Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется геометрическая фигура, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0. \tag{1}$$

При этом предполагается, что по крайней мере один из коэффициентов a_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ отличен от нуля.

Любая плоскость пересекает поверхность второго порядка по кривой второго порядка (включая их вырожденные случаи). Различают шесть типов поверхностей второго порядка:

1. сфера;
2. эллипсоиды;
3. гиперболоиды;
4. параболоиды;
5. конусы;
6. цилиндры.

Вышеперечисленные фигуры показаны на рисунках 1-8.

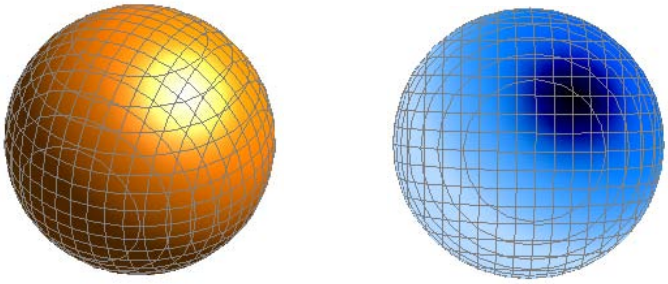


Рис. 1. Сферы.

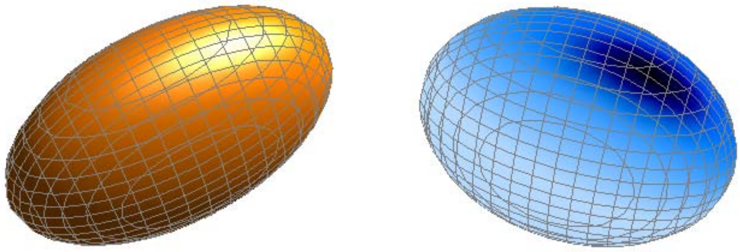


Рис. 2. Эллипсоиды.

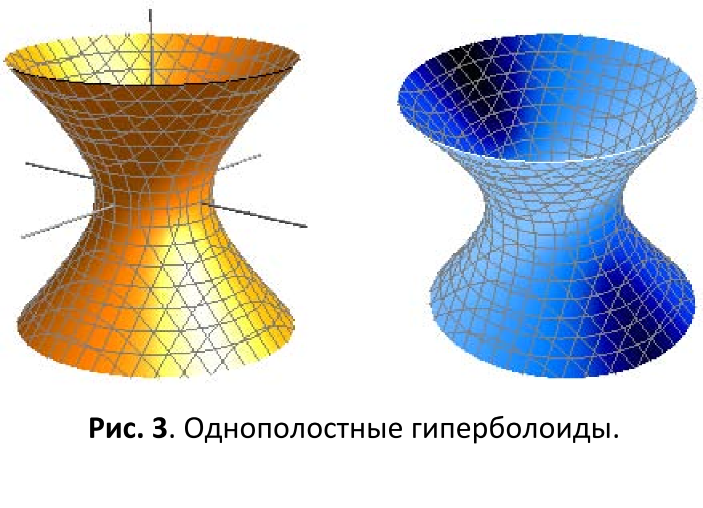


Рис. 3. Однополостные гиперболоиды.

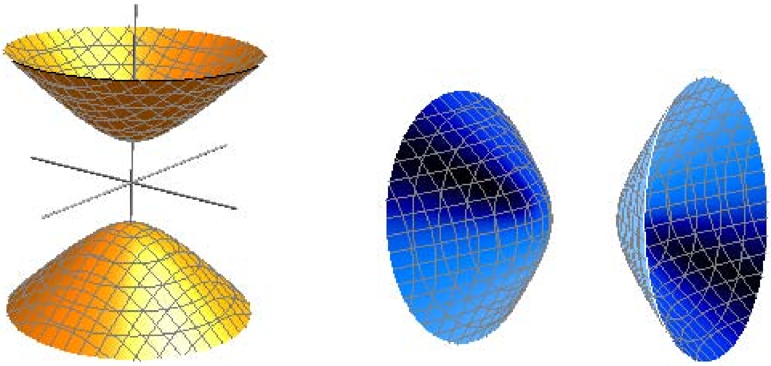


Рис. 4. Двухполостные гиперболоиды.

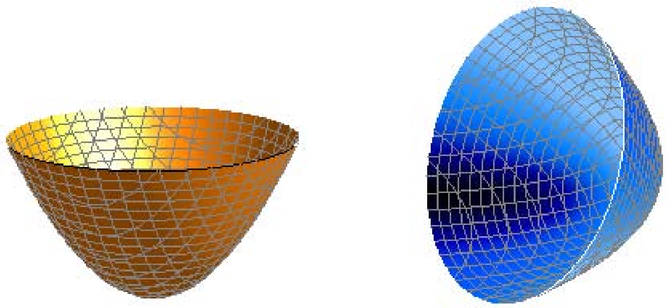


Рис. 5. Эллиптические параболоиды.

