МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

В.В. Конев

Уравнения в частных производных

Лекционные наброски

УДК 517.53
ББК 22.161
С34

Конев В.В.
Уравнения в частных производных: учебное пособие / В.В. Конев; Томский политехнический университет.

Излагаются основные понятия об уравнениях в частных производных. Охват материала соответствует программе университетского курса для студентов элитного технического образования Томского политехнического университета в рамках курса математики.

Предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей, научных сотрудников.

Оглавление

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ
1. Начальные понятия

Под дифференциальным уравнением в частных производных понимается уравнение для функции двух или большего числа переменных, содержащее хотя бы одну частную производную этой функции. При этом сама функция и независимые переменные могут и не входить в уравнение явным образом. Любое уравнение в частных производных может быть представлено в виде

$$F\left(x, y, \dots; u, u_x, u_y, \dots; u_{xx}, u_{xy}, \dots\right) = 0, \qquad (1)$$

где $x, y, \dots$ – независимые переменные; $u = u(x, y, \dots)$ – искомая функция; $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \dots$

В дальнейшем, если не оговорено противное, все фигурирующие функции по умолчанию предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные производные соответствующих порядков.

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком старшей производной, содержащейся в уравнении. Например, уравнение $u_x(x, y) = y$ является уравнением первого порядка, тогда как порядок уравнения $u_{yy} + u_x = x - y + 3$ равен двум.

Под **решением** дифференциального уравнения (1) понимается функция $u(x, y, \dots)$, которая обращает уравнение в тождество относительно переменных $x, y, \dots$.

Общее решение дифференциального уравнения в частных производных содержит произвольные функции, число которых равно порядку уравнения. Число аргументов этих функций на единицу меньше числа аргументов решения u. Общее решение, представленное в неявном виде, называется **общим интегралом** уравнения. Конкретный выбор произвольных функций дает **частное решение** уравнения.

Любое дифференциальное уравнение в частных производных имеет бесконечное множество решений. Наибольший интерес представляют решения, удовлетворяющие дополнительным условиям. Эти условия называются **краевыми условиями** и заключаются в указании поведения решения на некоторой граничной линии (поверхности) или в ее непосредственной окрестности. С этой точки зрения начальные условия представляют собой краевые условия во времени. Краевые условия используются для выбора частного решения из бесконечного множества решений. Практически любая задача, описывающая физический процесс и сформулированная в терминах дифференциальных уравнений в частных производных, включают в себя краевые условия.

2. Примеры краевых условий.

1. Если задано, что источник тепла находится в контакте с одним из концов стержня и поддерживает на нем постоянную температуру u_0, то представляется очевидным, что по мере удаления от источника температура в стержне не будет неограниченно возрастать. Соответствующие краевые условия имеет вид
$$u(0,t) = u_0, \;\; u(x,t) < \infty,$$
где $\mathrm{u(x,t)}$– температура в стержне на расстоянии x от источника в момент времени t.

2. Краевое условие вида $u(x,0) = \varphi(x)$ может интерпретироваться как задание в начальный момент температурного распределение в стержне.

3. Согласно классификации краевых условий, под условиями Дирихле понимается задание функции $u(x,y,z,t)$ в каждой точке границы области в начальный момент времени. В частности, задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге радиуса R включает в себя уравнение Лапласа с граничным условием вида
$$u(r,\varphi)|_{r=R} = f(\varphi),$$
где r и φ – полярные координаты точки (x,y); $f(\varphi)$ – заданная функция.

4. Условия Неймана подразумевают задание нормальной компоненты градиента $(\nabla u)_{\mathbf{n}}$ в каждой точке границы.

5. Условия Коши представляют собой сочетание условий Дирихле и условий Неймана и означают задание функции $u(x, y, z, t)$ и проекции градиента этой функции на нормаль в каждой точке границы в начальный момент времени.

Разумеется, что элементарное знакомство с методами решения дифференциальных уравнений в частных производных – без упоминания о краевых и начальных условиях – способно лишь сформировать начальное представление о методологии мудрой науки под названием "Уравнения математической физики". Однако даже такое знакомство является необходимой предпосылкой для создания и развития навыков умения решать реальные задачи, сформулированные в терминах дифференциальных уравнений с заданными начальными и краевыми условиями.

Задание, связанное с нахождением решения уравнения, удовлетворяющего заданным начальным и краевым условиям, обычно формулируется в виде "Найти решение задачи (Дирихле, Коши, Неймана) для уравнения такого-то в такой-то области".

3. Простейшие уравнения в частных производных

Наряду с общими чертами, присущими обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными, между ними имеются существенные различия. Например, общее решение дифференциального уравнения с частными производными содержит не произвольные постоянные, а произвольные функции (в количестве, равном порядку дифференциального уравнения).

Примеры.

1. Пусть $u = u(x, y)$. Тогда общим решением уравнения
$$u_x = 0 \qquad (2)$$
является произвольная дифференцируемая функция $u = \varphi(y)$.
2. Если $u = u(x, y, z)$, то общим решением уравнения (2) является произвольная дифференцируемая функция двух переменных: $u = \varphi(y, z)$.

3. Рассмотрим уравнение
$$u_x = u_y, \tag{3}$$
где $u = u(x, y)$.

Введем новые переменные, определив их равенствами
$$\xi = x + y, \qquad \eta = x - y.$$
Тогда
$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi - u_\eta$$
и, следовательно,
$$2u_\eta = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$u = \varphi(\xi) = \varphi(x + y),$$
где φ – произвольная дифференцируемая функция.

4. Уравнение
$$\alpha u_x + \beta u_y = 0, \tag{4}$$
где α и β – некоторые числовые коэффициенты, с помощью замены переменных
$$\xi = \beta x, \qquad \eta = -\alpha y$$
преобразуется к виду, рассмотренному в предыдущем примере:
$$u_\xi = u_\eta\,.$$
Следовательно, его общее решение определяется формулой
$$u = \varphi(\xi + \eta) = \varphi(\beta x - \alpha y).$$

5. Пусть $g(x, y)$ – некоторая дифференцируемая функция. Тогда уравнение
$$u_x g_y - u_y g_x = 0 \tag{5}$$
выражает равенство нулю якобиана
$$\frac{\partial(u, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}.$$
Это означает, что функции $u(x, y)$ и $g(x, y)$ являются зависимыми. Следовательно,
$$u = \varphi(g(x, y)), \tag{6}$$
где φ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Результат (6) сохраняет свою силу и для более общего уравнения
$$u_x g_y(x,y,u) - u_y g_x(x,y,u) = 0, \tag{7}$$
в котором функция g зависит явным образом не только от независимых переменных x и y, но и от искомой функции u. В этом случае общее решение определяется равенством
$$u = \varphi(g(x,y,u)),$$
которое представляет собой задание в неявном виде общего решения через произвольную функцию φ.
7. Рассмотрим уравнение второго порядка для функции двух переменных $u = u(x,y)$:
$$u_{xy} = 0. \tag{8}$$
Равенство нулю частной производной $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ означает, что u_x представляет собой произвольную функцию $\varphi(x)$. Тогда общее решение уравнения (8) имеет вид
$$u = \int \varphi(x)dx = \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$
где φ_1 и φ_2 – произвольные функции.

