

ГЛАВА 6

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Понятие качества процесса управления

Качество процесса управления определяется поведением автоматической системы при переходе с одного режима работы на другой. Различают следующие основные показатели качества процесса управления: колебательность переходного процесса, максимальное отклонение (перерегулирование) управляемой переменной от заданного значения, точность, время переходного процесса.

Изменение выходной координаты $y(t)$ в переходном режиме называют *переходным процессом*. Переходный процесс определяется решением дифференциального уравнения в виде

$$y(t) = y_{np}(t) + y_{св}(t), \quad (6.1)$$

где $y_{np}(t)$ – принужденная составляющая, обусловленная обработкой задающего воздействия, $y_{св}(t)$ – переходная (свободная) составляющая, обусловленная обработкой системой ненулевых начальных условий.

В общем случае этот процесс представляет собой сложное движение, характер которого зависит от поведения переходной составляющей и от формы начального участка принужденной составляющей. Для практики важно знать, как быстро система входит в установившийся режим, как велики перерегулирования во время переходного процесса и т.д., т.е. в понятие качества САУ нужно включить *качество переходных процессов*.

После окончания переходных процессов в системе устанавливается режим, когда с той или иной степенью точности выходная координата следует за задающим воздействием. На характер изменения выходной координаты в установившемся режиме существенное влияние оказывает форма воздействий. Иными словами, качество одной и той же системы зависит от характера приложенных к ней воздействий. Качество системы в установившемся режиме зависит также от ее структуры и параметров, поэтому, чтобы характеризовать свойства системы, в общее понятие качества надо включить и оценку *качества установившегося режима*.

Методы оценки качества процесса управления могут быть самыми различными, но определяются они в основном тремя факторами. Во-первых, они зависят от выбора критерия качества (когда систему считать «хорошей», а когда «плохой»); во-вторых, от исследуемого режима работы системы (в переходном режиме ошибки управления намного больше, чем в установившемся, а значит, и методы исследования должны быть разные); в-третьих, от характеристик воздействий.

Вследствие неидеальности реальной САУ ухудшается ее качество, т.е. реальная выходная координата $y(t)$ всегда отличается от желаемой $y_{ж}(t)$. Ошибка управления $e(t) = y_{ж}(t) - y(t)$ входит в некоторый функционал $\psi[e(t)]$, называемый *оценкой точности*. Функционал может иметь самую разнообразную форму, выбор которой зависит от смысла задачи и метода ее решения. Наиболее простое значение функционала: $\psi[e(t)] = |e(t)|$.

Оценки качества переходных процессов подразделяются на прямые и косвенные. На рис. 6.1 приведена классификация методов исследования переходных процессов.

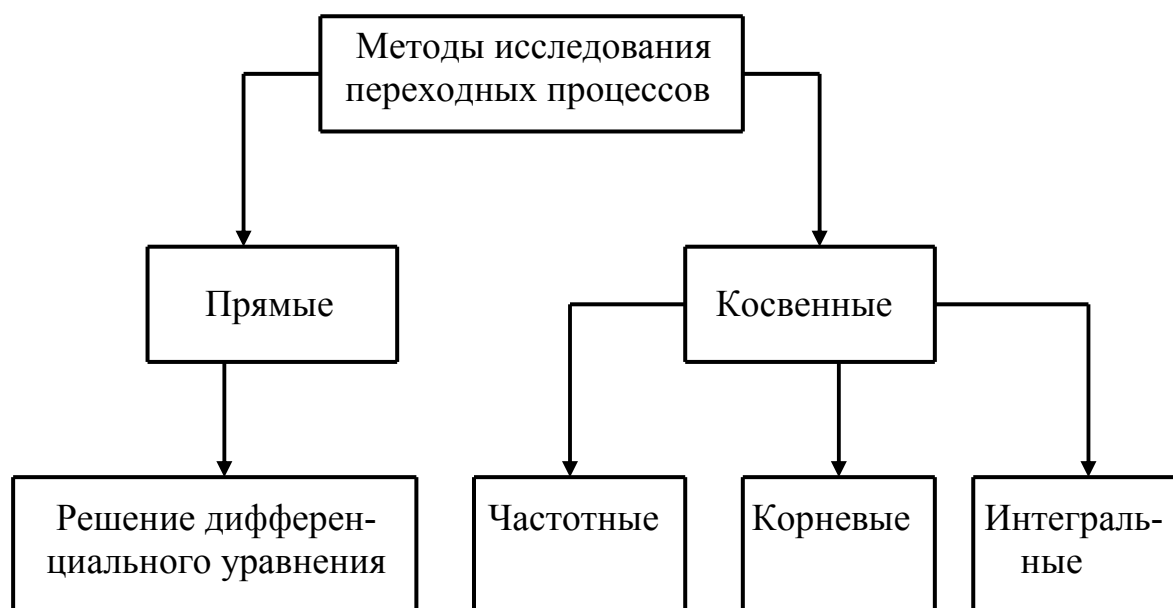


Рис. 6.1. Классификация методов исследования переходных процессов

6.2. Классификация внешних воздействий.

Требования, предъявляемые к качеству процесса управления

Изменение режима работы автоматической системы возникает в результате прикладываемых к ней внешних воздействий. При этом возможны различные режимы работы системы в зависимости от заданного закона изменения выходной переменной и внешних возмущающих воздействий. Внешнее возмущение в виде переменной нагрузки наиболее существенно для систем стабилизации управляемой переменной на заданном уровне. Основная задача при этом состоит в том, чтобы создать систему, которая не реагировала бы на это воздействие (инвариантная задача).

Внешнее воздействие на входе системы наиболее характерно для программных и следящих систем. При этом надо так выбрать параметры и структуру системы, чтобы это воздействие воспроизводилось с минимальной

ошибкой (ковариантная задача). В общем случае все эти воздействия на систему являются сложной функцией времени.

При исследовании качества процесса управления обычно принято рассматривать несколько типичных воздействий в виде следующих функций: единичной скачкообразной, импульсной, гармонической и соответствующей изменению сигнала с постоянной скоростью. Наиболее распространенным является воздействие в виде скачкообразной функции. Современные методы анализа качества процесса управления можно разделить на две основные группы. К первой можно отнести прямые методы оценки качества по кривой переходного процесса (методы интегрирования дифференциальных уравнений автоматической системы), ко второй - косвенные методы (критерии качества). Прямые методы требуют решения дифференциальных уравнений; косвенные методы позволяют, не решая дифференциальных уравнений, определять некоторые показатели качества процесса. Чаще применяются косвенные методы: распределение полюсов и нулей; интегральные оценки; частотные.

Основными параметрами качества процесса управления являются время переходного процесса t_p , заданное значение h_y , ошибка $e(t)$ и максимальное превышение h_m управляемой переменной.

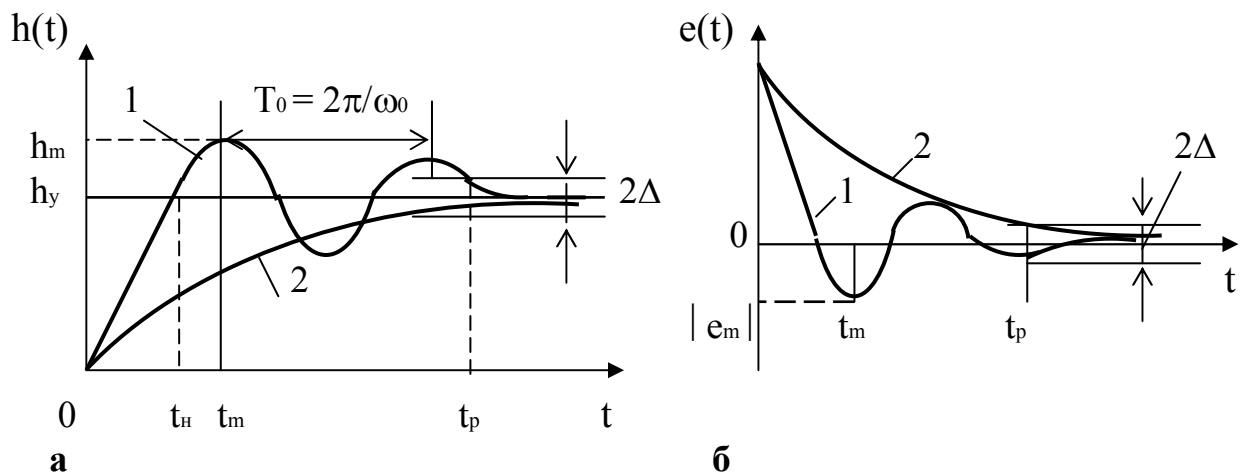


Рис. 6.2. Переходные характеристики:
а – для выходной координаты $y(t)$, б - для ошибки $e(t)$

6.3. Характер затухания переходного процесса

В зависимости от характера затухания при скачкообразном воздействии переходный процесс может быть монотонным, аperiodическим или колебательным (рис. 6.2). Процесс является монотонным, если отклонение управляемой переменной от нового установившегося значения при $t \rightarrow \infty$ только уменьшается (кривая 2). Процесс считается аperiodическим, если

имеет место не более одного перерегулирования относительно начального и конечного значений управляемой переменной. Процесс называется колебательным, если управляемая переменная в течение переходного процесса несколько раз отклоняется в обе стороны от конечного установившегося значения (кривая 3).

В некоторых случаях необходимо иметь суждение о скорости затухания переходного процесса. В случае монотонного и апериодического процессов скорость затухания характеризуется абсолютным значением наименьшего вещественного корня характеристического уравнения данной системы. Для оценки скорости затухания колебательного процесса используют логарифмический декремент затухания, который равен натуральному логарифму отношения амплитуд двух последовательных экстремумов кривой затухания (рис. 6.3).

Если затухание колебательного процесса происходит по закону

$$x_{\text{вых}} = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \psi),$$

где α - вещественная часть комплексного корня, то логарифмический декремент затухания определяется как

$$d = \ln \frac{x_{1.m}}{x_{2.m}} = \ln \frac{A \cos \psi}{A \cos \psi} e^{\alpha T} = \alpha T.$$

Колебания, возникающие в системе, приводят к износу механизмов и часто оказываются нежелательными по техническим соображениям, поэтому число колебаний, возникающих в системе во время переходного процесса, не должно быть слишком велико. В связи с этим вводится понятие о степени колебательности μ , которая характеризуется числом колебаний, возникающих в системе за время переходного процесса.

Поскольку колебательность переходного процесса обусловлена наличием комплексного корня $p_k = -\alpha_k \pm j\omega_k$ в характеристическом уравнении, то степень колебательности (для ближайшего к мнимой оси корня)

$$\mu_k = \omega_k / \alpha_k. \quad (6.2)$$

Выражение (6.2) является общим. Например, для вещественного корня $\omega_k=0$, поэтому $\mu_k=0$; для чисто мнимого корня $\alpha_k=0$, поэтому $\mu_k=\infty$.

Значение степени колебательности μ может быть использовано для приближенной оценки перерегулирования x_m . При этом установлено, что между ними существует неравенство

$$x_m \leq e^{-\pi/\mu},$$

где перерегулирование определено в относительных единицах для случая нулевых начальных условий переходного процесса.

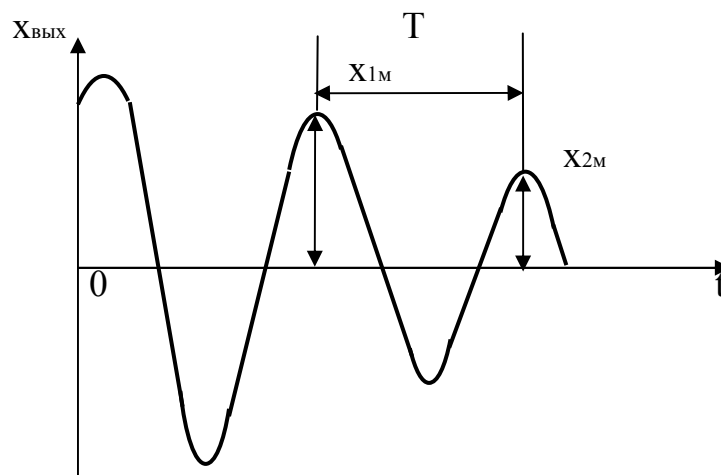


Рис. 6.3. Затухание колебательного переходного процесса

Для оценки колебательности переходного процесса широко используются частотные характеристики.

6.4. Максимальное отклонение управляемой переменной. Перерегулирование. Время переходного процесса

Если переходные процессы представляют собой реакцию на скачкообразные воздействия, то их подразделяют на колебательные процессы (кривая 1 на рис. 6.2) и процессы без перерегулирования (кривая 2).

Назовем прямые оценки качества переходного процесса (рис. 6.2.).

1. Время регулирования t_p — минимальное время, по истечении которого переходная характеристика будет оставаться близкой к установившемуся значению с требуемой точностью, т.е. выполняются неравенства $|e(t)| \leq \Delta$ или $|h(t) - h_y| \leq \Delta$, где Δ — постоянная, заранее оговариваемая величина, которая задается в процентах от h_y (для статических систем $h_y = K/(1+K)$, а для астатических $h_y = 1$). Обычно принимают $\Delta = 5\%$.
2. Перерегулирование H_m — максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения, выраженное в относительных единицах или процентах $H_m = (h_m - h_y)/h_y \cdot 100\%$ или $H_m = |e_m|/h_y \cdot 100\%$.
3. Время достижения первого максимума t_m .
4. Время нарастания переходного процесса t_n — абсцисса первой точки пересечения кривой $h(t)$ с уровнем установившегося значения h_y или кривой $e(t)$ с осью абсцисс.
5. Частота колебаний $\omega = 2\pi / T_0$, где T_0 — период колебаний для колебательных процессов.
6. Число колебаний N , которое имеет $h(t)$ за время t_p .

Для монотонных процессов основным показателем является время регулирования.

6.5. Корневые оценки качества

Корневые оценки основаны на зависимости характера переходного процесса от распределения нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы.

Переходная характеристика может быть вычислена по формулам разложения:

$$h(t) = \frac{K(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{K(p_k)}{p_k D'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (6.3)$$

где p_k – корни (полюсы) характеристического уравнения замкнутой системы $D(p)=0$, n – число корней. Из выражения видно, что на характер $h(t)$ влияют и числитель $K(p)$, и знаменатель $D(p)$ передаточной функции. Однако, если числитель $K(p)$ представляет собой постоянную величину, то оценка по корням характеристического уравнения допустима.

Для приближенной оценки качества надо на плоскости корней выделить ту область, в которой располагаются корни (рис. 6.3).

О качестве переходного процесса приближенно можно судить по *степени устойчивости* α_{min} , под которой понимают расстояние от мнимой оси до ближайшего корня или ближайшей пары комплексных корней. Степень устойчивости характеризует *предельное быстроедействие* системы, так как вещественная часть корня α_{min} принадлежит той компоненте переходной характеристики, которая затухает медленнее всех остальных. Время переходного процесса $t_{peg} \cong 3/\alpha_{min}$, если ближайший к мнимой оси корень – вещественный и не превосходит этого значения, если ближайшей к мнимой оси является пара комплексных корней.

Под *колебательностью системы* μ понимают

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = (\omega / \alpha)_{max}. \quad (6.4)$$

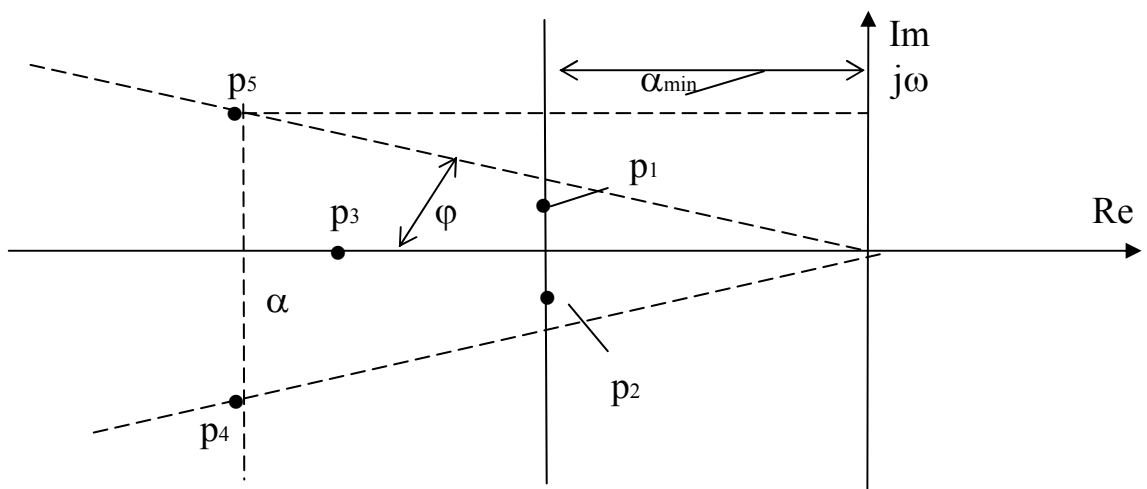


Рис. 6.4. Пример распределения корней на комплексной плоскости

6.6. Оценки качества САУ по частотным характеристикам

Математической основой частотного метода анализа качества автоматических систем является преобразование Фурье. Этот метод сочетает аналитические вычисления и графические построения.

