Дифференцирование функций

Проверьте уровень своего мастерства, ориентируясь на классические сборники задач, составленные выдающимися Педагогами-Математиками.

Использованы следующие источники информации:

1. Берман Г.Н. - Сборник задач по курсу математическому анализа.
2. Под редакцией Демидовича Б.П. - Задачи и упражнения по мат. анализу (для втузов).

Разные функции

В задачах 667—770 продифференцировать данные функции.

667. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$.

668. $y=a\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{k}+b\right)$.

669. $y=\sqrt{1+\sqrt{2px}}$.

670. $y=\mathrm{arctg}\,(x^2-3x+2)$.

671. $y=\lg(x-\cos x)$.

672. $y=3\cos^2 x-\cos^3 x$.

673. $y=5\,\mathrm{tg}\frac{x}{5}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$.

674. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$.

675. $y=\sin\frac{x}{2}\sin 2x$.

676. $y=\sin x\, e^{\cos x}$.

677. $y=x^5\sqrt[3]{x^6-8}$.

678. $y=e^{-x^2}\ln x$.

679. $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

680. $y=\mathrm{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

681. $y=e^{2x+3}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$.

682. $y=\frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$.

683. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

684. $y=\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

685. $y=\sin^2\frac{x}{3}\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$.

686. $y=\frac{\sqrt[6]{4x^5+2}}{3x^4}$.

687. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

688. $y=x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

689. $y=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}^4 x}$.

690. $y=\cos 2x\ln x$.

691. $y=\frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

692. $y=\arcsin(n\sin x)$.

693. $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$.

694. $y=\frac{1}{18}\sin^6 3x-\frac{1}{24}\sin^8 3x$.

695. $y=x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

696. $y=\cos\frac{\arcsin x}{2}$.

697. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

698. $y=\arccos\sqrt{1-3x}$.

699. $y=\sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$.

700. $y=\log_3(x^2-\sin x)$.

701. $y=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

702. $y=\ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

703. $y=x\arcsin(\ln x)$.

704. $y=\mathrm{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

705. $y=\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$.

706. $y=0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\sin 0{,}8x\right)^2$.

707. $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$.

708. $y=\frac{1}{\mathrm{tg}^2 2x}$.

709. $y=\ln\mathrm{arctg}\frac{1}{1+x}$.

710. $y=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

711. $y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$. 712. $y=x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

713. $y=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. 714. $y=x^3 \operatorname{arctg} x^3$.

715. $y=\frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$. 716. $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

717. $y=\frac{\arcsin 4x}{1-4x}$. 718. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$.

719. $y=\ln\frac{1-e^x}{e^x}$. 720. $y=10^{x \operatorname{tg} x}$.

721. $y=\sin^2 x \sin x^2$. 722. $y=\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

723. $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$. 724. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

725. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$. 726. $y=\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

727. $y=\frac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cos x}$. 728. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

729. $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\arccos\frac{x}{a}$.

730. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.

731. $y=\frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

732. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

733. $y=e^{ax}(a\sin x-\cos x)$. 734. $y=xe^{1-\cos x}$.

735. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$. 736. $y=e^x(\sin 3x-3\cos 3x)$.

737. $y=3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.

738. $y=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$. 739. $y=2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2+4x-x^2}$.

740. $y=\ln(e^x\cos x+e^{-x}\sin x)$.

741. $y=\frac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$. 742. $y=\frac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

743. $y=e^x\sin x\cos^3 x$. 744. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$.

745. $y=x-\ln\left(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}\right)$.

746. $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$. 747. $y=\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$.

748. $y=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg} x\ln(1+\sin x)-x$.

749. $y=2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)-6\arcsin 2x.$

750. $y=\frac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg} x.$

751. $y=\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$

752. $y=\ln\left(x\sin x\sqrt{1-x^2}\right).$ **753.** $y=x\sqrt{1+x^2}\sin x.$

754. $x=\frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}.$ **755.** $y=\sqrt{\left(1+xe^{\sqrt{x}}\right)^3}.$

756. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2-\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln x+1}.$

757. $y=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$

758. $y=\frac{xe^x\operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}.$ **759.** $y=\frac{(1-x^2)\,e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}.$

760. $y=x\sqrt{(x^2+a^2)^3}+\frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right).$

761. $y=x(\arcsin x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x.$

762. $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$ • **763.** $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$

764. $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

765. $y=\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

766. $y=(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}.$ **767.** $y=\sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}.$

768. $y=\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$

769. $y=\arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$

770. $y=-\frac{x}{1+8x^3}+\frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}.$

771. Доказать, что функция $y=\ln\frac{1}{1+x}$ удовлетворяет соотношению $xy'+1=e^y$.

772. Доказать, что функция

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$$

удовлетворяет соотношению $2y=xy'+\ln y'$.

773. Доказать, что функция $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет соотношению $(1-x^2)y'-xy=1$.

774*. Вычислить суммы

а) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$;

б) $2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}$.