Общее решение неоднородного уравнения
$$u_{xy} = f(x,y)$$
определяется выражением
$$u(x,y) = \int\limits_{x_1}^{x} \int\limits_{y_1}^{y} f(\xi,\eta)d\xi\, d\eta + \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$
в котором φ_1 и φ_2 – произвольные функции; x_1, y_1 – фиксированные числа.
8. Уравнение
$$u_{xx} = u_{yy} \tag{9}$$
преобразуется к уравнению
$$u_{\xi\eta} = 0$$
заменой переменных
$$\xi = x + y, \qquad \eta = x - y.$$

В соответствии с предыдущим примером этому общее решение уравнения (6) имеет вид

$$u = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta) = \varphi_1(x + y) + \varphi_2(x - y).$$

9. Уравнение

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{yy} \tag{10}$$

приводится к виду (8) заменой $y_1 = ay$. Следовательно, его общее решение определяется равенством

$$u = \varphi_1(x + ay) + \varphi_2(x - ay).$$

В частности, решениями уравнения (10) являются многочлены вида

$$u = (x + ay)^n \tag{11}$$

и

$$u = (x - ay)^n \tag{12}$$

Полагая $a = i$, где i – мнимая единица, получаем уравнение Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{13}$$

При этом равенства (11) и (12) принимают вид

$$\begin{gathered}(x + iy)^n = x^n + inx^{n-1}y - \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \cdots = \\ = A(x, y) + iB(x, y),\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}(x - iy)^n = x^n - inx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 - \cdots = \\ = A(x, y) - iB(x, y).\end{gathered} \tag{15}$$

Вещественные и мнимые части этих выражений являются решениями уравнения Лапласа (13). Другими словами, частные решения уравнения (13) могут быть представлены в виде комплексных функций, вещественными и мнимыми частями которых являются многочлены $A(x, y)$ и $B(x, y)$ с вещественными коэффициентами:

$$u = (x \pm iy)^n = A(x, y) \pm iB(x, y). \tag{16}$$

Глава 2
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
1. Линейные и квазилинейные уравнения

Пусть $u = u(x, y, z)$ – функция трех независимых переменных. **Квазилинейным уравнением** в частных производных первого порядка называется уравнение вида

$$P(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial z} = T(x, y, z, u) \qquad (1)$$

где P, Q, R, T – заданные функции.

Если функции P, Q, R, T зависят только от переменных x, y и z, то уравнение (1) принимает вид

$$P(x, y, z)u_x + Q(x, y, z)u_y + R(x, y, z)u_z = T(x, y, z) \qquad (2)$$

и называется **линейным**.

Если функция $T = 0$, то соответствующее уравнение

$$Pu_x + Qu_y + Ru_z = 0 \qquad (3)$$

называется **однородным**.

Линейная комбинация решений линейного однородного уравнения в частных производных также является решением этого уравнения.

Аналогичным образом определяются линейное и квазилинейное уравнения для функции большего числа независимых переменных.

Уравнению (1) сопоставляется система обыкновенных дифференциальных уравнений, симметрическая форма которой имеет вид

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{T}. \qquad (4)$$

Уравнения (4) называются **уравнениями характеристик**; семейства кривых, определяемые этими уравнениями, называются **характеристиками** уравнения (1).

Интегралом системы (4) называется функция $\varphi(x, y, z, u)$, непрерывная в некоторой области вместе со своими частными производными и принимающая постоянное значение C при подстановке в нее решения системы уравнений (4). Равенство

$$\varphi(x, y, z, u) = C \tag{5}$$

называется **первым интегралом системы** (4). Совокупность трех независимых первых интегралов

$$\varphi_1(x, y, z, u) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z, u) = C_2, \quad \varphi_3(x, y, z, u) = C_3 \tag{6}$$

системы (4) дает **общий интеграл** этой системы, который записывается в виде

$$\Phi\big(\varphi_1(x, y, z, u), \varphi_2(x, y, z, u), \varphi_3(x, y, z, u)\big) = 0, \tag{7}$$

где Φ – произвольная функция Φ переменных $\varphi_{1,}\, \varphi_2$ и φ_3. Общий интеграл системы определяет в неявной форме общее решение уравнения в частных производных. Нахождение общего интеграла уравнений (1)-(3) сводится к решению нормальной системы дифференциальных уравнений (4).

Если линейное уравнение является однородным, то соответствующая ему нормальная система имеет вид

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{0}, \tag{8}$$

что влечет $du = 0$ и, следовательно, равенство $u = \mathrm{const}$ является первым интегралом системы (8). В этом случае общее решение однородного уравнения (3) можно представить в виде

$$u = \psi\big(\varphi_1(x, y, z, u), \varphi_2(x, y, z, u)\big), \tag{9}$$

где ψ – произвольная функция.

Примеры.

1. Пусть задано плоское векторное поле

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\, P(x, y) + \mathbf{j}\, Q(x, y).$$

Представим уравнение векторных линий поля $\mathbf{A}$ в неявном виде

$$u(x, y) = \mathrm{const}.$$

Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ функции $u(x,y)$ являются координатами вектора нормали $\mathbf{N}$ к векторной линии поля $\mathbf{A}$ в точке (x,y,z) и, следовательно,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{N} = 0,$$

что влечет

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Тогда

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}.$$

Это уравнение можно интерпретировать как условие параллельности вектора $\mathbf{A}$ и вектора $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy$, направленного вдоль касательной к векторной линии поля $\mathbf{A}$.

Например, для $P = y$ и $Q = x$ имеем

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - y^2 = C.$$

Полученное уравнение определяет семейство гипербол при $C \neq 0$ и пару прямых $y = \pm x$ при $C = 0$. Любая векторная линия поля $\mathbf{A} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x$ описывается уравнением $x^2 - y^2 = C$ при некотором фиксированном значении константы C.

2. Чтобы найти общий интеграл уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{10}$$

составим систему уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{0}.$$

Интегрируя первое уравнение системы, получаем ее первый интеграл:

$$\ln y = \ln x + \ln C_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{x} = C_1.$$

Наличие нуля в знаменателе дроби $\frac{du}{0}$ влечет за собой

$$du = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = C_2.$$

Общий интеграл уравнения (23) определяется равенством

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, u\right) = 0.$$

Разрешая это равенство относительно переменной u, находим общее решение уравнения (23):

$$u = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

(Здесь ψ – произвольная дифференцируемая функция.)

3. Общее решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

имеет вид

$$u = \psi(x + y).$$

Действительно,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{0} \quad \Longrightarrow$$

$$x + y = C_1, \quad u = C_2,$$

$$\Phi(x + y, u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \psi(x + y).$$

4. Найти общее решение уравнения

$$(x + y)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{0}.$$

Первое уравнение представляет собой однородное уравнение

$$y' = \frac{y}{x + y},$$

которое заменой переменной $y = tx$ приводится к виду

$$t'x + t = \frac{t}{1 + t} \quad \Longrightarrow$$

$$t'x = -\frac{t^2}{t + 1}.$$

Интегрируя уравнение

$$-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{dx}{x},$$

получаем

$$\frac{1}{t}-\ln t=\ln x+C_1 \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{y}-\ln\frac{y}{x}-\ln x=C_1 \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{y}-\ln y=C_1.$$

Из второго уравнения системы следует, что $u=C_2$.

Таким образом, общий интеграл уравнения (12) определяется выражением

$$\Phi\left(\frac{x}{y}-\ln y\,,u\right)=0,$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция. Общее решение уравнения (25) имеет вид

$$u=\psi\left(\frac{x}{y}-\ln y\right).$$

2. Краткий обзор методов интегрирования нормальных систем

Напомним основные приемы интегрирования нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, представленных в симметрической форме:

$$\frac{dx}{P(x,y,z,u)}=\frac{dy}{Q(x,y,z,u)}=\frac{dz}{R(x,y,z,u)}=\frac{du}{T(x,y,z,u)}. \tag{13}$$

1. Сведение системы уравнений (13) к одному дифференциальному уравнению методом исключения переменных.