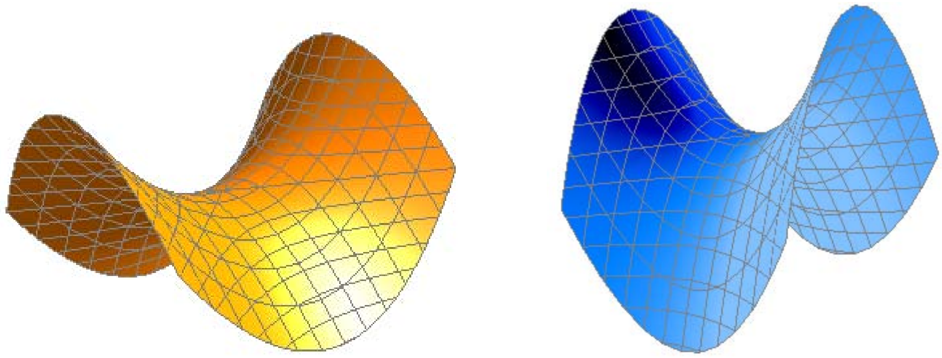


Рис. 6. Гиперболические параболоиды.

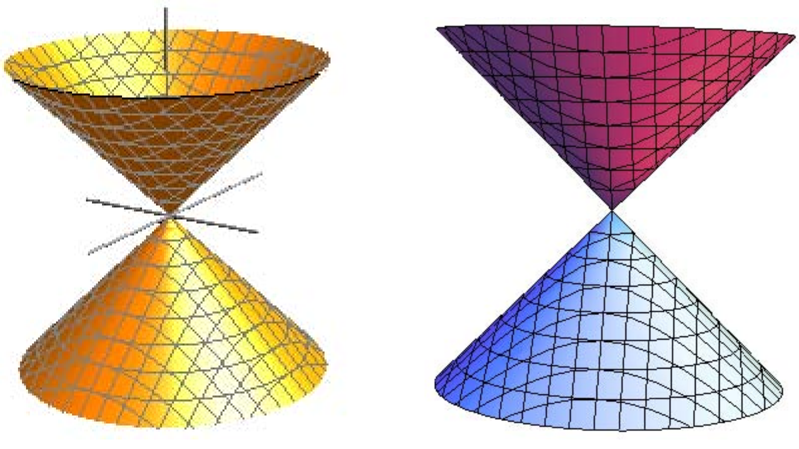


Рис. 7. Конусы.

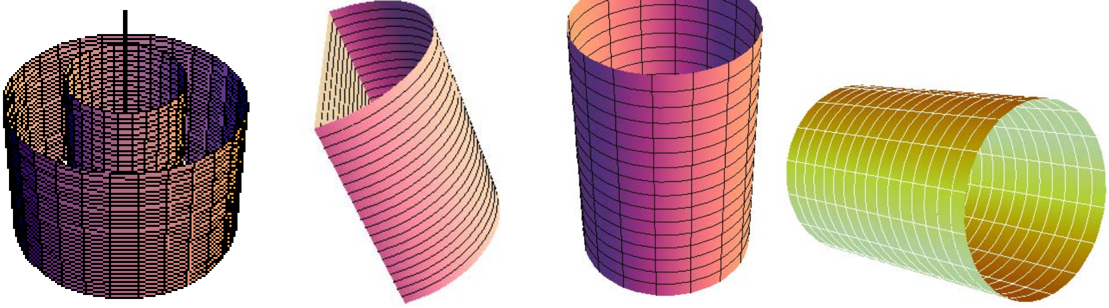


Рис. 8. Цилиндры.

Сфера

Сфера представляет собой геометрическое место точек пространства, равноудалённых от некоторой точки, называемой **центром** сферы. В декартовой системе координат сфера описывается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \qquad (2)$$

где x_0, y_0, z_0 - координаты центра сферы; R – радиус сферы.

Сфера является телом, образованным вращением полуокружности вокруг своего диаметра.

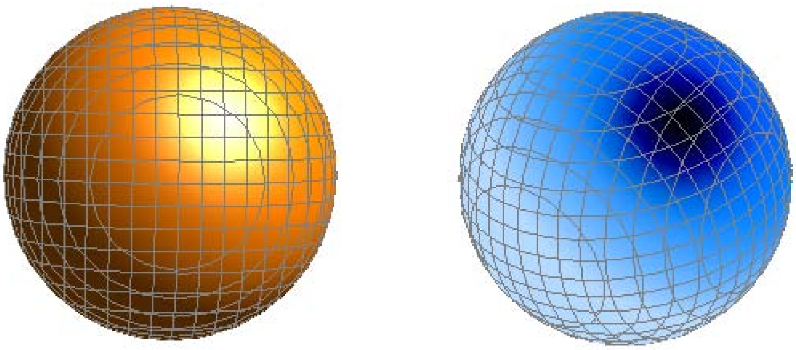


Рис. 9. Сфера – идеально симметричная фигура. Ее поворот вокруг любой оси, проходящей через центр, сохраняет форму фигуры и ее местоположение.