Обратные функции

775. Допустим, что правило дифференцирования степенной функции установлено только для целого положительного показателя. Вывести формулу дифференцирования корня, используя правило дифференцирования обратной функции.

776. $x=e^{\arcsin y}$; найти выражение для $\frac{dy}{dx}$ через y; через x.

777. $t=2-3s+s^3$; выразить $\frac{ds}{dt}$ через s.

778. $u=\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; проверить соотношение $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=1$.

779. Зная, что функции $\arcsin\sqrt{x}$ и $\sin^2 x$ — взаимно обратные функции и что $(\sin^2 x)'=\sin 2x$, найти $(\arcsin\sqrt{x})'$.

780. Обозначим функцию, обратную степенно-показательной функции $y=x^x$, символом $\alpha(x)$, т. е. положим, что из $y=x^x$ следует $x=\alpha(y)$. Найти формулу для производной от функции $y=\alpha(x)$.

781. Функции, обратные гиперболическим, обозначаются символами $\mathrm{Arsh}\,x$, $\mathrm{Arch}\,x$, $\mathrm{Arth}\,x$. Найти производные этих функций.

782. $s=te^{-t}$; найти $\frac{dt}{ds}$.

783. $y=\frac{1-x^4}{1+x^4}$. Выразить $\frac{dx}{dy}$ через x; через y. Показать справедливость соотношения $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$.

784. $x=y^3-4y+1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

785. $t=\arcsin 2^s$. Найти выражение для $\frac{ds}{dt}$ через s; через t.

786. Проверить справедливость соотношения $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$, если x и y связаны зависимостью:

1) $y=x^2+ax+b$; 2) $y=x^{-n}$; 3) $y=\ln(x^2-1)$.

Функции, заданные неявно

787. Убедиться дифференцированием в том, что производные от обеих частей равенства $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ тождественно равны между собой.

788. Убедиться дифференцированием в том, что производные от обеих частей равенства

$$\frac{2\sin^2 x-1}{\cos x}+\frac{\cos x(2\sin x+1)}{1+\sin x}=\operatorname{tg} x$$

тождественно равны друг другу.

789. Чему равен угловой коэффициент касательной, проведенной к эллипсу $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ в точке $(1, \sqrt{2})$?

790. Чему равен угловой коэффициент касательной к гиперболе $xy=a$ $(a \neq 0)$, проведенной в точке $(a, 1)$?

791. Чему равен угловой коэффициент касательной к окружности $(x-1)^2+(y+3)^2=17$, проведенной в точке $(2, 1)$?

В задачах 792—812 найти производные функций y, заданных неявно.

792. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

793. $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$.

794. $x^3+y^3-3axy=0$.

795. $y^2\cos x=a^2\sin 3x$.

796. $y^3-3y+2ax=0$.

797. $y^2-2xy+b^2=0$.

798. $x^4+y^4=x^2y^2$.

799. $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$.

800. $\sin(xy)+\cos(xy)=\operatorname{tg}(x+y)$.

801. $2^x+2^y=2^{x+y}$.

802. $2y\ln y=x$.

803. $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

804. $x^y=y^x$.

805. $y=\cos(x+y)$.

806. $\cos(xy)=x$.

807. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

808. $y=1+xe^y$.

809. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$.

810. $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

811. $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

812. $y=x+\operatorname{arctg} y$.

813. Убедиться в том, что функция y, определенная уравнением $xy-\ln y=1$, удовлетворяет также соотношению

$$y^2+(xy-1)\frac{dy}{dx}=0.$$

Применения производной

814. На параболе $y=x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1=1$, $x_2=3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?

815. Через фокус параболы проведена хорда, перпендикулярная к оси параболы. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Доказать, что эти касательные пересекаются под прямым углом.

816. Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $y=1/x$ в точке с абсциссой $x=-1/2$. Найти подкасательную и поднормаль.

817. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $y=\frac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

818. Показать, что для гиперболы $xy=a$ площадь треугольника, образованного любой касательной и координатными осями, равна квадрату полуоси гиперболы.

819. Точка движется по прямой так, что ее расстояние s от начального пункта через t с равно $s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$.

а) В какие моменты точка была в начальном пункте? б) В какие моменты ее скорость равна нулю?

820. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону

$$s=1+t+t^2;$$

s выражено в сантиметрах, t — в секундах. Определить кинетическую энергию $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ тела через 5 с после начала движения.

821. Угол α поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\alpha=t^2+3t-5$. Найти угловую скорость при $t=5$ с.

822. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Найти угловую скорость ω через 32 с после начала движения.

823. Угол θ, на который поворачивается колесо через t с равен $\theta=at^2-bt+c$, где a, b, c — положительные постоянные. Найти угловую скорость ω движения колеса. В какой момент времени угловая скорость будет равна нулю?

824. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента времени $t=0$, дается формулой

$$Q=2t^2+3t+1 \text{ (Кл)}.$$

Найти силу тока в конце пятой секунды.

