Раздел 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема 1. Вероятность случайных событий

Теория вероятностей является математической дисциплиной. Методы теории вероятностей используются при разработке моделей в ситуациях стохастической неопределенности. Стохастическая неопределенность имеет место в условиях, когда нельзя заранее сказать, произойдет или не произойдет некоторое событие в результате эксперимента. Метод теории вероятностей позволяет количественно оценить степень правдоподобия этого появления. При этом необходимо принять некоторые предположения относительно условий эксперимента. Изменение условий эксперимента может привести к изменению степени правдоподобия появления события. В этом случае возможна ошибка в определении степени правдоподобия. Для оценки этой ошибки используются предельные теоремы теории вероятностей.

Стохастическая неопределенность появляется из-за влияния очень большого числа разнообразных причин. Каждая причина в отдельности не может повлиять на результат опыта. На результат опыта влияет сумма этих разнообразных причин, и в этом случае результат опыта не может определяться заранее однозначно. Говорят, что результат такого опыта случаен.

Примеры случайных явлений можно указать в разнообразных областях науки и техники: в физике, биологии, экономике, в системах автоматического управления и т. д. Поэтому методы теории вероятностей широко используются на практике.

Вероятность оценивает степень правдоподобия появления или не появления случайного события, поэтому необходимо ввести такие понятия, как *эксперимент*, *исход*, *выборочное пространство*, *случайное событие*.

В данном случае под *экспериментом* понимается процесс наблюдений или измерений. Это может быть процесс контроля, процесс, состоящий в подсчете «успехов» или «неудач», или представлять собой сложный процесс каких-либо измерений, например, определения массы электрона.

Результат эксперимента называется *исходом*, или *элементарным случайным событием*.

Ряд всех возможных элементарных событий данного эксперимента называется *выборочным пространством*.

Если выборочное пространство имеет конечное число элементов, то это может быть представлено в виде ряда, имеющего n элементов.

Например, при одном подбрасывании монеты выборочное пространство может быть представлено следующим образом:

$$E = \{\text{Г}, \text{Р}\},$$

где Г означает выпадение герба;

Р означает выпадение решки;

здесь $n = 2$, где n – объем выборочного пространства.

Выборочное пространство с большим или бесконечным числом членов представляется или некоторым утверждением, или правилом.

Пример. Если возможные исходы эксперимента представляют собой ряд автомобилей, оснащенных СВ радио, то выборочное пространство может быть представлено

$$E = \{x \mid x - \text{автомобиль с СВ радио}\}.$$

Это следует понимать как E – это ряд всех автомобилей, имеющих СВ радио.

Пример. Если выборочное пространство E представляет собой ряд всех нечетных положительных чисел, то E представляется следующим образом:

$$E = \{2k + 1 \mid k = 0,1,2,...\}.$$

Как сформулировать выборочное пространство, зависит от решаемой проблемы. Если эксперимент состоит в одном подбрасывании игральной кости и если нас интересует, какое количество очков выпадет, то выборочное пространство должно быть представлено в виде $E_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Если нас интересует, выпадет четное или нечетное число очков, то выборочное пространство может быть представлено в виде $E_2 = \{$четные, нечетные$\}$.

Но в этом случае исходы «четный» и «нечетный» могут быть представлены тремя исходами каждый, т. е. четный – 2, 4, 6; нечетный – 1, 3, 5.

При формировании выборочного пространства необходимо, чтобы исходы не могли бы делиться на элементарные события.

Таким образом, в последнем примере пространство элементарных событий E_1 подчиняется этому правилу, а E_2 – нет.

Выборочные пространства обычно классифицируются в соответствии с числом содержащихся в них элементов.

В предыдущем примере выборочные пространства E_1 и E_2 содержат *конечное* число элементов.

При подбрасывании монеты до появления герба может быть произведено одно, два, три и так далее подбрасываний. Для этого эксперимента выборочное пространство имеет вид $E = \{$Г, РГ, РРГ, РРРГ, РРРРГ, …$\}$, где неопределенное число элементов.

В данном случае число исходов можно поставить в соответствие с натуральным рядом чисел. Данное выборочное пространство является *счетным.*

Если выборочное пространство содержит конечное или счетное число элементов, то оно называется *дискретным*.

Не все выборочные пространства являются дискретными.

Если выборочное пространство содержит *континуум* элементов, такое как выборочное пространство, содержащее все точки на отрезке прямой или все точки на плоскости, то такое выборочное пространство называется *непрерывным*.

На практике выборочные пространства непрерывного типа имеют место в том случае, когда исходами эксперимента являются *измерения* физических свойств, таких, как температура, время, вес, размеры и т. д., т. е. исходы, представляющие собой измерения на непрерывных шкалах.

1.1.1. Случайные события

Во многих случаях нас интересует результат эксперимента, который не является элементарным случайным событием или простым исходом.

Пример. При подбрасывании игральной кости представить случайное событие A, состоящее в выпадении числа очков, делящихся на 3.

Решение. При подбрасывании игральной кости выборочное пространство имеет следующий вид: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Появлению события A способствуют исходы 3 и 6, что можно записать в виде $A\{3,6\}$.

Иначе говорят, что событию A благоприятствуют исходы 3, 6 и число этих событий $m = 2$.

Пример. Описать случайное событие B, состоящее в выпадении суммы очков, равной 7, при подбрасывании двух игральных костей.

Решение. При подбрасывании двух игральных костей размерность выборочного пространства $n = 36$. Среди 36 элементарных случайных событий следующие благоприятствуют появлению события B: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) и (6,1). Событие B представляется в виде $B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, т. е. число благоприятствующих

B элементарных событий $m = 6$.

Любое случайное событие является подмножеством пространства элементарных исходов, но обратное утверждение не всегда справедливо. Для *дискретного выборочного* пространства прямое и обратное утверждения *справедливы*. Но для *непрерывного выборочного* пространства есть особые точки пространства, которые должны быть исключены из математических соображений, что обсуждается в соответствующих разделах теории вероятностей.

1.1.2. Операции над случайными событиями

Случайное событие может представляться через другие случайные события в виде суммы событий, произведения и дополнения.

Суммой или объединением событий A и B, являющихся подмножествами пространства элементарных событий E, является подмножество E, состоящее из элементов A или B или из элементов A и B.

Если элементарное событие входит как в A, так и в B, то в их сумму оно включается один раз.

Объединение A и B обозначается $C = A \cup B$.

Произведением или пересечением случайных событий A и B является подмножество пространства элементарных событий E, которое состоит из элементов, принадлежащих как A, так и B.

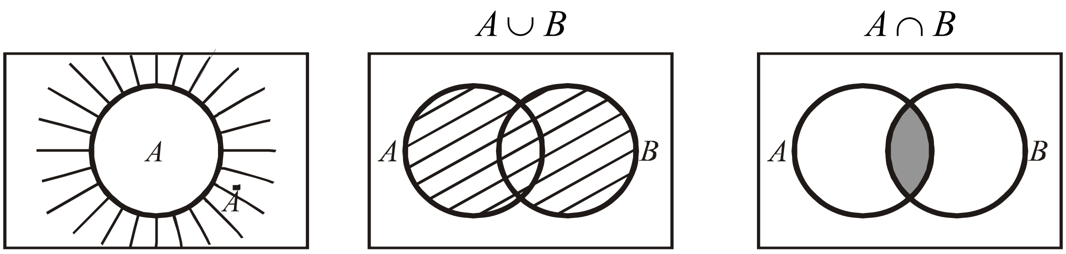
Пересечение A и B обозначается $C = A \cap B$.

Дополнением или противоположным событием случайного события A является подмножество пространства элементарных событий E, состоящее из элементов, которые не входят в A.