Если центр сферы расположен в начале декартовой системы координат, то уравнение этой поверхности имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (3)$$

и называется **каноническим уравнением сферы**, а соответствующая система координат называется канонической.

Параметрические уравнения сферы с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + R\sin\theta\cos\varphi\,, \\ y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi\,, \\ z = z_0 + R\cos\theta, \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \theta < 2\pi\right). \qquad (4)$$

Легко показать, что сечение сферы произвольной плоскостью есть окружность.

Эллипсоиды

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (5)$$

Это равенство называется **каноническим** уравнением эллипсоида. Величины a, b и c называются **полуосями** эллипсоида.

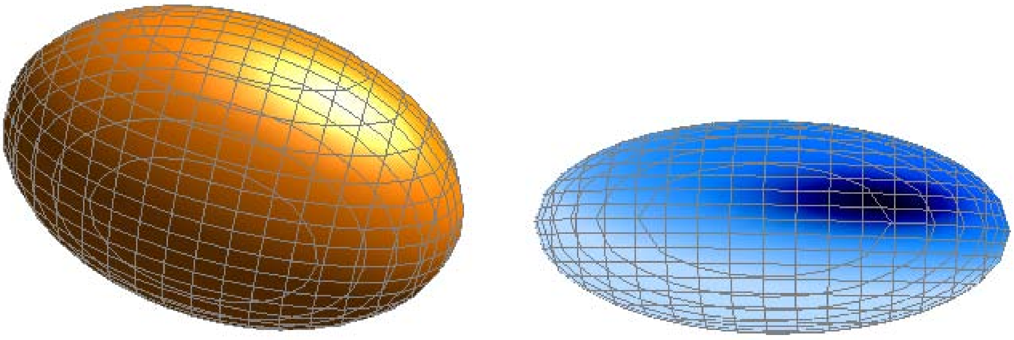


Рис. **10**. Эллипсоиды.

Эллипсоид может быть получен равномерным сжатием или растяжением сферы вдоль трёх взаимно перпендикулярных осей. Говоря иначе, уравнение эллипсоида получается из уравнения сферы масштабным преобразованием

$$x\to\frac{R}{a}x,\ \ y\to\frac{R}{b}y,\ \ z\to\frac{R}{c}z. \quad (6)$$

Если центр эллипсоида находится в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1. \quad (7)$$

Параметрические уравнения такого эллипсоида имеют вид

$$\begin{cases}x=x_0+a\sin\theta\cos\phi,\\ y=y_0+b\sin\theta\sin\phi,\\ z=z_0+c\cos\theta,\end{cases}\quad \left(-\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le\theta<2\pi\right). \quad (8)$$

Эллипсоид, все оси которого различны, называется **трехосным**. Можно показать, что сечением эллипсоида произвольной плоскостью является эллипс.

Если какие-либо две оси эллипсоида одинаковы, то эллипсоид называют **сфероидом**.

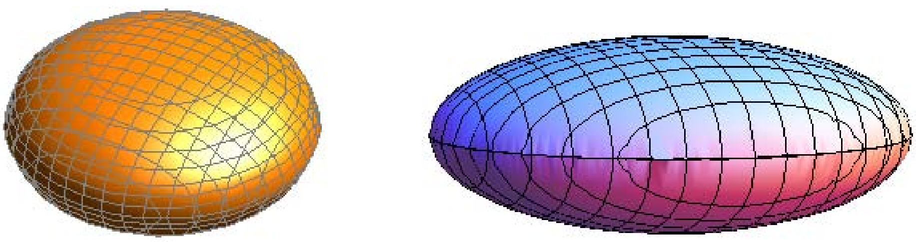


Рис. **11**. Сфероиды.

В этом случае эллипсоид является телом, образованным вращением половины дуги эллипса вокруг оси, соединяющей концы этой дуги. Пусть, например, $b=c$. Тогда эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

образован вращением верхней половины дуги эллипса, представленного на рисунке 12, вокруг оси $0x$.

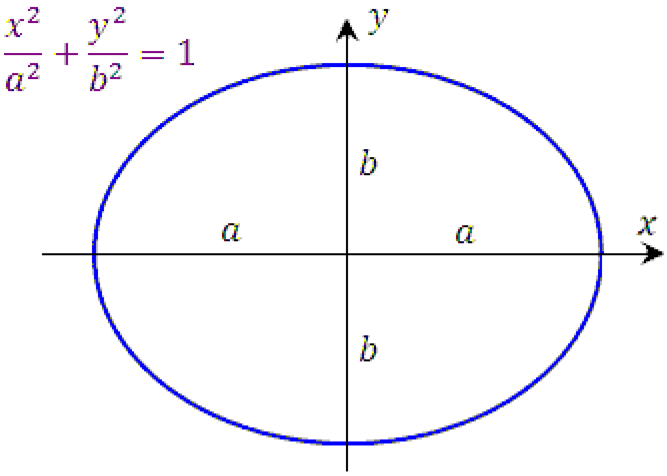


Рис. **12**. Эллипс с полуосями a и b, расположенный в плоскости $x0y$.