825. На линии $y=x^2(x-2)^2$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

826. Показать, что линия $y=x^5+5x-12$ во всех своих точках наклонена к оси Ox под острым углом.

827. В каких точках линии $y=x^3+x-2$ касательная к ней параллельна прямой $y=4x-1$.

828. Составить уравнения касательных к линии $y=x-\frac{1}{x}$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

829. Составить уравнение касательной к линии $y=x^3+3x^2-5$, перпендикулярной к прямой $2x-6y+1=0$.

В задачах 830—833 составить уравнения касательной и нормали к данным линиям.

830. $y=\sin x$ в точке $M(x_0, y_0)$.

831. $y=\ln x$ в точке $M(x_0, y_0)$.

832. $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ в точке с абсциссой $x=2a$.

833. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ (циссоида) в точке $M(x_0, y_0)$.

834. Показать, что подкасательная к параболе n-го порядка $y=x^n$ равна $\frac{1}{n}$-й части абсциссы точки касания. Дать способ построения касательной к линии $y=x^n$.

835. Найти подкасательные и поднормали к линии $y=x^3$; $y^2=x^3$; $xy^2=1$. Дать способы построения касательных к этим линиям.

836. Составить уравнения касательной и нормали к параболе $x^2=4ay$ в ее точке (x_0, y_0); показать, что касательная в точке с абсциссой $x_0=2am$ имеет уравнение $x=\frac{y}{m}+am$.

837. Хорда параболы $y=x^2-2x+5$ соединяет точки с абсциссами $x_1=1$, $x_2=3$. Составить уравнение касательной к параболе, параллельной хорде.

838. Составить уравнение нормали к линии $y=\frac{x^3-3x+6}{x^2}$ в точке с абсциссой $x=3$.

839. Составить уравнение нормали к линии $y=-\sqrt{x}+2$ в точке ее пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

840. Составить уравнение нормали к параболе $y=x^2-6x+6$, перпендикулярной к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

841. Показать, что нормали к линии $y=x^2-x+1$, проведенные в точках с абсциссами $x_1=0$, $x_2=-1$ и $x_3=5/2$, пересекаются в одной точке.

842. В точках пересечения прямой $x-y+1=0$ и параболы $y=x^2-4x+5$ проведены нормали к параболе. Найти площадь треугольника, образованного нормалями и хордой, стягивающей указанные точки пересечения.

843. Показать, что касательные, проведенные к гиперболе $y=\frac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

844. Провести касательную к гиперболе $y=\frac{x+9}{x+5}$ так, чтобы она прошла через начало координат.

845. На линии $y=\frac{1}{1+x^2}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

846. Найти уравнение касательной к линии

$$x^2(x+y)=a^2(x-y)$$

в начале координат.

847. Доказать, что касательные к линии $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$, проведенные в точках, для которых $y=1$, пересекаются в начале координат.

848. Провести нормаль к линии $y=x\ln x$ параллельно прямой $2x-2y+3=0$.

849. Найти расстояние от начала координат до нормали к линии $y=e^{2x}+x^2$, проведенной в точке $x=0$.

850. Построить график функции $y=\sin(2x-\pi/3)$ и найти точку пересечения касательных к графику, проведенных в точках с абсциссой $x_1=0$ и $x_2=5\pi/12$.

851. Показать, что у линии $y=ae^{bx}$ (a и b — постоянные) подкасательная во всех точках имеет постоянную длину.

852. Показать, что поднормаль линии $y=x\ln(cx)$ (c — произвольная константа) в любой точке данной линии есть четвертая пропорциональная к абсциссе, ординате и сумме абсциссы и ординаты этой точки.

853. Показать, что любая касательная к линии $y=\frac{1}{2}\sqrt{x-4x^2}$ пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

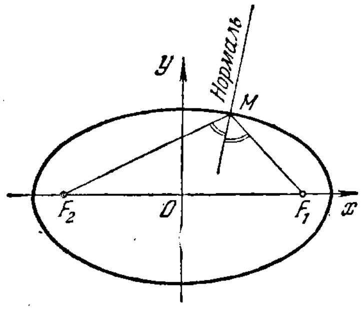

Рис. 21

854. Показать, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

855. Показать, что касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

856. Доказать, что нормаль к эллипсу в любой его точке делит пополам угол между фокальными радиусами (рис. 21) этой точки. Вывести отсюда способ построения касательной и нормали к эллипсу.

857. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$, перпендикулярных к прямой $2x+4y-3=0$.

858. Через начало координат проведена прямая, параллельная касательной к кривой в произвольной ее точке M. Найти геометрическое место точек P пересечения этой прямой с прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку M.

Найти такие геометрические места для а) параболы $y^2=2px$, б) логарифмики $y=\log_b x$, в) окружности $x^2+y^2=a^2$, г) трактрисы $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

В задачах 859 — 864 найти углы, под которыми пересекаются данные линии.

859. 1) $y=\frac{x+1}{x+2}$ и $y=\frac{x^2+4x+8}{16}$.