Дополнение A обозначается $\bar{A}$.

Объединение $C = A \cup B$, пересечение $C = A \cap B$ и дополнение $\bar{A}$ наглядно изображаются в виде диаграмм Вьенна.

В этом случае выборочное пространство изображается в виде прямоугольника, события изображаются областью с замкнутой границей внутри прямоугольника. На рис. 1.1 изображены соответственно дополнение (рис. 1.1, *а*), объединение (рис. 1.1, *б*), пересечение (рис. 1.1, *в*) событий A и B.



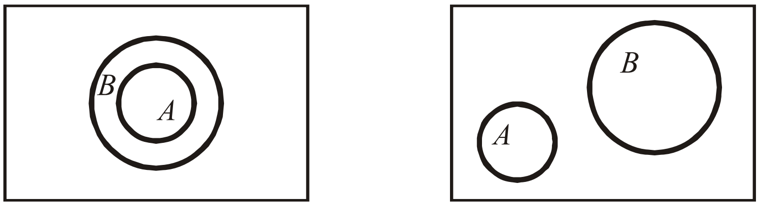
а *б* *в*

Рис. 1.1. Диаграммы Вьенна

На рис. 1.2 изображены специальные взаимоотношения между событиями.

Определение. *Несовместные события* (рис. 1.2, *а*) *A и B – такие события, которые не имеют общих элементов или которые не могут одновременно появиться. Для несовместных событий* $A \cap B = \varnothing$*, где* $\varnothing$ *обозначает пустое множество.*

На рис. 1.2, *б* изображены события *A* и *B* в случае, когда *A* содержится в *B*, и это обозначается $A \subset B$.



а *б*

Рис. 1.2. Диаграммы, изображающие специальные взаимоотношения между случайными событиями:
а – *A* содержится в *B*; *б* – *A* и *B* несовместны

Пример. В городе два магазина, торгующих строительными товарами.

В 1-м магазине торгуют лесоматериалами, оборудованием для водопровода, строительными инструментами, материалами для покрытия крыш, листовым металлом, гвоздями и болтами.

Во 2-м магазине торгуют садовым инвентарем, оборудованием для водопровода, строительными инструментами, гвоздями.

Определить объединение и пересечение множества товаров этих двух магазинов.

Решение. Пусть

событие *A* – наличие товаров в 1-м магазине;

событие *B* – наличие товаров во 2-м магазине.

A: Магазин 1 {лесоматериалы, оборудование для водопровода, строительные инструменты, материалы для покрытия крыш, листовой металл, гвозди, болты}.

B: Магазин 2 {садовый инвентарь, оборудование для водопровода, строительные инструменты, гвозди}.

Событие C – наличие товаров в 1-м или во 2-м магазине,

$$C = A \cup B.$$

C: Объединение {лесоматериалы, оборудование для водопровода, строительные инструменты, материалы для покрытия крыш, листовой металл, гвозди, болты, садовый инвентарь}.

Событие F: наличие товаров и в 1-м, и во 2-м магазинах,

$$F = A \cap B.$$

F: Пересечение {строительные инструменты, оборудование для водопровода, гвозди}.

1.1.3. Классическое определение вероятности

По классическому определению вероятность случайного события $P(A)$ равна отношению числа исходов, благоприятствующих A, к общему числу исходов, составляющих пространство элементарных событий, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Вычисление вероятностей при этом сводится к подсчету элементов того или иного множества и часто оказывается чисто комбинаторной задачей, иногда весьма трудной.

Классическое определение оправдано, когда существует возможность предсказания вероятности на основании симметрии условий, при которых происходит эксперимент, и вследствие этого симметрии исходов испытания, что приводит к понятию «равновозможности» исходов.

Например. Если сделанная из однородного материала геометрически правильная игральная кость подбрасывается так, что она успевает сделать достаточно большое число оборотов перед тем, как упасть, то выпадение любой из ее граней считается равновозможным исходом.

По тем же соображениям симметрии считаются равновозможными исходы такого эксперимента, как вынимание тщательно перемешанных и неотличимых на ощупь белых и черных шаров так, что после регистрации цвета каждый шар возвращается обратно в сосуд и после тщательного перемешивания производится извлечение следующего шара.

Чаще всего такая симметрия наблюдается в искусственно организованных экспериментах, какими являются азартные игры.

Таким образом, *классическое определение* вероятности связано с понятием *равновозможности* и используется для экспериментов, сводящихся к *схеме случаев.* Для этого необходимо, чтобы события $e_1, e_2, \ldots, e_n$ были *несовместными*, т. е. никакие два из них не могут появиться вместе; *такими, что образуют полную группу*, т. е. они исчерпывают собой все возможные исходы (не может быть так, что в результате опыта ни одно из них не произошло); *равновозможными* при условии, что эксперимент обеспечивает одинаковую возможность появления каждого из них.

Не всякий эксперимент удовлетворяет схеме случаев. Если нарушается условие симметрии, то нет схемы случаев.

Формула (1.1), «классическая формула», применялась для вычисления вероятностей событий с самого начала появления науки о случайных явлениях.

Те опыты, которые не обладали симметрией, «подгонялись» под схему случаев. В настоящее время наряду с «классической формулой» существуют способы вычисления вероятностей, когда эксперимент не сводится к схеме случаев. Для этого используется *статистическое* определение вероятности.

Понятие статистической вероятности будет введено позднее, а сейчас вернемся к классической формуле.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Опыт состоит в бросании двух монет. Найти вероятность того, что появится хотя бы один герб.

Решение. Случайное событие A – появление хотя бы одного герба.

Пространство элементарных событий в данном эксперименте определяется следующими исходами: E = {ГГ, ГР, РГ, РР}, которые соответственно обозначаются e_1, e_2, e_3, e_4. Таким образом,

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}; \quad n = 4.$$

Необходимо определить число исходов из E, которые благоприятствуют появлению A. Это e_1, e_2, e_3; их число $m = 3$.

Используя классическую формулу определения вероятности события A, имеем $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

Пример 2. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Случайное событие A – появление белого шара. Пространство элементарных событий E включает исходы e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, где e_i – появление одного шара (белого или черного);

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}, \quad n = 7.$$

Случайному событию A в пространстве E благоприятствует 3 исхода; $m = 3$. Следовательно, $P(A) = \frac{3}{7}$.

Пример 3. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны вынимается два шара. Найти вероятность того, что оба будут белыми.

Решение. Случайное событие A – оба шара будут белыми.

Пример 3 отличается от примера 2 тем, что в примере 3 исходами, составляющими пространство элементарных исходов E, будут не отдельные шары, а комбинации из 7 шаров по 2. То есть, чтобы определить размерность E, необходимо определить число комбинаций из 7 по 2. Для этого необходимо использовать формулы комбинаторики, которые приводятся в разделе «Комбинаторный метод» (см. с. 12). В данном случае для определения числа комбинаций из 7 по 2 используется формула для определения числа сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

так как выбор производится без возвращения и порядок появления шаров неважен. Таким образом,

$$n = C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 7 = 21.$$

Число комбинаций, благоприятных для появления события A, определяется в виде

$$m = C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$

Следовательно, $P(A) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

1.1.4. Статистическое определение вероятности

При рассмотрении результатов отдельных испытаний очень трудно найти какие-либо закономерности. Однако в последовательности одинаковых испытаний можно обнаружить устойчивость некоторых средних характеристик. Частостью какого-либо события в данной серии из n испытаний называется отношение m/n, числа m тех испытаний, в которых событие A наступило, к общему числу испытаний n. Почти в каждой достаточно длинной серии испытаний частость события A устанавливается около определенного значения $\frac{m}{n}$, которое принимается за вероятность события A. Устойчивость значения частости подтверждается специальными экспериментами. Статистические закономерности такого рода были впервые обнаружены на примере азартных игр, т. е. на примере тех испытаний, которые характеризуются равновозможностью исходов. Это открыло путь для статистического подхода к численному определению вероятности, когда нарушается условие симметрии эксперимента.