Так как при анализе качества управления применяются те же частотные характеристики, что и при исследовании устойчивости, то частотный метод представляет собой единый метод анализа динамики автоматических систем. При этом используется аналитическая зависимость между переходной и частотной функциями замкнутой системы.

Переходная характеристика замкнутой САУ может быть определена по вещественной частотной характеристике (ВЧХ) $P(\omega)$ из выражения

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (6.5)$$

Для того чтобы косвенно (без построения кривой процесса) судить о качестве переходного процесса, надо рассмотреть свойства ВЧХ и соответствующих им переходных характеристик, устанавливаемые этой формулой. Приведем основные свойства:

1. Если ВЧХ $P(\omega)$ можно представить суммой $\Sigma P_i(\omega)$, то и $h(t)$ может быть представлена суммой составляющих $\Sigma h_i(t)$.
2. Если умножить $P(\omega)$ на постоянное число a , то соответствующие значения $h(t)$ тоже умножаются на это число.
3. Если аргумент ω в выражении ВЧХ умножить на постоянное число a , то аргумент в соответствующем выражении переходной характеристики делится на это число, т.е.

$$h\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(a\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (6.6)$$

Отсюда следует, что, чем более широкополосна ВЧХ, тем быстрее $h(t)$ достигнет установившегося значения.

4. Начальное значение ВЧХ равно конечному значению $h(t)$.
5. Если у ВЧХ есть разрыв непрерывности ($P(\omega) = \infty$, как это показано на рис. 6.5,а), то характеристическое уравнение имеет мнимый корень $p_i = \pm j\omega$ и в системе устанавливаются незатухающие колебания.

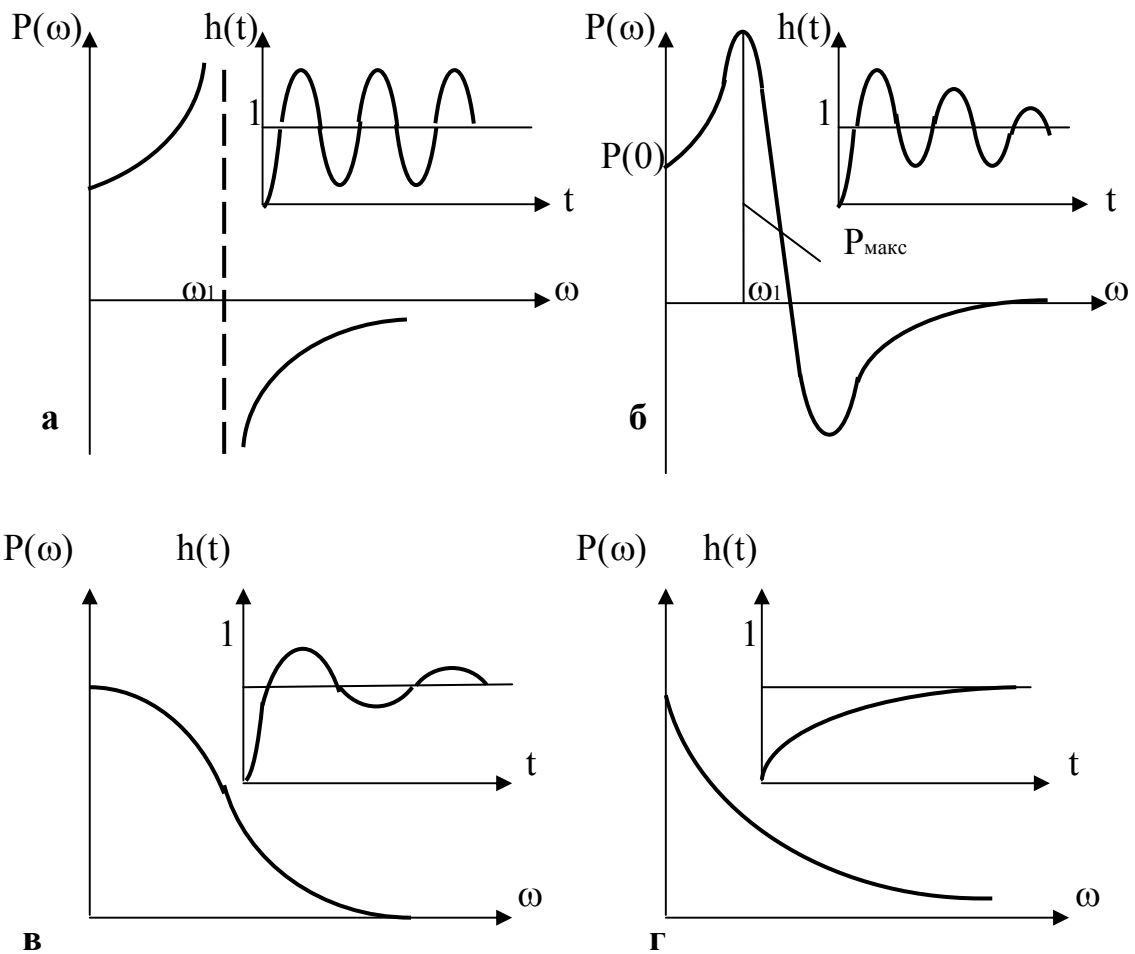


Рис. 6.5. Влияние формы ВЧХ на переходную характеристику

6. Высокий и острый пик ВЧХ, за которым $P(\omega)$ переходит через нуль при частоте, близкой к ω_1 , соответствует медленно затухающим колебаниям (рис. 6.5,б).
7. Чтобы у $h(t)$ было перерегулирование, не превышающее 18%, ВЧХ должна быть положительной невозрастающей функцией частоты ω (рис. 6.5,в).
8. Чтобы $h(t)$ была монотонной, ВЧХ должна быть положительной непрерывной функцией частоты с отрицательной убывающей по абсолютной величине производной (рис. 6.5,г).
9. Максимальное значение перерегулирования определяется по выражению (рис. 6.5,б)

$$H_{\max} = \frac{1,18P_{\max} - P(0)}{P(0)}. \quad (6.7)$$

О качестве переходного процесса можно судить также по виду амплитудно-частотной характеристики $A(\omega)$ замкнутой системы. Пик характеристики $A(\omega)$ является косвенной оценкой величины перерегулирования и колебательности процесса. При этом отношение максимума характеристики $A(\omega)$ к значению амплитуды при $\omega=0$ называется показателем колебательности M . Обычно принимается, что при $\omega=0$ значение амплитудной характеристики замкнутой системы $A(0)=1$. Тогда показатель колебательности определяется в относительных единицах. Частота, при которой $A(\omega)$ имеет максимум, называется собственной частотой ω . Если характеристика $A(\omega)$ имеет пик, то точка пересечения кривой с линией $A(0)$ определяет частоту среза ω_c замкнутой системы. Эта частота косвенным путем характеризует время переходного процесса. Чем больше частота среза, тем меньше время t_p . При этом время переходного процесса системы $t_p \approx \pi / \omega_c$.

6.7. Интегральные оценки качества

Интегральные оценки качества представляют собой интегралы по времени (в пределах от 0 до ∞) от некоторой функции управляемой переменной $X(t)$ или сигнала ошибки $\Delta X(t)$:

$$I = \int_0^{\infty} f_0 [X (t), t] dt . \quad (6.8)$$

Подынтегральная функция f_0 выбирается таким образом, чтобы интеграл (6.8) лучше характеризовал качество системы. Чтобы интеграл был сходящимся, в функцию f_0 вводят не абсолютное значение $X(t)$, а ее отклонение от установившихся значений.

Простейшей интегральной оценкой является линейная интегральная оценка:

$$I_1 = \int_0^{\infty} [X(\infty) - X(t)] dt = \int_0^{\infty} \Delta X dt , \quad (6.9)$$

которая равна площади, заключенной между прямой $X(\infty)$ и кривой $X(t)$ (рис. 6.6, а, б). Интегральная оценка (6.9) учитывает как величину динамических отклонений, так и длительность их существования. Поэтому, чем меньше оценка, тем лучше качество процесса управления.

На рис. 6.6, а показан переходный процесс, вызванный возмущением, а на рис. 6.6, б – изменением задающего воздействия.

Если выбрать в качестве целевой функции при оптимизации САУ по быстродействию интегральную оценку, то настроечные параметры регулятора (варьируемого звена) необходимо изменять таким образом, чтобы интегральная оценка была минимальна, т.е. $I \rightarrow \min$. После такой процедуры регулятор будет иметь оптимальные настроечные параметры. Абсолютное

значение интегральной оценки не связано с числовыми показателями качества.

Недостатком линейной интегральной оценки I_1 является то, что ее можно применять лишь для заведомо неколебательных (апериодических) переходных процессов. Интеграл (6.2), вычисленный для знакопеременной кривой (рис. 6.6,в), будет существенно меньше интеграла, вычисленного для апериодической кривой, хотя качество переходного процесса в этом случае будет значительно хуже. Это связано с тем, что значение интеграла зависит от знаков площадей подынтегральной функции. В предельном случае ухудшения качества переходного процесса, когда он будет иметь незатухающий колебательный характер, I_1 уменьшится до нуля.

В связи с этим для колебательных переходных процессов применяют такие интегральные оценки, знакопеременность подынтегральной функции которых тем или иным способом устранена. Таким свойством обладает квадратичный интегральный критерий

$$I_2 = \int_0^{\infty} (\Delta X)^2 dt, \quad (6.10)$$

в котором знаки площади не принимаются во внимание.

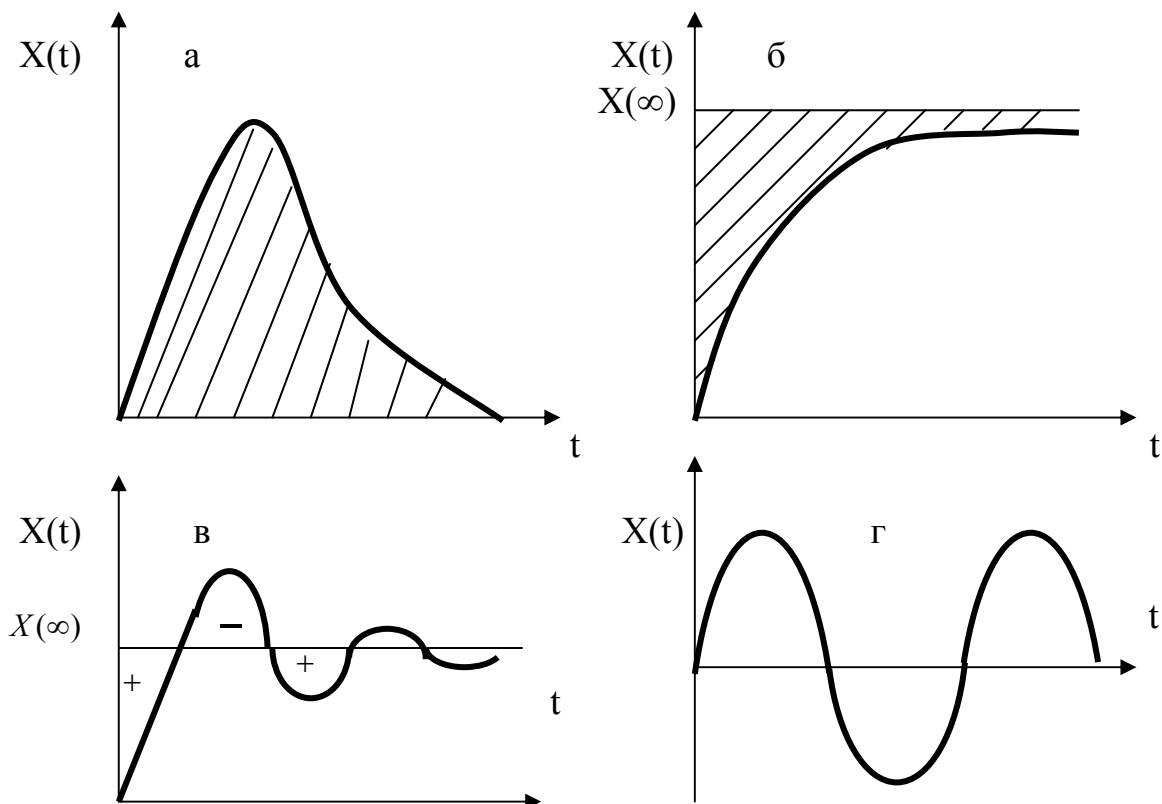


Рис. 6.6. Интегральные оценки качества переходных процессов

Этот критерий является наиболее широко используемым интегральным критерием. Однако выбор варьируемых параметров по минимуму I_2 дает

колебательный переходный процесс обычно с довольно большой колебательностью. Поэтому в тех случаях, когда такой процесс неприемлем, переходят к интегральному критерию

$$I_3 = \int_0^{\infty} [(\Delta X)^2 + a \left(\frac{d\Delta X}{dt} \right)^2] dt . \quad (6.11)$$

Интеграл I_3 состоит из двух частей, т.е. может быть представлен в виде суммы двух интегралов (аддитивная форма представления интеграла). Первый является прежним интегралом I_2 от $(\Delta X)^2$, а второй – интегралом от $(\Delta X')^2$. Если при одном и том же значении площади переходного процесса, т.е. неизменной величине первого интеграла, замедлить (растянуть) переходный процесс во времени, то соответственно уменьшится второй интеграл от квадрата скорости изменения X . Поэтому при вариации некоторых параметров системы минимум интеграла I_3 по сравнению с интегралом I_2 будет при более медленном и менее колебательном процессе. При этом замедление процесса будет тем больше, чем больше взята величина a , определяющая относительный вес составляющих интеграла I_3 от ΔX и $\Delta X'$.

Имеются еще более сложные интегральные критерии качества, содержащие вторую и следующие производные от ΔX . Их применение приближает переходный процесс соответственно к кривой второго и следующих порядков.

Если представить разность под знаком интеграла (6.9) в виде

$$X(\infty) - X(t) = X_3 - \xi(\infty) - X(t) = \xi(t) - \xi(\infty) = \xi_n(t) , \quad (6.12)$$

где $\xi(\infty)$ – установившееся значение сигнала ошибки;

$\xi(t)$ – динамическая составляющая сигнала ошибки;

$\xi_n(t)$ – переходная составляющая сигнала ошибки;

X_3 – заданное значение регулируемой величины,

то интегральную оценку (6.9) можно определить в таком виде:

$$Q_n = \int_0^{\infty} \xi_n(t) dt = \int_0^{\infty} [\xi(t) - \xi(\infty)] dt . \quad (6.13)$$

Для колебательных переходных процессов применяется модульная интегральная оценка

$$Q_m = \int_0^{\infty} |\xi_n(t)| dt \quad (6.14)$$

и ее модификация

$$Q_m^I = \int_0^{\infty} t |\xi_n(t)| dt .$$

Квадратичная оценка

$$Q_{кв} = \int_0^{\infty} \xi_n^2(t) dt \quad (6.15)$$

так же, как и линейная, учитывает величину и длительность отклонений.

6.8. Связь показателей качества с параметрами приближенной модели

Приближенную оценку прямых показателей качества σ и t_n (без вычисления и построения переходной характеристики) удобно осуществлять на основе гипотезы об эквивалентности динамических свойств замкнутой системы регулирования произвольного порядка свойствам колебательного звена второго порядка.

Действительно, простейшей моделью, пригодной для приближенного описания динамики одноконтурной системы и приближенной оценки показателей качества процесса управления по основному каналу $x_3 - x$, может служить инерционное звено второго порядка:

$$W_m(p) = k / (T^2 p^2 + 2\xi T p + 1), \quad (6.16)$$

обладающее колебательными свойствами ($\xi \leq 0.7$) и передаточным коэффициентом $k=1$. Приближенная замена реальной САУ, у которой а.ч.х. $|\Phi_c(j\omega)|$ имеет, как правило, характерный резонансный пик при частоте ω_p , заключается в подборе T и ξ модели 6.16) таким образом, чтобы обеспечить в существенном диапазоне частот $0 \leq \omega \leq 2\omega_p$ наиболее близкое совпадение а.ч.х. системы и модели, т.е., чтобы

$$|\Phi_c(j\omega)| \approx |W_m(j\omega)|.$$

При этом достаточно обеспечить совпадение трех параметров а.ч.х.: начальных значений $|\Phi_c(j0)| \approx |W_m(j0)|$, резонансных частот $\omega_{pc} \approx \omega_{pm}$ и максимальных значений $|\Phi_c(j\omega_p)| \approx |W_m(j\omega_p)|$, определяющих частотный показатель колебательности.