2) $y=(x-2)^2$ и $y=4x-x^2+4$.

860. 1) $x^2+y^2=8$ и $y^2=2x$.

2) $x^2+y^2-4x=1$ и $x^2+y^2+2y=9$.

861. $x^2-y^2=5$ и $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$.

862. $x^2+y^2=8ax$ и $y^2=\frac{x}{2a-x}$.

863. $x^2=4ay$ и $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

864. $y=\sin x$ и $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

865. Составить уравнение касательной и нормали к линии

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$$

в точке с абсциссой, равной a.

866. Доказать, что сумма отрезков на осях координат, образуемых касательной к кривой $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$, для всех ее точек равна a.

867. Показать, что отрезок касательной к астроиде $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину, равную a.

868. Доказать, что отрезок касательной к трактрисе

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2},$$

заключенный между осью ординат и точкой касания, имеет постоянную длину.

869. Показать, что для любой точки $M(x_0, y_0)$ равнобочной гиперболы $x^2-y^2=a^2$ отрезок нормали от точки M до точки пересечения с осью абсцисс равен полярному радиусу точки M.

870. Показать, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной в произвольной точке кривой $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$, пропорционален кубу абсциссы точки касания.

871. Доказать, что ордината любой точки линии $2x^2y^2-x^4=c$ (c — постоянная) есть средняя пропорциональная между абсциссой и разностью абсциссы и поднормали, проведенной к линии в той же точке.

872. Доказать, что у эллипсов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, у которых ось $2a$ — общая, а оси $2b$ различны (рис. 22), касательные, проведенные в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются в одной точке, лежащей на оси абсцисс. Воспользовавшись этим, указать простой прием построения касательной к эллипсу.

873. Показать, что линия $y=e^{kx}\sin mx$ касается каждой из линий $y=e^{kx}$, $y=-e^{kx}$ во всех общих с ними точках.

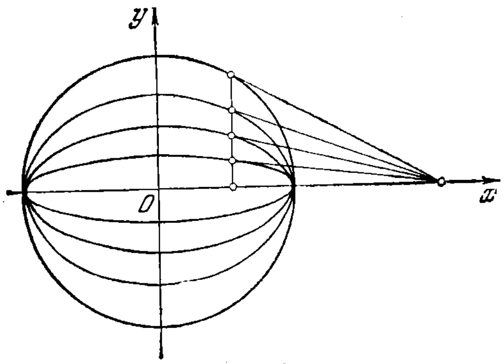

Рис. 22

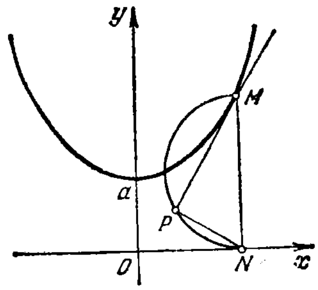

Рис. 23

874. Для построения касательной к цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ употребляется следующий способ: на ординате MN точки M, как на диаметре, строится полуокружность (рис. 23) и откладывается хорда $NP = a$; прямая MP будет искомой касательной. Доказать это.

Графическое дифференцирование

875. Измерение температуры обмотки электромагнита мотора при прохождении электрического тока дало следующие результаты:

Время t мин.	0	5	10	15	20	25
Температура $\theta°$ C	20	26	32,5	41	46	49
Время t мин.	30	35	40	45	50	55
Температура $\theta°$ C	52,5	54,5	56,5	58	59,5	61

Построить приближенный график непрерывной зависимости температуры от времени. Выполнив графическое дифференцирование, построить график скорости изменения температуры от времени.

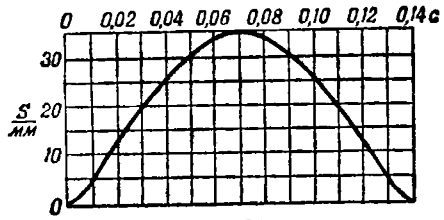

Рис. 24

876. На рис. 24 изображена кривая подъема впускного клапана цилиндра паровой машины (низкого давления). Построить кривую скорости графическим дифференцированием.

§ 3. Дифференциал. Дифференцируемость функции

Дифференциал

877. Найти приращение функции $y=x^2$, соответствующее приращению Δx независимой переменной. Вычислить Δy, если $x=1$ и $\Delta x=0,1$; $0,01$. Какова будет погрешность (абсолютная и относительная) значения Δy, если ограничиться членом, содержащим Δx в первой степени?

878. Найти приращение Δv объема v шара при изменении радиуса $R=2$ на ΔR. Вычислить Δv, если $\Delta R=0,5$; $0,1$; $0,01$. Какова будет погрешность значения Δv, если ограничиться членом, содержащим ΔR в первой степени?

879. Дана функция $y=x^3+2x$. Найти значения приращения и его линейной главной части, соответствующие изменению x от $x=2$ до $x=2,1$.