Частость события A называют *статистической вероятностью*, которая обозначается

$$P^*(A) = \frac{m_A}{n}, \tag{1.2}$$

где m_A – число экспериментов, в которых появилось событие A;

n – общее число экспериментов.

Формулы (1.1) и (1.2) для определения вероятности имеют внешнее сходство, но они различны по существу. Формула (1.1) служит для теоретического вычисления вероятности события по заданным условиям опыта. Формула (1.2) служит для экспериментального определения частости события. Чтобы воспользоваться формулой (1.2), необходим опытный статистический материал.

1.1.5. Аксиоматический подход к определению вероятности

Третьим подходом к определению вероятности является аксиоматический подход, при котором вероятности задаются перечислением их свойств.

Принятое аксиоматическое определение вероятности было сформулировано в 1933 г. А. Н. Колмогоровым. В этом случае вероятность задается как числовая функция $P(A)$ на множестве всех событий, определяемых данным экспериментом, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $0 \le P(A) \le 1$.
2. $P(A) = 1$, если A – достоверное событие.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместны.

1.1.6. Основные свойства вероятности

1. *Для каждого случайного события A определена его вероятность, причем* $0 \le P(A) \le 1$.

2. *Для достоверного события U имеет место равенство* $P(U) = 1$.

Свойства 1 и 2 следуют из определения вероятности.

3. *Если события A и B несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей.* Это свойство носит название *формулы сложения вероятностей в частном случае* (для несовместных событий).

4. *Для произвольных событий A и B*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Это свойство носит название *формулы сложения вероятностей в общем случае*.

5. *Для противоположных событий* A *и* $\bar{A}$ *имеет место равенство* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Кроме этого, вводится невозможное событие, обозначенное $\emptyset$, которому не способствует ни один исход из пространства элементарных событий. Вероятность невозможного события равна 0, $P(\emptyset) = 0$.

Пример. Вероятность того, что случайно выбранная в результате опроса семья имеет цветной, черно-белый или цветной и черно-белый телевизоры, равны соответственно 0.86; 0.35; 0.29. Какова вероятность, что семья имеет цветной или черно-белый телевизор?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что семья имеет цветной телевизор.

Событие B состоит в том, что семья имеет черно-белый телевизор.

Событие C состоит в том, что семья имеет или цветной, или черно-белый телевизор. Событие C определяется через A и B в виде $C = A \cup B$, A и B совместны, поэтому

$$P(C) = P(A \cup B) = 0.86 + 0.35 - 0.29 = 0.92.$$

1.1.7. Комбинаторный метод

Во многих вероятностных проблемах необходимо перечислить все возможные исходы эксперимента или элементарные события, которые возможны в данной ситуации, или вычислить их количество.

Для этого можно использовать следующие правила.

Правило 1. *Если операция состоит из двух шагов, в которых первый может быть сделан* n_1 *способами и второй может быть сделан* n_2 *способами, то вся операция может быть сделана за* $n_1 \cdot n_2$ *способов.*

Под словом «операция» подразумевается любая процедура, процесс или метод выбора.

Чтобы подтвердить это правило, рассмотрим операцию, которая состоит из шагов x_i и y_i, шаг x может быть осуществлен n_1 способами, т. е. $i = \overline{1, n1}$, шаг y может быть осуществлен n_2 способами, т. е. $j = \overline{1, n2}$, тогда ряд всех возможных способов может быть представлен следующими $n_1 n_2$ парами:

$$(x_1 y_1)(x_1 y_2) \quad \ldots \quad (x_1 y_{n2})$$
$$(x_2 y_1)(x_2 y_2) \quad \ldots \quad (x_2 y_{n2})$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

$(x_{n1}y_1)(x_{n1}y_2)\ \ \dots\ \ (x_{n1}y_{n2})$

Пример. Сколько возможных исходов имеется в эксперименте, который состоит в подбрасывании двух игральных костей.

Решение. Под x и y в этом случае понимается выпадение любой грани на первой кости и на второй кости. Выпадение грани на первой кости возможно шестью способами x_i, $i=\overline{1.6}$; выпадение грани второй кости возможно также шестью способами x_j, $j=\overline{1.6}$. Всего возможных способов $6\cdot 6=36$.

Правило 2. *Если операция состоит из k шагов, в которых первый может быть сделан n_1 способами, второй n_2 способами, третий n_3 способами и т. д., k-й – n_k способами, то вся операция может быть сделана за $n_1\cdot n_2 \dots n_k$ шагов.*

Пример. Инспектор качества хочет выбрать часть из каждого из четырех контейнеров, содержащих 4, 3, 5 и 4 частей соответственно. Сколькими способами он может это сделать?

Решение. Общее число способов определяется как $4\cdot 3\cdot 5\cdot 4=240$.

Пример. Сколькими возможными способами может ответить студент в тесте из 20 вопросов, если на каждый вопрос он может ответить «да» или «нет»?

Решение. Всех возможных способов $2\cdot 2 \dots 2=2^{20}=1048576$.

Часто на практике возникает ситуация, когда объекты должны быть упорядочены.

Например: сколькими различными способами 6 персон могут сесть вокруг стола? Различные их расположения называются *перестановками*.

Пример. Сколько перестановок возможно для букв *a*, *b*, *c*?

Решение. Возможные расположения *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. Число возможных расположений равно шести.

Используя правило 2, можно подсчитать число возможных расположений. Для первой позиции – 3 различных способа (из букв *a*, *b*, *c*). Для второй позиции – 2 различных способа. Для третьей позиции – 1 способ. Всего способов $3\cdot 2\cdot 1=6$.

Обобщая данный пример, для *n* объектов всего $n\cdot(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1$ различных способов или *n*!, т. е. число перестановок $n!=1\cdot 2\cdot 3 \dots (n-2)(n-1)n$, при этом $0!=1$.

Правило 3. *Число перестановок n различных объектов равно n!*

Пример. Число перестановок из четырех букв $4!=24$, но какое число перестановок получится, если выбирать по 2 буквы из четырех?

Решение. Мы должны заполнить две позиции из четырех букв. Для первой позиции – 4 способа, для второй позиции – 3 способа. Следовательно, используя правило 1, имеем $4 \cdot 3 = 12$.

Обобщая этот пример на *n* различных объектов, из которых выбирается *r* объектов без возвращения для *r* > 0, всего способов $n(n-1)...(n-r+1)$. Это число обозначим A_n^r, а получаемые комбинации называются *размещениями*.

Правило 4. *Число размещений из n объектов по r определяется как* $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ *(для* $r = 0,1,...,n$*).*

Перестановки, когда объекты располагаются по кругу, называются *круговыми перестановками*. Две круговые перестановки не являются различными (а считаются только одной), если соответствующие объекты в двух расположениях имеют те же самые объекты слева и справа.

Например: если четыре персоны играют в бридж, мы не получим различных расположений, если все игроки передвинутся на один стул справа.

Пример. Сколько круговых перестановок возможно из четырех персон, играющих в бридж?

Решение. Если произвольно взять позицию одного из четырех игроков как фиксированную, можно трех остальных игроков расположить 3! способами, другими словами, имеем шесть различных круговых перестановок.

Обобщая этот пример, получаем следующее правило.