Очевидно, что при указанных условиях $h_c(t) \approx h_m(t)$. С помощью модели (6.16) удастся любой реальный контур регулирования, представляющий собой в общем случае сложную динамическую систему высокого порядка, описать достаточно простыми формулами. Так, а.ч.х. замкнутого исходного контура

$$A_c(\omega) = |\Phi_c(j\omega)| \approx A_m(\omega) = 1 / \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}, \quad (6.17)$$

а переходная функция

$$h_c(t) \approx h_m(t) = 1 - (\sqrt{1 - \xi^2})^{-1} e^{-\xi t/T} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \frac{t}{T} + \arccos \xi). \quad (6.18)$$

В выражениях (6.17) и (6.18) входят лишь два числовых параметра T и ξ , которые связаны с частотами незатухающих (ω), затухающих (ω_3) и резонансных (ω_p) колебаний и с частотным показателем колебательности M известными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= 1/T; \quad \omega_3 = \sqrt{1 - \xi^2} / T; \quad \omega_p = \sqrt{1 - 2\xi^2} / T; \\ M &= A(\omega_p) / A(0) = 1 / 2\xi\sqrt{1 - \xi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

По модельной переходной характеристике (6.18) можно получить аналитические выражения для двух главных показателей качества: перерегулирования (%):

$$\sigma = e^{-\pi\xi / \sqrt{1 - \xi^2}} \cdot 100 \% \quad (6.20)$$

и длительности переходного процесса:

$$t_n \leq T \ln 20 / \xi \approx 2T / \xi. \quad (6.21)$$

В диапазоне реальных значений $0,25 < \xi < 0,55$ можно указать набор приближенных формул:

$$\sigma \approx 0,1 / \xi; \quad t_n \approx 3T / \xi; \quad M \approx 0,545 / \xi; \quad \omega_p / \omega_0 \approx 1,2 - \xi. \quad (6.22)$$

Так как при синтезе САУ всегда стремятся показатели замкнутой системы оценивать по характеристикам ее разомкнутого контура, которые более просты и непосредственно выбираются разработчиком, то для модели (6.16) замкнутой системы найти соответствующую модель разомкнутого контура. Нетрудно убедиться, что простейшим разомкнутым контуром, который при замыкании образует колебательное звено (6.16), является реальное интегрирующее звено:

$$W_{pk}(p) = k / p (T_{01}p + 1). \quad (6.23)$$

Действительно, передаточная функция замкнутой системы (рис. 6.7,а) по основному каналу

$$\Phi_m(p) = \frac{W_{pk}(p)}{1 + W_{pk}(p)} = \frac{k}{T_{01}p^2 + p + k} = \left(\frac{T_{01}}{k} p^2 + \frac{1}{k} p + 1 \right)^{-1}, \quad (6.24)$$

где k – передаточный коэффициент разомкнутого контура; T_{01} – постоянная времени инерционного контура (обычно объекта).

Очевидно, что модель замкнутой системы по каналу задания будет эквивалентна колебательному звену (6.16), если параметры разомкнутого

контура связаны с параметрами этого звена следующими соотношениями:

$$T_{01} / k = T^2; 1 / k = 2\xi T; kT_{01} = 1 / 4\xi^2; T_{01} = T / 2\xi. \quad (6.25)$$

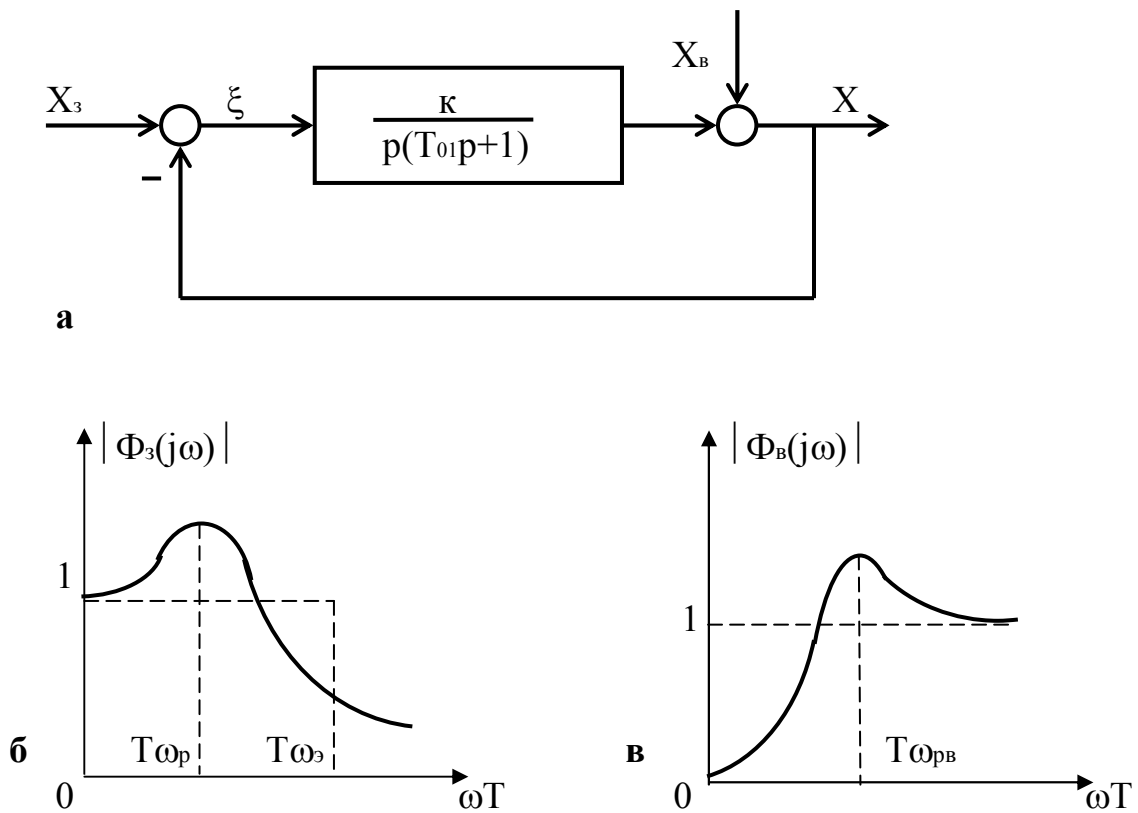


Рис. 6.7. Приближенная модель колебательной системы регулирования:
а – алгоритмическая структура, б,в – частотные характеристики

Параметры T и ξ колебательной модели (6.16) замкнутой системы можно выразить в явном виде через параметры k и T_{01} разомкнутого контура системы:

$$T = 1 / \omega_0 = \sqrt{T_{01} / k}, \quad \xi = 1/2 \sqrt{kT_{01}}. \quad (6.26)$$

Из формул (6.26) следует:

1. Частота ω собственных незатухающих колебаний замкнутой системы тем больше, чем больше k разомкнутого контура и чем меньше T_{01} .

2. Колебательность замкнутой системы, характеризуемая величиной ξ^{-1} , тем сильнее, чем больше произведение kT .

Типичная форма амплитудных характеристик модели системы по каналам задания и возмущения показана на рис. 6.7,б,в соответственно.

Формулы для приближенной оценки показателей качества системы:

$$\sigma \approx 0,2\sqrt{kT_{01}}; \quad t_n \approx 6T_{01}; \quad M \approx 1,1\sqrt{kT_{01}}. \quad (6.27)$$

Пример. Оценить приближенно показатели качества статической системы регулирования с передаточной функцией разомкнутого контура

$$W_{pk}(p) = k_{pk} / (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1), \quad (1)$$

где $k_{pk} = 8$; $T_1 = 10$ с; $T_2 = 1.5$ с; $T_3 = 0.5$ с.

Решение.

Определим параметры упрощенной модели (6.23).

Согласно (6.23):

$$k = k_{pk} / T_1 = 0.8; \quad T_{01} = T_2 + T_3 = 2$$
с.

Согласно (6.26), параметр модели (6.16) $\xi = 1/2 \sqrt{k T_{01}} = 1/2 \sqrt{0.8 \cdot 2} = 0.4$ и находится в пределах $0.25 < \xi < 0.55$, для которых справедливы следующие приближенные показатели. В соответствии (6.27) перерегулирование

$$\sigma \approx 0.2 \sqrt{k T_{01}} = 0.2 \sqrt{0.8 \cdot 2} = 0.25,$$

длительность переходного процесса

$$t_n \approx 6 T_{01} = 6 \cdot 2 = 12$$
 с,

показатель колебательности

$$M \approx 1.1 \sqrt{k T_{01}} = 1.1 \sqrt{0.8 \cdot 2} = 1.375.$$

Для обеспечения высоких показателей качества процесса управления необходимо рационально выбрать схему и параметры специально введенных корректирующих устройств годографа, стандартных передаточных функций и нормированных переходных характеристик и др.

ГЛАВА 7

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Основные понятия о синтезе САУ

Математические задачи в теории автоматического управления состоят из задач анализа и синтеза автоматических систем. В задачах анализа полностью известна структура системы, заданы все параметры системы, и требуется оценить какое-либо ее статическое или динамическое свойство. Задачи синтеза можно рассматривать как обратные задачам анализа, так как в них требуется определить структуру и параметры системы по заданным показателям качества. Простейшими задачами синтеза являются, например, задачи определения передаточного коэффициента разомкнутого контура по заданной ошибке или минимуму интегральной ошибки. Более сложные задачи рассмотрены далее.

Синтезом автоматической системы называют процедуру определения структуры и параметров системы по заданным показателям качества. Синтез является важнейшим этапом проектирования и конструирования системы. В общем случае при проектировании системы необходимо определить алгоритмическую и функциональную структуру (задача полного синтеза). Алгоритмическую структуру системы (или ее части) находят при помощи математических методов и на основании требований, записанных в четкой математической форме. Поэтому процедуру отыскания алгоритмической структуры называют теоретическим синтезом или аналитическим конструированием системы управления.

Синтез функциональной структуры или технической синтез системы заключается в выборе конкретных элементов. Этот этап проектирования не имеет пока строгой математической основы и относится к области инженерного искусства.

Последовательность решения задачи полного синтеза может быть различной. В некоторых простых случаях задачу удается решить в идеальной последовательности: сначала определить при помощи математических методов алгоритмическую структуру системы, а затем подобрать соответствующие конструктивные элементы. В более сложных случаях возникают трудности в подборе конструктивных элементов, потому что в ограниченной номенклатуре средств управления может не оказаться устройств с необходимыми алгоритмическими свойствами. Поэтому задачу синтеза в большинстве случаев решают следующим образом. Сначала, исходя из требований к назначению системы и учитывая условия ее работы, по каталогам серийного оборудования выбирают функционально необходимые элементы системы: регулирующий орган (РО), исполнительное устройство (ИУ), датчики (Д). Эти элементы вместе с объектом управления (ОУ) образуют неизменяемую часть системы (рис. 7.1).

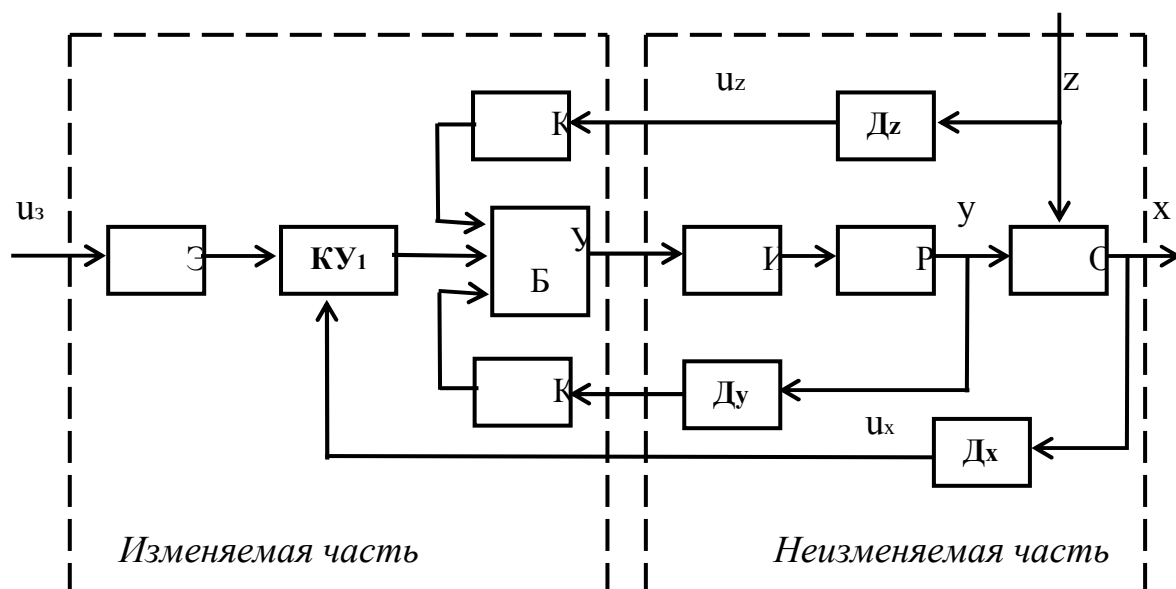


Рис. 7.1. Функциональная структура синтезируемой системы

Затем на основании требований к статическим и динамическим свойствам системы определяют изменяемую часть, в которую входят усилительно-преобразовательный блок (УБ) и различные корректирующие устройства (КУ).

Алгоритмическую структуру изменяемой части находят с учетом свойств уже выбранных функционально необходимых элементов, а техническая реализация этой части осуществляется с использованием стандартных унифицированных регуляторов и различных корректирующих и компенсирующих устройств. Таким образом, процессы определения алгоритмической и функциональной структур всей системы тесно переплетаются друг с другом.

Заключительным этапом проектирования системы управления является *параметрическая оптимизация* - расчет настроечных параметров выбранного регулятора.

После решения задачи синтеза обычно выполняют анализ синтезированной системы: проверяют, обладает ли система необходимыми показателями точности, устойчивости и качества.

На всех этапах синтеза и анализа систем целесообразно применение ЭВМ. Моделирование систем на ЭВМ позволяет исследовать большое количество вариантов структур и параметров и ускорить решение задачи синтеза.

7.2. Общие принципы синтеза алгоритмической структуры САУ

1. Идеальная структура системы. Для решения задачи синтеза алгоритмической структуры должны быть известны передаточная функция $W_0(p)$ объекта управления, возмущения u_v и x_v , действующие на входе и

выходе объекта, а также помехи x_n , возникающие в каналах задания и измерения (рис. 7.2, а, б).

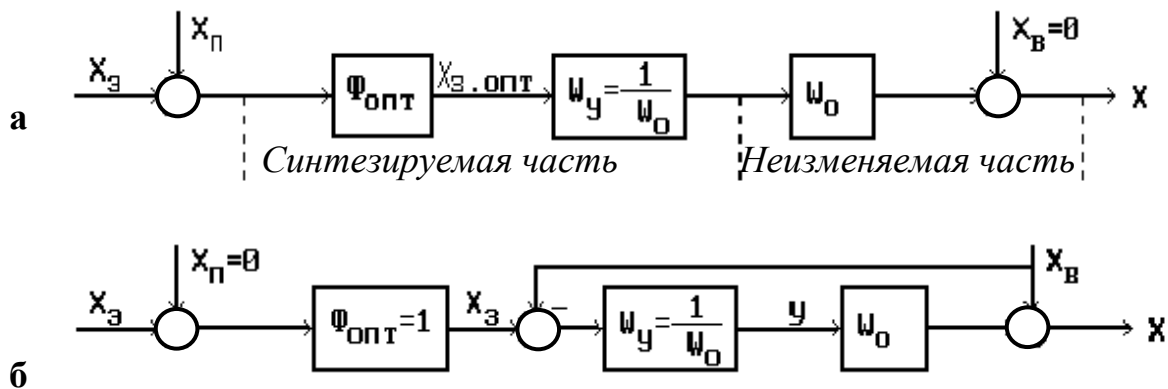


Рис. 7.2. Алгоритмическая структура идеальной разомкнутой системы

В простейшем случае, когда возмущающие воздействия на объект отсутствуют, управление можно осуществлять по разомкнутой схеме (рис. 7.2,а). Если при этом передаточную функцию $W_y(p)$ управляющего устройства принять равной

$$W_y(p) = 1/W_0(p), \quad (7.1)$$

то обеспечится полная (структурная) компенсация инерционности объекта, и система управления будет практически мгновенно воспроизводить на выходе объекта задающее воздействие $x_{э \text{ опт}}$. Задание $x_{э \text{ опт}}$ формируется специальным фильтром с передаточной функцией $\Phi_{\text{опт}}(p)$, которая выбирается так, чтобы фильтр как можно лучше пропускал все составляющие сигнала $x_{э}$ и подавлял помеху x_n .

Если на объект действует возмущение $x_в$, которое поддается измерению, то теоретически можно синтезировать идеальную разомкнутую систему управления с полной компенсацией возмущения (рис. 7.2, б). Причем передаточная функция (7.1), обеспечивающая полную компенсацию инерционности объекта, оказывается наилучшей и для компенсации ("парирования") возмущения $x_в$. Действительно, при выполнении условия (7.1) всегда $W_y(p)W_0(p)=1$, поэтому полезная составляющая x_y на выходе объекта будет полностью уравновешивать возмущение $x_в$.

Основная трудность при моделировании идеальных алгоритмических структур САУ заключается в реализации обратной передаточной функции объекта. Можно рекомендовать в качестве модели обратной передаточной функции объекта следующее соединение звеньев (рис. 7.3).