Для иллюстрации рассмотрим систему

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{yu}=\frac{du}{u^2} \tag{14}$$

и представим ее в виде

$$\frac{dy}{dx} = u, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{y}.$$

Продифференцируем первое из этих уравнений по x и подставим для производной u' ее выражение из второго уравнения:

$$y'' = \frac{u^2}{y}.$$

Затем подставим в это равенство $u = y'$:

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}.$$

Полученное уравнение допускает понижение порядка:

$$y' = p(y) \quad \Longrightarrow \quad p'py = p^2 \quad \Longrightarrow$$

$$p(p'y - p) = 0. \qquad (15)$$

Приравнивая к нулю первый множитель в левой части этого равенства, получим тривиальное решение:

$$p = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \mathrm{const} \quad \Longrightarrow \quad u = 0.$$

Общее решение уравнения (15) определяется уравнением с разделяющимися переменными:

$$p'y - p = 0.$$

Очевидно, что

$$\ln p = \ln y + \ln C_1 \quad \Longrightarrow$$

$$y' = C_1 y \quad \Longrightarrow \quad \ln y = C_1 x + C_2 \quad \Longrightarrow$$

$$y = e^{C_1 x + C_2}.$$

Далее,

$$u = y' = C_1 y.$$

Таким образом, первые интегралы системы (14) определяется уравнениями

$$\frac{u}{y} = C_1, \quad \ln y - \frac{xu}{y} = C_2.$$

2. Суть метода выделения интегрируемых комбинаций заключается в получении уравнения, которое решается непосредственным интегрированием, что приводит к нахождению первого интеграла системы.

Для выделения интегрируемых комбинаций используется свойство равных дробей, согласно которому равные дроби

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \cdots = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lambda \tag{16}$$

сохраняют свое значение, если из выражений в числителе и выражений в знаменателе составить линейные комбинации с одинаковыми коэффициентами:

$$\frac{\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \cdots + \gamma_n\alpha_n}{\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \cdots \gamma_n\beta_n} = \lambda. \tag{17}$$

Коэффициентами γ_k $(k = 1,2, \dots, n)$ линейных комбинаций могут быть любые числа и выражения, которые подбираются таким образом, чтобы выражение в числителе полученной дроби представляло собой дифференциал выражения, стоящего в ее знаменателе, или чтобы знаменатель дроби обратился в нуль.

Примеры.

1. Повторно рассмотрим систему уравнений (14). Из уравнения

$$\frac{dy}{yu} = \frac{du}{u^2}$$

получается интегрируемая комбинация и первый интеграл системы:

$$\frac{du}{u} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln u = \ln y + \ln C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{u}{y} = C_1.$$

Подстановка $u = C_1 y$ в первое уравнение системы (14)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{yu}$$

дает вторую интегрируемую комбинацию

$$dx = \frac{dy}{C_1 y}.$$

Общий интеграл этого уравнения совпадает с полученным ранее:

$$\ln y = C_1 x + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad \ln y - \frac{xu}{y} = C_2.$$

2. Найти общее решение однородного уравнения

$$(x-4y)\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0. \qquad (18)$$

Преобразуем уравнение

$$\frac{dx}{x-4y}=\frac{dy}{-y},$$

используя свойство равных дробей:

$$\frac{dx}{x-4y}=\frac{dx-2dy}{x-4y+2y}=\frac{d(x-2y)}{x-2y}=\frac{dy}{-y}.$$

Тогда

$$\ln|x-2y|=-\ln|y|+\ln C,$$

$$xy-2y^2=C.$$

Общее решение уравнения (31) имеет вид

$$u=\psi(xy-2y^2).$$

3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y-z}{u-x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{y-z}{u-x}\frac{\partial u}{\partial z}=y-z+1$$

и составим нормальную систему в симметрической форме:

$$\frac{dx}{1}=\frac{(u-x)dy}{y-z}=\frac{(u-x)dz}{y-z}=\frac{du}{y-z+1}.$$

Из уравнения

$$\frac{(u-x)dy}{y-z}=\frac{(u-x)dz}{y-z}$$

сразу получаем первый интеграл системы:

$$dy=dz \quad \Rightarrow$$
$$y-z=C_1.$$

Учитывая последнее равенство, находим другой первый интеграл:

$$\frac{dx}{1}=\frac{du}{C_1+1} \quad \Rightarrow \quad u=(C_1+1)x+C_2 \quad \Rightarrow$$
$$u-(y-z+1)x=C_2.$$

Затем обратимся к уравнению

$$dx = \frac{(u-x)dy}{y-z},$$

где $y - z = C_1,\ u - x = C_1 x + C_2$.

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{C_1 x + C_2} \qquad \Longrightarrow$$

$$y = \ln(C_1 x + C_2) + C_3.$$

Исключая константы C_1 и C_2, получим третий независимый первый интеграл системы:

$$y - \ln(u - x) = C_3.$$

3. Задача Коши

Пусть задано квазилинейное уравнение

$$P(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial z} = T(x,y,z,u) \qquad (19)$$

с дополнительными условиями, которые определяют вид функции $u(x,y,z)$ на некоторых поверхностях. Примерами таких краевых условий могут служить уравнения

$$u|_{z=0} = x^2 + y^2,$$
$$y = 1,\ \ z = x^3, \dots$$

Нахождение частного решения уравнения, удовлетворяющего краевым условиям, называется **задачей Коши**.

Процедура решения задачи Коши включает в себя два этапа, на первом из которых отыскиваются независимые первые интегралы и определяется общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\varphi_1(x,y,z,u) = C_1,\ \ \varphi_2(x,y,z,u) = C_2,\ \ \ \varphi_3(x,y,z,u) = C_3. \qquad (20)$$

Затем из системы уравнений, включающей в себя первые интегралы и краевые условия, исключаются переменные x, y, z. Результатом является уравнение вида

$$\Phi(C_1, C_2, C_3) = 0,$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные константы. Заменяя в этом уравнении константы C_1, C_2, C_3 функциями $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, получаем решение задачи Коши.

Примеры.

1. Найти частное решение однородного уравнения

$$u_x + (e^{-x} - y)u_y = 0, \tag{21}$$

удовлетворяющего краевому условию $u|_{x=0} = 3y + 2$.

Составим уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{e^{-x} - y} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{-x} - y.$$

Решение этого линейного уравнения дает первый интеграл,

$$e^x y - x = C.$$

Общее решение уравнения (34) имеет вид

$$u = \psi(e^x y - x).$$

Учитывая краевое условие, согласно которому $u = 3y + 2$ при $x = 0$, получаем уравнение

$$3y + 2 = \psi(y).$$

Следовательно,

$$u = 3(e^x y - x) + 2.$$

2. Найти частное решение линейного однородного уравнения

$$xu_x - 2yu_y + xyu_z = 0, \tag{22}$$

удовлетворяющего краевому условию $u|_{z=0} = x^2 + y^2$.

Составим уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{xy}.$$

Выделим интегрируемые комбинации:

$$x^2 y = C_1,$$

$$\frac{ydx + xdy + dz}{xy - 2xy + xy} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad d(xy + z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$xy + z = C_2.$$

Общее решение уравнения (22):

$$u = \psi(x^2 y, xy + z).$$

Краевое условие

$$u = x^2 + y^2 \text{ при } z = 0$$

влечет уравнение

$$x^2 + y^2 = \psi(x^2 y, xy).$$

Введем переменные

$$\xi = x^2 y, \quad \eta = xy \quad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\xi}{\eta}, \quad y = \frac{\eta^2}{\xi}.$$

Тогда

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{\eta^2} + \frac{\eta^4}{\xi^2}$$

и, следовательно, решение задачи Коши определяется формулой

$$u = \frac{x^4 y^2}{(xy + z)^2} + \frac{(xy + z)^4}{x^4 y^2}.$$

3. Составить уравнение поверхности, определяемой уравнением

$$x z_x - 2y z_y = 4(x^2 + y^2) \tag{23}$$

и проходящей через линию пересечения поверхностей $x = 3$ и $z = 4y^2$.

