]$, $x \in \mathbb{R}$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

2.6. Стрелок попадает при выстреле по мишени в десятку с вероятностью 0,5; в девятку — 0,3; в восьмёрку — 0,1; в семерку — 0,05; в шестерку — 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал более 950 очков.

2.7. Сколько (минимум) необходимо взять случайных величин, распределённых по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,8, среднее арифметическое этих величин будет лежать в интервале [1,95; 2,05]. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

Вариант № 3

3.1. Дано распределение вероятностей случайного вектора (ξ, η). Найти распределения вероятностей случайных величин ξ и η, условные законы распределения, математические ожидания и дисперсии этих величин и коэффициент корреляции между ξ и η.

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

3.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2]$, а η — показательное распределение с параметром 1. Найти функцию распределения, плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2\xi - \eta$.

3.3. Определить плотность распределения длины радиус-вектора, если сам вектор имеет нормальное распределение с плотностью $f(x, y) = (2\pi\sigma^2)^{-1}e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$.

3.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = 2 - 2x$, $x \in [0, 1]$. Доказать, что $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \xrightarrow{p} 0$.

3.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, каждая из которых равномерно распределена на интервале $[a_n, b_n]$, причём $b_n - a_n = b_{n-1} - a_{n-1} + 1/n$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

3.6. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота выпадения орла при 500 подбрасываниях монеты отклонится от вероятности выпадения орла при одном подбрасывании более чем на 0,1. Сравнить эту вероятность с вероятностью, полученной с помощью интегральной формулы Муавра–Лапласа.

3.7. Урожай пшеницы (в центнерах) на каждом из 3600 Га — случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[18, 22]$. Используя центральную предельную теорему, найти симметричный относительно среднего значения интервал, в котором с вероятностью 0,95 лежит общий урожай пшеницы.

Вариант № 4

4.1. Дана плотность распределения случайного вектора (ξ, η): $f_{\xi,\eta}(x, y) = A/(16 + x^2)(25 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения; в) найти условные плотности распределения величин ξ и η; г)вычислить $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

4.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а η — показательное распределение с параметром 4. Найти функцию распределения, плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi - 2\eta$.

4.3. На отрезок $[0, 1]$ наугад брошены две точки. Пусть ξ — расстояние между ними. Найти функцию распределения случайной величины ξ и вычислить $M(\xi)$, $D(\xi)$.

4.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = e^{x-2}$, $x \leqslant 2$. Доказать, что $\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \xrightarrow{p} 2$.

4.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, каждая из которых равномерно распределена на интервале $[a_n, b_n]$, причём $b_n - a_n = b_{n-1} - a_{n-1} + 1/\sqrt[3]{n^2}$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

4.6. Случайная величина ξ является средней арифметической 2000 независимых и одинаково распределённых случайных величин с математическим ожиданием, равным 2, и дисперсией, равной 1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что ξ примет значение в промежутке $]1{,}9; 2{,}05[$. Сравнить эту вероятность с вероятностью, полученной с помощью интегральной формулы Муавра–Лапласа.

4.7. Урожай овса (в центнерах) на каждом из 4900 Га — случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром 20. Используя центральную предельную теорему, найти симметричный относительно среднего значения интервал, в котором с вероятностью 0,98 лежит общий урожай овса.

Вариант № 5

5.1. Дана плотность распределения случайного вектора (ξ, η):

$$f_{\xi,\eta}(x,\eta) = \begin{cases} A\sin(x+y), & x \in]0,\pi/2[,\ y \in]0,\pi/2[; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения; в) найти условные плотности распределения величин ξ и η; г) вычислить $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

5.2. На отрезок $[0,1]$ брошены наудачу и независимо друг от друга две точки. Найти коэффициент корреляции координат левой и правой точек.

5.3. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. Найти плотность распределения случайной величины $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$.

5.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = 3e^{3x+3}$, $x \leqslant -1$. Доказать, что $\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \xrightarrow{p} -1$.