При большом коэффициенте передачи k_0 эквивалентная передаточная функция соединения звеньев имеет вид

$$W(p) = k_0 / (1 + k_0 W_0(p)) \approx 1 / W_0(p). \quad (7.2)$$

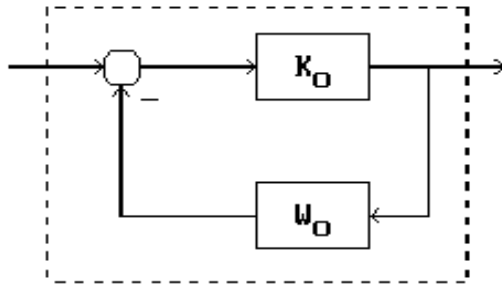


Рис. 7.3. Модель обратной передаточной функции $1/W_0$

Если возмущение $x_в$ не удастся измерить, то для отыскания структуры идеальной замкнутой системы можно использовать идею косвенного измерения возмущения $x_в$ с помощью модели объекта $W_0(p)$ (рис. 7.4,а).

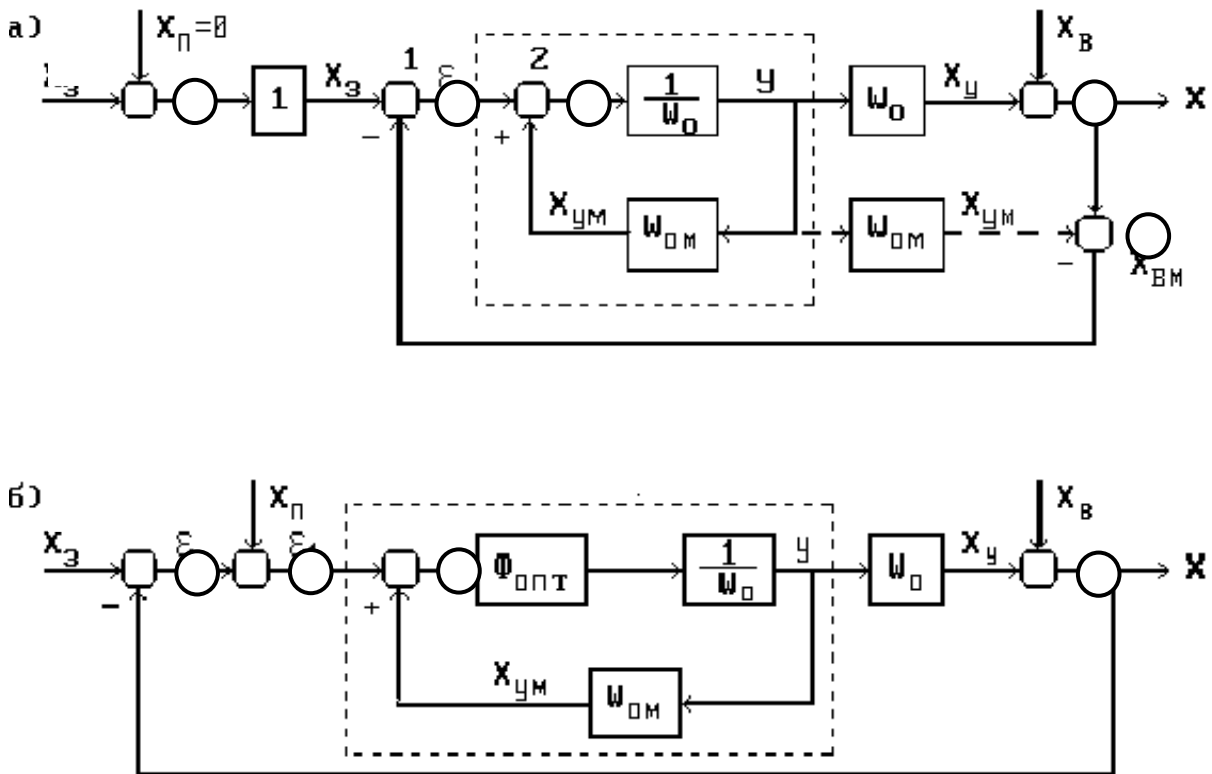


Рис. 7.4. Алгоритмические структуры идеальной замкнутой системы

Очевидно, что при

$$W_{0м}(p) = W_0(p) \quad (7.3)$$

вычисляемый на выходе модели (штриховые стрелки) сигнал

$$x_{вм} = x - x_{ум} = (x_у + x_в) - x_{ум} = x_в \quad (7.4)$$

является косвенно измеренным возмущением $x_в$ и его можно, как и в схеме

на рис. 7.2, б, ввести в управляющее устройство с передаточной функцией $1/W_0(p)$ и, таким образом, снова получить идеальную разомкнутую структуру. В ней по правилам структурных преобразований сигнал $x_{ум}$ можно перенести на вход управляющего устройства и приложить к сумматору 2. Тогда управляющее устройство $1/W_0$ окажется охваченным внутренней положительной обратной связью, а сигнал после сумматора 1 будет соответствовать сигналу ошибки $\xi = x_z - x$. Последнее означает, что система стала замкнутой и работает по принципу отрицательной обратной связи с регулятором (штриховой прямоугольником), имеющим передаточную функцию:

$$W_{pu}(p) = \frac{y(p)}{\xi(p)} = \frac{1/W_0(p)}{1 - W_{ом}(p)/W_0(p)}. \quad (7.5)$$

При точном совпадении модели и объекта регулятор (7.5) будет работать как пропорциональный с $k_p = \infty$, что соответствует нулевым ошибкам по каналам задания и возмущения. В общем случае, когда $x_в \neq 0$ и $x_n \neq 0$, алгоритмическая структура идеальной замкнутой системы (рис. 7.4, б) сочетает в себе признаки обеих структур, обоснованных выше эвристическим путем. В этой идеальной структуре регулятор содержит внутреннюю положительную обратную связь, звенья $1/W_0$, $W_{ом}$ и оптимальный фильтр $\Phi_{опт}$. Передаточная функция регулятора идеальной замкнутой системы

$$W_{pu}(p) = \frac{y(p)}{\xi_1(p)} = \frac{\Phi_{опт}(p)}{1 - \Phi_{опт}(p)} \cdot \frac{1}{W_0(p)}. \quad (7.6)$$

Звено $\Phi_{опт}(p)$ осуществляет оптимальную фильтрацию внешних воздействий и вырабатывает оптимальное задание $x_{з\ опт}$. Обратная модель объекта $1/W_0(p)$ компенсирует его инерционность, а прямая модель $W_{ом}(p)$ вычисляет составляющую x_y на выходе объекта.

Используемое в идеальной системе включение последовательно с объектом звена в виде обратной модели объекта является принципиальной основой структурного и параметрического синтеза систем управления, а сам прием называется *методом компенсации инерционности объекта*.

В практических задачах синтеза чаще всего применяется частичная (параметрическая) компенсация - устранение влияния одной-двух (обычно самых больших) постоянных времени объекта. Для этого последовательно с инерционным объектом

$$W_0(p) = k_0/(T_{01}p + 1)(T_{02}p + 1)...(T_{0n} + 1), \quad (7.7)$$

где $T_{01} > T_{02} > T_{03} > \dots > T_{0n}$ включают фиксирующее звено первого-второго порядка с передаточной функцией

$$W_k(p) = k_k(T_{k1}p + 1)(T_{k2}p + 1), \quad (7.8)$$

для которого $T_{k1} = T_{01}$; $T_{k2} = T_{02}$; $k_k = 1/k_0$.

2. Идеальный регулятор для объектов с запаздыванием. Определим структуру и передаточную функцию идеального регулятора для инерционных объектов с запаздыванием, которые можно описать обобщенной передаточной функции:

$$W_0(p) = W_0'(p)e^{-p\tau_0}, \quad (7.9)$$

где $W_0'(p)$ - дробно-рациональная функция, характеризующая инерционную часть объекта; τ_0 - чистое запаздывание объекта. Учтем, что при подстановке (7.9) в (7.6) в передаточной функции регулятора появится множитель $e^{+p\tau_0}$, который соответствует идеальному упредителю, точная реализация которого технически невозможна. Поэтому с целью упрощения искомой структуры регулятора и облегчения его технической реализации целесообразно допустить, чтобы идеальная система воспроизводила задающее воздействие с запаздыванием, т.е., чтобы

$$\Phi_{xz}(p) = \Phi_{onm}(p) = \Phi_{onm}'(p)e^{-p\tau_0}, \quad (7.10)$$

где $\Phi_{onm}'(p)$ - оптимальный фильтр для сигналов x_z и x_n . Тогда, согласно (7.6), получим идеальный регулятор для объектов с запаздыванием

$$W_{pi}(p) = \frac{\Phi_{onm}'(p)}{1 - \Phi_{onm}'(p)e^{-p\tau_0}} \frac{1}{W_0'(p)}, \quad (7.11)$$

который называется регулятором Ресквика.

Выражению (7.11) соответствует структура, представленная на рис. 7.5. Внутренняя обратная связь регулятора Ресквика, содержащая звено чистого запаздывания, прогнозирует, какой сигнал должен появиться на выходе объекта после очередного изменения управляющего воздействия u . Так как эта связь положительная, то прогнозируемый сигнал постоянно компенсирует (нейтрализует) равный ему реальный выходной сигнал объекта. Результирующий сигнал ξ_p появляется только в первые моменты времени после изменения внешних воздействий x_z , x_n или x_v . Таким образом, из основного контура как бы исключается чистое запаздывание τ_0 .

Существенным недостатком системы с регулятором Ресквика является ее критичность к малым вариациям запаздывания объекта.

Идея нейтрализации запаздывания объекта реализуется также с помощью упредителя Смита, которым охватывают типовые регуляторы (рис. 7.6).

Нетрудно убедиться, что при большом передаточном коэффициенте ($k_p \rightarrow \infty$) регулятор с упредителем Смита эквивалентен регулятору Ресквика с $\Phi_{onm} = 1$:

$$W_{смин}(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)W'_0(p)(1 - e^{-p\tau_0})} = \frac{1}{1/W_p(p) + W'_0(p)(1 - e^{-p\tau_0})} \approx \frac{1}{1 - e^{-p\tau_0}} \frac{1}{W'_0(p)}. \quad (7.12)$$

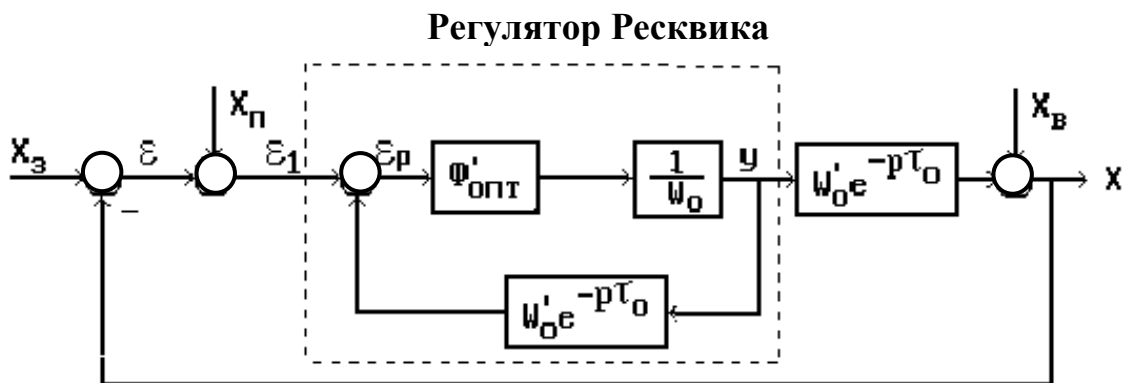


Рис. 7.5. Структура идеальной системы управления объектом с запаздыванием на базе регулятора Ресквика.

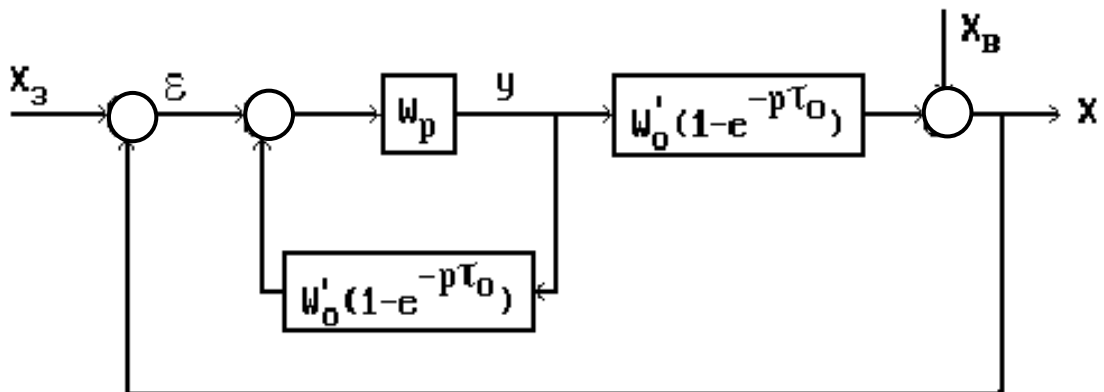


Рис. 7.6. Структура идеальной системы управления объектом с запаздыванием на основе упредителя Смита

Систему с упредителем Смита технически реализовать легче, так как не требуется моделировать обратную передаточную функцию объекта.

3. *Осуществление инвариантности в стабилизирующих и следящих системах.* Одной из главных целей синтеза автоматической системы является обеспечение требуемой точности в установившихся и переходных режимах. Точность систем в установившихся режимах можно улучшить, увеличивая порядок астатизма и коэффициент разомкнутого контура. Но при

этом, как правило, уменьшается запас устойчивости, увеличивается колебательность и ухудшается точность системы в переходных режимах. Эффективным средством устранения противоречия между условиями точности в установившихся и переходных режимах служит компенсация внешних воздействий путем осуществления инвариантности.

"Инвариантность" означает независимость одной физической величины от другой. В ТАУ рассматривают независимость выходных величин (управляемой величины или сигнала ошибки) от входных воздействий. В системах стабилизации стремятся получить независимость управляемой величины от возмущающего воздействия, а в следящих системах - независимость сигнала ошибки от задающего воздействия.

Инвариантность в САУ достигается при помощи управления по возмущению, когда управляющее воздействие формируется в зависимости от изменений возмущающего воздействия. Очевидно, что этот принцип управления применим, если возмущающее воздействие может быть измерено. Обычно принцип управления по возмущению применяют в сочетании с принципом управления по отклонению (комбинированная система).

Рассмотрим алгоритмическую структуру комбинированной системы стабилизации с компенсирующей связью по возмущению z (рис. 7.7). Компенсирующая связь действует на выходную величину со знаком, который всегда противоположен знаку непосредственного влияния возмущения на выход.

Передаточная функция системы по возмущению

$$\Phi_{xz}(p) = \frac{x(p)}{z(p)} = \frac{W_{0z}(p) - W_k(p)W_y(p)W_0(p)}{1 + W_y(p)W_0(p)}, \quad (7.13)$$

где $W_0(p)$ и $W_{0z}(p)$ - передаточные функции объекта соответственно по управляющему и возмущающему воздействию;

$W_y(p)$ - передаточная функция управляющего устройства;

$W_k(p)$ - передаточная функция компенсирующего устройства.

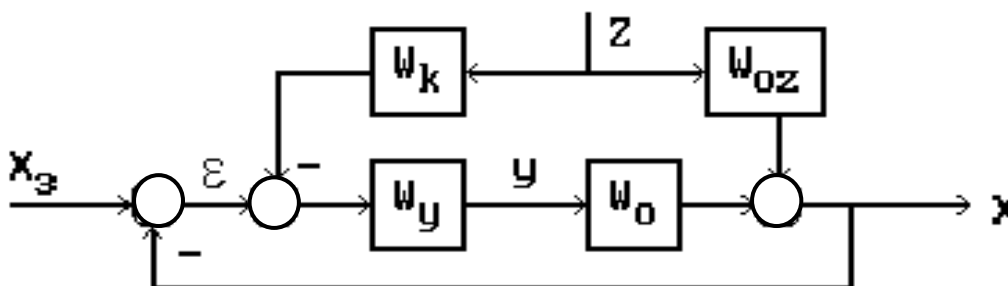


Рис. 7.7. Структура комбинированной САУ с компенсирующей связью по возмущению

Управляемая величина $x(t)$ не зависит от возмущения $z(t)$, если передаточная функция (7.13) равна нулю

$$\Phi_{xz}(p) = 0, \quad (7.14)$$

а это возможно, если равен нулю ее числитель. Отсюда условие инвариантности стабилизируемой величины по отношению к возмущению

$$W_{0z}(p) - W_k(p)W_y(p)W_0(p) = 0. \quad (7.15)$$

Условие (7.15) означает, что для достижения независимости величины $x(t)$ от возмущения $z(t)$ необходимо, чтобы динамические свойства двух параллельных каналов, по которым возмущение $z(t)$ действует на $x(t)$, были одинаковыми.