Если $a = b = c$, то эллипсоид вырождается в сферу радиуса a.

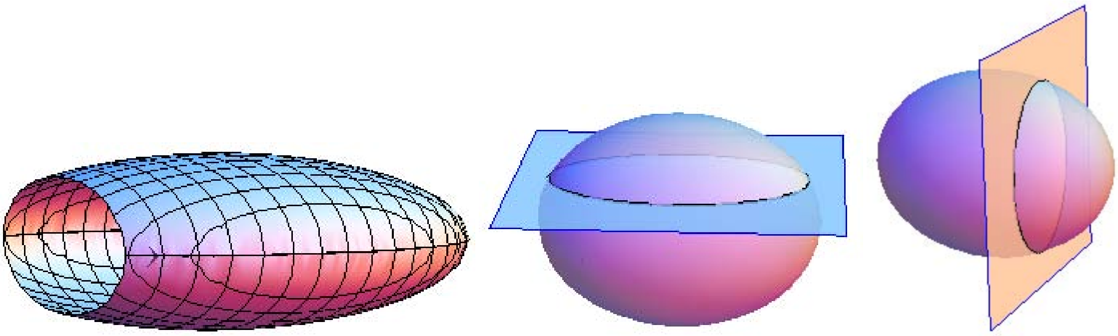


Рис. **13**. Сечение эллипсоида произвольной плоскостью дает эллипс.

Гиперболоиды

Гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат описывается одним из уравнений:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{9}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{10}$$

Величины a, b и c называются **полуосями** гиперболоида.

Уравнение (9) определяет **однополостный** гиперболоид, графические примеры которых представлены на рисунке 14.

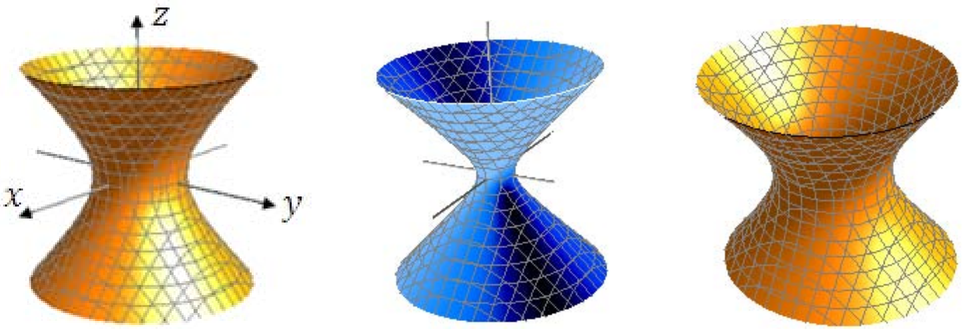


Рис. **14**. Однополостные гиперболоиды.

Сечениями однополостных гиперболоидов плоскостями являются эллипсы (в частности, окружности) и гиперболы.