880. Какое приращение получает функция $y=3x^2-x$ при переходе независимой переменной от значения $x=1$ к значению $x=1,02$. Каково значение соответствующей линейной главной части? Найти отношение второй величины к первой.

881. Дана функция $y=f(x)$. В некоторой точке x дано приращение $\Delta x=0,2$; соответствующая главная часть приращения функции оказалась равной $0,8$. Найти производную в точке x.

882. Дана функция $f(x)=x^2$. Известно, что в некоторой точке приращению независимой переменной $\Delta x=0,2$ соответствует главная часть приращения функции $df(x)=-0,8$. Найти начальное значение независимой переменной.

883. Найти приращение и дифференциал функции $y=x^2-x$ при $x=10$ и $\Delta x=0,1$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, которые получаются при замене приращения дифференциалом. Сделать чертеж.

884. Найти приращение и дифференциал функции $y=\sqrt{x}$ при $x=4$ и $\Delta x=0,41$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности. Сделать чертеж.

885. $y=x^3-x$. При $x=2$ вычислить Δy и dy, давая Δx значения $\Delta x=1$; $\Delta x=0,1$; $\Delta x=0,01$. Найти соответствующие значения относительной погрешности $\delta=\frac{|\Delta y-dy|}{|\Delta y|}$.

886. Найти графически (сделав чертеж на миллиметровой бумаге в большом масштабе) приращение, дифференциал и вычислить абсолютную и относительную погрешности при замене приращения дифференциалом для функции $y=2^x$ при $x=2$ и $\Delta x=0,4$.

887. Сторона квадрата равна 8 см. Насколько увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить на: а) 1 см; б) 0,5 см; в) 0,1 см. Найти главную линейную часть приращения площади этого квадрата и оценить относительную погрешность (в процентах) при замене приращения его главной частью.

888. Известно, что при увеличении сторон данного квадрата на 0,3 см линейная главная часть приращения площади составляет 2,4 см^2. Найти линейную главную часть приращения площади, соответствующую приращению каждой стороны на: а) 0,6 см; б) 0,75 см; в) 1,2 см.

889. Найти дифференциал функции:

1) $0{,}25\sqrt{x}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{0{,}2}$; 3) $\frac{1}{0{,}5x^2}$; 4) $\frac{1}{4x^4}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{n\sqrt[3]{x}}$;

7) $\frac{\sqrt{x}}{a+b}$; 8) $\frac{p}{q^x}$; 9) $\frac{m-n}{x^{0,2}}$; 10) $\frac{m+n}{\sqrt{x}}$; 11) $(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$;

12) $\frac{x^3+1}{x^3-1}$; 13) $\frac{1}{1-t^2}$; 14) $(1+x-x^2)^3$; 15) $\operatorname{tg}^2 x$; 16) $5^{\ln \operatorname{tg} x}$;

17) $2^{-\frac{1}{\cos x}}$; 18) $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$; 19) $\frac{\cos x}{1-x^2}$;

20) $\sqrt{\arcsin x}+(\operatorname{arctg} x)^2$;

21) $3\arcsin x-4\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\arccos x-\frac{7}{2}\operatorname{arctg} x$;

22) $3^{-\frac{1}{x^2}}+3x^3-4\sqrt{x}$.

890. Вычислить значение дифференциала функции: 1) $y=\frac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$ при изменении независимой переменной от $x=\pi/6$ до $x=61\pi/360$; 2) $y=\cos^2\varphi$ при изменении φ от $60°$ до $60°30'$; 3) $y=\sin 2\varphi$ при изменении φ от $\pi/6$ до $61\pi/360$; 4) $y=\sin 3\varphi$ при изменении φ от $\pi/6$ до $61\pi/360$; 5) $y=\sin\frac{\theta}{3}$ при изменении θ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{61\pi}{360}$.

891. Найти приближенное значение приращения функции $y=\sin x$ при изменении x от $30°$ до $30°1'$. Чему равен $\sin 30°1'$?

892. Найти приближенное значение приращения функции $y=\operatorname{tg} x$ при изменении x от $45°$ до $45°10'$.

893. Найти приближенное значение приращения функции $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ при изменении x от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}$.

894. $\rho=k\sqrt{\cos 2\varphi}$; найти $d\rho$.

895. $y=3^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2^{2x}}+6^{\sqrt{x}}$. Вычислить dy при $x=1$ и $dx=0{,}2$.

896. Вычислить приближенно $\sin 60°3'$, $\sin 60°18'$. Сопоставить полученные результаты с табличными значениями.

897. Проверить, что функция $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ удовлетворяет соотношению $2x^2\,dy=(x^2y^2+1)\,dx$.

898. Проверить, что функция y, определенная уравнением $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, удовлетворяет соотношению $x(dy-dx)=y(dy+dx)$.

899. $f(x)=e^{0,1x(1-x)}$. Подсчитать приближенно $f(1,05)$.

900. Вычислить $\operatorname{arctg} 1,02$; $\operatorname{arctg} 0,97$.