Согласно (7.15), передаточная функция компенсирующего устройства

$$W_k(p) = W_{0z}(p)/W_y(p)W_0(p). \quad (7.16)$$

В следящих системах необходимо добиваться независимости сигнала ошибки от задающего воздействия. Для схемы, приведенной на рис. 7.8, передаточная функция между воздействием $x(t)$ и сигналом ошибки $\xi(t)$:

$$\Phi_{\xi z}(p) = \frac{1 - W_k(p)W_y(p)W_0(p)}{1 + W_y(p)W_0(p)}. \quad (7.17)$$

Приравнивая функцию (7.17) к нулю, находим условие инвариантности ошибки слежения по отношению к задающему воздействию

$$1 - W_k(p)W_y(p)W_0(p) = 0, \quad (7.18)$$

отсюда требуемая передаточная функция компенсирующего устройства

$$W_k(p) = 1/W_y(p)W_0(p). \quad (7.19)$$

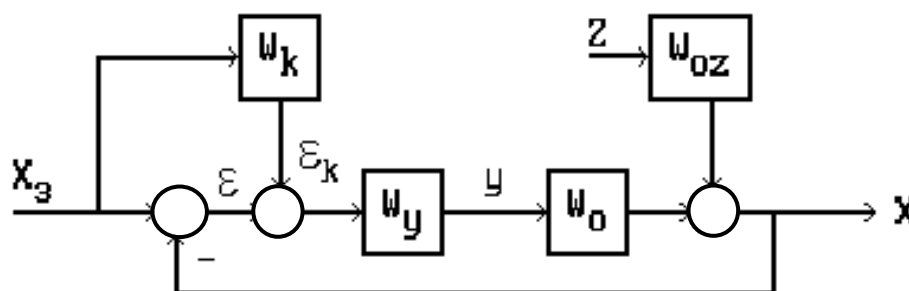


Рис. 7.8. Структура комбинированной САУ с компенсирующей связью по задающему воздействию

По виду передаточных функций (7.13) и (7.17) можно установить, что введение компенсирующих связей не изменяет характеристический полином системы, поэтому не влияет на ее устойчивость.

Если передаточная функция $W_k(p)$ удовлетворяет условию физической реализуемости, то в системе возможно достижение *абсолютной инвариантности*. Если $W_k(p)$ реализуема приближенно, то в системе осуществима частичная инвариантность.

7.3. Структурно-параметрическая оптимизация систем без запаздывания

1. Критерий и метод оптимизации амплитудной характеристики.

При проектировании систем управления объектами, не содержащими чистого запаздывания, наибольшее применение получили два критерия - модульный оптимум (МО) и симметричный оптимум (СО). Критерий модульного оптимума, называемый также критерием амплитудного или технического оптимума, заключается в выполнении следующих требований к форме амплитудной характеристики замкнутой системы по каналу $x_3 - x$: характеристика в как можно более широком диапазоне частот должна быть горизонтальной и равной единице; наклонный участок характеристики должен быть как можно более крутопадающим (рис.7.9,а).

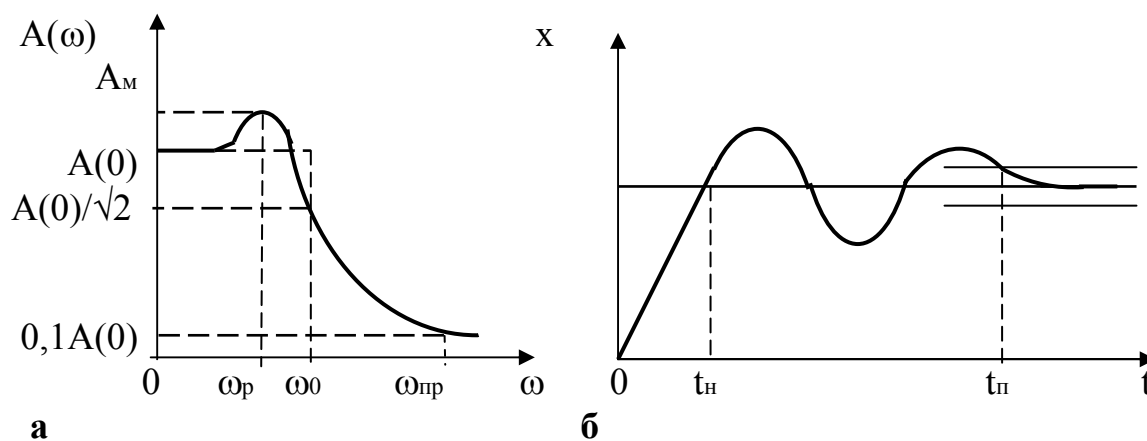


Рис. 7.9. характеристики замкнутой системы:
а-амплитудная, б - переходная

Другими словами, критерий модульного оптимума требует, чтобы настраиваемая система приближалась по своим частотным передаточным свойствам к идеальному фильтру низкой частоты, имеющему прямоугольную частотную характеристику (обозначена пунктиром) с полосой пропускания $\omega_{пр} = \omega$. При наличии на входе высокочастотной помехи частоту ω выбирают также достаточно большой, но по компромиссному условию совместной фильтрации всех действующих сигналов. Настройка системы по критерию МО обеспечивает малое перерегулирование и достаточно быстрое протекание переходного процесса

со следующими показателями качества (рис. 7.1,б):

$$\sigma < 9\% ; \quad t_n < 5/\omega; \quad t_p < \pi\omega. \quad (7.20)$$

Верхние пределы показателей качества соответствуют идеальному фильтру низкой частоты, который практически нереализуем. Амплитудную характеристику, близкую по форме к прямоугольной характеристике идеального фильтра, имеет так называемый *фильтр Баттерворта*, у которого а.ч.х.:

$$A_{\sigma}(\omega) = |W_{\sigma}(j\omega)| = 1 / \sqrt{(1 + T\omega)^{2n}}. \quad (7.21)$$

На практике обычно используют фильтры с порядком $n = 2 - 8$.

Нетрудно убедиться, что колебательная модель САУ с передаточной функцией (6.16) имеет при коэффициенте демпфирования $\xi = 0.7$ амплитудную характеристику

$$A_c(\omega) = 1 / \sqrt{1 + T^4\omega^4}, \quad (7.22)$$

соответствующую частотному случаю фильтра с $n = 2$.

При настройке систем более высокого порядка ($n > 2$) по критерию МО можно обойтись без приближенной модели второго порядка. Для этого передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(p) = b_m / (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \quad (7.23)$$

приводят к нормированному виду

$$\Phi(\bar{p}) = B_m / (\bar{p}^n + A_1 \bar{p}^{n-1} + \dots + A_{n-1} \bar{p} + 1), \quad (7.24)$$

где $\bar{p} = pT_m = p / \omega$ - оператор Лапласа, соответствующий безразмерному времени $\bar{t} = t / T_m$; T_m - масштабный множитель, равный

$$T_m = 1 / \omega_0 = \sqrt[n]{a_0 / a_n}; \quad (7.25)$$

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0} T_m, \dots, \quad A_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_0} T_m^{n-1}, \quad B_m = \frac{b_m}{a_n} \quad (7.26)$$

безразмерные коэффициенты.

Чтобы обеспечить желаемую форму амплитудной характеристики, близкую к прямоугольной, коэффициенты нормированной функции (7.24) выбирают в соответствии со стандартными полиномами Баттерворта (табл. 7.1). Именно при таких сочетаниях коэффициентов A_i амплитудная характеристика фильтра принимает вид (7.21), причем $T = T_m$, а

относительная

частота

$\Omega_0 = \omega T = 1$ соответствует значению амплитудной функции, равному 0,7 (при $B_m = 1$).

Масштабный множитель T_m не влияет на форму переходного процесса и служит обобщенной мерой быстродействия системы. Его значение можно выбрать, исходя из требуемых показателей быстродействия t_u и t_n (рис. 7.9,б):

$$t_u \approx nT_m, \quad t_n \approx 2nT_m, \quad (7.27)$$

где n – порядок полинома Баттерворта.

Таблица 7.1

Коэффициенты фильтра Баттерворта

n	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
2	1,4	0	0	0	0	0	0
3	2	2	0	0	0	0	0
4	2,61	3,41	2,61	0	0	0	0
5	3,24	5,24	5,24	3,24	0	0	0
6	3,86	7,46	9,13	7,46	3,86	0	0
7	4,5	10,1	14,6	14,6	10,1	4,5	0
8	5,12	13,1	21,8	25,7	21,8	13,1	5,12

Применительно к колебательной модели параметры фильтра Баттерворта

$$A_1 = 2\xi = 1/\sqrt{kT_{01}}, \quad T_m = T = \sqrt{T_{01}/k}. \quad (7.28)$$

В системах, параметры которых выбраны в со стандартными полиномами Баттерворта,

$$\sigma = 10 - 15 \%. \quad (7.29)$$

Указанные выше значения t_u и t_n строго выдерживаются только в тех случаях, когда числитель (7.23) не содержит слагаемых с оператором p . Тем не менее и для таких систем можно пользоваться значениями коэффициентов Баттерворта. При этом также обеспечивается достаточно хорошее качество переходного процесса.

Пример. Пусть исходная часть системы, состоящая из функционально необходимых элементов, описывается передаточной функцией (рис. 7.10):

$$W(p) = k / p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1), \quad (1)$$

где $T_1 = 1$ с, $T_2 = 2$ с.

Определить настроечные параметры T_3 и T_4 последовательно

включаемого корректирующего устройства

$$W_k(p) = (T_3p + 1)(T_4p + 1) \quad (2)$$

и обций передаточный коэффициент k , обеспечивающие критерий МО и желаемую длительность переходного процесса $t_n = 6c$.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы по каналу $x_3 - x$

$$\Phi(p) = \frac{k(T_3p + 1)(T_4p + 1)}{T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2 + kT_3T_4)p^2 + (1 + kT_3 + kT_4)p + k}. \quad (3)$$

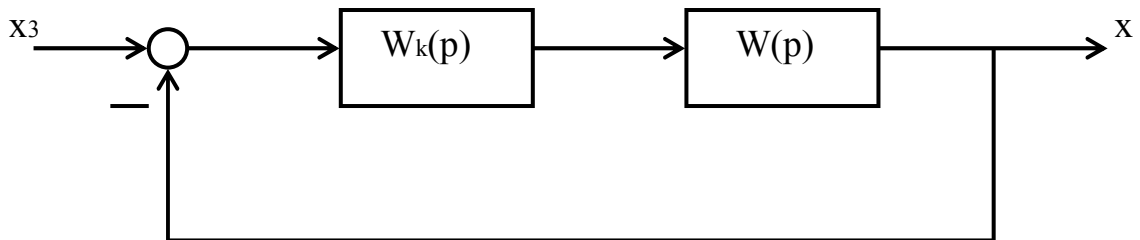


Рис. 7.10. Структурная схема САУ

Не учитывая наличие полинома в числителе, подберем настроечные параметры так, чтобы A_1 и A_2 соответствовали фильтру Баттерворта.

Определим вначале масштабный множитель T_m , ориентируясь на приближенное соотношение (7.26)

$$T_m = t_n/2n = 6/2 \cdot 3 = 1 c. \quad (4)$$

Теперь в соответствии с (7.24) определим необходимое значение общего коэффициента передачи

$$k = a_3 = a_0 / T_m^3 = T_1T_2 / T_m^3 = 1 \cdot 2 / 1^3 = 2. \quad (5)$$

Для $n = 3$ оба безразмерных коэффициента Баттерворта должны быть равны 2 (см. табл. 7. 1):

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0} T_m = \frac{T_1 + T_2 + kT_3T_4}{T_1T_2} T_m = \frac{3 + 2T_3T_4}{2} = 2, \quad (6)$$

$$A_2 = \frac{a_2}{a_0} T_m^2 = \frac{1 + kT_3 + kT_4}{T_1T_2} T_m^2 = \frac{1 + 2T_3 + 2T_4}{2} = 2. \quad (7)$$

Решая совместно эти два уравнения, получаем $T_3 = 0,5$ с и $T_4 = 1$ с.

2. Оптимизация типовых контуров регулирования

Применим изложенный метод оптимизации амплитудной характеристики для расчета настроечных параметров типовых регуляторов, используемых для управления следующими объектами без запаздывания:

$$W_0(p) = k_0/p(T_{01}p + 1), \quad (7.30)$$

$$W_0(p) = k_0/(T_{01}p + 1)(T_{02}p + 1), \quad (7.31)$$

$$W_0(p) = k_0/p(T_{01}p + 1)(T_{02}p + 1), \quad (7.32)$$

$$W_0(p) = k_0/(T_{01}p + 1)(T_{02}p + 1)(T_{03}p + 1), \quad (7.33)$$

где $T_{01} < T_{02} < T_{03}$, причем в общем случае множитель с наименьшей постоянной времени T_{01} приближенно заменяет собой несколько инерционных звеньев с еще более малыми постоянными времени T_{0i} .

Моделями (7.30) - (7.33) обычно пользуются для приближенного описания объектов, входящих в типовые контуры регулирования систем управления электроприводами (контуры регулирования напряжения, тока и частоты вращения).

В зависимости от типа и порядка (7.30) - (7.33), а также соотношений между их постоянными времени, настройка контура регулирования осуществляется либо по критерию МО, либо по критерию СО (табл. 7.2).

Настроечные параметры регуляторов k'_p , T'_u и T'_d , обеспечивающие получение определенных показателей качества, будем называть *гарантирующими*.

Если у объекта второго порядка (7.31) $T_{02} \leq 4T_{01}$, то предпочтителен критерий МО. Для выполнения требований критерия применяют ПИ – регулятор

$$W_p(p) = k'_p(T'_u + 1) / T'_u p \quad (7.34)$$

с постоянной времени интегрирования T'_u , равной наибольшей постоянной времени объекта:

$$T'_u = T_u = T_{02}. \quad (7.35)$$

Тем самым достигается полная компенсация этой наибольшей постоянной времени. Передаточная функция разомкнутого контура принимает вид

$$W(p) = W_p(p)W_0(p) = k_p k_0 / [T_u p(T_{01}p + 1)] \quad (7.36)$$

и совпадает с передаточной функцией разомкнутого контура колебательной модели, для которой критерий МО сводится к условию $\xi = 0,7$. Отсюда в соответствии с ранее приведенными формулами для колебательной модели $kT_{01} = 1/4\xi^2$; $T_{01} = T/2\xi$ находим

$$k = 1/4\xi^2 T_{01} = 1/2T_{01}. \quad (7.37)$$

Гарантирующие настроечные параметры типовых регуляторов для объектов без запаздывания

Передаточная функция объекта $W_0(p)$	Условия применения	Критерий	Параметры регулятора		
			k_p'	T_i'	T_d'
$\frac{k_0}{(T_{01}p+1)(T_{02}p+1)}$ ($T_{01} < T_{02}$)	$T_{02} \leq 4T_{01}$	МО	$\frac{T_{02}}{2k_0T_{01}}$	T_{02}	—
	$T_{02} \geq 4T_{01}$	СО	$\frac{T_{02}}{2k_0T_{01}}$	$4T_{01}$	—
$\frac{k_0}{p(T_{01}p+1)(T_{02}p+1)}$	$T_{02} \ll T_{01}$	СО	$\frac{1}{2k_0T_{01}}$	$4T_{01}$	—
	$T_{01} < T_{02}$	СО	$\frac{1}{2k_0T_{01}}$	$4T_{01}$	T_{02}
$\frac{k_0}{(T_{01}p+1)(T_{02}p+1)(T_{03}p+1)}$ ($T_{01} < T_{02} < T_{03}$)	$T_{03} \leq 4T_{01}$	МО	$\frac{T_{03}}{2k_0T_{01}}$	T_{03}	T_{02}
	$T_{03} \geq 4T_{01}$	СО	$\frac{T_{03}}{2k_0T_{01}}$	$4T_{01}$	T_{02}
	$T_{02} \geq 4T_{01}$	СО	$\frac{T_{02}T_{03}}{8k_0T_{01}^2}$	T_{02}	$4T_{03}$