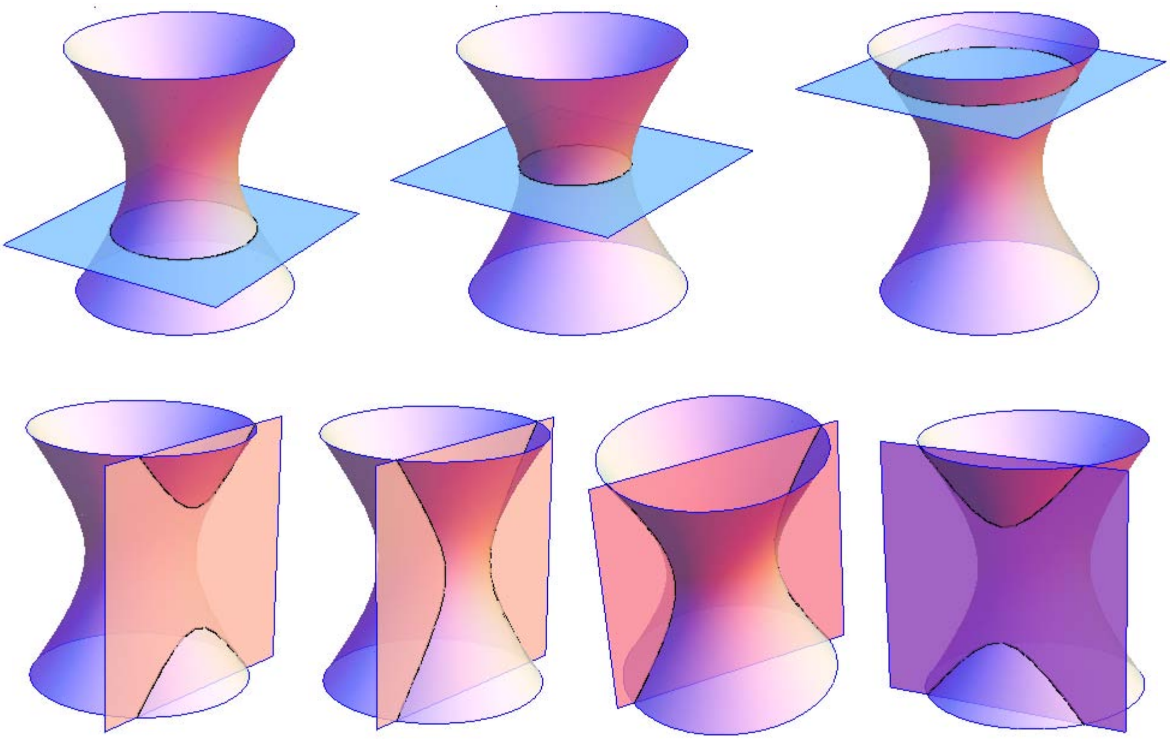


Рис. **15**. Сечения однополостных гиперболоидов плоскостями.

Уравнение (10) определяет **двухполостный гиперболоид**. Соответствующие графические иллюстрации представлены на рисунке 16.

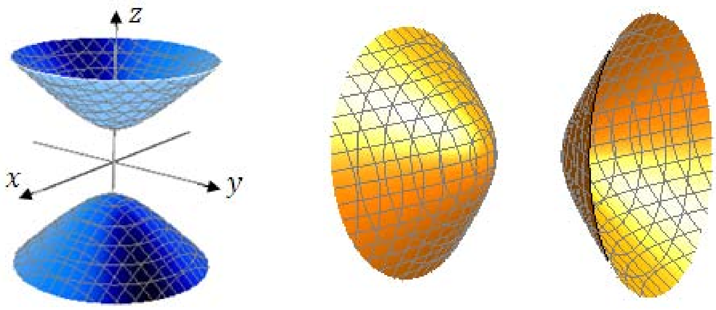
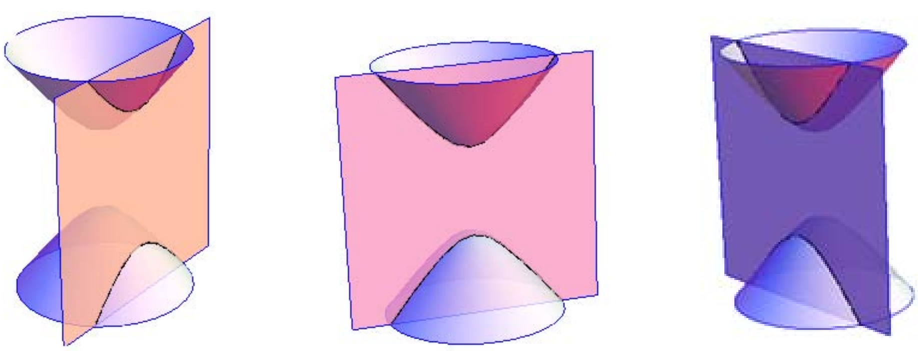


Рис. **16**. Двухполостные гиперболоиды.

Сечениями двухполостных гиперболоидов плоскостями являются эллипсы и гиперболы.



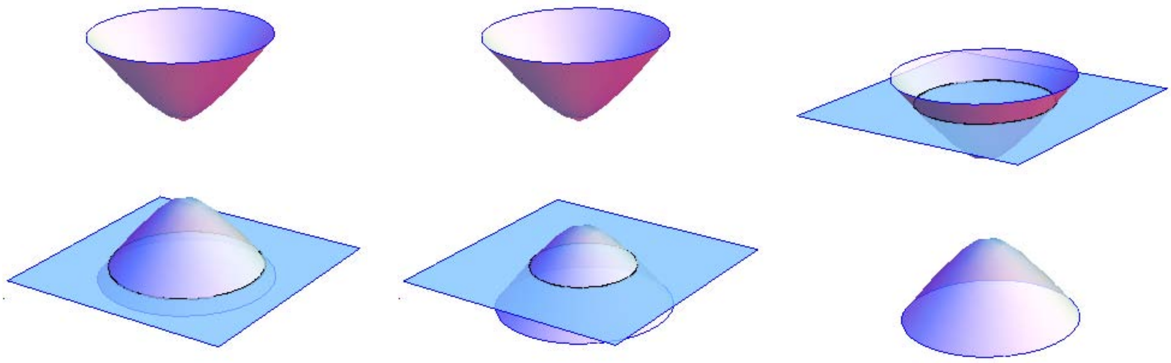


Рис. **17**. Сечения двухполостных гиперболоидов плоскостями.

Если $a = b$, то гиперболоиды, определяемые уравнениями (9) и (10), являются поверхностями **вращения**. Например, однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

образован вращением одной из ветвей гиперболы, представленной на рисунке 18, вокруг оси $0z$.