Правило 5. *Число перестановок из n различных предметов, расположенных по кругу, равно* $(n-1)!$

До сих пор предполагалось, что *n* объектов, из которых мы выбираем *r* объектов и формируем перестановки, являются различными. Таким образом, упомянутые ранее формулы не могут быть использованы для определения числа способов расположения букв в слове «book» или числа способов расположения трех копий одной новеллы и одной копии каждой из четырех других новелл на полке.

Пример. Сколько различных перестановок букв в слове «book»?

Решение. Если важно различать буквы *O*, то мы их обозначим O_1, O_2 и тогда будем иметь $4! = 24$ различных перестановок букв в O_1, O_2 и *K*. Однако если мы опускаем индексы, то O_1O_2 и O_2O_1 уже не различаются, тогда общее число перестановок равно $\frac{24}{2} = 12$.

Пример. Сколько различных способов расположения трех копий одной новеллы и одной копии других четырех новелл на полке?

Решение. Если обозначить три копии первой новеллы как a_1, a_2, a_3 и другие четыре новеллы – b, c, d и e, то в данном случае имеем 7! различных способов и 3! способа расположить a_1, a_2, a_3.

Если опустить индексы, то различных способов расположения копий $\frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Обобщая эти рассуждения, получим следующее правило.

Правило 6. *Число перестановок n объектов, в которых n_1 одного сорта, n_2 – второго сорта, ..., n_k – k-го сорта и $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$,*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Много задач, в которых необходимо определить число способов выбора r объектов из n различных объектов, не обращая внимания на порядок, в котором они выбираются. Такие комбинации называются сочетаниями.

Пример. Сколькими способами можно выбрать трех кандидатов из 20-ти человек для общественного опроса?

Решение. Если нам важен порядок при выборе кандидатов, то число комбинаций $A_{20}^{3} = 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6840$, но каждый ряд из трех кандидатов может быть выбран 3! Способами; если порядок выбора не важен, то всего способов выбора $\frac{6840}{3!} = 1140$.

Комбинации без возращения r объектов из n различных объектов, которые отличаются самими объектами, но не их порядком, называются *сочетаниями.*

Правило 7. *Число комбинаций по r объектов из n разных объектов определяется числом* $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, число сочетаний может обозначаться как $\binom{n}{r}$.

Пример. Сколькими различными способами можно при шести подбрасываниях монеты получить 2 герба и 4 решки?

Решение. Так как порядок получения гербов и решек не важен, то, применяя правило 7, получим $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!4!} = 15$.

Пример. Сколько разных комитетов из двух химиков и одного физика может быть сформировано на факультете небольшого колледжа, имеющего 4 химика и 3 физика.

Решение. Число комбинаций из четырех химиков по 2 может быть получено $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ (шестью) способами.

Один из трех физиков может быть выбран $C_3^1 = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$ (тремя) способами.

Число комитетов, в соответствии с правилом 1, определяется как $6 \cdot 3 = 18$.

Пример. Сколькими способами можно разбить ряд из четырех объектов на три ряда, содержащих соответственно два, один и один объекта?

Решение. Обозначим данные четыре объекта буквами *a*, *b*, *c*, *d*. Число разбиений на два, один и один будет 12:

$$\begin{array}{cccc} ab|c|d & ab|d|c & ac|b|d & ac|d|b \\ ad|b|c & ad|c|b & bc|a|d & bc|d|a \\ bd|a|c & bd|c|a & cd|a|b & cd|b|a \end{array}$$

Разбиение из двух объектов можно получить A_4^2 способами, что дает 6 возможностей. Число способов сформировать второе разбиение $A_2^1 = 2$. И для третьего разбиения число способов равно 1.

Согласно правилу 2 всего способов разбиения $(6 \cdot 2 \cdot 1) = 12$.

Обобщая данный пример, получаем следующее правило.

Правило 8. *Число способов, с помощью которых ряд из n различных объектов может быть разбит на k частей с n_1 объектами в 1-й части, n_2 во 2-й части, ... и n_k в k-й, определяется как*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_k!}.$$

Пример. Сколькими способами 7 бизнесменов могут быть размещены в одном трехкомнатном и двух двухкомнатных номерах в отеле?

Решение. Согласно правилу 8 это можно сделать $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$ (двухсотдесятью) способами.

Доказательство правила 8

Так как n_1 *объектов могут быть выбраны в ряд* $C_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}$ *способами,* n_2 *могут быть выбраны* $C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}$ *и т. д. Согласно правилу 2 всего число способов будет определяться в виде*

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_k!(n-n_1-n_2-n_3)!} \ldots$$

$$\ldots \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

1.1.8. Задание для самостоятельной работы

1. Десять книг на одной полке расставляются наудачу. Определить вероятность того, что три определенные книги окажутся рядом.

Ответ: 0.066.

2. Из колоды карт (52 карты) наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

Ответ: 0.0029.

3. Имеются пять билетов стоимостью по 1 рублю;
три билета стоимостью по 3 рубля;
два билета стоимостью по 5 рублей.

Наугад выбирается три билета. Определить вероятность того, что:
а) хотя бы два из этих билетов имеют одинаковую стоимость.

Ответ: 0.75;

б) все три билета стоят 7 рублей.

Ответ: 0.29.

4. В кошельке лежат три монеты достоинством по 20 копеек и семь монет достоинством по 3 копейки. Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая монета достоинством в 20 копеек. Определить вероятность того, что и первая монета имеет достоинство в 20 копеек.

Ответ: 0.22.

5. Из десяти билетов лотереи выигрышными являются два. Опре-

делить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов:
а) один выигрышный;
б) два выигрышных;
в) хотя бы один выигрышный.

Ответ: 0.55, 0.22, 0.78.

6. В корзине имеется n шаров с номерами от 1 до n, шары извлекаются наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность того, что при k первых извлечениях номера шаров совпадут с номерами извлечений.

Ответ: $(n-k)!/n!$

7. Из цифр 1,2,3,4,5 сначала выбирают одну, а затем из оставшихся четырех – вторую. Допустим, что все 20 возможных исходов равновероятны. Определить вероятность того, что:
а) в первый раз будет выбрана нечетная цифра;
б) во второй раз будет выбрана нечетная цифра;
в) оба раза будут выбраны нечетные цифры.

Ответ: 3/5, 3/5, 3/10.

1.1.9. Условная вероятность и независимость. Теорема умножения вероятностей

При решении вероятностных задач часто возникает необходимость определить вероятность события в ситуации, когда о нем имеются дополнительные сведения.

Постановка задачи такова: нужно определить вероятность события A после того, как стало известно, что некоторое событие B произошло, иными словами, имел место исход, благоприятствующий событию B.

Пример. Бросается игральная кость. Пусть событие A состоит в выпадении четного числа очков. Стало известно, что произошло событие B, состоящее в выпадении числа очков меньше четырех. Определить вероятность события A при условии, что наступило событие B.

Решение. Пространство элементарных исходов при бросании игральной кости определяется шестью исходами $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$.

Известно, что произошло событие B, которому благоприятствует 3 исхода: e_1,e_2,e_3.

В этих условиях вероятность события A $P(A\cap B)={}^1\!/_3$, так как событию A благоприятствует исход e_2 из $E_1=\{e_1,e_2,e_3\}$.

Определение. *Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B, называется отношение числа k тех благо-*

приятствующих A исходов, которые и благоприятствуют B, к числу m всех исходов, благоприятствующих B.

Условная вероятность обозначается $P\left(A/B\right)$.

По определению $P\left(A/B\right)=\dfrac{k}{m}$; если B – невозможное событие, то $P\left(A/B\right)$ не определена.

Заметим, что

$$P\left(A/B\right)=\frac{k/n}{m/n},$$

но

$$P(AB)=k/n,\quad P(B)=m/n.$$

Поэтому
$$P\left(A/B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.3}$$

Формула (1.3) служит для определения условий вероятности в общем случае. Вероятности $P(AB)$, $P(B)$ называются *безусловными*.