Учитывая, что для рассматриваемого контура с ПИ - регулятором

$$k = k_p k_0 / T_u \text{ и } T_u = T_{02}, \quad (7.38)$$

получим, кроме (7.35), второе условие настройки на МО :

$$k_p' = k_p = T_{02} / 2k_0 T_{01}. \quad (7.39)$$

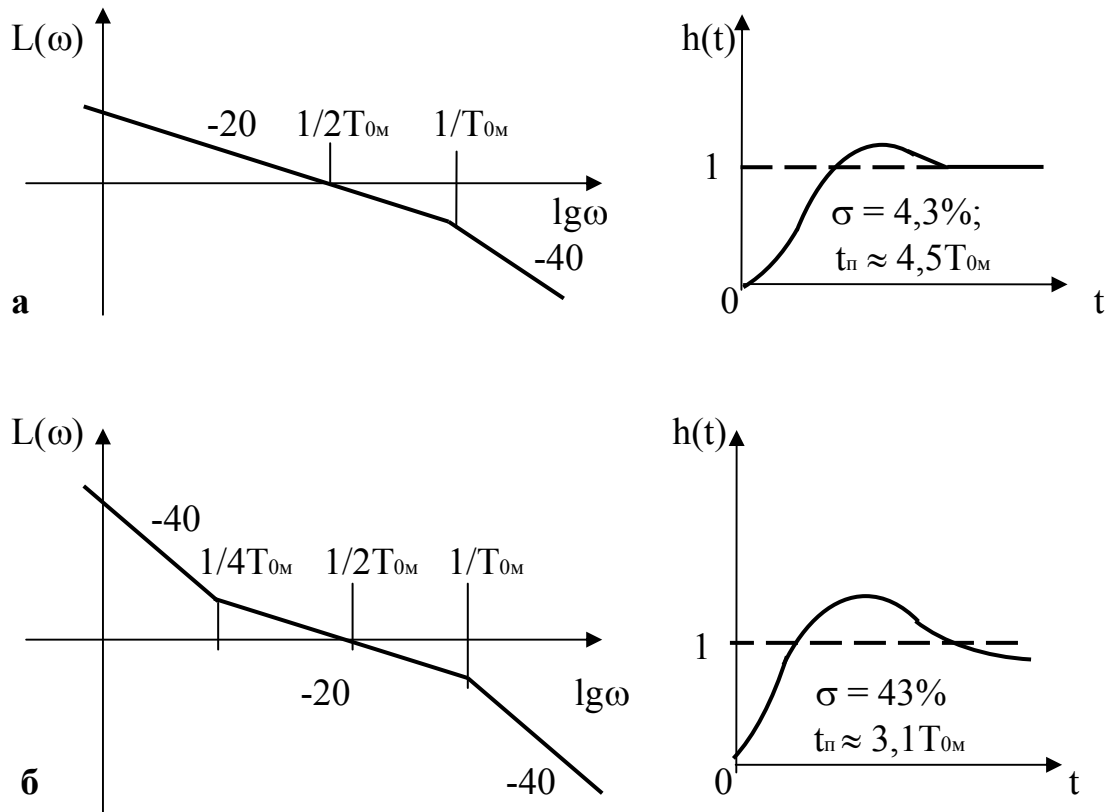


Рис. 7.11. Частотные и переходные характеристики одноконтурной системы регулирования, настроенной по критериям модульного (а) и симметричного (б) оптимумов

На рис. 7.11, а показаны л.а.ч.х. $L(\omega)$ разомкнутого контура и переходная характеристика $h(t)$ замкнутой системы с ПИ - регулятором, настроенным на МО. При этом передаточная функция замкнутого контура имеет вид

$$\Phi(p) = 1/(2T_{01}^2 p^2 + 2T_{01} p + 1). \quad (7.40)$$

Если объект астатический, то передаточная функция разомкнутого контура с ПИ – регулятором при условии $T_u' \neq T_{01}$ имеет вид

$$W(p) = k_p' \frac{T_u' p + 1}{T_u p} \cdot \frac{k_0}{p(T_{01} p + 1)}. \quad (7.41)$$

Ей соответствует передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{k_p' k_0 (T_u p + 1)}{T_u T_{01} p^3 + T_u p^2 + k_p k_0 T_u p + k_p k_0}. \quad (7.42)$$

Применяя к знаменателю функции (7.42) соотношения Баттерворта,

можно получить следующие настройки ПИ-регулятора:

$$k_p' = k_p = 1/2k_0T_{01}; \quad T_u' = T_u = 4T_{01}, \quad (7.43)$$

причем $T_m = 2T_{01}$.

При полученных настройках передаточные функции (7.41) и (7.42) имеют вид

$$W(p) = \frac{4T_{01}p + 1}{8T_{01}^2 p^2 (T_{01}p + 1)}, \quad (7.44)$$

$$\Phi(p) = \frac{4T_{01}p + 1}{8T_{01}^3 p^3 + 8T_{01}^2 p^2 + 4T_{01}p + 1}. \quad (7.45)$$

Передаточной функции (7.44) соответствует симметричная л.а.х. $L(\omega)$, показанная на рис. 7.11,б, поэтому изложенный подход к выбору настроек получил название *симметричного оптимума*.

Передаточной функции (7.45) соответствует переходная характеристика замкнутой системы (рис. 7.11,б) со следующими показателями:

$$\sigma \approx 43\%; \quad t_n \approx 3,1T_{01}; \quad t_n \approx 14,7T_{01}. \quad (7.46)$$

Моделирование САУ на ЭВМ при различных настройках позволяет сделать выводы:

1. Увеличение передаточного коэффициента k_p приводит к уменьшению времени нарастания t_n и повышению перерегулирования σ .

2. Увеличение постоянной интегрирования T_u приводит к увеличению времени t_n и снижению σ .

3. Критерий МО предпочтителен при оптимизации систем, обрабатывающих изменение задающего воздействия x_z , т.е. следящих систем.

4. Критерий СО надо применять при настройке систем, которые чаще реагируют на возмущающие воздействия y_v , т.е. стабилизирующих систем.

5. Оба критерия обеспечивают по каналу возмущения $y_v - x$ приблизительно одинаковые значения первого максимального отклонения x_{\max} .

7.4. Частотный метод синтеза САУ

Частотный метод синтеза основан на формировании желаемых л.а.ч.х. разомкнутых по главной обратной связи систем и соответствующих им

передаточных функций, которые однозначно связаны с показателями качества переходного процесса замкнутой системы.

Для обеспечения наиболее оптимального соотношения показателей качества желаемая л.а.ч.х. на частоте среза ω_c должна иметь наклон -20 дБ/дек. Формирование низкочастотной и высокочастотной частей желаемой л.а.ч.х. может быть формализовано для конкретных частных применений САУ. Варианты некоторых типовых л.а.ч.х. приведены на рис. 7.12.

Вариантам желаемых л.а.ч.х. соответствуют следующие системы (см. рис. 7.12):

1. Системы, приводимые к колебательному звену (технический оптимум). Желаемая л.а.ч.х. в этом случае имеет вид 1. Уравнения ее передаточной функции и частоты среза имеют вид

$$W(s) = \frac{K}{s(T_2s + 1)}; \quad \omega_c = K. \quad (7.47)$$

Здесь $K = 1/aT_2$. При $a=2$ имеем технический оптимум, дающий перерегулирование $\sigma = 4,3\%$. Минимально-возможное время переходного процесса $t_n = 9,5T_2$.

Подобная структура и приведенные соотношения соответствуют системам стабилизации (либо системе в целом, либо ее внутреннему контуру стабилизации).

2. Астатические системы 2-го порядка (кривая 2). Уравнения передаточной функции и частоты среза имеют вид

$$W(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(T_2s + 1)}; \quad \omega_c = K\tau. \quad (7.48)$$

Если в такой передаточной функции обеспечить $K = 1/8T_2$ и $\tau = 4T_2$, то показатели переходного процесса будут соответствовать симметричному оптимуму, при котором $\sigma = 43\%$, но при одинаковой с техническим оптимумом длительности переходного процесса по управлению отработка возмущающего воздействия будет минимальной и определяться постоянной времени T_2 . Подобные системы желательно использовать при сравнительно малых ускорениях задающих воздействий.

3. Астатические системы 1-го порядка (кривая 3). В этом случае уравнения передаточной функции и частоты среза имеют вид

$$W(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}; \quad \omega_c = K \frac{\tau}{T_1}. \quad (7.49)$$

Здесь $T_1 > \tau > T_2$ и T_1 определяет излом л.а.ч.х. на низких частотах ($\omega_{2n} = 1/T_1$).

Системы такого плана имеют большой запас устойчивости по фазе и меньшее перерегулирование ($\sigma < 30\%$).

4. Структуры статических САУ (кривая 4). Передаточная функция и частота среза определяются выражениями:

$$W(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{(T_0 s + 1)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad \omega_c = K \frac{\tau}{T_1 T_0}. \quad (7.50)$$

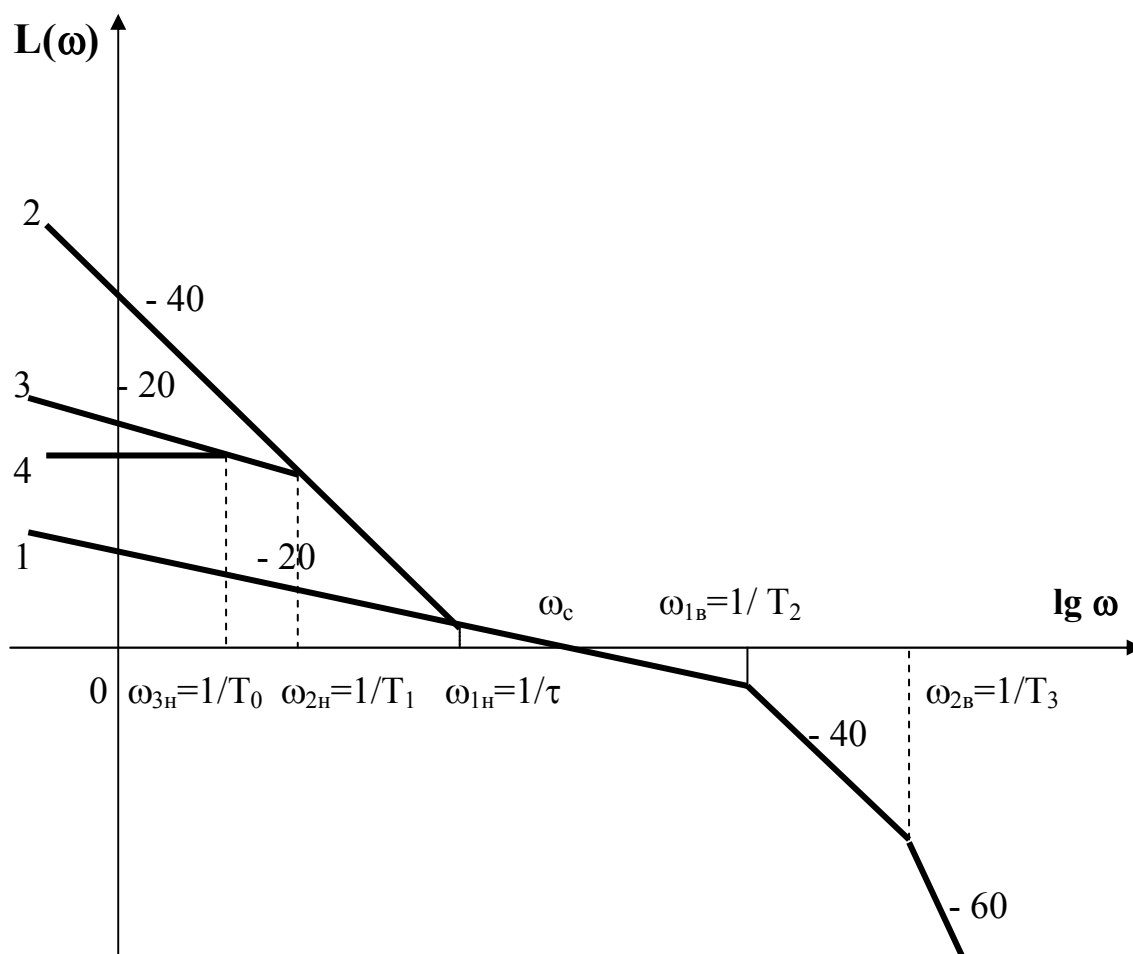


Рис. 7.12. Варианты типовых желаемых л.а.ч.х.

Такие структуры приемлемы для систем, не требующих повышенной точности отработки внешних воздействий.

При множестве возможных вариантов выбора параметров передаточных функций необходимо предварительно оценить частоту среза ω_c и допустимое перерегулирование σ .

Частота среза однозначно оценивается временем переходного процесса t_n и вычисляется по рекомендованным зависимостям:

если $\sigma < 5\%$, то $\omega_c = 4\pi/t_n$ при $\omega_{lв} \geq 2\omega_c$.

Для $\sigma > 5\%$ связь частоты среза со временем переходного процесса нелинейна и определяется по графикам Солодовникова, приводимым в учебниках по ТАУ.

Остальные параметры желаемой л.а.ч.х. рассчитывают по приближенным зависимостям:

$$\omega_c \geq \frac{2\pi}{t_n} \left(\frac{\sigma\% + 45}{20} - 2 \right) \geq \frac{0,314}{t_n} (\sigma\% + 5). \quad (7.51)$$

$$\omega_{lв} \geq \omega_c \frac{M+1}{M} = \frac{1}{T_2} \quad \text{и} \quad \omega_{lн} \leq \omega_c \frac{M-1}{M} = \frac{1}{\tau}, \quad (7.52)$$

где $M \approx 0,02(\sigma\% + 40)$.

Для желаемых л.а.ч.х. типа 1 принимают $M \approx 1$ и $\omega_{lв} = 2\omega_c$.

Для желаемых л.а.ч.х. типа 2 принимают $\omega_{lв} = 2\omega_c$ и $\omega_{lн} = 0,5\omega_c$.

Без определения параметра M принимают $\omega_{lв} \geq 2\omega_c$ и $\omega_{lн} \approx 0,1\omega_{lв}$. При этом $T_0 > T_1 > \tau > T_2 > T_3$.

Многоконтурные САУ, содержащие кроме главной обратной связи внутренние связи, наиболее распространены. Такие системы целесообразно оптимально синтезировать поконтурно, начиная с внутреннего и кончая внешним. Этот прием получил название *подчиненного* синтеза САУ.

ГЛАВА 8

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

8.1. Особенности нелинейных систем

Автоматическая система управления является *нелинейной*, если хотя бы один ее элемент описывается нелинейным уравнением.

Практически все реальные системы управления содержат один или несколько нелинейных элементов. Нелинейной характеристикой часто обладает и объект управления. Так, например, все электрические машины имеют нелинейную и неоднозначную зависимость магнитного потока от тока возбуждения. Индуктивности обмоток машины также зависят от токов.

Некоторые нелинейные элементы вводят в систему преднамеренно, чтобы улучшить качество управления. Такими нелинейностями являются, например, релейные управляющие устройства, обеспечивающие высокое быстродействие процесса управления. Применяются также нелинейные корректирующие устройства.

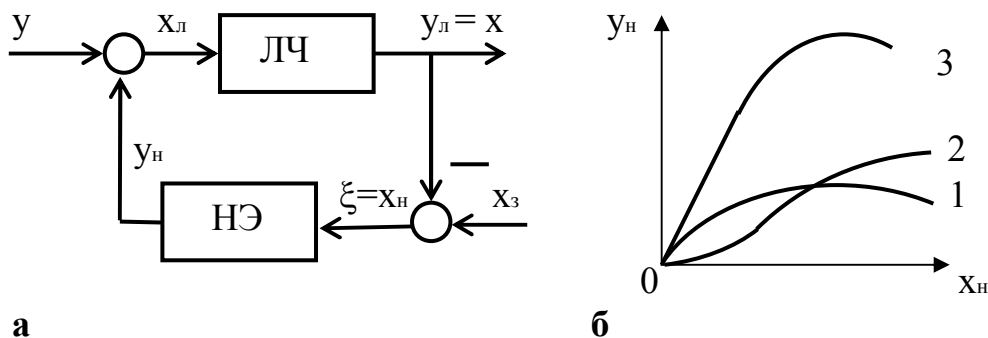


Рис. 8.1. Структурная схема нелинейной САУ (а) и характеристики НЭ (б)

Нелинейную САУ можно представить в виде соединения двух частей (рис. 8.1,а) – линейной части (ЛЧ), описываемой линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и нелинейного элемента (НЭ). Нелинейный элемент является безынерционным, и его входная x и выходная y величины связаны между собой нелинейными алгебраическими уравнениями. Если система содержит несколько нелинейных элементов, то ее в ряде случаев можно свести к рассматриваемому классу, заменив нелинейные элементы одним с результирующей статической характеристикой. Например, при параллельном, последовательном и встречно-параллельном соединении такая замена возможна. На рис. 8.1, б показана замена двух параллельно соединенных нелинейных звеньев со статическими характеристиками 1 и 2

одним звеном с характеристикой 3, полученной суммированием исходных характеристик по оси ординат.

Различают два вида нелинейных элементов: существенно нелинейные и несущественно нелинейные. *Нелинейность* считается *несущественной*, если ее замена линейным элементом не изменяет принципиальных особенностей системы и процессы в линеаризованной системе качественно не отличаются от процессов в реальной системе. Если такая замена невозможна, и процессы в линеаризованной и реальной системах сильно отличаются, то *нелинейность* является *существенной*.

Главная особенность существенно нелинейных систем заключается в том, что они не подчиняются принципу наложения, а форма и показатели переходного процесса зависят от величины и формы внешнего воздействия.

Другой важной особенностью динамики существенно нелинейных систем является зависимость условий устойчивости от величины внешнего воздействия. В связи с этим для нелинейных систем применяют понятия «устойчивость в малом», «устойчивость в большом», «устойчивость в целом».

Система *устойчива в малом*, если она устойчива только при малых начальных отклонениях. Система *устойчива в большом*, если она устойчива при больших начальных отклонениях. Система *устойчива в целом*, если она устойчива при любых отклонениях.