5.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, причём каждая из величин имеет симметричное треугольное распределение на интервале $[-a_n, a_n]$, где $a_n = \sqrt[5]{n^2}$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

5.6. Сколько (минимум) необходимо взять случайных величин, равномерно распределённых на интервале $[0,1]$, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, среднее арифметическое этих величин будет лежать в интервале $[0{,}49, 0{,}51]$. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

5.7. Какова вероятность, что при 10000 подбрасываниях игральной кости частота выпадения шестерки отклонится от вероятности на величину, не большую 0,01.

Вариант № 6

6.1. Дана плотность распределения случайного вектора (ξ, η):

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Ax^2y(1-x), & x \in]0,1[,\ y \in]0,1[; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения; в)найти условные плотности распределения величин ξ и η; г) вычислить $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

6.2. Пусть случайные величины ξ и η независимы, причём ξ имеет равномерное на отрезке $[0,1]$ распределение, а η принимает значения 0, 1 и 2 с равными вероятностями. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию суммы $\xi + \eta$.

6.3. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, $\xi \in N(1,3)$, $\eta \in N(-2,9)$. Найти плотность распределения случайной величины $\nu = 2\xi - 3\eta + 1$.

6.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$. Доказать, что $\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \xrightarrow{p} \pi/2$.

6.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, причём каждая из величин имеет симметричное треугольное распределение на интервале $[-a_n, a_n]$, где $a_n = \sqrt[3]{n}$. Удовлетворяет ли эта последовательность закону больших чисел Чебышева?

6.6. Случайная величина ξ является средней арифметической независимых и одинаково распределённых случайных величин, среднеквадратичное отклонение каждой из которых равно 2. Сколько нужно взять таких величин, чтобы с случайная величина ξ с вероятностью, не меньшей 0,92, имела отклонение от своего математического ожидания, не превосходящее 0,05. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

6.7. Монета подбрасывается 6400 раз. Какова вероятность, что относительная частота появления орла отклонится от вероятности появления орла при одном подбрасывании на величину, не большую 0,02.

Вариант № 7

7.1. Дана плотность распределения случайного вектора (ξ, η):

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} Axy(1-x^2), & x \in]0,1[,\ y \in]0,1[; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения вектора (ξ, η); в) найти условные плотности распределения величин ξ и η; г) вычислить $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

7.2. Независимые, одинаково распределённые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$.

7.3. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$, а η — показательное распределение с параметром 1. Найти функцию распределения, плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $2\xi + \eta$.

7.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины. При любом $k \geqslant 1$ величина $\xi_{2k-1} \in N_{1,4}$, а величина ξ_{2k} имеет распределение Бернулли с параметром $p = 1/3$. Найти предел по вероятности последовательности $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/n$.

7.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, причём случайная величина ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ может принимать $2n + 1$ значения: $-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$ с вероятностями $P(\xi_n = k) = 1/(4|k|^3)$ для $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm n$ и $P(\xi_n = 0) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} 1/(2k^3)$ для $k = 0$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

7.6. Сколько (минимум) раз надо подбросить игральную кость, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, частота выпадения шестерки будет отличаться от вероятности появления шестерки на величину, не большую 0,1. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

7.7. Вычисление интеграла

$$I = \int\limits_0^1 x^2 dx$$

произведено методом Монте-Карло на основании 1000 независимых опытов. Вычислить вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины I не превзойдёт 0,01.

Вариант № 8

8.1. При одном выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,2 независимо от результатов других выстрелов. Случайная величина ξ равна количеству попаданий после трёх выстрелов, а случайная величина η равна единице, если при первом выстреле произошло попадание, и равна нулю в противном случае. а) Построить таблицу совместного распределения ξ и η. б) Найти коэффициент корреляции величин ξ и η. в) Нарисовать график функции распределения случайной величины η.