1.1.10. Свойства условных вероятностей

1. *Всегда* $0\le P\left(A/B\right)\le 1$, *причем* $P\left(A/B\right)=0$, *если* AB – *невозможное событие, и* $P\left(A/B\right)=1$, *если* $A\supset B$ (*A включено в B*).

2. *Если* $C=A\cup B$ *и* $AB=\varnothing$, *то для любого события* D $P\left(A/D\right)+P\left(B/D\right)=P\left(C/D\right)$.

3. *Если* $\overline{A}$ *событие, противоположное* A, *то* $P\left(A/B\right)=1-P\left(\overline{A}/B\right)$.

Пример. Изучается качество техобслуживания, обеспечиваемое пятьюдесятью автомеханиками в определенном городе. Результаты изучения представлены в таблице.

	Хорошее обслуживание	Плохое обслуживание
Стаж работы более 10 лет	16	4
Стаж работы менее 10 лет	10	20

1. Какова вероятность, что случайно выбранный автомеханик хорошо обслуживает автомобили?

2. Если автомеханик случайно выбран и его стаж более 10-ти лет, то какова вероятность, что он хорошо обслуживает автомобили?

Решение

1. В данном случае объем выборочного пространства $n = 50$. Пусть G – событие, состоящее в том, что выбранный автомеханик хорошо обслуживает автомашины. Используя данные из таблицы, имеем $m = 26$, $P(G) = \dfrac{26}{50} = 0.52$.

2. Пусть событие T состоит в том, что выбранный механик имеет стаж более 10-ти лет. В данном случае объем выборочного пространства уменьшается, он равен сумме элементов первой строки: $n = 16 + 4 = 20$.

Число благоприятных для события исходов равно 16-ти, $m = 16$, поэтому $P\left(G/T\right) = \dfrac{16}{20} = 0.8$.

Пример. В условиях предыдущего примера определить вероятность того, что выбранный случайным образом механик проработал менее 10-ти лет и хорошо обслуживает автомобили.

Решение. Пусть T_1 – событие, состоящее в том, что механик проработал меньше 10 лет. Событие G состоит в том, что механик хорошо обслуживает автомобили. Для определения условной вероятности $P\left(G/T1\right)$ используем формулу (1.3). Тогда

$$P\left(G/T1\right) = \frac{P(G \cap T1)}{P(T1)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Если обе стороны равенства, определяемого формулой (1.3), умножить на $P(B)$, то получим следующее правило умножения вероятностей в общем случае:

$$P(A \cap B) = P(B)P\left(A/B\right). \tag{1.4}$$

Правило умножения вероятностей в общем случае, если поменять местами A и B и использовать факт, что $A \cap B = B \cap A$, получим следующее:

$$P(A \cap B) = P(A)P\left(B/A\right). \tag{1.4a}$$

Пример. Если из партии, содержащей 240 телевизионных трубок, среди которых 15 с дефектом, выбрать случайным образом две трубки, то какова вероятность того, что они обе с дефектом?

Решение. Предполагаем равновозможность каждого выбора.

Событие A состоит в том, что 1-я трубка будет с дефектом.

Событие B состоит в том, что 2-я трубка будет с дефектом.

Вероятность события A определяется в виде $P(A)=\dfrac{15}{240}$.

Вероятность события B, при условии, что произошло событие A, определяется в виде $P\left(B/A\right)=\dfrac{14}{239}$.

Событие C, состоящее в том, что обе трубки будут с дефектом, определяется в виде $C=A\cap B$.

Таким образом, вероятность, что обе трубки будут с дефектом, определяется по формуле (1.4а)

$$P(C)=P(A\cap B)=P(A)P\left(B/A\right)=\frac{15}{240}\cdot\frac{14}{239}=\frac{7}{1912}=0.0036.$$

В этой задаче выбор производился *без возвращения*, т. е. первая трубка не возвращается в партию перед вытаскиванием второй трубки.

Пример. Определить вероятность того, что будут вытащены 2 туза из колоды из 52 карт, если выбор производится:

а) без возращения;

б) с возращением.

Решение

1. Если первая карта не возвращается перед вторым вытаскиванием, то вероятность получения двух тузов определяется в виде $P=\dfrac{4}{52}\cdot\dfrac{3}{51}=\dfrac{1}{221}=0.0045$.

2. Если первая карта возвращается перед вторым вытаскиванием, то вероятность получения двух тузов определяется в виде $P=\dfrac{4}{52}\cdot\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{169}=0.0059$.

Формула (1.4) в случае трех событий (A, B и C) в выборочном пространстве E при условии, что $A\cap B\neq 0$, имеет вид

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P\left(B/A\right)\cdot P\left(C/A\cap B\right). \qquad (1.5)$$

В теории вероятностей важную роль играет понятие *независимости* случайных событий.

Определение. *Событие A называется независимым от события B, если имеет место равенство* $P\left(A/B\right)=P(A)$, *т. е, если условная вероят-*

ность события A, при условии, что событие B произошло, совпадает с безусловной вероятностью события A.

Из определения следует, что два события A и B являются *независимыми*, если появление или не появление одного из них не влияет *на вероятность* появления другого события.

Правило умножения вероятностей для двух событий A и B, если A и B *независимы*, имеет вид

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1.6)$$

Пример. Монета подбрасывается 3 раза. Пусть событие A состоит в том, что герб появляется при первом и втором бросаниях.

Событие B состоит в том, что решка появится при третьем бросании.

Событие C состоит в том, что появятся две решки при трех бросаниях.

Показать, что:

а) события A и B независимы;

б) события B и C зависимы.

Решение. Пространство элементарных исходов

$$E = \{ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР\}.$$

$$A = \{ГГГ, ГГР\}.$$

$$B = \{ГГР, ГРР, РГР, РРР\}.$$

$$C = \{ГРР, РГР, РРГ\}.$$

$$A \cap B = \{ГГР\}, \; B \cap C = \{ГРР, РГР\}.$$

В предположении, что все исходы равновозможны,

$$P(A) = \frac{2}{8} = 1/4; \; P(B) = \frac{4}{8} = 1/2; \; P(C) = \frac{3}{8};$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8};$$

а) $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2} = 1/8$, т. е. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; A и B – независимы;

$$P(B \cap C) = 2/8 = 1/4;$$

б) $P(B) \cdot P(C) = 1/2 \cdot 3/8 = \frac{3}{16}$, т. е. $P(B \cap C) \neq P(B) \cdot P(C)$, следовательно, B и C – зависимы.

Определение. *События $A_1, \ldots, A_k$ являются независимыми тогда, и только тогда, когда вероятность произведения этих событий равна* *произведению их вероятностей, т. е.*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2)...P(A_k) \quad (1.7)$$

для k событий.

1.1.11. Задание для самостоятельной работы

1. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0.012, 0.01, 0.006, 0.002. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

Ответ: 0.03.

2. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0.2, 0.15, 0.10. Определить вероятность непопадания в мишень.

Ответ: 0.55.

3. В двух корзинах находятся шары, отличающиеся только цветом. В первой корзине 5 белых, 11 черных, 8 красных шаров. Во второй корзине 10 белых, 8 черных и 6 красных шаров. Из обеих корзин наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

Ответ: 0.323.

4. Студент может уехать в институт или автобусом, или троллейбусом. Автобус ходит через каждые 20 минут, троллейбус ходит через каждые 10 минут. Какова вероятность, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение пяти минут?

Ответ: 0.625.

5. В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из них с вероятностью p выходит. Кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир и с вероятностью $(1 - p_0)$ входит один новый пассажир. Найти вероятность того, что, когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем по-прежнему будет n пассажиров.