Специфической особенностью существенно нелинейных систем является также режим автоколебаний. *Автоколебания* - это устойчивые собственные колебания, возникающие из-за нелинейных свойств системы. Режим автоколебаний нелинейной системы принципиально отличается от колебаний линейной системы на границе устойчивости. В линейной системе при малейшем изменении ее параметров колебательный процесс становится либо затухающим, либо расходящимся. Автоколебания же являются устойчивым режимом и малые изменения параметров не приводят к их исчезновению.

Автоколебания в общем случае нежелательны, однако, в некоторых нелинейных системах они являются основным рабочим режимом.

Рассмотрим в качестве примера нелинейной системы автоматическую систему стабилизации напряжения с нелинейным управляющим устройством (рис. 8.2,а). Стабильное напряжение U_n на сопротивлении R_n поддерживается регулирующим транзистором T , работающим в ключевом режиме. Для сглаживания пульсаций тока и напряжения последовательно с нагрузкой включен LC-фильтр с нулевым диодом D . Управляющим устройством является триггер Шмитта, характеристика «вход-выход» которого приведена на рис. 8.2,б и имеет форму петли гистерезиса. На вход триггера Шмитта поступает разность задающего напряжения U_0 и напряжения обратной связи U_n . При достижении разности этих напряжений пороговых значений переключения триггера U_2 и U_1 последний изменяет состояние на своем выходе и через узел гальванической развязки переключает регулирующей

транзистор поочередно в режимы отсечки и насыщения. Форма выходного напряжения системы стабилизации показана на рис. 8.2,в. Размах пульсаций ΔU выходного напряжения определяется шириной зоны гистерезиса релейного элемента – триггера Шмитта.

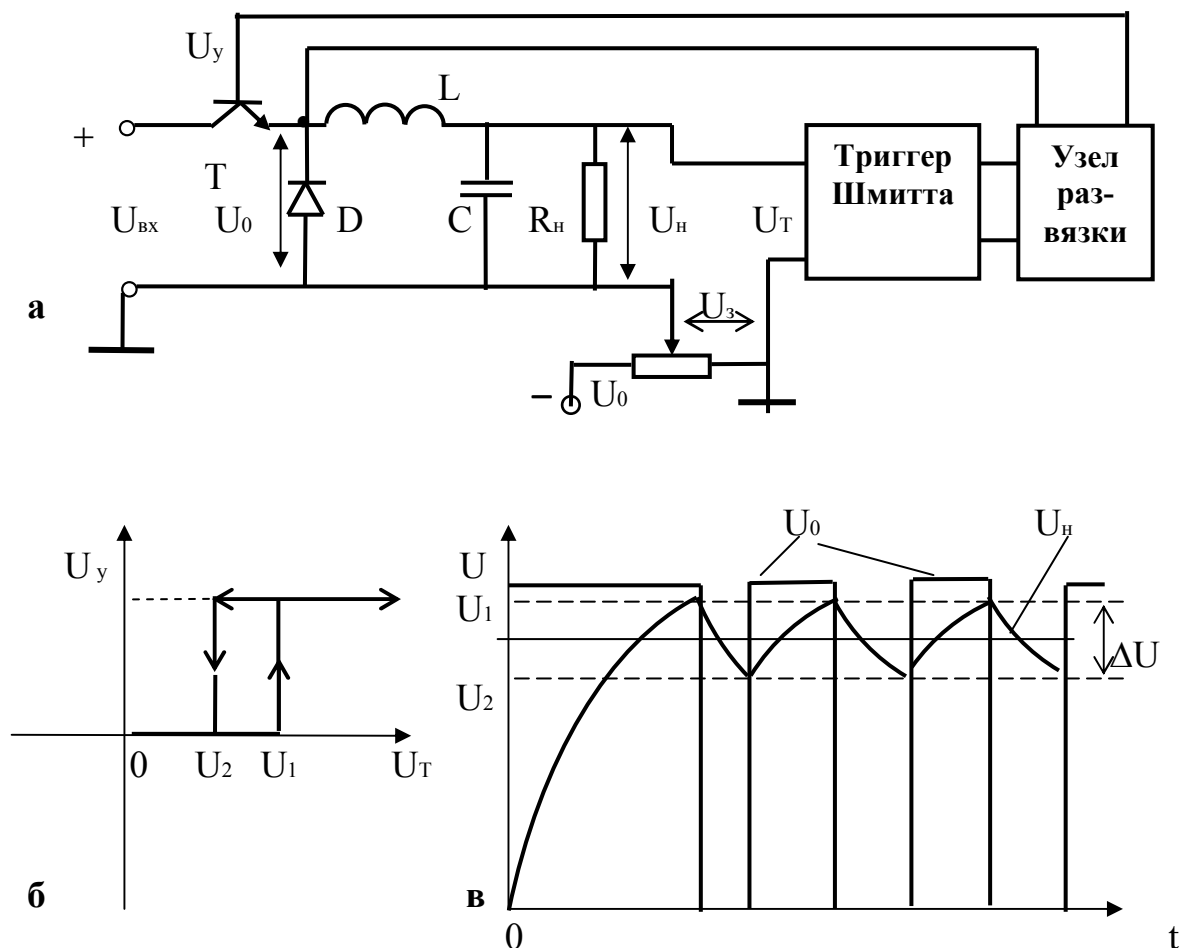


Рис. 8.2. Релейная система стабилизации напряжения

8.2. Типовые нелинейные элементы систем управления

Нелинейная часть САУ образована одним нелинейным элементом (рис. 8.1,а), выходная величина y_n которого может быть выражена как функция входной величины x_n и ее производной x'_n :

$$y_n = f(x_n, x'_n). \quad (8.1)$$

Простейшими нелинейными элементами являются *статические нелинейности*. У них выходная величина зависит от входной величины, причем эта зависимость строго однозначна. Примерами статических нелинейностей являются характеристики, показанные на рис. 8.3, а, б.

У *динамических нелинейностей* выходная величина зависит как от

входной величины, так и от ее производной (рис. 8.3,в). Характеристика динамической нелинейности всегда неоднозначна.

Рассмотренные статические и динамические нелинейности относятся к классу нелинейностей с кусочно-линейными характеристиками.

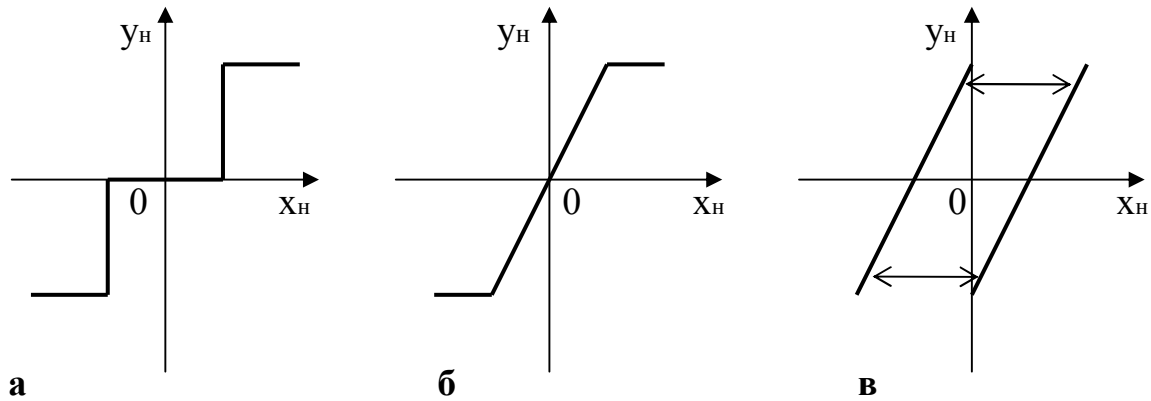


Рис. 8.3. Характеристики нелинейных элементов

В управляющих устройствах, наряду с релейными элементами, часто используются так называемые *особые нелинейности*: множительное звено, элементы с переменной структурой, элементы логического типа.

Для улучшения качества систем применяются управляющие устройства с переменной структурой, в которых специальный блок изменения структуры может включать в основной контур системы звенья с различными динамическими свойствами.

8.3. Метод фазовых траекторий

Метод фазовых траекторий представляет собой графо-аналитический способ исследования нелинейных систем. Сущность метода заключается в описании поведения систем при помощи наглядных геометрических представлений – фазовых портретов.

Свободное движение нелинейной динамической системы управления с одной управляемой величиной $x(t)$ в общем случае можно описать с помощью n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$dx_j(t)/dt = f_j[x_1(t), x_2(t), \dots; x_j(t), \dots, x_n(t)], \quad (j = 1; 2; \dots; n), \quad (8.2)$$

где $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, . . ., $x_{j+1}(t) = \dot{x}_j(t)$, $x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t)$ – фазовые переменные состояния.

Мгновенное состояние системы и ее дальнейшее поведение однозначно определены, если в данный момент времени $t = t_i$ известны значения всех n переменных x_j . Эти значения можно рассматривать как координаты точки

$(x_1; x_2; \dots ; x_n)$ в n -мерном пространстве, которое называется *фазовым пространством*.

Точку с координатами $(x_1; x_2; \dots ; x_n)$ называют *изображающей точкой*, а линию, по которой она перемещается при изменении состояния системы, - *фазовой траекторией*.

Конкретной группе начальных условий $x_1(0) = x_{10}; x_2(0) = x_{20}; \dots ; x_n(0) = x_{n0}$ соответствует единственное решение системы (8.2) – определенная совокупность искомых функций времени $x_1(t); x_2(t); \dots ; x_n(t)$. Поэтому каждой группе начальных условий соответствует только одна начальная точка и единственная фазовая траектория, а множеству групп начальных условий соответствует семейство траекторий, которое называется *фазовым портретом* системы.

Метод фазового пространства наиболее удобен для анализа систем второго порядка, так как фазовые траектории располагаются в одной плоскости – в фазовой плоскости переменных x_1 и x_2 . Фазовый портрет этих систем можно построить непосредственно по дифференциальному уравнению, не решая его.

Пусть описание системы представлено в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} dx_1 / dt &= f_1(x_1, x_2), \\ dx_2 / dt &= f_2(x_1, x_2), \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

где $x_1 = x$ – отклонение выходной величины или сигнала ошибки от установившегося значения.

Если в качестве второй переменной состояния x_2 принята производная переменной $x_1 = x$, т.е. $x_2 = \dot{x}$, то всегда функция $f_1(x_1, x_2) = x_2$.

Разделив второе уравнение системы (8.3) на первое, можно получить уравнение фазовых траекторий в дифференциальной форме:

$$dx_2 / dx_1 = f_2(x_1, x_2) / x_2, \quad (8.4)$$

в котором независимой переменной является величина x_1 (не время t !), а зависимой – x_2 .

Разделяя далее переменные x_1 и x_2 и интегрируя уравнение (8.4), получаем уравнение фазовых траекторий в явном виде:

$$x_2 = F(x_1) + C_0, \quad (8.5)$$

где C_0 – постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.

Рассмотрим характерные фазовые траектории (рис. 8.4,б,г,е) системы второго порядка, соответствующие затухающему, расходящемуся и незатухающему колебательным процессам (рис. 8.4,а,в,д).

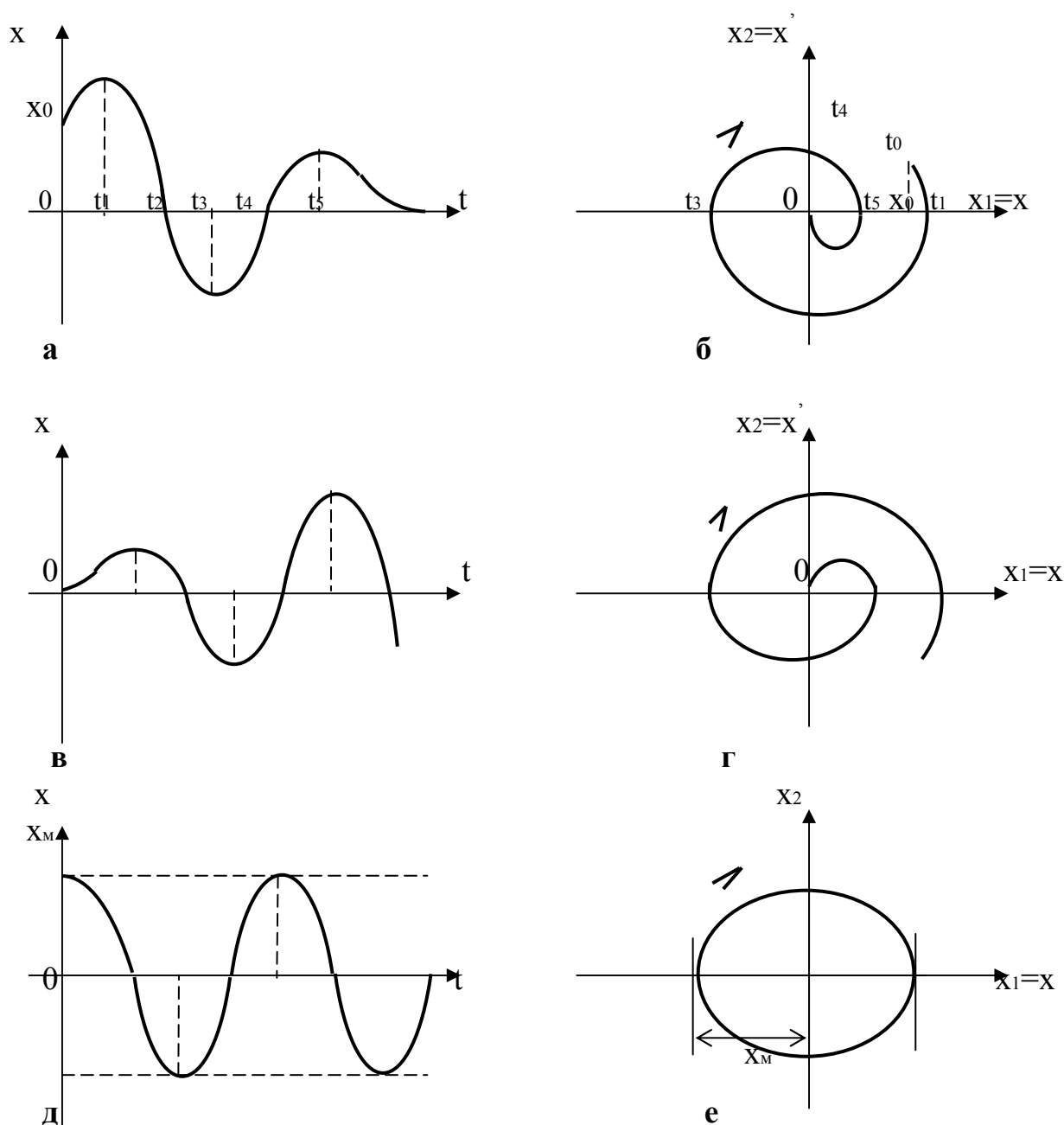


Рис. 8.4. Переходные процессы и фазовые траектории нелинейной системы

Моменты времени t_1, t_3, t_5 , когда кривые $x(t)$ достигают своих максимумов и минимумов, соответствуют пересечению фазовыми траекториями $x_1 = x$, а моменты прохождения кривыми $x(t)$ через нуль (t_2, t_4) – пересечению оси $x_2 = \dot{x}$.

Самые важные для анализа нелинейных систем свойства фазовых траекторий заключаются в следующем:

1. Неустойчивому процессу соответствует фазовая траектория, удаляющаяся от начала координат.
2. Периодическому процессу соответствует замкнутая фазовая траектория, называемая предельным циклом.

Фазовый портрет нелинейной системы, обладающей кусочно-линейной или разрывной характеристикой, состоит из нескольких областей с различными фазовыми траекториями. Линии, отделяющие на плоскости одну область от другой, называются *линиями переключения*.

В точках пересечения фазовыми траекториями линий переключения происходит излом траекторий. Это происходит из-за смены правой части уравнения (8.4).

8.4. Метод гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации является приближенным методом исследования режима автоколебаний нелинейных систем. Этим методом можно определить условия возникновения и параметры автоколебаний как в системах второго порядка, так и в более сложных системах.

Метод заключается в замене существенно нелинейного элемента с характеристикой $f(x_n)$ эквивалентным линейным звеном с коэффициентом k_n . В замкнутой автоматической системе, работающей в режиме автоколебаний, условием эквивалентности служит равенство амплитуд и фаз выходного сигнала эквивалентного звена и первой гармоники выходного сигнала реального нелинейного элемента. При этом предполагается, что сигнал на входе нелинейного элемента является синусоидальным. Такое предположение справедливо во всех случаях, когда линейная часть системы достаточно инерционна и не пропускает высшие гармоники.

Пусть автоматическая система состоит из отделимых друг от друга линейной и нелинейной частей (см. рис. 8.1, а) и нелинейная часть описывается функцией (8.1). Предположим, что контур системы разомкнут (на выходе линейной части) и что на входе нелинейного элемента действует синусоидальный сигнал

$$x_n(t) = x_{нм} \sin \omega t. \quad (8.6)$$

При этом на выходе нелинейного элемента будет возникать периодический сигнал $y_n(t)$, форма которого зависит от характера нелинейности и в общем случае существенно отличается от синусоидальной. Так, на выходе двухпозиционного реле без зоны нечувствительности (рис. 8.5, а) образуется периодический сигнал прямоугольной формы (рис. 8.5, б).