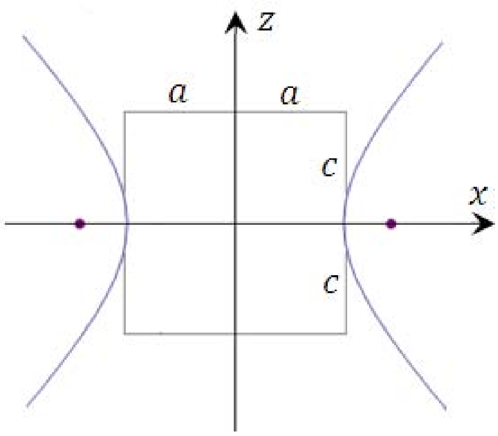


Рис. **18**. Гипербола с полуосями a и c, расположенная в плоскости $x0z$.

Двухполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

образован вращением этой гиперболы вокруг оси $0x$.

Отметим, что

- однополостный гиперболоид вращения может быть получен вращением прямой вокруг некоторой скрещивающейся с ней прямой;
- двухполостный гиперболоид вращения является геометрическим местом точек, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек, называемых **фокусами гиперболоида**, есть величина постоянная.

Параболоиды

Параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат описывается одним из уравнений:

$$z = 2px^2 + 2qy^2, \qquad (11)$$

или

$$z = 2px^2 - 2qy^2, \tag{12}$$

где $pq > 0$.

Параболоид представляет собой незамкнутую нецентральную поверхность (не имеющую центра симметрии).

Уравнение (11) описывает **эллиптические параболоиды**.

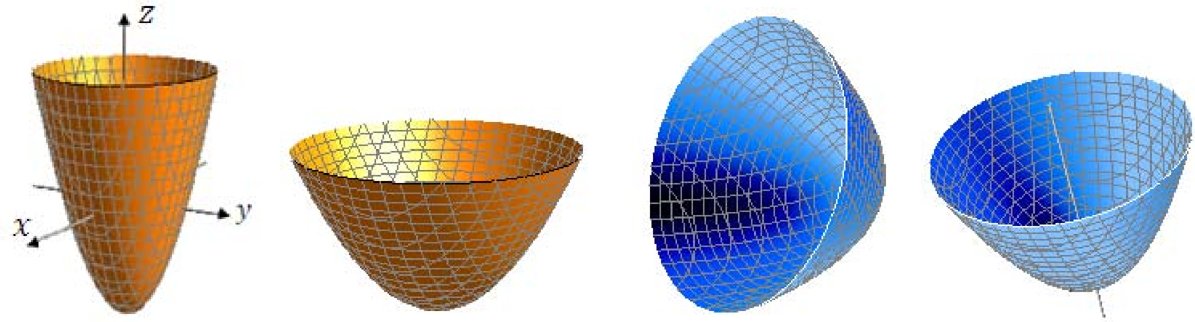


Рис. **19**. Эллиптические параболоиды.

Если $p = q$, то параболоид (11) называется **круговым** и является телом вращения, образованным вращением одной ветви параболы

$$z = 2px^2$$

вокруг оси $0z$.

Сечениями эллиптических параболоидов плоскостями являются эллипсы и параболы.

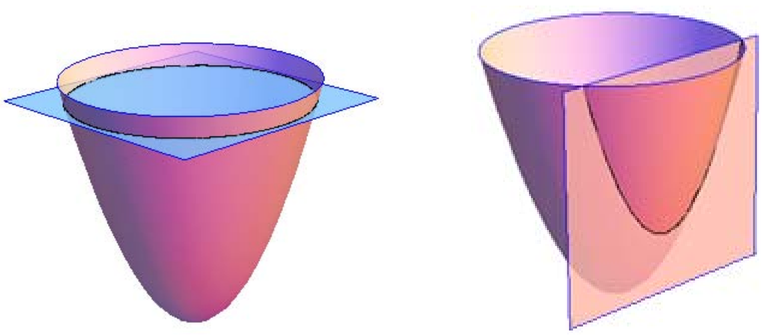


Рис. **20**. Сечения эллиптических параболоидов.

Уравнение (12) описывает **гиперболический параболоид**.

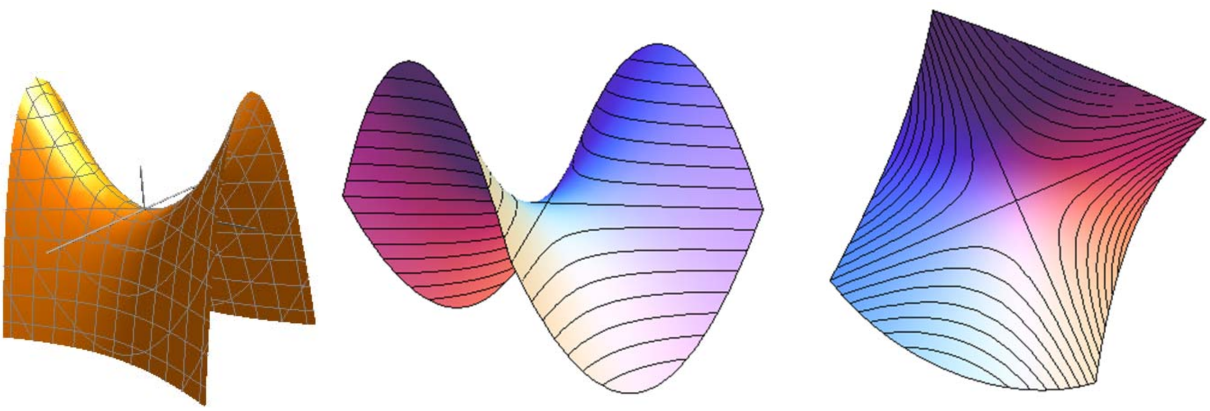


Рис. **21**. Гиперболические параболоиды.