Выделим интегрируемые комбинации из уравнений характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{4(x^2 + y^2)},$$

$$x^2 y = C_1,$$

$$\frac{-4x dx + 2y dy + dz}{-4x^2 - 4y^2 + 4x^2 + 4y^2} = \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{d(z - 2x^2 + y^2)}{0} = \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow$$

$$z - 2x^2 + y^2 = C_2.$$

Общий интеграл уравнения (22):

$$\Phi(x^2y, z - 2x^2 + y^2) = 0.$$

Общее решение уравнения (22):

$$z = 2x^2 - y^2 + \psi(x^2y).$$

Вид функции ψ определяется краевым условием $z|_{x=3} = 4y^2$:

$$4y^2 = 18 - y^2 + \psi(9y).$$

Полагая $\xi = 9y$, получим функциональное уравнение для функции ψ:

$$\psi(\xi) = 5\left(\frac{\xi}{9}\right)^2 - 18.$$

Следовательно, искомая поверхность описывается уравнением

$$z = 2x^2 - y^2 + 5\left(\frac{x^2y}{9}\right)^2 - 18.$$

Глава 3
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Классификация уравнений второго порядка. Приведение уравнений к каноническому виду.

Пусть $u(x, y)$ – функция двух независимых переменных и пусть a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f – заданные функции переменных x и y. Тогда дифференциальное уравнение

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f(x, y) \qquad (1)$$

называется **линейным уравнением в частных производных второго порядка**.

Если функции a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f зависят не только от переменных x и y, но и от искомой функции u, то уравнение (1) называется **квазилинейным**.

Уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \qquad (2)$$

называется **характеристическим**. Кривые, которые описываются уравнением $\varphi(x,y)=C$, где φ – решение уравнения (2), называются **характеристиками** уравнения (1).

Заметим, что

$$\varphi(x,y)=C \quad \Rightarrow$$

$$d\varphi=\varphi_{x}dx+\varphi_{y}dy=0 \quad \Rightarrow$$

$$dy=-\frac{\varphi_{x}}{\varphi_{y}}dx.$$

Поэтому характеристическое уравнение (2) можно также представить в виде

$$a_{11}\varphi_{xx}+2a_{12}\varphi_{x}\varphi_{y}+a_{22}\varphi_{yy}=0. \qquad (3)$$

Если $a_{12}^{2}-a_{11}a_{22}>0$ в некоторой области *D*, то говорят, что уравнение (1) относится в этой области к уравнениям **гиперболического** типа. В этом случае характеристическое уравнение (2) эквивалентно двум уравнениям

$$a_{11}dy-\left(a_{12}+\sqrt{a_{12}^{2}-a_{11}a_{22}}\right)dx=0, \qquad (4)$$

$$a_{11}dy-\left(a_{12}-\sqrt{a_{12}^{2}-a_{11}a_{22}}\right)dx=0. \qquad (5)$$

Общие интегралы $\varphi(x,y)=C_1$ и $\psi(x,y)=C_2$ этих уравнений являются вещественными и определяют два различных семейства характеристик уравнения (1).

Замена переменных

$$\xi=\varphi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y) \qquad (6)$$

приводит уравнение гиперболического типа к каноническому виду

$$u_{\xi\eta}+a_1u_{\xi}+b_1u_{\eta}+c_1u=d_1, \qquad (7)$$

где a_1, b_1, c_1, d_1 – некоторые функции переменных ξ и η.

Если $a_{12}^{2}-a_{11}a_{22}=0$, то уравнение (1) называется уравнением **параболического** типа. В этом случае уравнения (4) и (5) совпадают между собой. Общий интеграл $\varphi(x, y) = C_1$ определяет одно семейство характеристик.

Замена переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \qquad (8)$$

где $\psi(x, y)$ – произвольная дифференцируемая функция, приводит уравнение параболического типа к каноническому виду

$$u_{\eta\eta} + a_1 u_\xi + b_1 u_\eta + c_1 u = d_1. \qquad (9)$$

Если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то уравнение (1) называется уравнением **эллиптического** типа. Общие интегралы $\phi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C$ таких уравнений являются комплексно-сопряженными и определяют два семейства характеристик.

Замена переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \qquad (10)$$

приводит уравнение эллиптического типа к каноническому виду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + a_1 u_\xi + b_1 u_\eta + c_1 u = d_1. \qquad (11)$$

Отметим, что уравнение (1) может иметь изменять свой тип при переходе из одной области в другую. Если же коэффициенты уравнения постоянны, то его тип остается неизменным во всей плоскости $x0y$. В этом случае возможны дальнейшие упрощения уравнения – после его приведения к каноническому виду.

В частности, в уравнениях гиперболического типа (7) и эллиптического типа (11) можно избавиться от первых производных, используя подстановку

$$u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{\alpha\xi+\beta\eta} \qquad (12)$$

и выбирая надлежащим образом параметры α и β.

В уравнениях параболического типа подобным образом удается обратить в нуль коэффициенты при одной из производных первого порядка и при самой искомой функции.

Примеры.

1. Уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

является эллиптическим, поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0$.

Общие интегралы характеристического уравнения

$$dy^2 + dx^2 = 0$$

задаются формулой

$$x \pm iy = \mathrm{const},$$

что влечет за собой замену переменных

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy.$$

Учитывая равенства

$$u_x = u_\xi + u_\eta \qquad (\xi_x = 1, \quad \eta_x = 1),$$
$$u_y = i(u_\xi - u_\eta) \quad (\xi_y = i, \ \ \eta_y = -i),$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = -u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta},$$

получаем уравнение

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

общее решение которого представляет собой сумму двух произвольных функций переменных ξ и η соответственно:

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$
$$u(x, y) = f_1(x + iy) + f_2(x - iy).$$

2. Рассмотрим уравнение гиперболического типа:

$$a^2 u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$a^2 dy^2 - dx^2 = 0.$$

Общие интегралы этого уравнения определятся равенством

$$x = \pm ay + \mathrm{const}.$$

Замена переменных

$$\xi = x + ay, \ \ \eta = x - ay$$

приводит рассматриваемое уравнение к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} = 0$$

общее решение которого

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$
$$u(x, y) = f_1(x + ay) + f_2(x - ay).$$

3. Уравнение
$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + u_y = 0$$
относится к гиперболическому типу, поскольку
$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 + 1 \cdot 3 = 4 > 0.$$

4. В условиях предыдущей задачи привести уравнение к каноническому виду.
Уравнение характеристик гиперболического уравнения распадается на два уравнения:
$$dy - 3dx = 0,$$
$$dy + 3dx = 0.$$
Общие интегралы этих уравнений:
$$3x - y = C_1, \qquad 3x + y = C_2.$$
Выполним замену переменных:
$$\xi = 3x - y, \quad \eta = 3x + y.$$
Тогда
$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = 3u_\xi + 3u_\eta \qquad (\xi_x = 3, \quad \eta_x = 3),$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi + u_\eta \qquad (\xi_y = -1, \ \eta_y = 1),$$
$$u_{xx} = 3(u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_x + 3(u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_x = 9u_{\xi\xi} + 18u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta},$$
$$u_{xy} = 3(u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_y + 3(u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_y = -3u_{\xi\xi} + 3u_{\eta\eta},$$
$$u_{yy} = (-u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_y + (-u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$
Уравнение в новых переменных принимает вид канонического уравнения гиперболического типа:
$$15\, u_{\xi\eta} + u_\xi + 2u_\eta = 0.$$

5. Уравнение
$$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$$
является параболическим, поскольку
$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 - 1 \cdot 4 = 0.$$
Уравнение его характеристик имеет вид

$$dy - 2dx = 0.$$

Общий интеграл этого характеристического уравнения:

$$2x - y = C_1.$$

Замена переменных:

$$\xi = 2x - y, \quad \eta = 2x + y.$$

Тогда

$$u_x = 2u_\xi + 2u_\eta \qquad \left(\xi_x = 2, \quad \eta_x = 2\right),$$

$$u_y = -u_\xi + u_\eta \qquad (\xi_y = -1, \ \ \eta_y = 1),$$

$$u_{xx} = 4u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}\,,$$

$$u_{xy} = -2u_{\xi\xi} + 2u_{\eta\eta}\,,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\,.$$