901. Вычислить приближенно $\sqrt{\frac{2,037^2-3}{2,037^2+5}}$.

902. Вычислить приближенно $\arcsin 0,4983$.

903. Если длина тяжелой нити (провода, цепи) (рис. 25) равна $2s$, полупролет l, а стрелка провеса f, то имеет место приближенное равенство

$$s=l\left(1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

а) Подсчитать, какое изменение произойдет в длине нити при изменении ее стрелки провеса f на величину df.

б) Если учесть изменение длины провода ds (например, от изменения температуры или нагрузки), то как изменится при этом стрелка провеса?

904. Сравнить погрешности при нахождении угла по его тангенсу и по его синусу с помощью логарифмических таблиц, т. е. сопоставить точность нахождения угла x по формулам $\lg\sin x=y$ и $\lg\operatorname{tg} x=z$, если y и z даны с одинаковыми погрешностями.

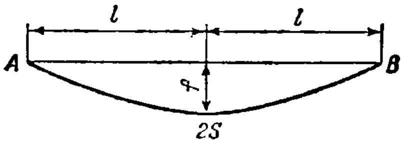

Рис. 25

905. При технических расчетах часто сокращают π и $\sqrt{g}$ (g — ускорение силы тяжести), когда одно из этих чисел стоит в числителе, а другое — в знаменателе. Какую относительную погрешность делают при этом?

906. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал:

1) $y=\sqrt[3]{x^2+5x}$, $x=t^3+2t+1$;

2) $s=\cos^2 z$, $z=\frac{t^2-1}{4}$; 3) $z=\operatorname{arctg} v$, $v=\frac{1}{\operatorname{tg} s}$;

4) $v=3^{-1/x}$, $x=\ln\operatorname{tg} s$; 5) $s=e^z$, $z=\frac{1}{2}\ln t$, $t=2u^2-3u+1$;

6) $y=\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}$, $u=\arcsin v$, $v=\cos 2s$.

Дифференцируемость функций

907. Функция $y=|x|$ непрерывна при любом x. Убедиться, что при $x=0$ она недифференцируема.

908. Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y=|x^3|$ при $x=0$.

909. Функция $f(x)$ определена следующим образом: $f(x)=1+x$ для $x\leqslant 0$; $f(x)=x$ для $0<x<1$; $f(x)=2-x$ для $1\leqslant x\leqslant 2$ и $f(x)=3x-x^2$ для $x>2$. Исследовать непрерывность $f(x)$ и выяснить существование и непрерывность $f'(x)$.

910. Функция $y=|\sin x|$ непрерывна при любом x. Убедиться, что при $x=0$ она недифференцируема. Имеются ли другие значения независимой переменной, при которых функция недифференцируема?

911. Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y=e^{-|x|}$ при $x=0$.

912. $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функция $f(x)$ дифференцируемой при $x=0$?

913. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функция $f(x)$ при $x=0$ непрерывной и дифференцируемой?

914. Дана функция $f(x)=1+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Показать, что при $x=1$ из приращения функции нельзя выделить линейную главную часть, и поэтому $f(x)$ при $x=1$ не имеет производной. Истолковать результат геометрически.

915. $f(x)=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функция $f(x)$ при $x=0$ непрерывной, дифференцируемой? Истолковать результат геометрически.

916. $f(x)=\frac{x}{1+e^{1/x}}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$. Будет ли функция $f(x)$ при $x=0$ непрерывной; дифференцируемой?

§ 4. Производная как скорость изменения (дальнейшие примеры)

Относительная скорость

917. Точка движется по архимедовой спирали $\rho=a\varphi$. Найти скорость изменения полярного радиуса ρ относительно полярного угла φ.

918. Точка движется по логарифмической спирали $\rho=e^{a\varphi}$. Найти скорость изменения полярного радиуса, если известно, что он вращается с угловой скоростью ω.

919. Точка движется по окружности $\rho=2r\cos\varphi$. Найти скорости изменения абсциссы и ординаты точки, если полярный радиус вращается с угловой скоростью ω. Полярная ось служит осью абсцисс, полюс — началом системы декартовых координат.

920. Круг радиуса R катится без скольжения по прямой. Центр круга движется с постоянной скоростью v. Найти скорости изменения абсциссы x и ординаты y для точки, лежащей на границе круга.

921. Барометрическое давление p изменяется с высотой h в соответствии с функцией $\ln\frac{p}{p_0}=ch$, где через p_0 обозначено нормаль-

423. $y=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$.

424. $y=\sqrt{\frac{3\sin x-2\cos x}{5}}$.

425. $y=\sqrt[3]{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^3 x}$.

426. $y=\sqrt{1+\arcsin x}$.

427. $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}-(\arcsin x)^3$.

428. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

429. $y=\sqrt{xe^x+x}$.

430. $y=\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}+\ln^5 x$.

431. $y=\sin 3x+\cos\frac{x}{5}+\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Решение. $y'=\cos 3x\cdot(3x)'-\sin\frac{x}{5}\left(\frac{x}{5}\right)'+\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})'=$

$=3\cos 3x-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}+\frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

432. $y=\sin(x^2-5x+1)+\operatorname{tg}\frac{a}{x}$.