Ответ: $p_0(1 - p)^n + (1 - p_0) \cdot np\ (1 - p)^{n-1}$.

6. Студент знает 20 из 25-ти вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на три из четырех вопросов в билете. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?

Ответ: 0.9.

7. В корзине находится 8 красных и 6 зеленых шаров. Из корзины вынимается последовательно (без возвращения) два шара. Событие A –

первый шар красный, событие B – второй шар зеленый.

Являются ли события A и B независимыми?

8. Из обычной колоды карт (52 карты) берут наугад одну карту. Пусть событие A состоит в извлечении туза, событие B состоит в извлечении карты масти пики. Являются ли эти события статистически независимыми?

9. Бросают пару игральных костей. Пусть в этом опыте события A и B заключаются в выпадении нечетных чисел на первой и второй костях. Событие C состоит в выпадении нечетной суммы очков. Являются ли эти события:

а) попарно независимыми;

б) взаимно независимыми?

10. Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются четыре карты. Найти вероятность того, что все четыре карты будут разных мастей.

Ответ: 0.106.

11. Известно, что 5 % всех мужчин и 0.25 % всех женщин – дальтоники.

На осмотр прибыло одинаковое число мужчин и женщин. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность того, что это мужчина?

Ответ: 0.95.

12. Проводится три повторных независимых измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что при одном измерении (любом) ошибка выйдет за пределы допуска, равна 0.1. Найти вероятность следующих событий:

а) во всех измерениях была достигнута заданная точность;

б) не более чем в одном измерении ошибка выйдет за пределы допуска;

в) по крайней мере в двух измерениях подряд была достигнута заданная точность.

Ответ: 0.729, 0.972, 0.891.

1.1.12. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности связывает условную и безусловную вероятности некоторого события A.

Пусть определены и отличны от нуля следующие вероятности: $P(B1)$, $P(B2)$, …, $P(Bk)$ и $P\left(A/_{B1}\right)$, $P\left(A/_{B2}\right)$, …, $P\left(A/_{Bk}\right)$. Пусть далее известно, что $A \subset B1 \cup B2 \cup \ldots \cup Bk$ и события B_i ($i = \overline{1,k}$) попарно несовместны, и событие A может произойти с одним из событий B_i. Тогда вероятность события A может быть определена по *формуле полной вероятности*, которая имеет вид

$$P(A) = P(B1)P\left(A/_{B1}\right) + \ldots + P(Bk)P\left(A/_{Bk}\right). \tag{1.8}$$

События B_i называются *гипотезами*.

Эта формула широко используется на практике.

Пример. Партия деталей содержит 20 % деталей, изготовленных заводом 1; 30 % – заводом 2; 50 % – заводом 3. Для завода 1 вероятность выпуска бракованной детали равна 0.05; для завода 2 – 0.01; для завода 3 – 0.06. Какова вероятность того, что наудачу взятая из партии деталь окажется бракованной?

Решение. Событие A состоит в том, что выбранная деталь окажется бракованной. События $B1$, $B2$, $B3$ состоят в том, что деталь изготовлена соответственно заводом 1, заводом 2 и заводом 3.

Из условия задачи $P(B1) = 0.2$; $P(B2) = 0.3$; $P(B3) = 0.5$;

$P\left(A/_{B1}\right) = 0.05$; $P\left(A/_{B2}\right) = 0.01$; $P\left(A/_{B3}\right) = 0.06$.

По формуле полной вероятности

$P(A) = 0.2 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.01 + 0.5 \cdot 0.06 = 0.043$.

Следствием формулы полной вероятности является *формула Байеса*.

Пусть события B_i попарно несовместны и $A \subset B_1 \cup \ldots \cup B_k$ (A может произойти с одним из B_i), тогда

$$P\left(Bi/_{A}\right) = \frac{P(Bi)P(A/Bi)}{P(A)}, \tag{1.9}$$

где $P(A)$ определяется по формуле полной вероятности (1.8).

Значение этой формулы в том, что она связывает вероятности $P(Bi/A)$ после наступления события A с вероятностями $P(Bi)$ до наступления события A.

Вероятности $P(Bi)$ называются *априорными* (до опыта). Вероятности (Bi/A) – *апостериорными* (после опыта).

Пример. В условиях предыдущего примера стало известно, что наудачу выбранная деталь из партии оказалась бракованной. Чему равна вероятность, что она изготовлена заводом 1, заводом 2, заводом 3?

Решение. Придерживаемся обозначений предыдущего примера. Необходимо определить вероятности $P(B1/A)$, $P(B2/A)$, $P(B3/A)$.

По формуле Байеса

$$P(B1/A)=\frac{P(B1)P(A/B1)}{P(A)}=\frac{0.2\cdot 0.05}{0.043}\approx 0.233;$$

$$P(B2/A)=\frac{0.3\cdot 0.01}{0.043}\approx 0.07;\ P(B3/A)=\frac{0.5\cdot 0.06}{0.043}\approx 0.698.$$

Вероятность, что бракованная деталь принадлежит заводу 3, – самая наибольшая. Отсюда можно сделать вывод, что, скорее всего, она изготовлена на этом заводе.

При решении задач с применением формулы Байеса можно использовать диаграмму, представленную на рис. 1.3.

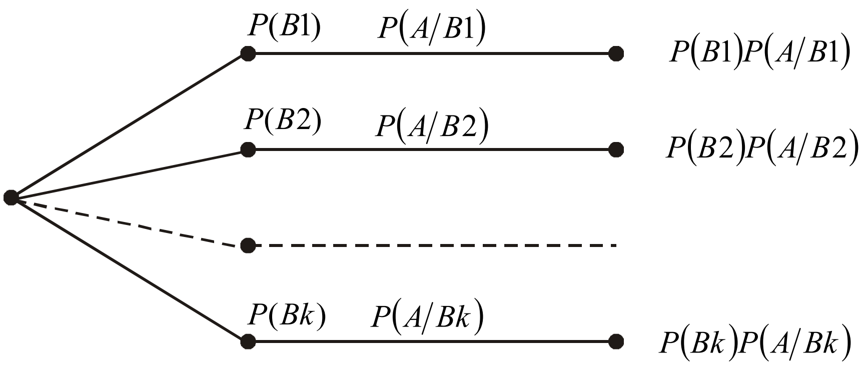


Рис. 1.3. Диаграмма (дерево) для формулы Байеса

Для предыдущего примера диаграмма имеет вид (рис. 1.4)

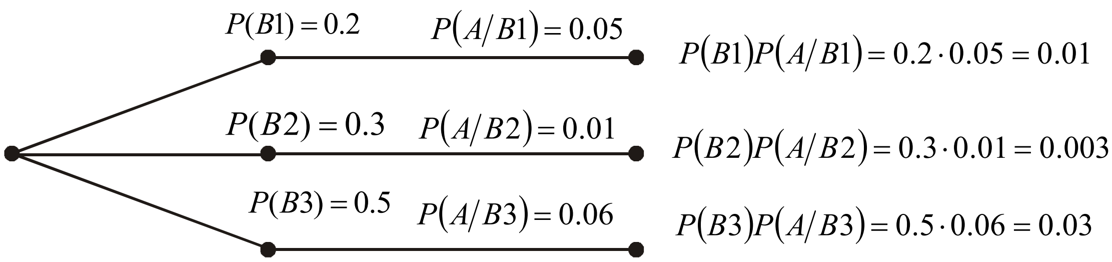


Рис. 1.4

$$P(A)=0.01+0.003+0.03=0{,}043;$$

$$P(B1/A)=\frac{0.01}{0.043}\approx 0.233; \qquad P(B2/A)=\frac{0.003}{0.043}\approx 0.07;$$

$$P(B3/A)=\frac{0.03}{0.043}\approx 0.698.$$

1.1.13. Задание для самостоятельной работы

1. Вероятность попадания при каждом выстреле для трех стрелков равна соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трёх стрелков имелось 2 попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

Ответ: 0.461.