Результатом преобразований является каноническое уравнение параболического типа:

$$16\,u_{\eta\eta} + u_\xi + 3u_\eta = 0.$$

6. Уравнение

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0$$

является параболическим, поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 1 \cdot 1 = 0.$

Уравнение его характеристик имеет вид

$$dy + dx = 0,$$

общий интеграл которого

$$x + y = C_1.$$

Замена переменных:

$$\xi = x + y, \quad \eta = y.$$

Тогда

$$u_x = u_\xi \qquad (\xi_x = 1, \quad \eta_x = 0),$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta \qquad (\xi_y = 1, \ \ \eta_y = 1),$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\,,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\,.$$

В результате получаем каноническое уравнение

$$u_{\eta\eta} - u_\eta = 0,$$

порядок которого понижается введением переменной $v = u_\eta$:

$$v_\eta = v \quad \Longrightarrow \quad v = C_1(\xi)e^{\eta} \quad \Longrightarrow$$

$$u_\eta = C(\xi)e^{\eta} \quad \Longrightarrow \quad u(\xi,\eta) = C_1(\xi)e^{\eta} + C_2(\xi),$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ – произвольные функции. Таким образом, общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$u(\mathrm{x},\mathrm{y}) = C_1(\mathrm{x}+\mathrm{y})e^{\mathrm{y}} + C_2(x+y).$$

7. Рассмотрим уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Выражение $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y$ изменяет свой знак при переходе из нижней полуплоскости в верхнюю. Другими словами, уравнение имеет гиперболический тип при $y > 0$, эллиптический тип при $y < 0$ и является уравнением параболического типа на оси $0x$.

8. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$y^2u_{xy} + u_{yy} - \frac{2}{y}u_y = 0$$

в полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{y=1} = 1 - x, \quad u_y|_{y=1} = 3.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$-y^2dxdy + dx^2 = 0,$$

общими интегралами которого являются

$$x = C_1, \quad 3x - y^3 = C_2.$$

Заменой переменных

$$\xi = x, \quad \eta = 3x - y^3$$

уравнение приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

общее решение которого задается формулой

$$u(x,y) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x) + \psi(3x - y^3),$$

где φ и ψ – произвольные функции. Вид этих функций определяется начальными условиями:

$$\varphi(x) + \psi(3x-1) = 1 - x,$$

$$-3\psi'(3x-1) = 3.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\psi(x) = -x - C.$$

Тогда

$$\varphi(x) = 1 - x + 3x - 1 + C = 2x + C.$$

Таким образом, решение задачи определяется формулой

$$u(x,y) = 2x + C - 3x - (3x - y^3) - C \quad \Longrightarrow$$

$$u(x,y) = y^3 - x.$$

2. Основные уравнения математической физики

Уравнения математической физики представляют собой линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка.

1. Уравнение колебания гибкой струны (одномерное волновое уравнение):

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0. \tag{13}$$

2. Трехмерное уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0, \tag{14}$$

где

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\,.$$

3. Трехмерное волновое уравнение:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0. \tag{15}$$

где c – скорость распространения волны.

4. Уравнение теплопроводности (уравнение диффузии):

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_t = 0. \tag{16}$$

Если u – температура в некоторой точке тела, то константа a^2 выражается через теплопроводность, удельную теплоемкость и плотность вещества.

5. Уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \upsilon(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\psi = 0, \tag{17}$$

где $\psi = \psi(x, y, z)$ – волновая функция (амплитуда вероятности); $\upsilon(x, y, z)$ – потенциал.

Уравнения (13)–(16) являются однородными. Напомним, что линейная комбинация решений однородного уравнения также является его решением.

Более реалистичные физические процессы описываются неоднородными дифференциальными уравнениями, которые включают в себя член, соответствующий приложенным силам или источникам (поля, тепла и так далее). Например, если к колеблющейся струне приложена сила, то ее колебания описываются неоднородным уравнением вида

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = f(x, t).$$

Задача может быть неоднородной и вследствие неоднородного краевого условия, например, если конец струны движется заданным образом:

$$u(0, t) = \varphi(t).$$

В подобных случаях нарушается критерий однородной краевой задачи, то есть линейная комбинация решений уравнения уже не является решением. Общее решение неоднородной задачи представляет собой сумму любого частного решения задачи и общего решения соответствующей однородной задачи, для которой уравнение и краевые условия однородны.

Наряду с общими чертами, присущими обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными, между ними имеются существенные различия. Например, общее решение дифференциального уравнения с частными производными содержит не произвольные постоянные, а произвольные функции, число которых равно порядку дифференциального уравнения.

3. Метод разделения переменных. Параболические уравнения с начальным условием.

Рассмотрим задачу для одномерного уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < 2l$:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0 \tag{18}$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = f(x), \tag{19}$$

где $f(x)$ – заданная функция; $a > 0$.

Будем искать решение в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{20}$$

Подставляя это выражение в уравнение (18), получим

$$\frac{T'}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \tag{21}$$

Выражение в левой части этого уравнения содержит только переменную t, тогда как функция в правой части зависит лишь от x. Это означает, что

$$\frac{T'}{T} = \lambda, \tag{22}$$

$$a^2 \frac{X''}{X} = \lambda, \tag{23}$$

где λ – произвольная константа.

Общее решение уравнения (22) имеет вид

$$T_\lambda = \mathrm{const} \cdot e^{\lambda t}. \tag{24}$$

Уравнение (23) представляют собой обыкновенное дифференциальное уравнение (линейное однородное уравнение второго порядка),

$$a^2 X'' - \lambda X = 0, \tag{25}$$

общее решение которого имеет вид

$$X_\lambda = \begin{cases} A_\lambda \cos\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x + B_\lambda \sin\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\,, & \lambda \le 0, \\ C_\lambda \exp\left(\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right), & \lambda > 0, \end{cases} \qquad (26)$$

где $A_{\lambda\,,}B_\lambda\,, C_\lambda$ и D_λ – произвольные константы.

Таким образом, частное решение уравнения (18):

$$u_\lambda(x,t) = e^{\lambda t} \begin{cases} A_\lambda \cos\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x + B_\lambda \sin\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\,, & \lambda \le 0, \\ C_\lambda \exp\left(\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right), & \lambda > 0, \end{cases} \qquad (27)$$

Сумма частных решений (27) однородного уравнения (18) также является решением этого уравнения:

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{\lambda\le 0} e^{\lambda t}\left(A_\lambda \cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x + B_\lambda \sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + \\ + \sum_{\lambda>0} e^{\lambda t}\left(C_\lambda \exp\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right)\right). \end{gathered} \qquad (28)$$

Полагая в этой формуле $t = 0$ и учитывая начальное условие (19), получим

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{\lambda\le 0}\left(A_\lambda \cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x + B_\lambda \sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + \\ + \sum_{\lambda>0}\left(C_\lambda \exp\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right)\right). \end{gathered} \qquad (29)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи начального условия (19).

1. Пусть функция $f(x)$ представляет собой тригонометрическую функцию $\sin nx$ или $\cos mx$, например,
$$f(x) = B\sin nx.$$
Тогда в формуле (28) следует оставить положить $\lambda = -a^2n^2$, $A_\lambda = 0$ и $B_\lambda = B$. Решение задачи имеет вид

$$u(x,t) = B\exp(-a^2n^2t)\sin nx. \qquad (30)$$

2. Если функция $f(x)$ представляет собой экспоненциальную функцию вида Ce^{kx}, то в формуле (27) следует положить $\lambda = a^2k^2$, $C_\lambda = C$ и $D_\lambda = 0$. Решение задачи имеет вид

$$u(x,t) = Ce^{ak^2t}e^{kx}. \qquad (31)$$

3. Если же функция $f(x)$ представляет собой линейную комбинацию тригонометрических функций $\sin nx, \cos mx$ и экспоненциальных функций вида e^{kx}, то и решение задачи представляет собой линейную комбинацию соответствующих частных решений уравнения (18).