8.2. Независимые, одинаково распределённые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $[1, 2]$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

8.3. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\alpha = 7$, случайная величина η имеет равномерное на отрезке $[0, 1]$ распределение, а φ имеет распределение Бернулли с параметром $p = 1/7$, и все три величины независимы. Найти функцию распределения и дисперсию случайной величины $\nu = -7\varphi\eta + (1-\varphi)\xi$.

8.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины. При любом $k \geqslant 1$ величина ξ_{2k-1} имеет биномиальное распределение с параметрами 8 и 0,25, а величина ξ_{2k} имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2]$. Найти предел по вероятности последовательности $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/n$.

8.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Случайная величина ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ может принимать два значения: $\pm \ln n$ с вероятностями, равными $1/2$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

8.6. Сколько (минимум) раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, частота выпадения орла будет отличаться от вероятности появления орла при одном подбрасывании на величину, не большую 0,1. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

8.7. Игральная кость бросается 1000 раз. Найти симметричные относительно среднего пределы, в которых с вероятностью, большей 0,99, будет находиться число выпавших очков. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

Вариант № 9

9.1. Дана плотность распределения случайного вектора (ξ, η):

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} Axe^{-x-xy}, & x \in]0, +\infty[,\ y \in]0, +\infty[; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения; в) найти условные плотности распределения величин ξ и η; г) вычислить $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

9.2. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\alpha = 2$, случайная величина η — равномерное распределение на отрезке $[0, 3]$ и случайная величина χ — распределение Пуассона с параметром 4, причём все эти величины независимы. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\phi = \xi - 4\eta\chi$.

9.3. Игральная кость подбрасывается 6 раз. Найти ковариацию между числом выпавших единиц и шестерок.

9.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = 1/x^2$, $x \in [1, \infty[$. Доказать, что $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \xrightarrow{p} 1$.

9.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, причём $M(\xi_n) = 0$, $D(\xi_n) = \sqrt[3]{n^2}$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

9.6. Имеется 100 независимых значений случайной величины, распределённой равномерно на интервале $[0, 1]$. Какова вероятность, что среднее арифметическое этих значений отклонится от математического ожидания случайной величины на величину, не большую 0,05. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

9.7. Монета подброшена 100 раз. Найти симметричные относительно среднего значения границы, в которых с вероятностью 0,9 лежит число выпавших орлов. Использовать закон больших чисел и центральную предельную теорему.

Вариант № 10

10.1. При одном выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,2 независимо от результатов других выстрелов. Случайная величина ξ равна количеству попаданий после трёх выстрелов, а случайная величина η равна единице, если при первом выстреле произошло попадание, и нулю в противном случае. а) Построить таблицу совместного распределения ξ и η и найти их коэффициент корреляции. б) Нарисовать график функции распределения случайной величины η.

10.2. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\alpha = 2$, случайная величина η — равномерное распределение на отрезке $[0, 2]$ и случайная величина χ — распределение Бернулли с параметром $1/3$, причём все эти величины независимы. Найти а) функцию распределения случайной величины $\nu = -\chi\xi + (1 - \chi)\eta$; б) дисперсию $D(\nu)$.

10.3. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 —- независимые в совокупности случайные величины, имеющие одну и ту же плотность распределения $f(x) = cx^4$, $x \in [-1, 1]$. Найти функцию распределения случайной величины $\max\{\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3\}$.

10.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины, распределённые по закону Пуассона с параметром λ. Найти предел по вероятности последовательности $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)/(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$.

10.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, причём $M(\xi_n) = 0$, $D(\xi_n) = \sqrt[3]{n}$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

10.6. Имеется 400 независимых значений случайной величины, распределённой по показательному закону с параметром $\alpha = 3$. Какова вероятность, что среднее арифметическое этих значений отклонится от математического ожидания случайной величины на величину, большую 0,05. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

10.7. Сколько опытов надо поставить при вычислении интеграла $I = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, dx$ методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью $p \geqslant 0{,}99$ можно было считать абсолютную погрешность вычисленного значения интеграла не превосходящей 0,1% от I?