2. Принимая во внимание, что вероятность рождения однополых близнецов вдвое больше, чем разнополых, вероятности рождения близнецов разного пола в любой последовательности одинаковы, а вероятность рождения в двойне первым мальчика равна 0.51. Определить вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик.

Ответ: 103/153=0.673.

3. В первой корзине находятся 1 белый и 9 черных шаров, во второй корзине – 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой корзины случайным образом (без возвращения) удалили по одному шару, а оставшиеся шары поместили в третью корзину. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей корзины, окажется белым.

Ответ: 38/105=0.3619047.

4. В пункте проката имеется десять телефонов, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0.9, и пять телевизоров с аналогичной вероятностью, равной 0.95. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут работать исправно в течение месяца.

Ответ: 0.97107.

5. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему 4-ю группу крови, можно перелить кровь любой группы; имеющему 2-ю группу или 3-ю можно перелить кровь либо той же группы, либо 1-й; имеющему 1-ю группу можно перелить кровь только 1-й группы.

Среди населения:
33.7 % имеют 1-ю группу крови;
37.5 % имеют 2-ю группу крови;
20.9 % имеют 3-ю группу крови;
7.9 % имеют 4-ю группу крови.

Определить вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

Ответ: 0.083.

6. Известно, что 96 % выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную – с вероятностью 0.05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

Ответ: 0.998.

7. Надёжность определения туберкулёза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 90 %. Вероятность того, что у здорового человека будет установлен ТБЦ, равна 1 %. Просвечиванию была подвергнута большая группа людей со средним % больных, равным 0.1 %. Какова вероятность, что человек, признанный больным, действительно является носителем ТБЦ?

Ответ: 0.0826.

8. Рассматриваются причины неудачного запуска космической ракеты. Высказаны четыре гипотезы: H_1, H_2, H_3, H_4. $P(H_1)$=0.2, $P(H_2)$=0.4, $P(H_3)$=0.3, $P(H_4)$=0.1. В ходе расследования обнаружено, что произошла утечка топлива (событие A). Условные вероятности $P(A/H_1)$=0.9, $P(A/H_2)$=0, $P(A/H_3)$=0.2, $P(A/H_4)$=0.3. Какая из гипотез наиболее вероятна в данных условиях?

Ответ: H_1.

9. Два охотника, Семён и Иван, отправились на охоту, увидели медведя и одновременно по нему выстрелили. Медведь был убит, и в его шкуре обнаружена одна пробоина. Кому из охотников принадлежит эта шкура, если Семён попадает в цель с того расстояния, с которого был сделан выстрел, с вероятностью 0.8, а Иван – с вероятностью 0.4. Шкуру медведя продали за 5000 р. Как надо разделить эту сумму между Семёном и Иваном?

Ответ: 4300, 700.

10. Машина A производит 10 % определенного продукта. Машина B – 40 %, машина C – 50 %. 5 % продукта, производимого машиной A, – с дефектом; 12 % продукта, производимого B, – с дефектом; 8 % продукта, производимого C, – с дефектом. Инспектор выбрал продукт случайным образом и обнаружил, что он с дефектом. Определить вероятность того, что продукт произведен машиной A, или B, или C.

Ответ: 0.054, 0.52, 0.42.

1.1.14. Испытания Бернулли. Формула Бернулли

Пусть имеется n независимых испытаний, в каждом из которых появляется событие A с вероятностью p и $\overline{A}$ – с вероятностью q, $q + p = 1$.

Такие испытания называются *испытаниями Бернулли*.

Если происходит событие A, то говорят, что *имеет место успех*.

Найдем $P_n(m)$ – *вероятность появления m успехов из n испытаний*.

Каждый исход испытаний можно представить последовательностью $e_i = \{\underbrace{A...A}_{m}, \underbrace{\overline{A}...\overline{A}}_{n-m}\}$, в которой содержится ровно m событий A и $(n-m)$ событий $\overline{A}$. Число таких последовательностей равно числу способов выбрать m элементов из n элементов, не отличающихся порядком, всего – C_n^m.

Вероятность появления каждой такой последовательности, ввиду независимости испытаний, равна произведению вероятностей, т. е. $p^m q^{n-m}$; так как события e_i несовместны, то по теореме сложения

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1.10)$$

Эта формула носит название формулы Бернулли.

Пример. Завод выпускает изделия, из которых 5 % являются бракованными. Для проверки взяты 5 изделий. Какова вероятность, что среди них окажется не менее двух бракованных?

Решение

Успех – изделие бракованное. Вероятность успеха $p = 0.05$; $q = 0.95$.

$n = 5$ – число испытаний с вероятностью успеха $p = 0.05$;

A – среди деталей не менее двух бракованных;

$\overline{A}$ – среди деталей менее двух бракованных.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - [P_5(0) + P_5(1)];$$

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^{5-0} = \frac{5!}{0!5!} \cdot 0.95^5 = 0.95^5;$$

$$P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot 0.05 \cdot 0.95^4 = 5 \cdot 0.05 \cdot 0.95^4;$$

$$P(A) = 1 - (0.95^5 + 5 \cdot 0.05 \cdot 0.95^4) = 1 - 0.95^4(0.95 + 5 \cdot 0.05) =$$

$$= 1 - 0.95^4(0.95 + 0.25) = 1 - 0.95^4 \cdot 1.2 = 1 - 0.972 = 0.028;$$

$$0.95^2 = 0.9025, \quad 0.95^4 = 0.81.$$

1.1.15. Наиболее вероятное число успехов

Наивероятнейшее число успехов – это такое число, вероятность которого самая большая среди всех вероятностей.

Это число определяется из соотношения

$$np - q \le m^* \le np + p. \qquad (1.11)$$

Пример. По данным наблюдений доля солнечных дней в июле составляет 70 %. Найти наиболее вероятное количество солнечных дней.

Решение. Можно считать, что имеются $n = 30$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0.7$, тогда $q = 0.3$, и наиболее вероятное значение будет

$$np - q \le m^* \le np + p;$$

$$30 \cdot 0.7 + 0.7 = 21.7;$$

$$30 \cdot 0.7 - 0.3 = 20.7;$$

$$20.7 \le m^* \le 21.7.$$

Если значения $np - q$ и $np + p$ являются вещественными числами, то выбирается наибольшее из них, и число успехов (наиболее вероятное) равно целой части этого числа, т. е. $m^* = 21$.

Если $np + p$ и $np - q$ являются целыми числами, то m* равно двум этим числам.

1.1.16. Формула Пуассона

Предположим, что мы хотим вычислить вероятность $P_{m,n}$ появления события *A* при большом числе испытаний *n*, например $P_{300,500}$.

По формуле Бернулли

$$P_{300,500} = C_{500}^{300} p^{300} q^{200} = \frac{500!}{300!200!} p^{300} q^{200}.$$

Вычисление по формуле Бернулли в этом случае технически сложно, поэтому используют *приближенные формулы* для вычисления $P_{m,n}$ при больших *n*. Такие формулы называются *асимптотическими* и определяются теоремой Пуассона, локальной и интегральной теоремами Муавра-Лапласа.