Предположим теперь, что функция $f(x)$ допускает разложение в ряд Фурье на отрезке $0 \leq x \leq 2l$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right). \qquad (32)$$

Напомним, что коэффициенты Фурье a_n и b_n вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx. \end{aligned} \qquad (33)$$

Тогда в формуле (28) следует положить

$$\lambda = -\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$A_\lambda = a_n, \quad B_\lambda = b_n \quad (n > 0),$$
$$A_0 = \frac{a_0}{2}.$$

В этом случае решение задачи (18)–(19) отыскивается в виде

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2}a^2n^2t\right)\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right). \qquad (34)$$

3.1. Примеры.

1. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < 2l$:

$$u_t = u_{xx}, \quad l = \pi, \quad t > 0, \tag{35}$$

$$u(x, 0) = 3 - 4\sin 5x + 7\cos 8x. \tag{36}$$

Разложение функции (36) в ряд Фурье содержит лишь трие члена. Поэтому решение задачи определяется формулой (34), в которой следует положить $a = 1$, $l = \pi$, $a_0 = 6$, $b_5 = -4$ и $a_8 = 7$, приравнивая к нулю остальные коэффициенты:

$$u(x, t) = 3 - 4e^{-25t}\sin 5x + 7e^{-64t}\cos 8x. \tag{37}$$

2. Решить задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < 2l$:

$$u_t = u_{xx}, \quad l = 2, \quad t > 0, \tag{38}$$

$$u(x, 0) = 4e^{x} - 2e^{-3x}. \tag{39}$$

Решение задачи будем искать в виде суммы частных решений вида

$$u_\lambda(x, t) = X_\lambda T_\lambda = e^{\lambda \mathrm{t}}\left(C_\lambda e^{\sqrt{\lambda}x} + D_\lambda e^{-\sqrt{\lambda}x}\right), \tag{40}$$

$$u_\lambda(x, 0) = C_\lambda e^{\sqrt{\lambda}x} + D_\lambda e^{-\sqrt{\lambda}x}. \tag{41}$$

Полагая в этом равенстве $\lambda = 1$, $C_1 = 1$ и $D_1 = 0$, получим частное решение

$$u_1(x, t) = e^{t}e^{x}. \tag{42}$$

Подстановка $\lambda = 9$, $C_9 = 0$ и $D_9 = -2$ дает

$$u_9(x, t) = -2e^{9t}e^{-3x}. \tag{43}$$

Суммируя решения (42) и (43), получим решение задачи (38)–(39):

$$u(x, t) = e^{t}e^{x} - 2e^{9t}e^{-3x}. \tag{44}$$

3. Решить задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < 2l$:

$$\begin{gathered} u_t = u_{xx}, \quad l = 2, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x + 1. \end{gathered} \tag{45}$$

Решение задачи определяется формулой (34), в которой следует положить $a = 1$ и $l = 2$. Коэффициенты Фурье разложения функции $f(x) = x + 1$ в ряд Фурье вычисляются по формулам (33) и равны

$$a_0 = 6, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{4}{\pi\, n}. \tag{46}$$

Таким образом, решение задачи (45) имеет вид

$$u(x,t) = 3 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{4}n^2 t}\,\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}. \tag{47}$$

4. Метод разделения переменных. Параболические уравнения с начальным и граничным условиями.

Пусть требуется найти решение задачи для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \;\; 0 < x < 2l, \;\; t > 0 \tag{48}$$

при начальном условии

$$u(x,0) = f(x) \tag{49}$$

и граничном условии

$$u(0,t) = u(2l,t). \tag{50}$$

Здесь $f(x)$ – заданная функция.

Согласно формуле (28) частное решение уравнения (48) имеет вид

$$u_\lambda(x,t) = e^{\lambda t}\begin{cases} A_\lambda \cos\left(\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right) + B_\lambda \sin\left(\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{a}x\right), & \lambda \le 0, \\ C_\lambda \exp\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right) + D_\lambda \exp\left(-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x\right), & \lambda > 0. \end{cases} \tag{51}$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (50), следует выбрать $\lambda \le 0$:

$$\sqrt{-\frac{\lambda}{a}} = \frac{\pi}{l} n, \quad \lambda = -\frac{\pi^2}{l^2} a^2 n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В этом случае

$$u_\lambda(2l, t) = A_\lambda \cos\left(\frac{\pi}{l} n2l\right) + B_\lambda \sin\left(\frac{\pi}{l} n2l\right) = u_\lambda(0, t).$$

Тогда решение (51) принимает вид

$$u_n(x, t) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2} a^2 n^2 t\right)\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{52}$$

где a_n и b_n – произвольные константы.

Сумма частных решений (52) однородного уравнения (48) также является решением этого уравнения:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2} a^2 n^2 t\right)\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{53}$$

(Для удобства последующего изложения решение u_0 записано в виде $a_0/2$.)

Полагая в этой формуле $t = 0$ и учитывая начальное условие (49), получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{54}$$

Это равенство представляет собой разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье, если коэффициенты a_n и b_n положить равными коэффициентам Фурье функции $f(x)$:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos\frac{\pi n x}{l} dx, \tag{55}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin\frac{\pi n x}{l} dx. \tag{56}$$

Таким образом, решение задачи (58)–(60) отыскивается в виде

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2} a^2 n^2 t\right)\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad (57)$$

где a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Пример.

1. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < 2l$:

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = 3\sin x + 4\cos 5x\,, \quad 0 < x < 2\pi,$$
$$u(0,t) = u(2\pi, t).$$

   Решение этой задачи имеет вид

$$u(x,t) = 3e^{-t}\sin x + 4e^{-25t}\cos 5x.$$

2. Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $0 < x < 2l$:

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = e^{-x}, \quad 0 < x < 2, \qquad (58)$$
$$u(0,t) = u(2,t).$$

   Решение задачи определяется формулой (57), в которой следует положить $a = 1$ и $l = 1$. Коэффициенты Фурье разложения функции $f(x) = e^x$ в ряд Фурье вычисляются по формулам (55)–(56):

$$a_0 = e^2 - 1,$$
$$a_n = \frac{e^2 - 1}{1 + \pi^2 n^2}, \qquad (59)$$
$$b_n = -\frac{\pi n(e^2 - 1)}{1 + \pi^2 n^2}.$$

   Решение задачи (58) имеет вид

$$u(x,t) = (e^2 - 1)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 t}\,\frac{\cos\pi n x - \pi n \sin\pi n x}{1 + \pi^2 n^2}\right). \qquad (60)$$

5. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Интеграл Пуассона.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0 \leq r < r_0$ формулируется следующим образом:

Найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{y}^2} = 0, \tag{61}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(r, \varphi)|_{r=r_0} = f(\varphi). \tag{62}$$

Здесь r и φ – полярные координаты точки (x, y); $f(\varphi)$ – заданная функция.

В полярной системе координат уравнение Лапласа имеет вид

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{63}$$

Предположим, что функцию $u(r, \varphi)$ можно представить в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{64}$$

Подставляя выражение (63) в уравнение (60), получим

$$\begin{gathered} \Phi(R' + rR'') + \frac{1}{r}R\Phi'' = 0, \\ \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \end{gathered} \tag{65}$$

Выражение в левой части этого уравнения содержит только переменную r, тогда как функция в правой части зависит только от φ. Это означает, что

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = \lambda, \tag{66}$$

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda, \tag{67}$$

где λ – некоторая константа.