Вариант № 11

11.1. Дана плотность распределения случайного вектора (ξ, η): $f_{\xi,\eta}(x, y) = A/(x^2 + y^2 + 1)^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения; в) найти условные плотности распределения величин ξ и η; г) вычислить $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

11.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p = 1/2$, а η имеет геометрическое распределение с параметром $p = 2/3$. Найти закон распределения случайной величины $\min\{\xi, \eta\}$.

11.3. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет распределение Пуассона с параметром 3, а η имеет биномиальное распределение с параметрами 4 и $1/2$. Найти: а) коэффициент корреляции случайных величин $\xi - 3\eta$ и $\xi + 3\eta$; б) вероятность $P(\xi = \eta)$.

11.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины, распределённые по показательному закону с параметром α. Найти предел по вероятности последовательности $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)$.

11.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, причём $M(\xi_n) = 0$, $D(\xi_n) = \sqrt{n}$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

11.6. Имеется 200 независимых значений случайной величины, распределённой по закону Пуассона с параметром $\lambda = 5$. Какова вероятность, что среднее арифметическое этих значений отклонится от математического ожидания случайной величины на величину, не большую 0,1. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

11.7. В данном хозяйстве урожайность ξ куста картофеля, выраженная в килограммах, имеет следующее распределение:

$$\{(\xi, P)\} = \{(0, 0{,}1), (1, 0{,}2), (1{,}5, 0{,}2), (2, 0{,}3), (2{,}5, 0{,}2)\}.$$

Определить, какое наименьшее количество кустов картофеля надо посадить, чтобы с вероятностью 0,975 снять урожай не менее 1000 кг (использовать центральную предельную теорему).

Вариант № 12

12.1. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$, а η имеет нормальное распределение $N(8, 9)$. Найти плотность совместного распределения величин ξ и η.

12.2. Правильная монета подбрасывается трижды. Найти ковариацию числа орлов, выпавших при первых двух подбрасываниях монеты, и числа орлов, выпавших при всех трёх подбрасываниях монеты.

12.3. Независимые, одинаково распределённые случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

12.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = 3x^2$, $x \in [0, 1]$. Доказать, что $\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \xrightarrow{p} 1$.

12.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Случайная величина ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ может принимать два значения: $\pm\sqrt{\ln n}$ с вероятностями, равными $1/2$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

12.6. Производится n независимых измерений некоторой физической величины. Считая, что результат измерения есть случайная величина, математическое ожидание которой характеризует физическую величину, определить вероятность того, что абсолютная погрешность среднего арифметического 100 измерений не превысит 0,2, если дисперсия результатов равна 0,5. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

12.7. Каждый из 240 абонентов АТС в любой момент времени может занимать линию с вероятностью $1/40$. Какое минимальное число линий должна содержать АТС, чтобы вероятность потери вызова (занятости линии) не превосходила 0,005 (использовать центральную предельную теорему).

Вариант № 13

13.1. Двумерная случайная величина $\{\xi, \eta\}$ распределена равномерно внутри прямоугольного треугольника с вершинами $A(0; 0)$, $B(0; 8)$, $C(8; 0)$. Найти совместную плотность распределения $f_{\xi,\eta}(x, y)$, плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, условные плотности распределения $f_\xi(x/y)$ и $f_\eta(y/x)$, основные числовые характеристики величин ξ и η, коэффициент корреляции между ξ и η.

13.2. Независимые, одинаково распределённые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

13.3. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, причём ξ имеет биномиальное распределение с параметрами 3 и $1/3$, а η имеет распределение Пуассона с параметром 2. Найти: а) коэффициент корреляции случайных величин $\xi - 2\eta$ и $\xi + 2\eta$; б) вероятность $P(\xi = \eta)$.

13.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины, распределённые по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Найти предел по вероятности последовательности $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)$.