Теорема Пуассона. *Если вероятность наступления события A в каждом испытании стремится к нулю* $(p \to 0)$ *при неограниченном увеличении числа испытаний* $(n \to \infty)$, *причем произведение* np *стремится к постоянному числу* λ $(np \to \lambda)$, *то вероятность* $P_n(m)$, *что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству*

$$\lim_{n \to \infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

т. е. если *p – постоянно и мало,*
n – велико,
$np = \lambda \le 10$, *то*

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}. \qquad (1.12)$$

Пример. На факультете 1825 студентов. Какова вероятность, что 1-е сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

Решение. Вероятность того, что день рождения студента 1-го сентября $p = \frac{1}{365}$ – мала, $n = 1825$ – велика, $\lambda = np = 5 \le 10$, то

$$P_{1825}(4) = \frac{5^4 \cdot e^{-5}}{4!} = 0.1755.$$

1.1.17. Задание для самостоятельной работы

1. Если 30 % студентов данного курса имеют слабое зрение, то какова вероятность, что 5 студентов из 10-ти имеют слабое зрение?

Ответ: 0.1.

2. Вероятность того, что Вы выиграете в шахматы равна 0.33. Определить вероятность того, что Вы выиграете 4 партии, если у Вас 6 соперников.

Ответ: 0.08.

3. Телефонная станция обслуживает 500 абонентов. Вероятность позвонить на коммутатор любому абоненту в течение часа – 0.01. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 3 абонента?

Ответ: 0.1404.

4. В корзине 5 белых и 50 черных шаров. Какова вероятность того, что при 10-ти выборках с возвращением 3 раза будет выниматься белый шар? Определить вероятность, используя формулу Бернулли и Пуассоновское приближение.

Ответ: 0.05.

5. В 1000 представлениях докладов о преимуществах телекоммуникационный связи:

а) 63 % указывают на уменьшение стрессов;
б) 58 % – на повышение активной деятельности;
в) 79 % указывают на рекламирование повышения морали.

Случайно выбираются 20 докладов. Каково наиболее вероятное число докладов, в которых указывается:

а) на уменьшение стрессов;
б) на повышение активной деятельности;
в) на рекламирование повышения морали?

Ответ: 13, 12, 16.

6. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин. Всего на маршруте 10 машин. Вероятность невыхода машины равна 0.1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

Ответ: 0.9298.

1.1.18. Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа

Локальная формула Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A произойдет m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \tag{1.13}$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{1.14}$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \tag{1.15}$$

чем больше n, тем точнее формула (1.13). Вычисление по этой формуле дает незначительную погрешность при выполнении условия $npq \geq 20$.

Функция $f(x)$ протабулирована. Пользуясь таблицей, необходимо иметь в виду свойства этой функции.

1. *Функция* $f(x)$ *является четной, т. е.* $f(-x) = f(x)$.

2. *Функция* $f(x)$ *монотонно убывающая при положительных значениях x, причем* $f(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$.

(Практически $f(x) = 0$ уже при $x > 4$).

Пример. В некоторой местности из каждых ста семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность, что из четырехсот семей 300 имеют холодильники.

Решение. Вероятность того, что семья имеет холодильник,

$p = \frac{80}{100} = 0.8$;

$npq = 100 \cdot 0.8(1 - 0.8) = 64 \geq 20$. Условие выполнено.

Применим локальную теорему Муавра – Лапласа. Вначале определим $x = \dfrac{300 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -2.5$.

По формуле

$$P_{400}(300) = \frac{f(-2.5)}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{f(2.5)}{\sqrt{64}} = \frac{0.0175}{8} \approx 0.0022.$$

Значение $f(2.5)$ найдено по табл. IV Приложения.

Пусть в условиях данного примера необходимо найти вероятность того, что от 300 до 360-ти семей (включительно) имеют холодильники, в этом случае по теореме сложения вероятность искомого события

$$P_{400}(300 \le m \le 360) = P_{400}(300) + P_{400}(301) + \ldots + P_{400}(360).$$

Значение из слагаемых можно вычислить по локальной теореме Муавра – Лапласа, но это слишком громоздко. В этом случае можно использовать *интегральную теорему Муавра – Лапласа*.

Интегральная теорема Муавра – Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что число m наступления события A в n независимых испытаниях заключено в пределах от a до b (включительно) при достаточно большом числе n приближенно равна

$$P_n(a \le m \le b) \approx \tfrac{1}{2}[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)], \qquad (1.16)$$

где $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ – функция (или интеграл Лапласа); (1.17)

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}; \qquad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (1.18)$$

Чем больше n, тем точнее формула; при $npq \ge 20$ формула дает незначительную погрешность.

Свойства функции Лапласа

1. *Функция* $\Phi(x)$ *нечетная*

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

2. *Функция* $\Phi(x)$ *монотонно возрастающая; при* $x \to \infty$ $\Phi(x) \to 1$, *практически уже при* $x > 4$ $\Phi(x) \approx 1$.

Пример. По данным предыдущего примера

$$P(300 \le m \le 360) \approx \tfrac{1}{2}[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)],$$

где $$x_1 = \frac{300 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -2.5;$$

$$x_2 = \frac{300 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = 5.0;$$

$$P_{400}(300 \le m \le 360) \approx \tfrac{1}{2}[\Phi(5) - \Phi(-2.5)] =$$

$$= \tfrac{1}{2}[\Phi(5) + \Phi(2.5)] \approx \tfrac{1}{2}(1 + 0.9876) = 0.9938.$$

Следствие. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то при достаточно большом числе n независимых испытаний вероятность того, что:

а) число m наступлений события A отличается от произведения np не более чем на величину $\varepsilon > 0$ (по абсолютной величине), то

$$P_n(|m - np| \le \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right); \tag{1.19}$$

б) частость $\frac{m}{n}$ события A заключена в пределах от α до β (включительно):

$$P_n\left(\alpha \le \frac{m}{n} \le \beta\right) \approx \frac{1}{2}[\Phi(z_2) - \Phi(z_1)], \tag{1.20}$$

где $$z_1 = \frac{\alpha - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}; \qquad z_2 = \frac{\beta - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}; \tag{1.21}$$

в) частость $\frac{m}{n}$ события A отличается от его вероятности p не более чем на величину $\Delta > 0$ (по абсолютной величина), т. е.

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \Delta\right) \approx \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \tag{1.22}$$

1.1.19. Задание для самостоятельной работы

1. В корзине 7 белых и 3 черных шара. Какова вероятность того, что при десяти независимых выборах с последующим возвращением шара будет выниматься 6 раз белый шар?

Ответ: 0.2.

2. В корзине 7 белых и 3 черных шара. Какова вероятность того, что при ста независимых испытаниях с последующим возвращением шара белый шар будет выниматься 60 раз? Каково наиболее вероятное число появления белого шара?

Ответ: $P_{100(60)} = 0.0081$, $m_0 = 70$.

3. В корзине 7 белых и 3 черных шара. Какова вероятность того, что при ста независимых испытаниях с последующим возвращением шара не менее 80-ти раз будет выниматься белый шар?

Ответ: 0.005.

4. Вероятность того, что с конвейера сойдет бракованный прибор, равна 0.02. За смену было изготовлено 3600 приборов. Найти максимальное отклонение относительной частоты появления бракованных приборов от вероятности 0.02, если вероятность такого отклонения равна 0.95.

Ответ: 0.0046.

5. Вероятность того, что на станке-автомате будет изготовлена деталь, размеры которой отклонятся от стандарта, равна 0.01. Сколько надо изготовить деталей, чтобы с вероятностью 0.99 ожидать, что отклонение частоты появления нестандартной детали от вероятности ее появления не будет больше, чем 0.03.

Ответ: 74.

6. Известно, что при контроле бракуется 10 % изделий. Для контроля отобрано 625 изделий. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей не менее 550 и не более 575 стандартных деталей.

Ответ: 0.9051.