Уравнение (8.1) при синусоидальном воздействии можно записать в общем виде

$$y_n(t) = f[x(t), x'(t)] = f[x_{нм} \sin \omega t, x_{нм} \omega \cos \omega t]. \quad (8.7)$$

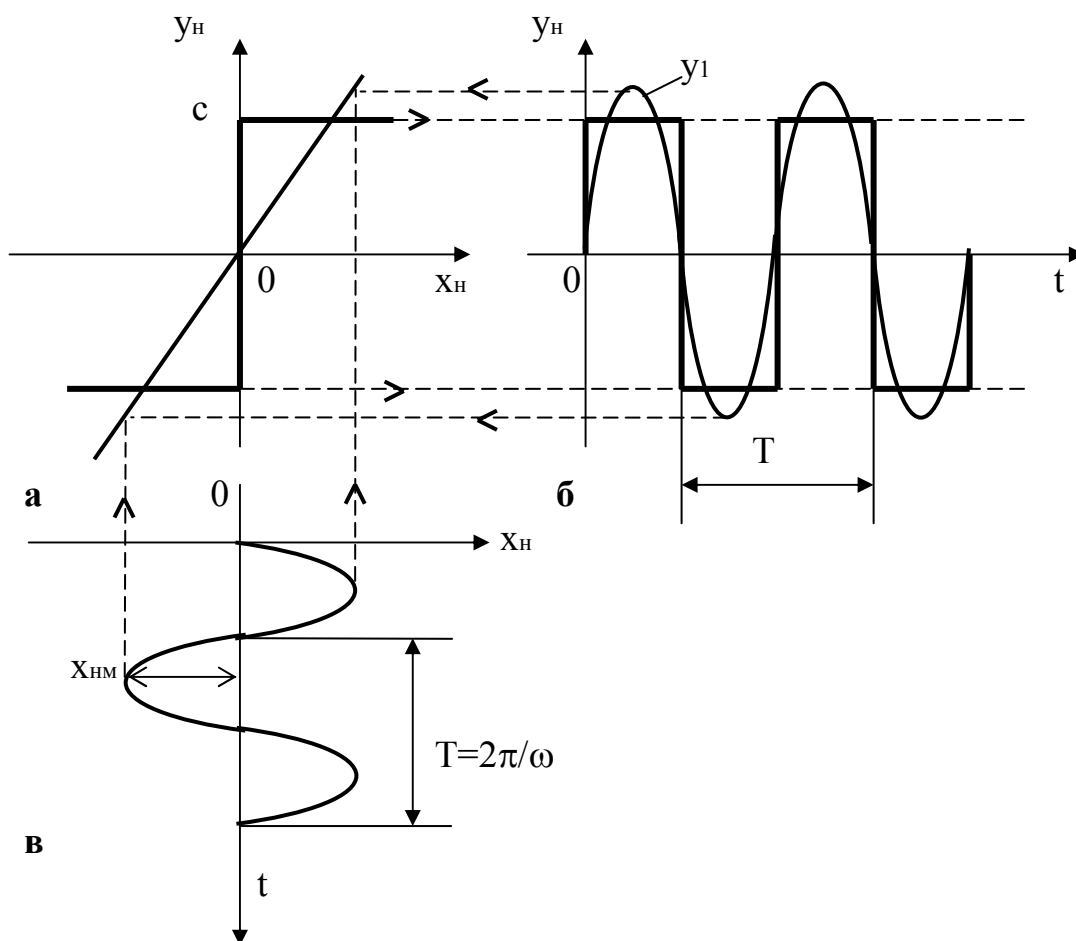


Рис. 8.5. Преобразование гармонического сигнала нелинейным элементом

Периодический сигнал на выходе нелинейного элемента может быть разложен в ряд Фурье и тем самым представлен суммой гармонических составляющих:

$$y_{нк}(t) = a_k \cos \omega kt + b_k \sin \omega kt = y_{km} \sin(\omega kt + \phi_k), \quad (8.8)$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются известными формулами, а параметры

$$y_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \phi_k = \text{arctg}(a_k / b_k), \quad (k = 1, 2, \dots, \infty). \quad (8.9)$$

Для нелинейных элементов с кососимметричной относительно начала координат характеристикой характерно наличие постоянной составляющей $a_0/2$ и отсутствие всех коэффициентов четных гармоник, т.е. $a_{2k} = d_{2k} = 0$ и $y_{2km} = 0$.

При анализе замкнутой системы можно учитывать только первую гармонику и сигнал $y_H(t)$ на выходе элемента с кососимметричной

характеристикой приближенно представить так:

$$y_n(t) \approx y_{1n}(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = y_{1m} \sin(\omega t + \phi_1). \quad (8.10)$$

Учитывая, что

$$\sin \omega t = x_n(t) / x_{nm}, \quad \cos \omega t = x'_n(t) / x_{nm} \omega \quad (8.11)$$

и вводя обозначения

$$q(x_{nm}) = b_1 / x_{nm}, \quad q_1(x_{nm}) = a_1 / x_{nm}, \quad (8.12)$$

можно вместо (8.10) записать

$$y_n(t) \approx q(x_{nm})x_n(t) + q_1(x_{nm})x'_n(t) / \omega \quad (8.13)$$

или в операторной форме

$$y_n(t) \approx q(x_{nm})x_n(t) + q_1(x_{nm})px_n(t) / \omega. \quad (8.14)$$

При выполнении указанных выше предпосылок нелинейное уравнение (8.7) может быть заменено линейным уравнением (8.13). Эта процедура называется *гармонической линейризацией*, а коэффициенты $q(x_{nm})$ и $q_1(x_{nm})$ – *коэффициентами гармонической линейризации*.

Гармоническая линейризация принципиально отличается от обычной линейризации, так как коэффициенты гармонически линейризованного элемента непостоянны и зависят от амплитуды входного сигнала. Эквивалентная прямолинейная характеристика (рис. 8.5,а – тонкая линия) имеет различный наклон при разных амплитудах входного сигнала.

Применение современных программных моделирующих систем позволяет исследовать любые нелинейные системы значительно точнее и быстрее, чем рассмотренными методами.

8.5. Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем с помощью критерия Попова

Абсолютной устойчивостью называется устойчивость системы при любых начальных отклонениях для любой формы нелинейной характеристики, принадлежащей к одному из определенных классов. Нелинейности считаются одного класса, если их характеристики $f(x_n)$ находятся в секторе $[0, k_n]$ между осью абсцисс и прямой с угловым

коэффициентом k_n (рис. 8.6,а). Критерий Попова относится к частотным методам определения абсолютной устойчивости нелинейных систем.

Задача об исследовании абсолютной устойчивости возникает в связи с тем, что в некоторых случаях нелинейная характеристика звена является нестабильной и может быть охарактеризована только определенной областью.

Пусть известна частотная функция линейной части системы $W_l(j\omega)$ и задано значение параметра k , который является некоторым предельным параметром нелинейной характеристики $f(x_n)$, произвольно располагающейся в заданной области.

Необходимо определить, обеспечивается ли абсолютная устойчивость конкретной системы для любой характеристики $f(x_n)$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{f(x_n)}{x_n} \leq k \quad \text{при} \quad x_n \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{aligned} \quad (8.15)$$

В формулировке критерия используется понятие модифицированной а.ф.х.

Пусть линейная часть системы устойчива и имеет а.ф.х.

$$W_l(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (8.16)$$

Образует из этой обычной а.ф.х. следующую видоизмененную а.ф.х., у которой мнимая часть получена умножением $Q(\omega)$ на ωT_m :

$$W_l^*(j\omega) = P(\omega) + j\omega T_m Q(\omega), \quad (8.17)$$

где $T_m = 1 \text{ с}$ – нормирующий множитель. Характеристика (8.17) и называется *модифицированной*.

Критерий абсолютной устойчивости равновесия нелинейной системы, удовлетворяющей вышеперечисленным требованиям, формулируется следующим образом:

для абсолютной устойчивости равновесия достаточно, чтобы модифицированная характеристика $W_l^(j\omega)$ не охватывала точку $(-1/k_n, 0)$ и через эту точку можно было провести прямую, не пересекающую характеристику $W_l^*(j\omega)$ (последняя лежит справа от прямой).*

На рис. 8.6,б показан случай, когда критерий устойчивости выполняется, а на рис. 8.6, в, г – случаи, когда не выполняется.

По наклону прямой Попова, “прижатой” к кривой $W_l^*(j\omega)$, можно судить о допустимом классе нелинейности: если прямая вертикальна, то нелинейность может быть только однозначной, а если она наклонена, то

нелинейность может быть и однозначной и неоднозначной (с гистерезисом).

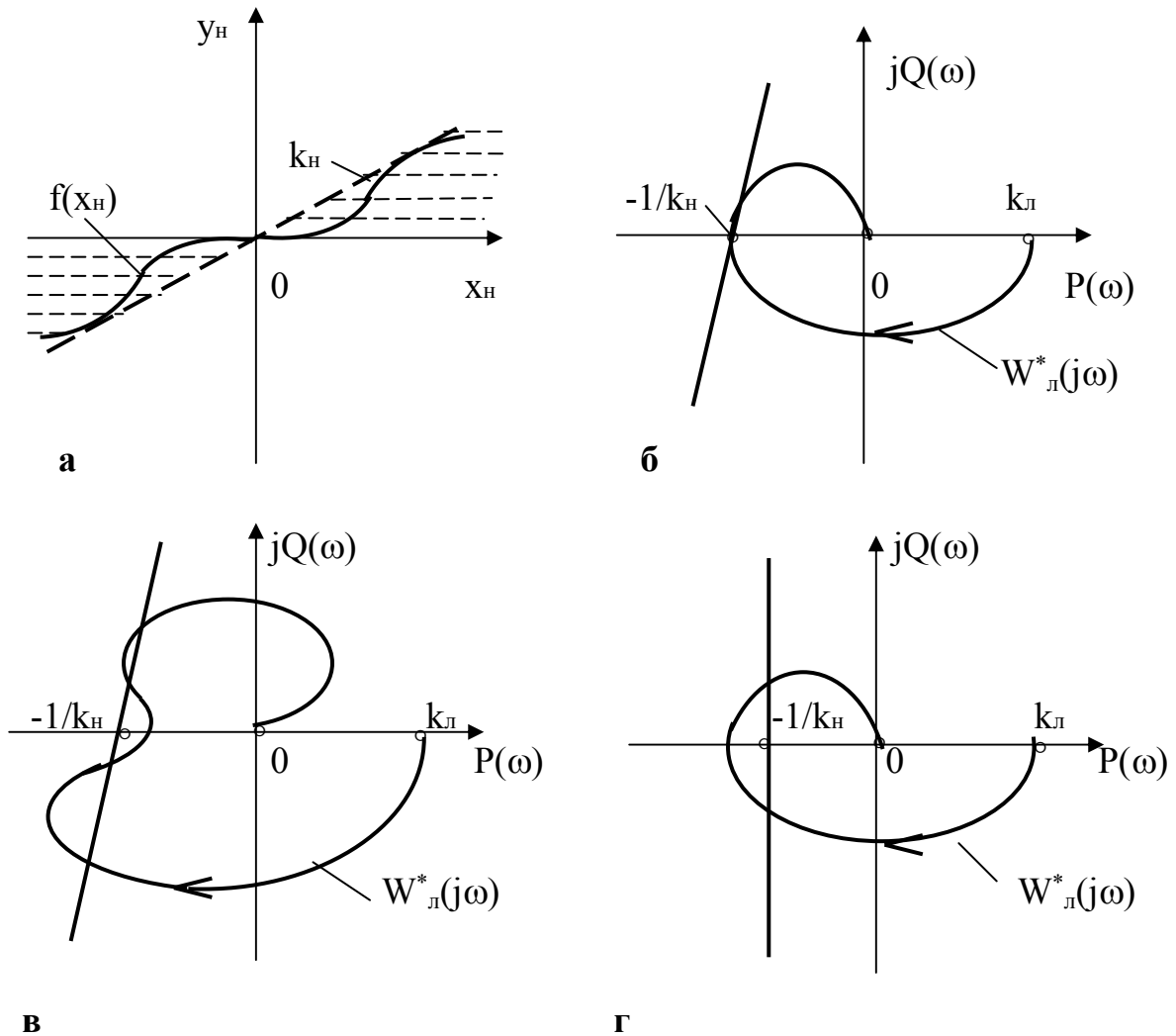


Рис. 8.6. Критерий абсолютной устойчивости Попова

Пример. Определить с помощью критерия Попова абсолютную устойчивость равновесия нелинейной системы, состоящей из трехпозиционного релейного элемента (рис. 8.7,а) с параметрами $b=1$, $c=8$ и линейной части:

$$W_{л}(j\omega) = k_{л} e^{-j\omega\tau} / (Tj\omega + 1) \tag{1}$$

с параметрами $k_{л} = 0,25$, $T = 10$ с.

Решение. Представим а.ф.х. (1) в виде

$$W_{л}(j\omega) = \frac{k_{л} (\cos \omega\tau - T\omega \sin \omega\tau)}{T^2 \omega^2 + 1} - j \frac{k_{л} (\sin \omega\tau + T\omega \cos \omega\tau)}{T^2 \omega^2 + 1}. \tag{2}$$

Соответствующая (2) модифицированная характеристика (рис. 8.7,б) описывается уравнением

$$W_{л}^*(j\omega) = \frac{k_{л}(\cos \omega\tau - T\omega \sin \omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1} - j\omega \frac{k_{л}(\sin \omega\tau + T\omega \cos \omega\tau)}{T_2\omega^2 + 1}. \quad (3)$$

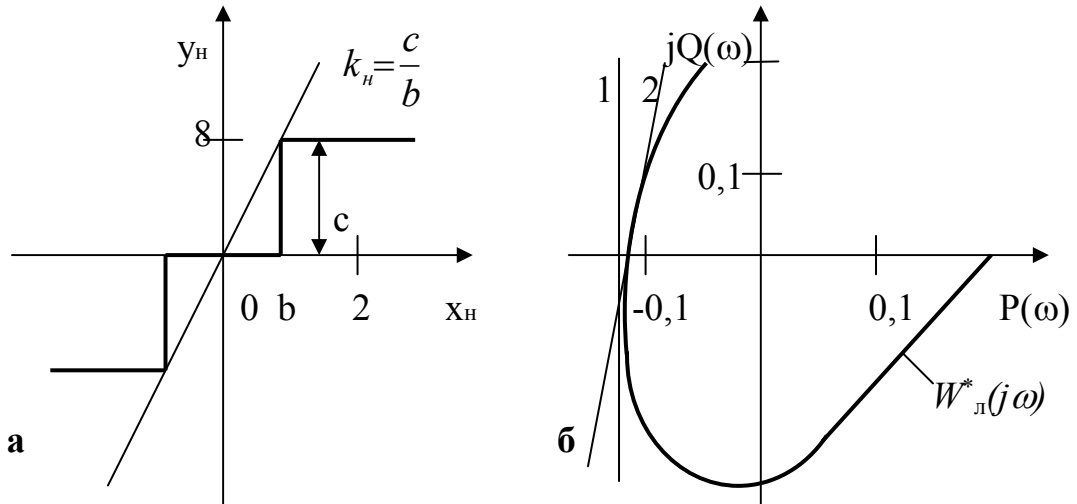


Рис. 8.7. Определение абсолютной устойчивости

Через точку с абсциссой, равной $1/k_{л} = -0,125$, проведена прямая 1, которая не пересекается с кривой $W_{л}^*(j\omega)$. Следовательно, при заданных параметрах равновесие системы абсолютно устойчиво.

Для решения обратной задачи – определения допустимого по условию устойчивости равновесия значения зоны нечувствительности b проведем прямую 2, «прижатую» к характеристике $W_{л}^*(j\omega)$. Она пересекает действительную ось в точке с абсциссой $\approx 0,11$. Тогда допустимое значение для углового коэффициента $k_{н} \leq 1/0,11 \approx 9$, а для зоны нечувствительности $b \geq c/k_{н} \approx 0,9$.

При $b < 0,9$ состояние равновесия системы будет неустойчивым.

В некоторых случаях использование нелинейных систем управления затруднено из-за наличия низкочастотных автоколебаний большой амплитуды. Устранить этот недостаток можно путем компенсации нелинейностей. При этом нелинейная система относительно некоторых входных сигналов может рассматриваться как линейная.

Простейшим способом устранения нелинейности является включение параллельно или последовательно с основной нелинейностью $\varphi(\sigma)$ компенсирующей нелинейности $\varphi^{-1}(\sigma)$, имеющей обратный характер. Тогда такое соединение нелинейных элементов образует эквивалентный линейный элемент и система станет линейной.

Применяется также вибрационная компенсация нелинейностей. Такая компенсация является наиболее распространенным способом линеаризации

релейных систем. Вибрационная компенсация осуществляется высокочастотным периодическим сигналом.