13.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Случайная величина ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ может принимать три значения: $-2n, 0, 2n$ с вероятностями, равными соответственно $1/2^n$, $1 - 1/2^{n-1}$, $1/2^n$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

13.6. Производится n независимых измерений некоторой физической величины. Считая, что результат измерения есть случайная величина, математическое ожидание которой характеризует физическую величину, определить с вероятностью, не меньшей 0,9, сколько (минимум) надо произвести измерений, чтобы абсолютная погрешность среднего арифметического этих измерений не превышала 0,1, если дисперсия одного измерения равна 0,4. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

13.7. На факультете ЕНМФ оценка ξ на экзамене по теории вероятностей имеет следующее распределение: $\{(\xi, P)\} = \{(2; 0{,}2), (3; 0{,}4), (4; 0{,}25), (5; 0{,}15)\}$. Используя центральную предельную теорему, определить вероятность того, что средний бал за экзамен потока из 81 студента ЕНМФ лежит в интервале $]3{,}8; 4{,}2[$.

Вариант № 14

14.1. Двумерная случайная величина $\{\xi, \eta\}$ распределена равномерно внутри квадрата с диагоналями, совпадающими с осями координат и равными двум. Найти совместную плотность распределения $f_{\xi,\eta}(x, y)$, плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, условные плотности распределения $f_\xi(x/y)$ и $f_\eta(y/x)$, основные числовые характеристики величин ξ и η, коэффициент корреляции между ξ и η.

14.2. Независимые, одинаково распределённые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найти функцию распределения и математическое ожидание случайной величины $\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

14.3. Пусть ξ и η — независимые, одинаково распределённые случайные величины с плотностью $f(x) = 1/(1+x^4)$, $x \in \mathbb{R}$. Найти плотность распределения величины ξ/η.

14.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины. При любом $k \geqslant 1$ величина ξ_{2k-1} имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$, а величина $\xi_{2k} \in N_{1,1}$. Найти предел по вероятности последовательности $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)/n$.

14.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Случайная величина ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ может принимать три значения: $-n, 0, n$ с вероятностями, равными соответственно $1/2^n$, $1 - 1/2^{n-1}$, $1/2^n$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

14.6. Вероятность появления некоторого события в каждом испытании в серии независимых испытаний равна $1/4$. Сколько (минимум) надо произвести испытаний, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, частота появления события в этой серии испытаний будет отличаться от вероятности события на величину, не большую 0,01. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

14.7. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока сумма очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний. (Использовать закон больших чисел и центральную предельную теорему).

Вариант № 15

15.1. Пусть $\{\xi, \eta\}$ — случайный вектор, у которого координата ξ распределена по показательному закону с параметром λ, а координата η при заданном значении $\xi = x > 0$ распределена по показательному закону с параметром x. Найти совместную плотность распределения $f_{\xi,\eta}(x, y)$ и условные плотности распределения $f_\xi(x/y)$ и $f_\eta(y/x)$.

15.2. Игральная кость подбрасывается дважды. Найти ковариацию суммы числа очков, выпавших при двух подбрасываниях, и числа очков, выпавших при втором подбрасывании кости.

15.3. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с плотностями распределения $f_\xi(x) = 1/(\pi\sqrt{1-x^2})$, $|x| \leqslant 1$, $f_\eta(x) = xe^{-x^2}$, $x > 0$. Найти плотность распределения величины $\xi\eta$.

15.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = 2e^{-2x}$, $x \geqslant 0$. Найти предел по вероятности $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ при $n \to \infty$.

15.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Случайная величина ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ может принимать три значения: $-2n, 0, 2n$ с вероятностями, равными соответственно $1/(2n^2)$, $1 - 1/n^2$, $1/(2n^2)$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

15.6. Сколько (минимум) раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9 частота выпадения орла будет отличаться от вероятности появления орла при одном подбрасывании на величину, не большую 0,02. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

15.7. Урожай пшеницы (в центнерах) на каждом из 2500 Га — случайная величина, распределённая равномерно на отрезке $[13, 22]$. Используя центральную предельную теорему, найти, в каких пределах, симметричных относительно среднего значения, с вероятностью 0,95 лежит средний урожай пшеницы с одного Га.