Уравнения (66) и (67) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения (линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка):

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{68}$$

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0. \tag{69}$$

Общее решение уравнения (68) имеет вид

$$\Phi_\lambda = \begin{cases} A_\lambda \cos\sqrt{\lambda}\varphi + B_\lambda \sin\sqrt{\lambda}\varphi\,, & \lambda \geq 0, \\ C_\lambda e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + D_\lambda e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}, & \lambda < 0. \end{cases} \tag{70}$$

Учитывая, что $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, получаем

$$\begin{gathered} \lambda = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \Phi_n = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\,. \end{gathered} \tag{71}$$

Подставим $\lambda = n^2$ в уравнение (69) и будем искать его частные решения в виде $R = r^k$:

$$\begin{gathered} k(k-1)r^k + kr^k - n^2r^k = 0 \qquad \Longrightarrow \\ k^2 = n^2. \end{gathered} \tag{72}$$

Если $n \neq 0$, то функции r^n и r^{-n} образуют фундаментальную систему решений уравнения (69), а их линейная комбинация является общим решением этого уравнения:

$$R_n = C_n r^n + D_n r^{-n}. \tag{73}$$

Если $n = 0$, то уравнение (69) принимает вид

$$rR'' + R' = 0, \tag{74}$$

что влечет за собой

$$\begin{gathered} \frac{dR'}{R'} = -\frac{dr}{r}\,, \\ \ln R' = -\ln r + \ln D_0 \qquad (D_0 = \mathrm{const}), \\ R_0 = C_0 + D_0 \ln r \qquad (C_0 = \mathrm{const}). \end{gathered} \tag{75}$$

Таким образом,

$$u_n(r,\varphi) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\,) \quad (n \neq 0),$$
$$u_0(r,\varphi) = C_0 + D_0 \ln r. \tag{76}$$

Поскольку точка $r = 0$ попадает в область определения функции $u(r,\varphi)$, коэффициенты D_n и D_0 следует положить равными нулю. Тогда

$$u_n(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\,) \quad (n = 1, 2, \dots), \tag{77}$$

где $a_0 = 2C_0,\ a_n = C_n A_n,\ b_n = C_n B_n$.

Отметим, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце $r_1 < r < r_2$ ищется в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n}\right) \cos n\varphi + \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right) \sin n\varphi \right). \tag{78}$$

Коэффициенты $A_0,\ B_0, A_n, B_n, C_n, D_n$ определяются из граничных условий.

Сумма частных решений (77) уравнения Лапласа (63) также является решением этого уравнения. Поэтому решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге радиуса r_0 следует искать в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\,). \tag{79}$$

Полагая $r = r_0$ и учитывая граничное условие (62), получим

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\,). \tag{80}$$

Здесь a_0, $r_0^n a_n$ и $r_0^n b_n$ представляют собой коэффициенты Фурье разложения функция $f(\varphi)$ в ряд Фурье на промежутке $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha, \tag{81}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi\, r_0^n} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi\, r_0^n} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha.$$

Подставляя эти выражения в формулу (77), получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\varphi - \alpha) \, d\alpha. \qquad (82)$$

Заметим, что $\cos n(\varphi - \alpha) = \operatorname{Re} e^{in(\varphi-\alpha)}$. Изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \right) d\alpha, \qquad (83)$$

где $q = \frac{r}{r_0} e^{i(\varphi-\alpha)}$.

Очевидно, что

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+q}{1-q} \right) =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{r_0 + r\cos(\varphi - \alpha) + ir \sin n(\varphi - \alpha)}{r_0 - r\cos(\varphi - \alpha) - ir \sin n(\varphi - \alpha)} = \qquad (84)$$

$$= \frac{r_0^2 - r^2}{2(r_0^2 - 2rr_0 \cos n(\varphi - \alpha) + r^2)}.$$

В результате получаем **формулу Пуассона** для задачи Дирихле (61)–(62) в круге:

$$u(r, \varphi) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)}{r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \alpha) + r^2} d\alpha. \qquad (85)$$

Примеры.

1. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге: $\Delta\varphi = 0,\ 0 \leq r < 5,\ u|_{r=5} = 1 + 3\sin 2\varphi$.

   Решение задачи определяется формулой (79), в которой следует положить $a_0 = 2$ и $b_1 = 3/5^2$, приравнивая к нулю остальные коэффициенты:

$$u(r, \varphi) = 1 + \frac{3r^2}{25}\sin 2\varphi\,.$$

2. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге: $\Delta\varphi = 0,\ 0 \leq r < 4,\ u|_{r=1} = 4\cos^3\varphi$.

   Учитывая тождество

$$4\cos^3\varphi = 3\cos\varphi + \cos 3\varphi,$$

   Получаем

$$u(r, \varphi) = \frac{3r}{4}\cos\varphi + \frac{r^3}{4^3}\cos 3\varphi.$$

6. Другой подход к задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Пусть $f(z)$ – произвольная функция, аналитическая в круге радиуса r_0 и принимающая вещественное значение в центре этого круга. Из теории функций комплексной переменной $z = x + iy$ известно, что $\operatorname{Re} f(z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \operatorname{Re} f(z). \tag{86}$$

Функция $f(z)$ допускает представление в виде ряда Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad |z| < r_0. \tag{87}$$

Вычислим $\operatorname{Re} f(z)$, подставляя $c_0 = \frac{a_0}{2},\ \ c_n = a_n - ib_n \ \ (n \geq 1)$:

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n + i b_n)(\cos n\varphi - i \sin n\varphi)\right) =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \tag{88}$$

Полученный результат

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{89}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и φ – полярные координаты точки (x, y), в точности воспроизводит формулу (79). Если a_0, $r_0^n a_n$ и $r_0^n b_n$ – коэффициенты Фурье (80) разложения функция $f(\varphi)$ в ряд Фурье на промежутке $0 \le \varphi \le 2\pi$, то граничное условие $u(r_0, \varphi) = f(\varphi)$ выполняется автоматически.

7. Применение методов операционного исчисления. Нестационарные уравнения параболического типа.

Постановка задачи: найти решение уравнения

$$a_{11} u_{xx} + a u_x + b u_t = 0 \tag{90}$$

на отрезке $0 < x < 2l$ для $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{91}$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = f(t), \quad \alpha u_x(2l, t) + \beta u_t(2l, t) = \gamma u(2l, t). \tag{92}$$

Решение. Рассматривая левую часть уравнения (90) в качестве оригинала, выполним преобразование Лапласа по переменной t:

$$u(x, t) \risingdotseq U(x, p) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt, \tag{93}$$

$$u_x(x,t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU(x,p)}{dx},$$

$$u_{xx}(x,t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U(x,p)}{dx^2},$$

$$u_t(x,t) \risingdotseq pU(x,p) - u(x,0) =$$
$$= pU(x,p) - \varphi(x).$$

Представим краевые условия в терминах изображений соответствующих функций:

$$u(0,t) = f(t) \quad \Rightarrow \quad f(t) \risingdotseq F(p) = pU(0,p), \tag{94}$$

$$\alpha u_x(2l,t) + \beta u_t(2l,t) = \gamma u(2l,t) \quad \Rightarrow$$
$$\left(\alpha \frac{dU(x,p)}{dx} + \beta\big(pU(x,p) - \varphi(x)\big)\right)\Bigg|_{x=2l} = \gamma U(2l,p). \tag{95}$$

В результате решение задачи (90)–(92) сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$a_{11}U''(x,p) + \ aU'(x,p) + bpU(x,p) = b\varphi(x), \tag{96}$$

в котором p рассматривается как параметр. Граничные условия определяются формулами (94)–(95).

Восстановление оригинала по изображению дает решение задачи (90)–(92).

Глава 4
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ
1. Общие решения уравнений

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0. \tag{1}$$

Решение. Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2$, то уравнение (1) относится к гиперболическому типу во всех точках плоскости $x0y$, не лежащих на координатных осях.