Сечениями гиперболических параболоидов являются гиперболы и параболы.

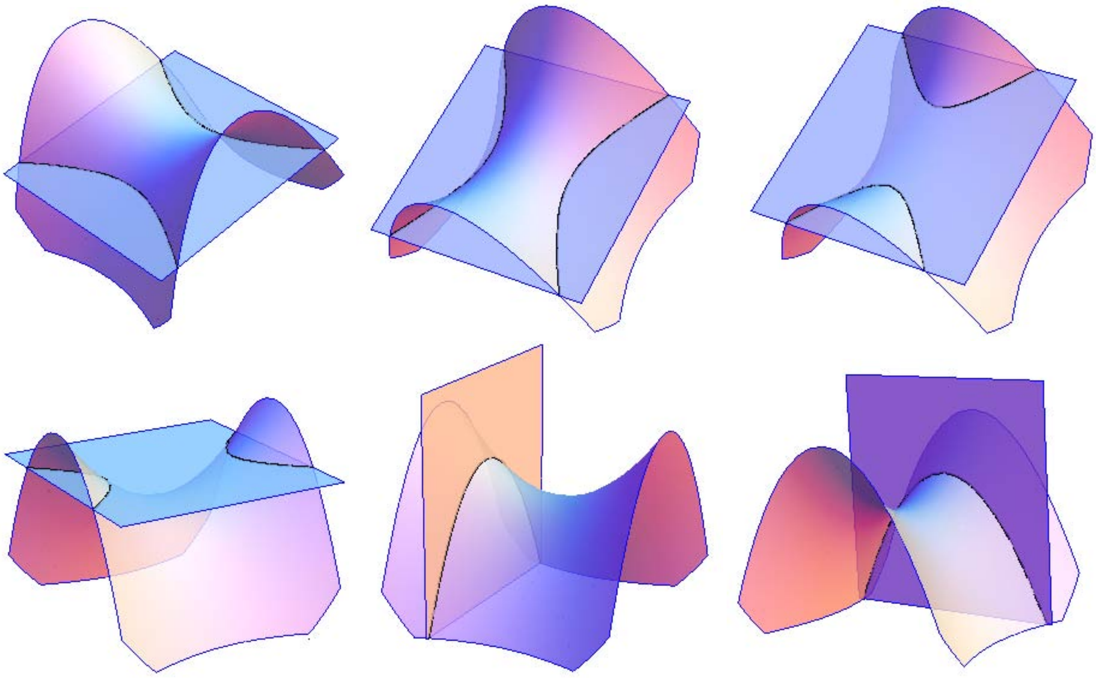


Рис. **22**. Сечения гиперболических параболоидов.

Если один из коэффициентов p или q равен нулю, то параболоид (12) называется **цилиндрическим**.

Конусы

Каноническое уравнение конуса второго порядка можно представить в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}. \tag{13}$$

В этом случае точка $O(0,0,0)$ является вершиной конуса, а ось $0z$ – осью конуса.

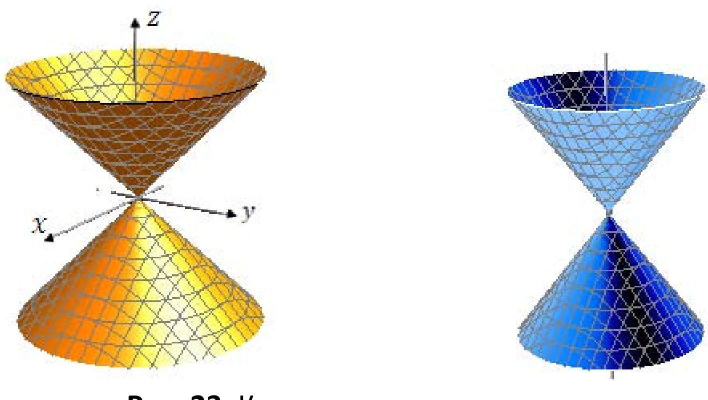


Рис. **23**. Конусы второго порядка.

Если $a=b$, то конус (13) называется **круговым**. Произвольный конус может быть получен из кругового равномерным растяжением или сжатием вдоль оси $0y$. Любая плоскость, не проходящая через ось конуса, пересекает его по кривой второго порядка. Типичные сечения конуса плоскостями показаны на рисунках 24-26.