Вариант № 16

16.1. Двумерная случайная величина $\{\xi, \eta\}$ распределена равномерно внутри треугольника с вершинами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$. Найти совместную плотность распределения $f_{\xi,\eta}(x, y)$, плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, условные плотности распределения $f_\xi(x/y)$ и $f_\eta(y/x)$, основные числовые характеристики величин ξ и η, коэффициент корреляции между ξ и η.

16.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти функцию распределения случайной величины $Z = \xi/(\xi + \eta)$.

16.3. Стрелок, попадающий по мишени с вероятностью 1/3, делает два выстрела. Найти коэффициент корреляции между общим числом попаданий и числом попаданий при первом выстреле.

16.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = 1/x^2$, $x \in]-\infty, -1]$. Найти предел по вероятности $\max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ при $n \to \infty$.

16.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Случайная величина ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ может принимать три значения: $-n, 0, n$ с вероятностями, равными соответственно $1/(2n^2)$, $1 - 1/n^2$, $1/(2n^2)$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

16.6. Вероятность появления некоторого события в каждом испытании в серии независимых испытаний равна 1/3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота появления этого события в серии из 9000 испытаний отклонится от вероятности события не более, чем на 0,01. Сравнить эту вероятность с вероятностью, полученной с помощью интегральной формулы Муавра–Лапласа.

16.7. Стрелок попадает при выстреле по мишени в десятку с вероятностью 0,3; в девятку — 0,4; в восьмерку — 0,2; в семерку — 0,05; в шестерку — 0,05. Стрелок сделал 100 выстрелов. Используя центральную предельную теорему, найти, в каких пределах, симметричных относительно среднего значения, с вероятностью 0,9 лежит количество набранных стрелком очков.

Вариант № 17

17.1. Двумерная случайная величина $\{\xi, \eta\}$ распределена равномерно в области D, ограниченной снизу осью $O\xi$, а сверху — кривой $\eta = 1/(1 + x^2)$. Найти совместную плотность распределения $f_{\xi,\eta}(x, y)$, плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$, условные плотности распределения $f_\xi(x/y)$ и $f_\eta(y/x)$, основные числовые характеристики величин ξ и η и коэффициент корреляции между ξ и η.

17.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[-1, 1]$. Найти плотность распределения и основные числовые характеристики случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

17.3. Найти коэффициент корреляции между ξ и $\eta = e^{-\xi}$, если случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение.

17.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = 2 - 2x$, $x \in [0, 1]$. Найти предел по вероятности $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ при $n \to \infty$.

17.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. Случайная величина ξ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ может принимать три значения: $-\sqrt{n}, 0, \sqrt{n}$ с вероятностями, равными соответственно $1/n$, $1 - 2/n$, $1/n$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

17.6. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота выпадения орла при 1000 подбрасываниях монеты отклонится от вероятности выпадения орла при одном подбрасывании более чем на 0,05. Сравнить эту вероятность с вероятностью, полученной с помощью интегральной формулы Муавра–Лапласа.

17.7. Имеется 1600 прямоугольников, у каждого из которых длина и ширина — независимые случайные величины, распределённые равномерно на отрезке $[0, 1]$. Используя центральную предельную теорему, указать симметричные относительно среднего границы, в которых с вероятностью 0,9 лежит сумма площадей всех прямоугольников.

Вариант № 18

18.1. Дана плотность распределения случайного вектора (ξ, η):

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} Axy(1 - x^2), & x \in]0, 1[, \ y \in]0, 1[; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения; в) найти условные плотности распределения величин ξ и η; г) вычислить $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

18.2. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность распределения и основные числовые характеристики случайных величин: а) $\xi\eta$; б) $\xi - \eta$; в) $|\xi - \eta|$.