Характеристическое уравнение:

$$x^2dy^2 - y^2dx^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dy = \pm\frac{y}{x}dx$$

Общие интегралы уравнения:

$$xy = C_1, \qquad \frac{y}{x} = C_2.$$

Замена переменных:

$$\xi = xy, \;\; \eta = \frac{y}{x}$$

$$\xi_x = y, \;\; \xi_y = x, \qquad \eta_x = -\frac{y}{x^2}, \;\; \eta_y = \frac{1}{x}$$

$$u_x = y\,u_\xi - \frac{y}{x^2}u_\eta, \quad u_y = x\,u_\xi + \frac{1}{x}u_\eta$$

$$u_{xx} = y^2u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}u_{\xi\eta} + 2\frac{y}{x^3}u_\eta + \frac{y^2}{x^4}u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = x^2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}u_{\eta\eta}$$

$$2\eta\,u_{\xi\eta} + u_\xi = 0$$

Введем функцию $z = u_\xi$. Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{d\eta} = -\frac{z}{2\eta},$$

в котором ξ выступает в качестве параметра.
Очевидно, что

$$\ln z + \ln\sqrt{\eta} = \ln\varphi(\xi) \quad \Rightarrow \quad u_\xi = \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\eta}},$$

где $\varphi(\xi)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.
Интегрируя последнее уравнение по ξ, получим общее решение уравнения (1):

$$u = \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\eta}} + \psi(\eta).$$

(Постоянной интегрирования является произвольная функция $\psi(\eta)$.)

Таким образом,

$$u(x,y)=\sqrt{x/y}\ \varphi(xy)+\psi(y/x).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0. \qquad (2)$$

Решение. Равенство нулю выражения $a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ означает, что уравнение (2) относится к параболическому типу.

Характеристическое уравнение:

$$x^2dy^2+2xydxdy+y^2dx^2=0 \quad \Longrightarrow \quad ydx+xdy=0$$

Общий интеграл уравнения:

$$xy=C.$$

Замена переменных:

$$\xi=xy,\ \ \eta=y.$$

$$\xi_x=y,\ \ \xi_y=x, \qquad \eta_x=0,\ \ \eta_y=1$$

$$u_x=y\,u_\xi,\quad u_y=x\,u_\xi+u_\eta$$

$$u_{xx}=y^2u_{\xi\xi}$$

$$u_{yy}=x^2u_{\xi\xi}+2x\,u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy}=xy\,u_{\xi\xi}+y\,u_{\xi\eta}+u_\xi$$

$$\eta u_{\eta\eta}+u_\eta=0$$

$$\frac{du_\eta}{u_\eta}=-\frac{d\eta}{\eta} \quad \Longrightarrow \quad \ln u_\eta+\ln\eta=\ln\varphi(\xi)$$

$$u_\eta=\frac{\varphi(\xi)}{\eta} \quad \Longrightarrow \quad u=\varphi(\xi)\ln\eta+\psi(\xi).$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем общее решение уравнения (2):

$$u(x,y)=\varphi(xy)\ln y+\psi(xy)$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$2u_{xx} - 2yu_{yy} - u_y = 0. \qquad (3)$$

Решение. Очевидно, что $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4y$. Поэтому уравнение (3) относится к гиперболическому типу в полуплоскости $y > 0$; к эллиптическому типу в полуплоскости $y < 0$ и к параболическому типу на оси $y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$dy^2 - ydx^2 = 0$$

1. Пусть $y > 0$. Тогда $dy = \pm\sqrt{y}dx$ и общие интегралы уравнения имеют вид

$$x + 2\sqrt{y} = C_1, \;\; x - 2\sqrt{y} = C_2.$$

Замена переменных:

$$\xi = x + 2\sqrt{y}, \qquad \eta = x - 2\sqrt{y}$$

$$\xi_x = 1, \;\; \xi_y = \frac{1}{\sqrt{y}}, \qquad\qquad \eta_x = 1, \;\; \eta_y = -\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}\left(u_\xi - u_\eta\right)$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{y}\left(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) - \frac{1}{2\sqrt{y^3}}\left(u_\xi - u_\eta\right)$$

$$u_{\xi\eta} = 0$$

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

$$u(x, y) = \varphi\left(x + 2\sqrt{y}\right) + \psi\left(x - 2\sqrt{y}\right)$$

2. Если $y < 0$, то общие интегралы уравнения имеют вид

$$x + 2i\sqrt{-y} = C_1, \;\; x - 2i\sqrt{-y} = C_2.$$

Замена переменных:

$$\xi = x, \quad \eta = 2\sqrt{-y}$$

$$\xi_x = 1, \ \xi_y = 0, \qquad \eta_x = 0, \ \eta_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}}$$

$$u_x = u_\xi, \quad u_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}}\, u_\eta$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}$$

$$u_{yy} = -\frac{1}{y} u_{\eta\eta} - \frac{1}{2\sqrt{-y^3}} u_\eta$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0 \tag{4}$$

$$u = \varphi(\xi + i\eta) + \psi(\xi - i\eta)$$

$$u(x,y) = \varphi\left(x + 2i\sqrt{-y}\right) + \psi\left(x - 2i\sqrt{-y}\right)$$

Общее решение уравнения Лапласа (4) можно также представить в виде

$$u(x,y) = \Phi\left(x, 2\sqrt{-y}\right),$$

где Φ – произвольная гармоническая функция двух переменных x и $2\sqrt{-y}$. В частности, такой функцией является вещественная часть функции комплексной переменной $z = x + i2\sqrt{-y}$, аналитической в полуплоскости $y < 0$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$2x\, u_{xx} + 2x^2 y\, u_{yy} - u_x + x^2 u_y = 0 \tag{5}$$

в первой и второй четвертях плоскости $x0y$.

Решение. Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -4x^3 y$, то уравнение (5) относится к гиперболическому типу во второй и четвертой четвертях плоскости $x0y$; является уравнением эллиптического типа в первой и третьей четвертях; относится к параболическому типу на координатных осях.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$dy^2 + xydx^2 = 0.$$

1. Пусть $x > 0$ и $y > 0$. Тогда $dy = \pm i\sqrt{xy}dx$ и общие интегралы уравнения имеют вид

$$\sqrt{x^3} + 3i\sqrt{y} = C_1, \ \ \sqrt{x^3} - 3i\sqrt{y} = C_2.$$

Замена переменных:

$$\xi = \sqrt{x^3}, \qquad \eta = 3\sqrt{y}$$

$$\xi_x = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \ \ \xi_y = 0 \qquad\qquad \eta_x = 0, \ \ \eta_y = \frac{3}{2\sqrt{y}}$$

$$u_x = \frac{3}{2}\sqrt{x}\, u_\xi, \qquad u_y = \frac{3}{2\sqrt{y}} u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{9}{4}x\, u_{\xi\xi} + \frac{3}{4\sqrt{x}} u_\xi$$

$$u_{yy} = \frac{9}{4y} u_{\eta\eta} - \frac{3}{4\sqrt{y^3}} u_\eta$$

$$\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\right) = 0$$

$$u(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x^3} + 3i\sqrt{y}\right) + \psi\left(\sqrt{x^3} - 3i\sqrt{y}\right)$$

(Смотри предыдущий пример.)

2. $x < 0$ и $y > 0$, то $dy = \pm\sqrt{-xy}dx$. Общие интегралы уравнения имеют вид

$$\sqrt{-x^3} + 3\sqrt{y} = C_1, \ \ \sqrt{-x^3} - 3\sqrt{y} = C_2.$$

Замена переменных:

$$\xi = \sqrt{-x^3} + 3\sqrt{y}, \qquad \eta = \sqrt{-x^3} - 3\sqrt{y}$$

приводит к каноническому уравнению

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u(x,y) = \varphi\left(\sqrt{-x^3} + 3\sqrt{y}\right) + \psi\left(\sqrt{-x^3} - 3\sqrt{y}\right).$$