433. $f(x)=\cos(\alpha x+\beta)$.

434. $f(t)=\sin t\sin(t+\varphi)$.

435. $y=\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

436. $f(x)=a\operatorname{ctg}\frac{x}{a}$.

437. $y=-\frac{1}{20}\cos(5x^2)-\frac{1}{4}\cos x^2$.

438. $y=\arcsin 2x$.

Решение. $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot(2x)'=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

439. $y=\arcsin\frac{1}{x^2}$.

440. $f(x)=\arccos\sqrt{x}$.

441. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

442. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1+x}{1-x}$.

443. $y=5e^{-x^2}$.

444. $y=\frac{1}{5^{x^2}}$.

445. $y=x^2 10^{2x}$.

446. $f(t)=t\sin 2^t$.

447. $y=\arccos e^x$.

448. $y=\ln(2x+7)$.

449. $y=\lg\sin x$.

450. $y=\ln(1-x^2)$.

451. $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$.

452. $y=\ln(e^x+5\sin x-4\arcsin x)$.

453. $y=\operatorname{arctg}(\ln x)+\ln(\operatorname{arctg} x)$.

454. $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln(\sqrt{x}+1)$.

Е. Разные функции

455.** $y=\sin^3 5x\cos^2\frac{x}{3}$.

456. $y=-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}$.

457. $y=-\frac{15}{4(x-3)^4}-\frac{10}{3(x-3)^3}-\frac{1}{2(x-3)^2}$.

458. $y=\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$.

459. $y=\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$.

460. $y=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

461. $y=\frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

462. $y=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$.

463. $y=\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$.

464. $y=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$.

465. $y=x^4(a-2x^3)^2$.

466. $y=\left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$.

467. $y=\frac{9}{5(x+2)^5}-\frac{3}{(x+2)^4}+\frac{2}{(x+2)^3}-\frac{1}{2(x+2)^2}$.

468. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$.

469. $y=\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

470. $z=\sqrt[3]{y+\sqrt{y}}$.

471. $f(t)=(2t+1)(3t+2)\sqrt[3]{3t+2}$.

472. $x=\frac{1}{\sqrt{2ay-y^2}}$.

473. $y=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)$.

474. $y=\frac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x-5)$.

475. $y=\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x}$.

476. $y=\operatorname{tg}^2 5x$.

477. $y=\frac{1}{2}\sin(x^2)$.

478. $y=\sin^2(t^3)$.

479. $y=3\sin x\cos^2 x+\sin^3 x$.

480. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$.

481. $y=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}+\frac{4}{3}\operatorname{ctg} x$.

482. $y=\sqrt{\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x}$.

483. $y=\arcsin x^2+\arccos x^2$.

484. $y=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\arccos x$.

485. $y=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2}$.

486. $y=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

487. $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

488. $y=\frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

489. $y=\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$.

490. $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$.

491. $y=\arcsin(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$.

492. $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$.

493. $y=\ln(\arcsin 5x)$.

494. $y=\arcsin(\ln x)$.

495. $y=\operatorname{arctg}\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

496. $y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$.

497. $y=3b^2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{b-x}}-(3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$.

498. $y=-\sqrt{2}\operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}-x$.

499. $y=\sqrt{e^{ax}}$.

500. $y=e^{\sin^2 x}$.

501. $F(x)=(2m\,a^{mx}+b)^p$.

502. $F(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t$.

503. $y=\frac{(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)\,e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}$.

504. $y=\frac{1}{10}e^{-x}(3\sin 3x-\cos 3x)$.

505. $y=x^n a^{-x^2}$.

506. $y=\sqrt{\cos x}\,a^{\sqrt{\cos x}}$.

507. $y=3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$.

508. $y=\ln(ax^2+bx+c)$.

509. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

510. $y=x-2\sqrt{x}+2\ln(1+\sqrt{x})$.

511. $y=\ln(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$.

512. $y=\frac{1}{\ln^2 x}$.

513. $y=\ln\cos\frac{x-1}{x}$.

514*. $y=\ln\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$.

515. $y=\ln\frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$.

516. $y=-\frac{1}{2\sin^2 x}+\ln\operatorname{tg} x$.

517. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

518. $y=\ln\ln(3-2x^3)$.

519. $y=5\ln^3(ax+b)$.

520. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$.

521. $y=\frac{m}{2}\ln(x^2-a^2)+\frac{n}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$.

522. $y=x\cdot\sin\left(\ln x-\frac{\pi}{4}\right)$.

523. $y=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

524. $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

525. $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$.

526. $y=2^{\arcsin 3x}+(1-\arccos 3x)^2$.

527. $y=3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}+\frac{1}{3}\frac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$.

528. $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2+\sqrt{3}}$.

529. $y=\operatorname{arctg}\ln x$.