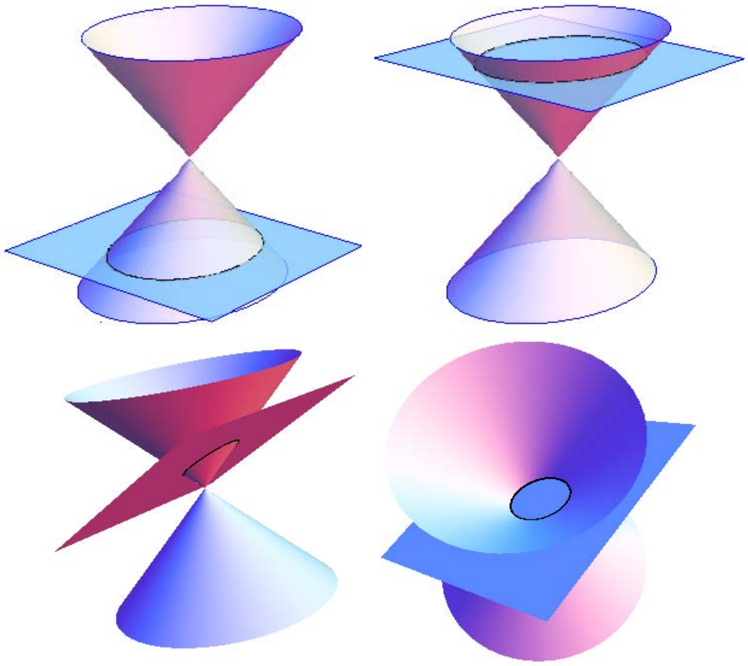


Рис. **24**. Примеры плоскостей, пересекающих конус по эллипсу или окружности.

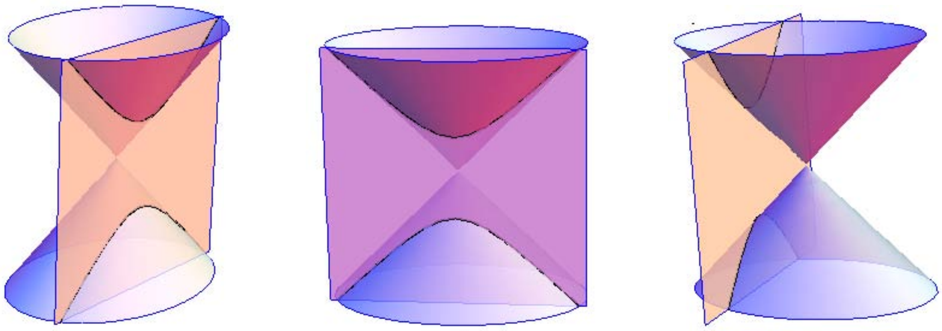


Рис. **25**. Примеры плоскостей, пересекающих конус по гиперболе.

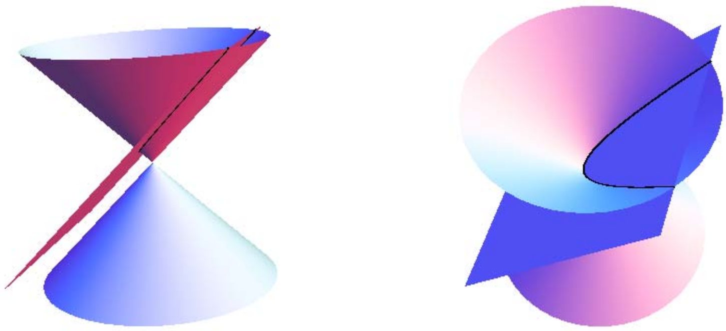


Рис. **26**. Плоскость, проходящая параллельно образующей конуса, пересекает его по параболе.

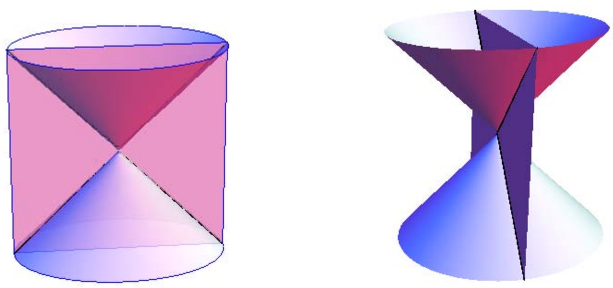


Рис. **27**. Плоскость, проходящая через ось конуса, пересекает его по паре прямых.

Прямая, проходящая через любую точку конуса и его вершину, целиком принадлежит конусу. Круговой конус может быть получен вращением наклонной прямой, проходящей через его вершину, вокруг оси конуса.

Цилиндры

Если направляющая цилиндрической поверхности задаётся кривой второго порядка, то такая поверхность называется цилиндрической поверхностью второго порядка.

Эллиптический цилиндр:	Параболический цилиндр:	Гиперболический цилиндр:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Поверхности вращения

Поверхность S называется поверхностью вращения вокруг оси OZ, если для любой точки этой поверхности окружность, проходящая через эту точку в плоскости с центром в и радиусом , целиком принадлежит этой поверхности.