18.3. Найти коэффициент корреляции между ξ и $\eta = |\xi|$, если ξ — случайная величина с симметричным распределением и конечной дисперсией.

18.4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые, одинаково распределённые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$. Найти предел по вероятности $\min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ при $n \to \infty$.

18.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, каждая из которых распределена по закону Коши: $f_{\xi_n}(x) = 1/[\pi(1 + x^2)]$, $x \in \mathbb{R}$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

18.6. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота выпадения орла при 100 подбрасываниях монеты отклонится от вероятности выпадения орла при одном подбрасывании не более, чем на 0,1. Сравнить эту вероятность с вероятностью, полученной с помощью интегральной формулы Муавра–Лапласа.

18.7. Урожай картофеля (в мешках) с одной сотки — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром 5. Используя центральную предельную теорему, найти симметричные относительно среднего границы, в которых с вероятностью 0,92 будет лежать суммарный урожай картофеля с 625 соток.

Вариант № 19

19.1. Координаты случайной точки (ξ, η) на плоскости подчинены нормальному закону распределения с плотностью

$$f(x, \eta) = \frac{1}{2\pi ab} \exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\Big)\Big].$$

Определить совместную плотность распределения $f(r,\phi)$ полярных координат этой точки (R,Φ).

19.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, которые имеют показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения и основные числовые характеристики случайных величин а) $\xi-\eta$; б) $|\xi-\eta|$.

19.3. Бросаются три правильные монеты. Найти ковариацию числа решек, выпавших на всех монетах, с числом решек, выпавших на первой монете.

19.4. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ — независимые, равномерно распределённые на отрезке $[1,4]$ случайные величины. Доказать, что $\max\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}\xrightarrow{p}4$.

19.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$, причём случайная величина ξ_n $(n=0,1,2,\ldots)$ может принимать $2n+1$ значения: $-n,-n+1,\ldots,-1,0,1,2,\ldots,n-1,n$ с вероятностями $P(\xi_n=k)=1/(4|k|^3)$ для $k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots,\pm n$ и $P(\xi_n=0)=1-\sum\limits_{k=1}^{n}1/(2k^3)$ для $k=0$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

19.6. Случайная величина ξ является средней арифметической независимых и одинаково распределённых случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Сколько нужно взять таких величин, чтобы случайная величина ξ с вероятностью, не меньшей 0,9973, имела отклонение от своего математического ожидания, не превосходящее 0,1. Решить задачу, используя а) неравенство Чебышева; б) центральную предельную теорему.

19.7. На факультете ФТФ оценка ξ на экзамене по теории вероятностей имеет следующее распределение: $\{(\xi,P)\}=\{(2;0{,}4),(3;0{,}3),(4;0{,}2),(5;0{,}1)\}$. Используя центральную предельную теорему, определить вероятность того, что средний бал за экзамен потока из 121 студента ФТФ лежит в интервале $]2{,}5;3{,}5[$.

Вариант № 20

20.1. Дана плотность распределения случайного вектора (ξ,η):

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}Axe^{-x-xy}, & x\in]0,+\infty[,\ y\in]0,+\infty[;\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Требуется: а) определить величину A; б) найти функцию распределения; в) найти условные плотности распределения величин ξ и η; г) вычислить $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

20.2. Случайные величины ξ и η нормально распределены и независимы. Найти плотность распределения величины $\zeta=\xi/\eta$.

20.3. Стрелок, попадающий по мишени с вероятностью $1/3$, делает два выстрела. Найти коэффициент корреляции между общим числом промахов и числом попаданий.

20.4. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ — независимые, равномерно распределённые на отрезке $[-1,1]$ случайные величины. Доказать, что $\min\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}\xrightarrow{p}-1$.