530. $y=\ln\arcsin x+\frac{1}{2}\ln^2 x+\arcsin\ln x$.

531. $y=\operatorname{arctg}\ln\frac{1}{x}$.

532. $y=\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}$.

533. $y=\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$.

534. $y=\frac{3}{4}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

535. $f(x)=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

536. $f(x)=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

537. $y=\operatorname{sh}^3 2x$.

538. $y=e^{\alpha x}\operatorname{ch}\beta x$.

539. $y=\operatorname{th}^3 2x$.

540. $y=\ln\operatorname{sh}2x$.

541. $y=\operatorname{Arsh}\frac{x^2}{a^2}$.

542. $y=\operatorname{Arch}\ln x$.

543. $y=\operatorname{Arth}(\operatorname{tg}x)$.

544. $y=\operatorname{Arcth}(\sec x)$.

545. $y=\operatorname{Arth}\frac{2x}{1+x^2}$.

546. $y=\frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Arth}x+\frac{1}{2}x$.

547. $y=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)\operatorname{Arsh}x-\frac{1}{4}x\sqrt{1+x^2}$.

548. Найти y', если:

а) $y=|x|$;

б) $y=x|x|$.

Построить графики функций y и y'.

549. Найти y', если

$$y=\ln|x|\quad(x\neq 0).$$

550. Найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{при } x\leqslant 0,\\ e^{-x} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

551. Вычислить $f'(0)$, если

$$f(x)=e^{-x}\cos 3x.$$

Решение. $f'(x)=e^{-x}(-3\sin 3x)-e^{-x}\cos 3x$;

$f'(0)=e^0(-3\sin 0)-e^0\cos 0=-1$.

552. $f(x)=\ln(1+x)+\arcsin\frac{x}{2}$. Найти $f'(1)$.

553. $y=\operatorname{tg}^3\frac{\pi x}{6}$. Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}$.

554. Найти $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ для функций:

а) $f(x)=\sqrt{\sin(x^2)}$;

б) $f(x)=\arcsin\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$;

в) $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$;

г) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$;

д) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$.

555. Для функции $f(x)=e^{-x}$ найти $f(0)+xf'(0)$.

556. Для функции $f(x)=\sqrt{1+x}$ найти $f(3)+(x-3)f'(3)$.

557. Даны функции $f(x)=\operatorname{tg} x$ и $\varphi(x)=\ln(1-x)$, найти $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

558. Для функций $f(x)=1-x$ и $\varphi(x)=1-\sin\frac{\pi x}{2}$ найти $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$.

559. Доказать, что производная четной функции — функция нечетная, а производная нечетной функции — функция четная.

560. Доказать, что производная периодической функции есть функция также периодическая.

561. Показать, что функция $y=xe^{-x}$ удовлетворяет уравнению $xy'=(1-x)y$.

562. Показать, что функция $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ удовлетворяет уравнению $xy'=(1-x^2)y$.

563. Показать, что функция $y=\frac{1}{1+x+\ln x}$ удовлетворяет уравнению $xy'=y(y\ln x-1)$.

Ж. Логарифмическая производная

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Применение предварительного логарифмирования функции иногда упрощает нахождение ее производной.

Пример. Найти производную сложно-показательной функции

$$y=u^v,$$

где $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$.

Решение. Логарифмируя, получим:

$$\ln y=v\ln u.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x

$$(\ln y)'=v'\ln u+v(\ln u)',$$

или

$$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+v\frac{1}{u}u',$$

отсюда

$$y'=y\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right),$$

или

$$y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right).$$

564. Найти y', если

$$y=\sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x.$$

Решение. $\ln y=\frac{2}{3}\ln x+\ln(1-x)-\ln(1+x^2)+3\ln\sin x+2\ln\cos x;$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{3}\frac{1}{x}+\frac{(-1)}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\frac{1}{\sin x}\cos x-\frac{2\sin x}{\cos x},$$

откуда $y'=y\left(\frac{2}{3x}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}+3\operatorname{ctg}x-2\operatorname{tg}x\right).$

565. Найти y', если $y=(\sin x)^x$.

Решение. $\ln y=x\ln\sin x;\quad \frac{1}{y}y'=\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x;$

$$y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x).$$

Найти y', применяя предварительно логарифмирование функции $y=f(x)$:

566. $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)$.

567. $y=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$.

568. $y=\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

569. $y=x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

570. $y=\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

571. $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

572. $y=x^x$.

573. $y=x^{x^2}$.

574. $y=\sqrt[x]{x}$.

575. $y=x^{\sqrt{x}}$.

576. $y=x^{x^x}$.

577. $y=x^{\sin x}$.

578. $y=(\cos x)^{\sin x}$.

579. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

580. $y=(\operatorname{arctg}x)^x$.

§ 3. Производные функций, не являющихся явно заданными

1°. Производная обратной функции. Если для функции $y=f(x)$ производная $y'_x\neq 0$, то производная обратной функции $x=f^{-1}(y)$ есть

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}$$

или

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$