20.5. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$. Случайная величина ξ_n $(n=0,1,2,\ldots)$ может принимать два значения: $\pm\ln n$ с вероятностями, равными $1/2$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел Чебышева?

20.6. Случайная величина ξ является средней арифметической 3200 независимых и одинаково распределённых случайных величин с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что ξ примет значение в промежутке $]2{,}95;3{,}075[$. Сравнить эту вероятность с вероятностью, полученной с помощью интегральной формулы Муавра–Лапласа.

20.7. Каждый абонент АТС в любой момент времени может занимать линию с вероятностью 0,075. Каково максимальное число абонентов N $(N>10)$, которое может обслужить АТС, имеющая 10 линий, если вероятность потери вызова (занятости линии) не должна превосходить 0,001 (использовать центральную предельную теорему).

Список литературы

1. Айвазян С.А. *Прикладная статистика; Основы эконометрики*: Учебник: В 2-х т. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 — Т. 2: Основы эконометрики. — 2001. — 432 с.
2. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики*. Т. II, ч. 1: *Специальные функции*. — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 352 с.
3. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов*. IV. *Ряды*: Учебное пособие. — Изд. 2. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. — 343 с.
4. Боровков А.А. *Математическая статистика*. — М.: Наука, 1984.
5. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. — М.: Физматгиз, 1962
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. *Прикладные задачи теории вероятностей*. — М.: Радио и связь, 1983.
7. Гмурман В.Е. *Теория вероятностей и математическая статистика*. — М.: Высшая школа, 1998.
8. Гмурман В.Е. *Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики*. — М. Высшая школа, 1999.
9. Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. — М.: Наука, 1969.
10. Горелова Г.В., Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel. — Ростов н/Д: Феникс, 2006.
11. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах*. — М.: Высшая школа, 1980.
12. Дженкинс Г., Ваттс Д. *Спектральный анализ и его приложения*. — М,: Мир, 1971.
13. Дороговцев А.Я., Сильвестров Д.С., Скороход А.В., Ядренко М.И. *Теория вероятностей. Сборник задач*. — Киев: Вища школа, 1980.
14. Емельянов Г.В., Скитович В.П. *Задачник по теории вероятностей и математической статистике*. — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1967.
15. Колмогоров А.Н., и др. *Введение в теорию вероятностей*. — М.: Наука, 1982.
16. Кремер Н.Ш. *Теория вероятностей и математическая статистика*: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. — 543 с.
17. Магазинников Л.И. *Курс лекций по теории вероятностей*. — Томск: Изд-во ТГУ, 1989.
18. Маленво Э. *Статистические методы в эконометрии*. — Вып. 1, 2. — М.: Статистика, 1976.
19. *Справочник по прикладной статистике*. В 2-х т. Т. 2 / Под ред. Э. Ллойда и др. — М.: Финансы и статистика, 1990.
20. Романовский М.Ю., Романовский Ю.М. *Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели*. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007.
21. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике* / В.С. Королюс и др. — М.: Наука, 1985.
22. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения* (в 2-х томах) — М.: Мир, т. 1 1964, т. 2, 1966.
23. Чистяков В.П. *Курс теории вероятностей*. — М.: Наука, 1982.
24. *Вероятность и математическая статистика*: Энциклопедия. — М.: БРЭ, 1999. — 910 с.

Учебное издание

КРИЦКИЙ Олег Леонидович
МИХАЛЬЧУК Александр Александрович
ТРИФОНОВ Андрей Юрьевич
ШИНКЕВ Михаил Леонидович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

для технических университетов
I. Теория вероятностей

Учебное пособие

Издано в авторской редакции
Технический редактор *В.Н. Романенко*
Дизайн обложки А.С. Пыжик

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе TEX – LaTEX
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати .2010. Формат 60×84/8. Бумага офсетная.
Печать XEROX. Усл. печ. л. 24,65. Уч.-изд. л. 22,30.
Заказ № 2000-10. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru