

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального
образования
“ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

С.Н. Харламов

**АЛГОРИТМЫ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Учебно-методический комплекс

**Издательство ТПУ
Томск 2008**

УДК 523.529:536.46
ББК 253.312

Харламов С.Н. **Алгоритмы при моделировании гидродинамических процессов.** – Томск. Изд-во ТПУ, 2008. - 80с.

В учебном комплексе излагаются научная концепция, вычислительные технологии, методы физико-математического и численного моделирования течений вязких теплопроводных сред в трубопроводных системах с использованием современных достижений вычислительной механики и математической оптимизации. Детально рассматриваются формы уравнений, варианты граничных условий, разнообразные типы конечно-разностных схем. Обсуждаются их точность, устойчивость и сходимость при расчете сложных сдвиговых течений с тепломассообменом в нефте- и газопроводах. Практическое применение материала численного моделирования процессов турбулентного переноса тепла, массы и импульса в замкнутых системах, трубах и каналах направлено на комплексную оценку состояния трубопроводных систем, определения эффективных безопасных режимов их эксплуатации. Описываемые алгоритмы могут быть использованы в качестве теоретического фундамента в аппаратно-программных средствах прогнозирования и обнаружения нарушений в функционировании трубопроводных систем. Эффективность вычислительных технологий, быстродействие алгоритмов и оригинальность подходов и методов численного моделирования тепломассообмена в магистральных трубопроводах иллюстрируются конкретными результатами.

Комплекс полезен научным работникам, инженерам, аспирантам и студентам вузов, занимающимся проектированием и эксплуатацией магистральных трубопроводов, управлением трубопроводными сетями, повышением их пожарной и промышленной безопасности.

Включает: 43 иллюстрации, 27 использованных источников литературы, 2 таблицы, 2 блок-схемы.

Р е ц е н з е н т:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры Прикладной информатики
Северской государственной технической академии,
Почетный энергетик РФ

О.Ю. Троицкий

© Издательство ТПУ, 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| Предисловие..... | 4 |
| Обозначения | 7 |
| Введение..... | 9 |
| Глава 1. Современные методы и модели исследования сложных сдвиговых потоков..... | 11 |
| 1.1. Тенденции в моделировании гидродинамики и тепломассообмена при ламинарных и турбулентных течениях в трубопроводах..... | 11 |
| 1.2. Этапы построения сложных моделей с учетом анизотропии..... | 14 |
| 1.3. Характеристика закрученных потоков..... | 18 |
| Глава 2. Основные уравнения динамики жидкости и вязкого газа..... | 20 |
| 2.1. Уравнение неразрывности..... | 21 |
| 2.2. Уравнение количества движения..... | 22 |
| Глава 3. Основные уравнения турбулентного течения и теплообмена в каналах..... | 24 |
| 3.1. Нульпараметрические модели..... | 25 |
| 3.2. Однопараметрические модели..... | 25 |
| 3.3. Двухпараметрические модели..... | 26 |
| Глава 4. Технология численного решения гидродинамических задач..... | 28 |
| 4.1. Обзор методов и алгоритмов решения определяющих уравнений..... | 28 |
| 2.1.1. Алгоритм SIMPLE..... | 30 |
| 2.1.2. Конечно-разностные методы расчета внутренних течений..... | 36 |
| 2.1.3. Алгоритм Л.М. Симуни. Оригинальная версия..... | 37 |
| 2.1.4. Алгоритм метода дробных шагов..... | 38 |
| Глава 5. Математическая модель к расчету гидродинамики и теплообмена сложного сдвигового потока в трубах и каналах..... | 40 |
| 5.1. Физическая постановка задачи..... | 40 |
| 5.2. Математическая формулировка проблемы..... | 41 |
| 5.3. Модель турбулентности к замыканию уравнений, определяющих течение и теплоперенос во внутренних системах..... | 42 |
| 5.4. Краевые условия..... | 44 |
| 5.5. Особенности используемого численного метода и алгоритм решения задач теплообмена..... | 45 |
| 5.5.1. Схема численного интегрирования уравнений приближения “узкого канала”..... | 45 |
| Глава 6. Анализ результатов численного гидродинамического моделирования..... | 52 |
| 6.1. Гидродинамическая часть задачи..... | 52 |
| 6.1.1. Трубы и каналы постоянного и переменного поперечного сечений..... | 57 |
| 6.1.2. Теплообмен при ламинарном режиме..... | 59 |
| 6.1.3. Турбулентный режим..... | 62 |
| 6.1.3.1. Математическая модель течения..... | 65 |
| 6.1.3.2. Граничные условия и численный метод решения..... | 69 |
| 6.1.3.3. Результаты анализа..... | 70 |
| Глава 7. Заключительные замечания..... | 75 |
| Список литературы..... | 78 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение проблем безопасности транспорта природного сырья по трубопроводам связано с повышением надежности, эффективности работы объектов трубопроводного транспорта и трубопроводов энергетических предприятий. Эти проблемы необходимо рассматривать совместно с задачей снижения энергетических затрат на транспорт продуктов по магистральным трубопроводам, поэтому подготовка специалистов по комплексному физико-математическому моделированию вопросов транспорта вязких сред по трубам, каналам протяженной длины или коротких участков представляется чрезвычайно актуальной.

В данном пособии дается развернутое представление о теоретических основах, методиках и алгоритмах, компьютерной реализации и применении оригинальных вычислительных технологий к решению задач о движении сложных по структуре сред во внутренних системах с произвольной границей области течения. Заметим, что в основе рассматриваемых вычислительных технологий лежит концепция комплексного численного моделирования сложных трубопроводных систем с использованием базовых моделей механики сплошной среды, численных методов механики неоднородных систем, турбулентных потоков. Как известно, такие технологии успешно применяются при решении многочисленных многомерных и многопараметрических производственных задач повышения безопасности, эффективности и экологичности промышленных трубопроводных сетей в газовой, нефтяной, химической промышленности, теплоэнергетике и машиностроении.

Одним из важных направлений в обучении инженеров-вычислителей, широкого класса специалистов по данным вопросам является умение составлять конечно-разностные алгоритмы решения различных гидро- и газодинамических задач. Структура пособия позволяет практически освоить методику численного решения сложнейших задач гидродинамики и теплообмена. Этому способствуют также оригинальные результаты автора по исследованию тепломассообмена при ламинарном и турбулентном режимах течений инертных и химически реагирующих сред с учетом и отсутствием действия массовых сил на поток в каналах. Результаты расчетов получены на основе описываемых технологий и отвечают широкому диапазону изменений параметров течения, теплообмена и геометрии трубопроводных систем. Кроме того, в пособии излагаются некоторые собственные наблюдения, основанные на чтении курсов лекций дисциплин физико-математического профиля для специальности “Проектирование, сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ”, “Механика”, “Вычислительная гидродинамика” для выпускников классического и технического университетов, для повышения квалификации работников нефтяной и газовой промышленности.

Стоит заметить, что излагаемый материал не труден сам по себе. Тем не менее, его не следует рассматривать в отрыве от общего учебного плана. Для исключения неясностей и неожиданностей при знакомстве с материалом пособия отметим, что его содержание опирается на следующие ключевые слова, идеи и понятия: математическая модель, конечно-разностный аналог, схема аппроксимации, точность, устойчивость, сходимости, сдвиговой поток, гидродинамика, тепломассообмен, турбулентность, закрутка, коэффициенты переноса, пульсации скорости и скаляра, турбулентные потоки тепла, массы и импульса, диссипация кинетической энергии турбулентности, деструкция температурного поля,

интегральный масштаб турбулентности, характерные времена пульсаций тепловых и динамических величин.

Объектом исследования в пособии принимаются ламинарные и турбулентные течения жидкостей и газов в трубопроводах, теплообмен в каналах с особенностью границ области течения и входа потока.

Предметом исследования (с целью выяснения достоинств методик, эффективности численного алгоритма) выступают задачи, связанные с: процессами молярного и молекулярного переноса, локальные и интегральные параметры течения и теплообмена, происходящие в сложных условиях движения на основе оригинальных и редко используемых многопараметрических моделей, включающих опорные базы из транспортных уравнений для времен динамических и тепловых пульсаций, интегрального масштаба турбулентных вихрей, предложенных в работах С.С. Speziale, Г.С. Глушко, С.Н. Харламова.

Основное внимание в пособии уделяется вопросам: 1. Изучения опыта математического моделирования гидродинамики и тепломассообмена при сложном движении вязких теплопроводных сред в трубопроводах с горизонтальными участками магистрали, включающими области постоянного и переменного поперечного сечения, а также зоны локальной закрутки потока с целью интенсификации процессов переноса тепла и импульса при взаимодействии со стенкой канала; 2. Овладения методиками расчета и измерения теплогидродинамических параметров потока в режимах движения, характерных для пуска и останова оборудования по транспорту нефти, развитого и развивающегося течения по каналам и трубам; 3. Численному исследованию статистических характеристик изотермических и неізотермических прямоточных и закрученных потоков; 4. Оценке эффективности замыкающих соотношений к неизвестным членам высшего порядка в двухпараметрических тепловых и динамических моделях турбулентности; 5. Анализу влияния пространственной и тепловой деформации на локальные и интегральные параметры течения и теплообмена с помощью современных турбулентных моделей.

При изложении вопросов течения смесей в пособии используются методы физико-математического моделирования, опирающиеся на положения механики сплошных сред, молекулярной теории неоднородных газов, полуэмпирической теории турбулентности, тепломассообмена и вычислительной гидро- и аэродинамики. Кроме того, в пособии представлены данные, интересные с научной точки зрения, новизна которых связана с: 1. Оценкой возможностей используемых моделей турбулентности с транспортными уравнениями для интегрального масштаба турбулентности, времен пульсаций тепловых и динамических величин, автокорреляций пульсаций температуры (энтальпии), их замыкающих соотношений к сквозному расчету развивающихся внутренних течений с теплообменом во всей области движения, вплоть до стенки трубы, включая ламинарный подслой и буферную зону. 2. Разработкой численного алгоритма эффективного расчета пристеночных прямоточных и закрученных сложных сдвиговых течений. 3. Анализом практических аспектов работы ряда устройств, включающих длинные и короткие участки труб и каналов. Как известно, такие системы широко встречаются в тепло- и энергетической промышленности, газовой, нефтяной и авиационной отраслях техники.

Отдельно анализируются вопросы точности расчета “тонких” локальных осредненных и пульсационных параметров, а также интегральных характеристик

течения и теплообмена. Даются заключения о перспективности использования опорных баз с уравнениями для интегрального масштаба, автокорреляций пульсаций температуры, характерных времен турбулентности тепловых и динамических величин в многопараметрических моделях для компонент тензора напряжений Рейнольдса и турбулентных потоков скаляра в расчетах течений неоднородных неизотермических сред в трубопроводах.

Таким образом, материал настоящего пособия, его структура и содержание могут быть дополнены как новыми моделями замыканий осредненных уравнений турбулентного течения, так и схемами решений определяющих уравнений. Такие задачи являются неисследованными научными и практическими проблемами и могут служить превосходным стимулом для их выполнения студентами.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за чтение и ценные предложения по улучшению изложения материала, своим ученикам (асп. М.Г. Дашкину, асп. В.Ю.Киму, асп. С.И. Сильвестрову), которые участвовали в обсуждении рукописи и любезно предоставили отдельные иллюстрации распределений локальных параметров конкретных примеров течений и теплообмена в каналах.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Новым понятиям неизбежно соответствуют новые обозначения. Мы выбираем их так, чтобы они напоминали нам о явлениях, послуживших поводом для формирования новых понятий.

Давид Гильберт, 1900г.

Заметим, что размерности основных физических величин даны в единицах массы (M), длины (L), времени (t) и температуры (T).

Основные условные величины:

A, B, C, D, F – переменные коэффициенты трех- и пятиточечных сеточных уравнений;
 a – температуропроводность, $L^2 t^{-1}$;
 c_f – коэффициент трения или коэффициент сопротивления Фаннингера;
 c_p – теплопроводность при постоянном давлении в растете на единицу массы, $L^2 t^{-2} T^{-1}$;
 c_i – коэффициенты в модели турбулентности;
 D – диаметр трубы, L ;
 G_0 – расход объемный, $L^3 t^{-1}$ или массовый, $M t^{-1}$;
 h – высота уступа, L ;
 K – кинетическая энергии турбулентности, $L^2 t^{-2}$;
 L – масштаб турбулентности, L ;
 l – прандтлевская длина пути смешения, L ;
 p – статическое давление вязкой среды, $M L^{-1} t^{-2}$;
 P – скорость порождения энергии турбулентности, $L^2 t^{-3}$;
 P_{ij} – скорость порождения составляющей напряжения Рейнольдса, $L^2 t^{-3}$;
 R – радиус трубы, L ;
 r – локальный радиус или координата в цилиндрической системе координат, L ;
 \dot{S}_{ij} – тензор скоростей деформаций соответствующей компоненты, t^{-1} ;
 T – абсолютная температура, T ;
 Tu – степень турбулентности;
 t – время, t ;
 $\overline{u'_i u'_j}$ – напряжения Рейнольдса, $L^2 t^{-2}$;
 U, V, W – проекции вектора скорости в осевом, радиальном и азимутальном направлениях соответствующие осям декартовой системы координат x, y, z , $L t^{-1}$;
 u_i – компонента вектора скорости, $L t^{-1}$;
 v^* – динамическая скорость, $L t^{-1}$;
 \vec{V} – вектор скорости, $L t^{-1}$;

W_j, Z_j — сеточные функции продольной компоненты вектора скорости \vec{V} , Lt^1 ;
 x_r — точка присоединения, L ;
 x, y, z — координаты в прямоугольной системе координат, L ;
 y^+ — универсальная координата стенки;
 Π_{ij} — компоненты тензора напряжения, $ML^{-1}t^2$;
 α_i, β_i — коэффициенты «прямой прогонки»;
 δ_{ij} — компоненты единичного тензора;
 ε — диссипация кинетической энергии турбулентности, L^2t^3 ;
 λ — коэффициент теплопроводности; $MLt^{-3}T^1$;
 λ_t — турбулентный аналог λ ;
 μ — коэффициент динамической вязкости, $ML^{-1}t^{-1}$;
 μ_t — турбулентный аналог μ ;
 ν — коэффициент кинематической вязкости, L^2t^{-1} ;
 ν_t — турбулентный аналог ν ;
 ρ — плотность, ML^{-3} ;
 τ — характерное время пульсаций динамических величин, t ;
 τ_0 — характерное время пульсаций тепловых параметров, t ;
 τ_w — касательное напряжение на стенке, $ML^{-1}t^2$;
 τ_{ij} — компоненты тензора вязких напряжений, $ML^{-1}t^{-2}$.

Индексы:

0 — величина на входе в канал или характерные значения;
 $*$ — соотнесено к некоторому характерному размеру;
 $кр$ — критический;
 i, j — сеточные индексы;
 l — ламинарный;
 t — турбулентный;
 w — величина на стенке.

Безразмерные группы:

Nu — критерий Нуссельта;
 Pr — критерий Прандтля;
 Re — критерий Рейнольдса;
 Ro — критерий Россби;
 X — приведенная длина.

Символ некоторых математических операций:

∇ — оператор Гамильтона “набла”;
 Δ — оператор Лапласа “дельта”;
 $- -$ — осреднение по времени Рейнольдса;
 \sim — осреднение по Фавру.

ВВЕДЕНИЕ

Горе и отчаяние всегда
сопровождают попытки
создать универсальную
модель порядка и хаоса.

Рёзо Кубо, 1960г.

В последние годы развитие вычислительной техники и методов численного решения задач тепло- и гидрогазодинамики привело к тому, что во многих объектах науки и техники численное исследование физических явлений и процессов переноса энергии, импульса и массы становится определяющим. Методы изучения соответствующих математических задач с использованием ПЭВМ занимают промежуточное положение между экспериментальными и теоретическими методами. С одной стороны, проведение каждого расчета на ПЭВМ похоже на проведение физического эксперимента: исследователь включает в рассмотрение определяющие уравнения и следит за тем, что происходит с процессом. С другой стороны, получение численного решения не связано с физическим измерением параметров изучаемого явления, и правдоподобность результатов прямо связана с достоверностью математических моделей, которые применяются для описания изучаемых явлений. Таким образом, численное исследование физических явлений, как правило, требует глубокого теоретического понимания их сущности, представленной математически, и не позволяет изучать общие закономерности этих явлений без проведения расчетов для набора значений определяющих параметров.

Численный эксперимент занимает доминирующее место при изучении тепло- и гидрогазодинамических процессов. Технологию численного эксперимента можно представить в виде этапов: 1) математическая постановка задачи, включающая разработку и выбор математической модели; 2) построение методики решения задачи в целом со структурным анализом математической модели. Последний обеспечивает декомпозицию задачи на составные части; 3) разработка алгоритма решения отдельных задач; 4) модульный анализ алгоритмов; 5) разработка проекта программы с описанием структуры данных, информационных потоков; 6) разработка программы или модификация существующих; 7) проведение тестовых расчетов; 7) проведение собственно решения задачи. Заметим, что в процессе численного эксперимента результаты требуют возврата к предыдущим этапам для внесения необходимых изменений в математическую модель, метод решения, программный код. Таким образом, технологическая цепочка имеет много обратных связей, приводит к цикличности процесса, что в итоге существенно увеличивает стоимость численного эксперимента.

Существенное значение при численном моделировании имеет факт уменьшения затрат на разработку и модификацию программы. Процесс модификации находится в самом внутреннем цикле технологической цепочки численного эксперимента, поскольку и уточнение постановки задачи, и изменение методов численного решения задачи с той же математической постановкой приводят в итоге к необходимости внесения изменений в программу. Эффект в этом

направлении достигается за счет разработки проблемно-ориентированных комплексов программ. Одним из основных требований к такому комплексу является обеспечение такой гибкости программных реализаций, при которой существенно облегчается настройка на конкретную физическую или математическую задачу определенного класса. Реализация этого требования приводит к простой структуре комплекса программ, позволяющей вносить изменения в математическую модель или метод решения путем естественного расширения комплекса новыми программами.

В технологической цепочке численного моделирования основное внимание уделяется разработке *методов и алгоритмов решения задач*. В методологии разработки алгоритма должен присутствовать структурный подход. Основная суть этого подхода состоит в том, чтобы создавать такие программы, сложность которых не будет превышать некоторого уровня, несмотря на любую сложность реализуемого алгоритма. Эта идея осуществляется построением простой и ясной структуры программы путем синтеза единого целого из составных частей. Разработка программы с позиций структурного подхода в основном ведется сверху вниз методом пошаговой детализации: вначале описывается алгоритм решения задачи в целом (верхний уровень программы), а затем детализируется каждое частное действие. Подобная детализация проводится до уровня выражения частного действия одним оператором используемого языка программирования. Другими словами, детализация алгоритма всегда заканчивается на уровне действий, которые можно непосредственно реализовать на конкретном языке программирования для реальной ПЭВМ.

Кроме того, данный подход к производству больших программ предусматривает иерархическое разбиение алгоритмов решения и математической постановки. Сложную комплексную задачу можно разбивать на ряд более простых задач (гидродинамическую, тепловую, диффузионную), для которых предполагаются известными все внешние входные данные. Здесь процесс детализации заканчивается на уровне выделения более простых задач. Таким образом, структурный анализ постановки задачи предусматривает построение иерархической системы отдельных подзадач. На следующем этапе разработки программы проводится детализация алгоритмов решения этих выделенных задач также в виде иерархических структур, реализующих выбранные алгоритмы. В итоге проведенный структурный анализ алгоритма позволяет разрабатывать легко модифицируемую программу. Внесение необходимых изменений в расчетные соотношения сводится к исправлению некоторых действий определенного уровня и не затрагивает других частей программы. Наш опыт показывает, что разрабатываемые на такой основе комплексы программ являются развивающимися системами: с течением времени расширяется круг задач решаемых с помощью комплекса, увеличивается число структурных модулей в комплексе, улучшается качество отдельных модулей и т.д.

Согласно цели и предмета пособия систематическая декомпозиция задач теплогазодинамики включает частные задачи: 1) численное решение дифференциальных уравнений для определения теплогазодинамических параметров во внутренних точках области течения с привлечением детальной модели турбулентности; 2) определение параметров рабочей среды на границах

области движения исходя из граничных условий и значений параметров в пристеночных точках; 3) расчет коэффициентов переноса при известных значениях динамических параметров и концентраций компонент смеси; 4) определение давления или плотности из уравнения состояния при известном составе среды и необходимых динамических параметрах; 5) определение концентраций компонент смеси из уравнений диффузии при известных значениях динамических параметров и коэффициентов переноса; 6) расчет геометрических коэффициентов, определяющих систему координат в случае, когда она автоматически подстраивается под структуру потока.

Таким образом, из декомпозиции видно, что в основе математических моделей должно лежать глубокое физическое понимание существа физических явлений сопровождающих процессы переноса при течении сложных по структуре сред в трубопроводах. Остановимся кратко на существе этих положений.

ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СДВИГОВЫХ ПОТОКОВ

1.1. Тенденции в моделировании гидродинамики и тепломассообмена при ламинарных и турбулентных течениях в трубопроводах. Из библиографических источников, учебной и специальной литературы, посвященных механике жидкости и газа, вычислительной гидродинамике хорошо известно, что одним из наиболее простых случаев движения вязкой несжимаемой жидкости в трубопроводах, трубах и каналах является ламинарное течение. При таком течении линии тока представляют собой плавные прямые линии, определяемые видом твердых границ, ограничивающих движение среды. Как показывают опыты, такое движение осуществляется в трубах с различными формами поперечных сечений, если только число Рейнольдса Re не превосходит некоторого своего критического значения $Re_{кр}$. В противном случае движение перестает быть ламинарным и частицы среды перемещаются по сложным неустойчивым траекториям нестационарного потока. При дальнейшем увеличении скорости течения в трубах формируется вихревой режим сложного сдвигового потока – турбулентный. В таком движении поля скоростей, давлений, температур и других величин имеют весьма сложную структуру. Из-за наличия в потоке турбулентных неоднородностей, “пятен” структура потока чувствительна к мгновенным случайным пульсациям поля давления, скорости и температуры. В таких условиях параметры среды становятся иррегулярными как по пространству, так и по времени. Причем детальный эксперимент позволяет обнаружить, что пространственно-временные масштабы этих неоднородностей существенно превосходят соответствующие масштабы молекулярных движений. Поэтому описание турбулентных течений с помощью дифференциальных уравнений законов сохранения импульса, тепла и массы вполне оправдано. Заметим, что имеются определенные достижения в вопросах прямого численного моделирования турбулентных течений по уравнениям, записанным для мгновенных значений искомых величин. Однако широкое использование такого подхода невозможно из-за значительных сложностей технического характера. Кроме того, существуют определенные трудности принципиального характера, не позволяющие провести полное описание турбулентных движений.

В настоящее время в расчетах сложных сдвиговых течений с пространственной и тепловой деформацией потока в технических приложениях (например, в трубопроводах) все большую популярность приобретает альтернативный метод, базирующийся на полуэмпирической теории турбулентности и включающий многопараметрические модели для моментов второго порядка. Наряду с относительно простыми двухпараметрическими моделями современные модели с транспортными уравнениями для компонент полного тензора напряжений Рейнольдса и турбулентных потоков тепла и массы представляют мощное направление в детальном изучении сложных процессов. Однако они сложны в реализации и нуждаются в предварительной оценке своих возможностей на ряде конкретных режимов работы технических устройств. В практике прикладных задач двухпараметрические тепловые и динамические модели турбулентности в сравнении с многопараметрическими выглядят предпочтительнее из-за широты области приложений, полноты апробаций, но не лишены трудностей в описании существенно анизотропных процессов без соответствующей модификации к конкретным условиям, например, внезапному отрыву потока из-за скачка площади поперечного сечения, наличия переходов и т. д. Поэтому исследования механизмов отрыва, присоединения, ламинаризации или турбулизации потока, а именно эти процессы сопровождают течение среды при его продвижении по трубопроводу, весьма актуальны. Стоит заметить так же, что в условиях численного расчета течений с ламинарно-турбулентным переходом очень высока степень доверия вычислительному алгоритму, поэтому анализу турбулентного тепло- и массообмена должна предшествовать кропотливая работа по предсказанию предельных устойчивых ламинарных режимов. Эти данные являются хорошим материалом для оценки эффективности подхода, надежности метода к описанию сложного сдвигового течения с интенсивным тепло- и массообменом в технических устройствах.

Представляется целесообразным остановиться на отдельных работах, посвященных современному моделированию процессов переноса импульса, тепла и массы в каналах. В учебном смысле такой опыт в анализе широкого круга проблем, связанных с формулировкой задач и выбором метода и методик их решения для любого специалиста весьма полезен и важен. Отметим, что библиография вопросов расчета *теплообмена* в каналах и трубопроводах достаточно широко представлена в отечественных и зарубежных изданиях. В настоящее время имеются решения многих задач о теплообмене и сопротивлении при вынужденной, свободной и смешанной конвекции, исследованы закономерности течения и теплообмена в трубах, проанализировано влияние на гидродинамику и теплообмен переменных свойств жидкости, достигнуты существенные успехи в численном решении полных уравнений движения (уравнений Навье-Стокса) и энергии для двумерных течений, однако, по-прежнему актуальны задачи о гидродинамике и теплообмене в сложных устройствах, трубопроводах с особенностью границ области течения углеводородных сред. Анализ этих данных позволяет заключить, что в настоящее время теория теплопроводности достигла высокого уровня и известной завершенности, дает возможность решать практически любую задачу для изотропных неоднородных систем. Для решения нелинейных задач, задач со сложной геометрией, при наличии других осложняющих обстоятельств инженеры прибегают к численным методам решения с применением ПЭВМ. При этом обычно используются *метод конечных разностей* [1] и/или *метод контрольного объема* [2].

В качестве предмета дальнейших исследований по указанному направлению представляют большой интерес общие задачи о теплообмене при ламинарных течениях. К ним относятся двух- и трехмерные стационарные и нестационарные задачи, в том числе и *сопряженные*. Для обработки и интерпретации опытных данных, получаемых в сложных условиях, важны *обратные задачи теплообмена* (в том числе теплопроводности). Решение этих и других задач требует усовершенствования численных методов и использования ПЭВМ с большим объемом памяти и высоким быстродействием. Указанные работы подчеркивают необходимость строгой математической физики задач о ламинарном течении и теплообмене. Их решение связано с преодолением преимущественно математических трудностей и в большинстве случаев может быть проверено с необходимой точностью. Следовательно, при получении опыта в анализе сложных течений знания в моделировании более простых ламинарных течений весьма полезны. Необходим опыт исследований ламинарных потоков с высокой степенью достоверности, опираясь на существующий эксперимент, с целью возможного обобщения численных методик на более сложные турбулентные процессы.

Выше мы отмечали, что в настоящее время *прямое численное моделирование* (ПЧМ) возможно только для потоков с относительно низкими числами Рейнольдса. Однако метод ПЧМ очень полезен для описания турбулентной структуры, так как способен дать полную информацию о картине течения и участвовать в оценке эффективности турбулентных моделей. В результате решения проблем, связанных с интегрированием уравнений Навье – Стокса методами ПЧМ, получил развитие *метод крупных вихрей* (МКВ), в котором масштабы движения, большие размеров ячейки, рассчитываются непосредственно из уравнений, а мелкомасштабные – подлежат моделированию тем или иным способом.

В настоящее время при рассмотрении статистических осредненных полей искомым характеристикам широкое распространение получил *моментный подход*, а также *метод использования приближенных эмпирических соотношений* и предположений чисто эвристического характера, достоверность которых не вызывает сомнения в ряде частных случаев. В отличие от МКВ, статистические модели турбулентности охватывают весь спектр турбулентных масштабов течения.

В рамках моментного подхода можно выделить три основных способа моделирования турбулентности. Два используют понятие вихревой вязкости, в котором турбулентные напряжения Рейнольдса $\overline{u'_i u'_j}$ предполагаются пропорциональными градиентам средней скорости с коэффициентом пропорциональности ν_t (вихревая вязкость), определяющим интенсивность турбулентного обмена. Третий подход основан на непосредственном определении напряжений Рейнольдса из дифференциальных уравнений и известен в литературе, как полная схема замыкания на уровне моментов второго порядка. Модели первых двух типов составляют модели: нулевого порядка, одно-, двухпараметрические, к третьему относятся многопараметрические модели переноса рейнольдсовых напряжений (ПРН).

Использование коэффициента вихревой вязкости позволяет строить решения, пригодные лишь в конкретных условиях. Сложные турбулентные движения, часто встречающиеся в инженерных приложениях, требуют использования более общих приемов в моделировании. Практические потребности в изучении сдвиговых течений способствовали формированию тенденции к построению технологичных

моделей турбулентного переноса, содержащих транспортные уравнения для одноточечных корреляционных моментов второго, третьего порядка, а также отдельные уравнения для двухточечных моментов, и позволили перейти от глубоко эмпирических подходов к ПРН-моделям, в сущности полуэмпирическим. Такие модели существенно более надежны при изучении явлений в системах и устройствах со сложной геометрией, а также в процессах, осложненных кривизной потока. Недостаточная апробация таких моделей определяет необходимость их широкого тестирования. Заинтересованных данными вопросами следует направить к работам В.Е. Launder, К. Hanjalic, W. Rodi, R.M.C. So, S. Elghobashi, N. Shima, В.А. Коловандина, А.Ф. Курбацкого, Э.П. Волчкова, Ю.В. Лапина, внесшим большой вклад в изучение этих проблем. Анализ показывает, что с точки зрения создания надежных численных методик большинство из моделей не выглядят универсальными. Проблема конструирования многопараметрических моделей сопряжена с расширением банка экспериментальных данных, содержащих сведения о структуре турбулентности, которые в настоящее время противоречивы.

С академической точки зрения (для большей ясности решения инженером-вычислителем вопроса выбора модели, метода, алгоритма и перспектив их реализации на практике) целесообразно также кратко указать детали построения сложных многопараметрических моделей.

1.2. Этапы построения сложных моделей с учетом анизотропии. Основа современных ПРН-моделей была заложена в работах Дж.К. Ротты, П.Я. Чоу, В.И. Давыдовым, К.Р. Дональдсоном, К.У. Хиртом, Б.Дж. Дэйли, Ф.Х. Харлоу. Эти исследования убедили, что трудности численного решения всех транспортных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для компонент тензора турбулентных напряжений вполне преодолимы и замыкание определяющих течение осредненных уравнений технически возможно. В настоящее время ведется активная работа по усовершенствованию первых версий ПРН-моделей, что, в конечном счете, должно завершиться созданием универсальной и надежной основы для расчета широкого спектра течений, содержащих, в частности, искривление линий тока, отрыв, закрутку, рециркуляционные зоны и т.д. Этот уровень замыкания действительно обеспечивает большую гибкость и позволяет создать модели, применимые в широких пределах изменения определяющих параметров.

В настоящее время некоторые из моделей уже приобретают черты, характерные для нового этапа в проведении такого рода работ. Уже сейчас имеются результаты, позволяющие судить об эволюции рейнольдсовых напряжений в развивающемся сдвиговом течении. Но такое течение представляется существенно анизотропным. Поэтому необходим подход, учитывающий этот фактор.

Анизотропный характер турбулентности оказывает решающий вклад в баланс процессов, определяющих изменение осредненного импульса, тепла и массы, и требует пристального изучения. Как показывает опыт, в среде, турбулированной естественным образом, наблюдается анизотропия процессов переноса. Поэтому анализ напряженного состояния такой среды целесообразно проводить с привлечением связей, учитывающих процессы энергетического обмена в искомым напряжениях. Такими связями могут быть полные уравнения для $\overline{u'_i u'_j}$, выражающие взаимодействия между процессами конвекции (C_{ij}), порождения

(P_{ij}) , диффузии (D_{ij}) , перераспределения (R_{ij}) и диссипации (ε_{ij}) и имеющие следующую структуру:

$$C_{ij} = P_{ij} + D_{ij} + R_{ij} - \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Данный подход (замыкание на уровне вторых моментов) есть основа моделирования сложных двух- и трехмерных течений с эффектами тепломассопереноса. Тестирование таких моделей лучше начинать с изотермического случая. Поэтому первоначально должны быть рассмотрены проблемы моделирования турбулентного переноса импульса.

В пособии рассматриваются так называемые сложные турбулентные течения. К ним относятся часто встречающиеся в технике инертные и химически реагирующие закрученные потоки. До настоящего времени в таких задачах (например, о смешении внутренних закрученных струй) применялись только модели турбулентности типа вихревой вязкости. Были предприняты значительные усилия, направленные на преодоление недостатков моделей скалярной вязкости, главными из которых являются большие погрешности расчетных значений размера и интенсивности рециркуляционной зоны в сильно закрученных потоках и невозможность расчета при помощи различных двухпараметрических моделей наблюдаемого в эксперименте течения, сформированного комбинацией свободного и вынужденного вихрей. В ряду двухпараметрических моделей особенно популярна $k\varepsilon$ -модель У.П.Джонса – Б.Е. Лаундера главным образом благодаря своей простоте и малым затратам ресурсов ЭВМ при ее реализации. Действительно, многие прямоточные течения, в частности пограничные слои, струи, движения в каналах с химическими реакциями, с успехом рассчитываются на базе $k\varepsilon$ -моделей [3]. Несостоятельность $k\varepsilon$ -моделей в случае внутренних закрученных течений обусловлена скорее всего ущербностью допущения об изотропном характере турбулентного переноса. В свое время Д.Г. Лилли и Н.А. Чигер показали, что в сильнозакрученных потоках вихревая вязкость не может рассматриваться в виде скалярной характеристики. Модификации $k\varepsilon$ -модели, учитывающие эту анизотропию, значительно улучшают точность расчетов, но, не обладая универсальностью, они не годятся для расчета трехмерных течений. Не так давно были предприняты попытки модификации $k\varepsilon$ -моделей посредством учета демпфирующего влияния стенок, с тем, чтобы их можно было применять для сквозного расчета пристеночных течений. Уязвимым для критики звеном является здесь набор постоянных, вводимый для учета воздействия стенок, который необходимо всякий раз подбирать в зависимости от вида течения и величины числа Re . Эти трудности при применении $k\varepsilon$ -моделей неизбежны.

В связи с наличием отмеченных недостатков $k\varepsilon$ -моделей и вообще моделей вихревой вязкости целесообразно обратить внимание на работы по моделированию крупных вихрей, а также по использованию моделей переноса рейнольдсовых напряжений. В таких моделях турбулентные напряжения находят из решения соответствующих модельных балансовых уравнений, представляющих собой уравнения в частных производных. При этом существенно увеличивается время расчетов. Это связано с необходимостью дополнительного интегрирования по крайней мере еще шести уравнений. Более простые модели с алгебраическими

соотношениями для напряжений (АМН), которые описывают анизотропию без вышеуказанных издержек, смогут в ряде случаев служить промежуточным звеном между $k\varepsilon$ -моделью и моделью переноса рейнольдсовых напряжений (ПРН). Отметим, что применение АМН-моделей имеет успех в расчетах тонких сдвиговых слоев, не осложненных эффектами сильной кривизны. К настоящему времени известно лишь несколько приложений ПРН-моделей к расчету закрученных течений. В основном они относятся к струям, где их применение также не обошлось без проблем. В связи со сказанным необходимо оценить перспективность ПРН-моделей, актуальность разработки и применения алгебраических АМН-моделей для расчета внутренних течений с закруткой и без нее.

Некоторые результаты последних исследований российских ученых стоит отметить, учитывая большой вклад отечественной школы в вопросы теоретического и экспериментального моделирования турбулентности. Такие исследования разнообразны благодаря огромному числу технических приложений. Литература по этому вопросу исключительно обширна.

В числе указанных направлений, активно развиваемых с конца XX века, весьма заметны работы, выполненные Б.В.Алексеевым, А.М. Липановым, О.М. Белоцерковским, Ю.В. Лапиным, М.Х. Стрельцом, А.Ф. Курбацким, Б.П.Головней и др.

Работами Б.В. Алексеева положено начало оригинальному подходу анализа турбулентности с кинетических позиций, являющихся развитием идей Больцмана. В классическом понимании турбулентность с характерной для нее иррегулярностью изменения теплогидродинамических параметров и широким диапазоном масштабов пульсирующих величин описывается навье-стоксовской моделью. Недостатки такой модели течения связаны с отсутствием в них колмогоровских флуктуаций и, следовательно, определяющие уравнения проблематично считать уравнениями, записанными относительно истинных величин. В этом смысле полученные на основе уравнения Больцмана Б.В. Алексеевым обобщенные гидродинамические уравнения (ОГУ) являются более совершенными и универсальными, так как явно учитывают в спектре пульсаций колмогоровские флуктуации и позволяют моделировать вихревые течения в широком диапазоне чисел Re , включая режимы ламинарно-турбулентных переходов.

Несмотря на привлекательность и новизну идей описания турбулентности уравнениями Б.В. Алексеева (ОГУ), вопросы разрешимости этих уравнений еще слабо изучены и пока нет уверенности в возможностях применения данного подхода для решения практических задач. Как всякая новая теория она отвергает уже устоявшиеся представления о том, что уравнения Навье–Стокса являются теоретической базой для описания турбулентности. Однако, как всегда бывает в таких случаях, после продолжительных споров по этому поводу явно встанет тяжелый вопрос о границах применимости ОГУ и уравнений Навье–Стокса.

В *прямом численном моделировании* на основе полных уравнений Навье–Стокса значительные успехи достигнуты А.М. Липановым, О.М. Белоцерковским. Расчеты при больших числах Re (до 10^5) для трехмерного канала со скачком площади поперечного сечения на входе с использованием весьма малых шагов по пространству и времени, а также схем высокого порядка точности.

О.М. Белоцерковским в рамках данного направления исследован широкий класс задач о свободных турбулентных течениях в струях, следах с эффектами отрыва, ламинарно-турбулентного перехода и явлений перехода к хаосу.

В последнее время активно развивается моментный подход в механике турбулентности. Этому подходу уделяется много внимания в группах, руководимых Ю.В. Лапиным, А.Ф. Курбацким.

В теоретическом описании турбулентности одной из главных проблем является выбор моделей, методов реализации численных алгоритмов, создание устойчивых численных схем интегрирования многомерных уравнений переноса, конструирование подходящих разностных сеток. По этим вопросам получены новые результаты, в частности, разработана оригинальная трехпараметрическая (k, ω, ν_t) -модель турбулентности и метод ориентированной псевдоконвекции. Достоинства последнего связаны с простотой и экономичностью расчета установившихся и нестационарных пространственных течений с высокими числами Re и Pe за счет оригинального представления конвективного переноса конечно-разностной аппроксимацией второго порядка точности.

Представленный материал показывает, что *математические методы* решения задач тепло- и массообмена при турбулентных внутренних течениях по существу такие же, что и при ламинарных. Однако вследствие большей сложности исходной системы уравнений здесь значительно чаще используется *численные методы*. Необходимо отметить, что в изучении теплообмена при турбулентных течениях в трубах и каналах, пограничных слоях, свободных и пристеночных течениях в последние годы достигнуты значительные успехи [4]. Тем не менее, существует настоятельная необходимость развивать и совершенствовать методы расчета турбулентных течений, изучать новые вопросы, возникающие в различных областях. Небольшой экскурс в историю вопроса показывает, что исследование теплообмена при турбулентном движении жидкости в трубах начались около ста лет назад и первой работой, анализирующей эту проблему, была статья Нуссельта. В этой работе, посвященной теплообмену при турбулентном течении газа в трубах, впервые применен метод подобия для обобщения опытных данных по теплообмену. В последующие годы были проведены многочисленные экспериментальные исследования процессов теплообмена при турбулентном течении в трубах различных жидкостей и газов. В результате этих исследований выявлена зависимость чисел Нуссельта от чисел Рейнольдса и Прандтля в широком диапазоне изменения последних ($Nu \approx Re^n Pr^m$, где n, m – некоторые постоянные отвечающие конкретной рабочей среде). Первая попытка теоретического рассмотрения вопроса о теплообмене при турбулентном течении жидкости в трубах принадлежит Рейнольдсу.

В реальных условиях физические свойства жидкости зависят от температуры. Поэтому закономерности теплообмена, полученные в предположении о постоянстве физических свойств, можно использовать на практике либо при небольших разностях температур в потоке, либо при слабом изменении физических свойств в рассматриваемом диапазоне температур. В этих случаях влияние изменения физических свойств можно приближенно учесть, выбрав свойства при некоторой средней температуре среды.

Заметим, что в энергетических системах, обеспечивающих эффективный транспорт рабочего тела по каналам, часто реализуются большие температурные

напоры и высокие плотности теплового потока. При этом в потоке жидкости возникают большие градиенты температуры. В качестве теплоносителей нередко используются жидкости и газы, физические свойства которых весьма сильно изменяются в зависимости от температуры. Анализ движения жидкости и теплообмен в подобных условиях необходимо проводить с учетом зависимости физических свойств жидкости от температуры. Кроме того, для различных веществ и для одного и того же вещества в разных областях параметров состояния характер изменения физических свойств с температурой и давлением различен. При современном уровне знаний описать закономерности движения жидкости и теплообмена в этих разнообразных условиях с помощью единых зависимостей не представляется возможным. Вследствие этого задача о движении жидкости распадается на ряд задач, каждая из которых соответствует определенному типу зависимости физических свойств от температуры и давления.

На пути расчетно-теоретического исследования движения жидкости и теплообмена при переменных физических свойствах возникают значительные трудности математического и физического характера. Математические трудности состоят в нелинейности уравнений движения и энергии в случае переменности теплофизических свойств. Однако эти трудности преодолимы, например, путем использования *численных методов* решения уравнений и применения вычислительных машин.

Применение теоретических методов к исследованию *турбулентных* течений и процессов тепло- и массообмена гораздо более сложно, а положение в этой области менее удовлетворительно. В описании таких процессов необходимо располагать уравнениями для расчета турбулентных напряжений $\overline{\rho u'_i u'_j}$, турбулентных тепловых потоков $\overline{\rho c_p u'_i T'_j}$ и турбулентных потоков массы $\overline{\rho u'_i c'_j}$. При современном уровне развития теории турбулентности эти уравнения не могут быть получены в достаточно общей и строгой форме. В последнее время в анализе турбулентного тепло- и массообмена в трубопроводах достигнут значительный прогресс в изучении структуры пристеночного внутреннего течения. Выявлено существование выбросов замедленной жидкости из вязкого подслоя в турбулентное ядро и вторжение ускоренной жидкости в область ламинарного подслоя, изучены многие детали такого течения. Дальнейшее изучение представленной структуры течения, закономерностей переноса импульса, тепла и массы в пристеночной области позволит более обоснованно аппроксимировать неизвестные члены в уравнениях для вторых моментов, придать большую универсальность вводимым функциям и постоянным. Стоит заметить, что отдельные оригинальные идеи моделирования ложных сдвиговых течений с помощью моделей ПРН-потоки можно найти, например, в [5].

Кроме того, поскольку большинство пространственных течений в трубопроводах сопровождаются влиянием массовых сил, например, вращения, то это может приводить к любопытным процессам, которые требуют некоторого искусства при моделировании. Дадим некоторые пояснения существа вращающихся потоков и проблем построения вычислительных алгоритмов подобных течений.

1.3. Характеристика закрученных потоков. Хорошо известно, что закрутка потока в зависимости от назначения промышленных устройств, трубопроводов,

вихревых камер позволяет получать в них интенсифицированные (газотурбинные системы, теплообменники) или ослабленные (гидро- и аэроциклоны, сепараторы) процессы турбулентного переноса. В настоящее время основные усилия по изучению закрученных течений в нефтяном секторе сосредоточены на анализе интегрального влияния крутки на характер течения химически активных продуктов по трубопроводу. Известно, что структура течения в канале с высокой степенью закрутки потока весьма сложна, существенно отличается от структуры осевого и влияет на распределение коэффициента вихревой вязкости и касательных напряжений. Информация о турбулентных характеристиках вращающихся течений в каналах является более ограниченной по сравнению с данными о средних скоростях течения. Имеющиеся в литературе сведения теоретического и экспериментального характера часто дают только качественные представления об умеренно закрученном потоке в длинных трубах, тогда как для практики более интересны случаи сильно закрученного течения на коротком отрезке трубы. В последних – тангенциальная составляющая скорости W соизмерима или больше осредненной осевой скорости U . Их особенностью является возникновение зоны интенсивного обратного тока среды вблизи оси симметрии (или стенки) и высокая степень турбулентности (или ламинаризация). Такие течения мало изучены. В частности, отсутствуют данные о структуре турбулентности в широком диапазоне изменения параметров крутки и других условий течения. В силу этого в настоящее время для расчета характеристик движения и теплообмена во внутренних закрученных потоках используются эмпирические уравнения, полученные в условиях, отвечающих определенному характеру начальной крутки. Эти уравнения не универсальны, поскольку при обобщении опытных данных применялись параметры, не характеризующие гидродинамическое подобие внутренних потоков. В то же время существующие методы расчета аэродинамики и теплообмена базируются на конкретных предположениях о структуре турбулентности, требующих экспериментальной проверки.

Отличительные особенности закрученного течения в коротких трубах можно установить и объяснить, зная закономерности распределения полей осредненных скоростей, давления и пульсационных характеристик. Известно, что при относительно малых величинах тангенциальной составляющей скорости частицы жидкости во всех точках сечения трубы будут только удаляться от начального сечения, однако с ростом значений окружных скоростей такая форма движения становится неосуществимой и при интенсивной закрутке поступающей в трубу среды в ядре потока возникает зона возвратного течения. В этом случае жидкость движется в определенном направлении только по периферии, тогда как в центральной части осевые составляющие скорости направлены в противоположную сторону. Таким образом, можно говорить о двух характерных зонах в поле течения: кольцевая периферийная зона, через которую протекает практически вся жидкость и внутренняя приосевая зона нулевого расхода, которая представляет ядро закрученного течения. Следует отметить, что параметры потока в периферийной области весьма консервативны по отношению к возмущениям, приходящим из ядра течения. Возникновение рециркуляционного ядра обусловлено затуханием вращательного движения жидкости и увеличением давления у оси трубы по мере удаления жидких частиц от начального сечения. Поэтому определение характера затухания крутки по длине канала и нахождение зависимости радиуса

рециркуляционного ядра от степени кривизны потока являются важными с практической точки зрения вопросами.

Размеры и расположение зон обратных токов определяют важные характеристики трубопроводных систем: трение, теплообмен. Для того, чтобы научиться правильно управлять работой таких устройств, необходимо детально исследовать особенности закрученного течения. Поэтому в настоящее время при изучении течений в трубопроводах все шире используется математическое моделирование со *сложными моделями турбулентности*.

Наличие кривизны потока, входящего в трубопровод, осложняет и без того непростой характер течения хотя бы тем, что создает сдвиговый слой с интенсивным перемешиванием между компонентами. Кривизна оказывает влияние на эффективность смешения, на распределение температуры в области течения и характер образования различного рода загрязняющих веществ. В этих условиях понятна актуальность создания успешных методик расчета внутренних реагирующих течений как при наличии кривизны, так и без нее. Основой расчета представляющих практический интерес реагирующих потоков может являться адекватная модель турбулентности, дополненная эффективной моделью химического взаимодействия. Такие модели должны точно описывать не только процессы турбулентного переноса количества движения, массы и тепла, но и правильно описывать кинетику химических реакций. Все эти моменты важны для расчетов процессов в нефте- и газопроводах. Для некоторых приложений переносы массы и энергии являются более важными в сравнении с переносом количества движения. Однако в трубопроводах вряд ли можно отделить тепловую часть задачи от динамической.

В то же время применение моделей, ориентированных на представление только количества движения (например, в задаче с тепломассообменом в предположении постоянства турбулентных чисел Прандтля и Льюиса), во многих важных случаях также оказывается необоснованным.

Во *введении* мы постарались кратко коснуться особенностей математического моделирования прямолинейных и закрученных инертных и химически реагирующих течений. Учитывая большую практическую значимость вопросов комплексного физико-математического моделирования сложных течений в трубопроводах и ограниченность объема данного учебного пособия, интересующиеся могут обратиться к специальным источникам, например, [6], обсуждающим в деталях проблемы предсказания тепломассообмена в трубопроводах в условиях устойчивого и переходного ламинарно-турбулентного течения. Перейдем к сути математической формулировки процессов гидродинамики и теплообмена в замкнутых системах.

ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И ВЯЗКОГО ГАЗА

Экскурс в историю вопроса показывает, что исторически сложились два подхода к получению уравнений динамики жидкости: *феноменологический и кинематический*. В *первом* случае постулируются определенные соотношения между напряжением и скоростью деформации, между потоками тепла и градиентом температуры, после чего уравнения динамики жидкости выводятся из законов

сохранения. Требуемые константы пропорциональности между напряжением и скоростью деформации и между потоком тепла и градиентом температуры, называемые коэффициентами переноса, в этом подходе должны определяться экспериментальным путем. Во *втором* подходе (кинематическом) уравнение динамики жидкости получают с коэффициентами переноса, которые определяются в рамках некоторых интегральных соотношений, возникающих при рассмотрении динамики сталкивающихся частиц. Слабая сторона этого подхода состоит в том, что при вычислении интеграла столкновения необходимо определить силы взаимодействия между частицами, особенности, размеры, структуру струй, и т.д. Таким образом, неопределенность феноменологического подхода, обусловленная экспериментом, сменяется неопределенностью математического свойства в кинетическом подходе. Эти два подхода приведут к одним и тем же уравнениям динамики жидкости, если при их выводе делаются равнозначные допущения.

Фундаментальные уравнения динамики жидкости и газа основаны на универсальных законах: сохранения массы, сохранения количества движения и сохранения энергии. Уравнение, получающееся в результате применения закона сохранения массы к потоку жидкости, называется *уравнением неразрывности*. Закон сохранения количества движения – это второй закон Ньютона. Его применение к потоку жидкости дает векторное уравнение, известное как уравнение количества движения или как уравнение импульса. Закон сохранения энергии тождественен первому закону термодинамики и в динамике жидкости и газа уравнение, являющееся его выражением, называется *уравнением энергии*. Для замыкания систем к уравнениям, полученным из упомянутых выше законов сохранения, следует добавить соотношения, устанавливающие связь между свойствами жидкости. Примером такого соотношения может быть уравнение состояния, связывающие термодинамические параметры жидкости: давление p , плотность ρ и температуру T .

Дадим краткую формулировку этим уравнениям.

2.1. Уравнение неразрывности.

Применяя закон сохранения массы к жидкости, протекающей через фиксированный объем, получим уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (2.1.1)$$

где ρ – плотность жидкости, а \vec{V} – ее скорость. Слагаемые (2.1.1) имеют следующий физический смысл: первый член уравнения дает увеличение плотности в контрольном объеме за единицу времени; второй – поток массы через поверхность контрольного объема за единицу времени, отнесенный к единице объема. Удобно воспользоваться понятием субстанциональной производной:

$$\frac{D(\quad)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla(\quad), \quad (2.1.2)$$

для преобразования уравнения (2.1.1) к виду

$$\frac{D(\rho)}{Dt} + \rho(\nabla \vec{V}) = 0. \quad (2.1.3)$$

Уравнение (2.1.1) было выведено с использованием подхода *Эйлера*. В этом подходе фиксируется контрольный объем и рассматривается баланс жидкости, протекающий через его поверхность. В альтернативном *подходе Лагранжа* изменения свойств некоторого жидкого элемента фиксируется наблюдателем, движущемся вместе с этим элементом. В представленных задачах гидродинамические процессы удобнее описывать с точки зрения Эйлера.

В декартовой системе координат, где u, v, w – компоненты скорости по осям x, y, z , уравнение (2.1.1) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (2.1.4)$$

Заметим, что уравнение (2.1.4) записано в форме закона сохранения (*дивергентной форме*) весьма удобной для учета особенностей численного моделирования сложных течений в трубах с особенностью границ области движения рабочего тела. Рассмотрим формы записи уравнения (2.1.1) для моделей вязких сред. Напомним, что жидкость, плотность которой остается постоянной, называется *несжимаемой*. Математически это означает, что

$$\frac{D(\rho)}{Dt} = 0. \quad (2.1.5)$$

Тогда уравнение (2.1.3) будет сведено к уравнению:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (2.1.6)$$

а в декартовой системы координат имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.1.7)$$

Перейдем к уравнениям движения.

2.2. Уравнение количества движения.

Применение второго закона Ньютона к жидкости, протекающей через бесконечно малый фиксированный контрольный объем, приводит к уравнению количества движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \nabla \cdot \rho \vec{V} \vec{V} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij}. \quad (2.2.1)$$

Отметим физический смысл слагаемых в левой части (2.2.1). Так, *первый* член этого уравнения дает отнесенное к единичному объему изменение количества движения в контрольном объеме за единицу времени. *Второй* член есть отнесенное к единичному объему изменение количества движения в контрольном объеме за счет инерции в единицу времени. Заметим, что $\rho \vec{V} \vec{V}$ – тензор, поэтому $\nabla \cdot \rho \vec{V} \vec{V}$ не есть просто дивергенция. Однако этот член можно разложить на два слагаемых:

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} \vec{V} \equiv \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \vec{V}(\nabla \cdot \rho \vec{V}). \quad (2.2.2)$$

Когда это выражение подставляется в уравнение (2.2.1), то, с использованием уравнения неразрывности, последнее упрощается и уравнение количества движения принимает вид:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \Pi_{ij}. \quad (2.2.3)$$

Первый член в правой части уравнения (2.2.3) есть отнесенная к единице объема *массовая сила*. Массовые силы действуют на расстоянии и приложены ко всей массе тела. Чаще всего это – сила тяжести. *Второй член* в правой части уравнения (2.2.3) дает отнесенные к единице объема *поверхностные силы*. Эти силы суть механические напряжения, действующие на выделенный жидкий объем со стороны внешней по отношению к нему жидкости. Они образованы нормальными и сдвиговыми напряжениями и задаются компонентами тензора напряжений Π_{ij} .

Приведенное выше уравнение выписано для общего случая и пригодно как для течений с разрывами области течения, так и без таковых. Но, как только для тензора напряжений мы принимаем какую-либо аппроксимацию (физическая модель процесса), уравнение (2.2.1) теряет свою общность. Для всех газов, которые можно считать *сплошной средой* замечено, что напряжение в некоторой точке линейно зависит от скорости деформации жидкости. Такая жидкость называется *ньютоновской*. При этом допущении можно вывести общий закон деформации, который связывает тензор напряжений с давлением и компонентами скорости. В тензорных обозначениях он записывается в виде:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\mu'\frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.2.4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij}=1$, если $i=j$, и $\delta_{ij}=0$, если $i \neq j$); u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора скорости \vec{V} ; x_1, x_2, x_3 – координаты радиус-вектора точки; μ – коэффициент динамической вязкости; μ' – второй коэффициент вязкости. Эти два коэффициента вязкости связаны с коэффициентом объемной вязкости $\acute{\alpha}$ выражением:

$$\acute{\alpha} = \frac{2}{3}\mu + \mu'. \quad (2.2.5)$$

Обычно коэффициент объемной вязкости полагают пренебрежимо малым, за исключением тех случаев, когда изучается структура ударных волн, а также поглощение и затухание акустических волн. При $\acute{\alpha}=0$ второй коэффициент вязкости станет равным:

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu. \quad (2.2.6)$$

а тензор напряжений можно записать как

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right], \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.2.7)$$

Тензор напряжений разделяют часто на две части:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (2.2.8)$$

где τ_{ij} – тензор вязких напряжений, задаваемый выражением:

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right], \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2.2.9)$$

Подставляя (2.2.7) в (2.2.3), получаем уравнения движения, которые совместно с уравнением неразрывности (2.1.1) образуют систему, известную как *уравнения Навье – Стокса*. Итак, уравнения движения имеют вид:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]. \quad (2.2.10)$$

Заметим, что впервые на основании соображений о взаимодействии молекул эти уравнения были получены Навье в 1822г. и Пуассоном в 1829г. Позднее, используя уравнения динамики сплошных сред (в напряжениях) и уравнение несжимаемости, эти уравнения получил Сен-Венан в 1843г. и затем Стокс в 1845г. Таким образом, уравнения Навье – Стокса образуют базу, на основе которой была развита полная теория вязких течений.

Выше отмечалось, что движение в трубах в технических приложениях носит сложный характер и большей частью оно турбулентно. В таком движении поля скоростей, давлений, температур и других физических величин имеют иррегулярную и очень сложную структуру. Посмотрим на математическое содержание этих процессов.

ГЛАВА 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В КАНАЛАХ

Полученная выше система дифференциальных уравнений в более компактном тензорном виде применительно к турбулентному течению, включающая уравнения неразрывности, динамические уравнения Рейнольдса, энергии имеет вид:

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0; \quad (3.1)$$

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} \right]; \quad (3.2)$$

$$\rho C_p U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho C_p \overline{u'_j t'} \right]. \quad (3.3)$$

Здесь осреднение ведется по Рейнольдсу. Согласно Рейнольдсу, можно представить мгновенные значения скорости, температуры и других величин в виде суммы средних и пульсационных величин:

$$\begin{aligned}
U_i &= \overline{U}_i + u_i'; \\
t &= \overline{T} + t'; \\
Q &= \overline{Q} + Q'.
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

Появляющиеся из-за нелинейности исходных уравнений дополнительные неизвестные $\overline{\rho u_i' u_j'}$ и $\overline{\rho c_p u_j' t'}$ всецело связаны со случайными процессами в турбулентном потоке. Эти члены означают появление дополнительного турбулентного трения и дополнительного переноса субстанции в потоке, вызываемых пульсациями скорости. Число неизвестных в системе уравнений становится больше числа уравнений, и система оказывается *незамкнутой*. Это обстоятельство составляет главную трудность теоретического изучения процессов турбулентности. Поэтому основная проблема турбулентности заключается в отыскании строгих статистических соотношений, позволяющих замкнуть систему уравнений.

В том, что такие соотношения в природе существуют, сомнения нет, так как в противном случае не существовали бы устойчивые средние значения скорости и температуры, то есть не происходило бы физического замыкания системы уравнений. В настоящее время наука еще далека от полного решения проблемы турбулентности. Поэтому широкое распространение получили *полуэмпирические теории и методы* в исследовании процессов турбулентности, выражающие тем или иным способом связь между пульсационными и усредненными характеристиками и замыкающие таким образом систему уравнений.

Во введении отмечались достоинства различных подходов и методов. Подчеркнем, что для практики очень эффективна феноменологическая теория турбулентности. По одной из ее классификаций все модели турбулентного переноса мы представили группами:

1. Группа моделей турбулентной вязкости μ_t .
2. Модели, связанные с использованием полных транспортных уравнений переноса вторых моментов пульсации скорости и пульсаций скаляра.

Укажем наиболее распространенные в приложениях модели из каждой группы. Так, к группе моделей турбулентной вязкости относятся следующие.

3.1. Нульпараметрические модели. В этих моделях используются только алгебраические выражения для коэффициентов молярного переноса импульса и тепла. Наиболее известная среди моделей этого класса модель пути смешения Прандтля:

$$v_t = l^2 \frac{\partial u}{\partial y},
\tag{3.5}$$

где $l = \acute{\alpha}y$, $\acute{\alpha} = 0.4$ (константа Кармана). Здесь l – длина пути смешения, универсальна для пристеночной зоны движения у гладкой поверхности.

3.2. Однопараметрические модели. В этих моделях используется дифференциальное уравнение, как правило, для молярной вязкости V_t , либо кинетической энергии K . Эта группа моделей, в которых имеется возможность учета

предыстории развития явлений переноса и интенсивности пульсационного движения. Уравнение переноса турбулентности – это уравнение кинетической энергии, которое в общем случае пространственного течения имеет вид:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [(v + \nu_t) \frac{\partial K}{\partial x_j}] - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon. \quad (3.6)$$

В условиях переменности теплофизических свойств в (3.6) неизвестными могут являться кинематическая вязкость ν и молярная вязкость ν_t . Если имеется задача учета размера вихря, то вместо скорости диссипации ε вводится, согласно теории размерности, связь:

$$\varepsilon \cong C_D \frac{K^{3/2}}{L}, \quad (3.7)$$

где L – характерный масштаб энергосодержащих вихрей.

В отношении L для пограничных течений удовлетворительна эмпирическая связь Прандтля-Никурадзе:

$$\frac{L}{R} = l_0 + l_2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 + l_4 \left(\frac{r}{R}\right)^4, \quad (3.8)$$

где в отношении коэффициентов l_i используются значения:

$$l_0 = 0.37; \quad l_2 = -0.23; \quad l_4 = -0.14. \quad (3.9)$$

Однопараметрические модели основаны на концепции об изотропном характере процессов переноса импульса тепла и массы. Согласно этому положению из теории размерности следует соотношение Колмогорова-Прандтля для вязкости:

$$\nu_t \cong C_\mu \sqrt{KL}. \quad (3.10)$$

Тензор напряжений Рейнольдса связан с тензором скоростей деформации соотношением Буссинеска:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \dot{S}_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij}. \quad (3.11)$$

Недостаток однопараметрической модели связан с отсутствием представлений об изменении второй характеристики вихревого движения от времени и пространства в отличие от кинетической энергии.

3.3. Двухпараметрические модели. В эти модели входят дифференциальные уравнения для величин определяющих интенсивность переноса вихря и его размер (группа моделей $K - \varepsilon$, $K - L$). В таких моделях важным является учет большого фактора общей динамичности нежели в моделях нулевого и первого порядка.

$K - \varepsilon$ модели имеют вид [5,6]:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [(v + \nu_t / \sigma_k) \frac{\partial K}{\partial x_j}] + \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \varepsilon - \Phi; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} [(v + v_t / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}] + \\ &+ v_t C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{K} + E; \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad (3.14)$$

где в отношении $C_\mu, f_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, f_1, f_2, \Phi, E$ используются связи:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.09; \quad f_\mu = \exp[-2.5/(1 + \text{Re}_t/50)]; \\ \text{Re}_t &= \frac{K^2}{\nu \varepsilon}; \quad \sigma_k = 1; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3; \quad f_1 = 1; \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-\text{Re}_t^2); \\ \Phi &= 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{K}}{\partial y} \right)^2; \quad E = 2\nu v_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Заметим, что введение последних двух слагаемых в (3.12), (3.13) связано с численными проблемами – постановкой граничных условий на стенке типа $\varepsilon_w = 0, K = 0$. Связи (3.12) – (3.15) работают как для моделей с высокими числами Re_t , так и при малых значениях в широком диапазоне изменения осредненных величин.

Популярность $K - \varepsilon$ модели турбулентности, различных ее модификаций вызвана в основном удовлетворительным качественным описанием исследуемых процессов. Однако известно, что $K - \varepsilon$ модель по существу неспособна воспроизвести большой максимум в распределении кинетической энергии турбулентности. С этой точки зрения $K-L$ модель выглядит несколько предпочтительнее [5]. Кроме того, она более экономична при построении стационарных решений.

Основу **$K-L$ модели** турбулентности составляют уравнения баланса кинетической энергии турбулентности K и выбранное по работам Г.С. Глушко [7] уравнения для масштаба турбулентности L , которые в случае течения несжимаемого газа в цилиндрической системе координат имеют вид [5,8]:

$$\rho \left(u_x \frac{\partial K}{\partial x} + u_r \frac{\partial K}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu + b_1 \mu_t) \frac{\partial K}{\partial r}] + \mu_t \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 - \frac{b_2(\mu + b_1 \mu_t)}{L^2} K; \quad (3.16)$$

$$\rho \left(u_x \frac{\partial L}{\partial x} + u_r \frac{\partial L}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu + b_3 \mu_t) \frac{\partial L}{\partial r}] - b_4 \frac{K}{L} \mu_t \left(\frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 + B b_5 \sqrt{K \rho} \left(1 - \frac{L}{(R-r)^2} \right). \quad (3.17)$$

Значения констант $b_i (i = \overline{1,5})$ можно найти в [5].

В вышеуказанных главах мы кратко рассмотрели основные положения в моделировании реальных систем, обладающих динамикой. Как видно, на этом этапе известными выступают законы, управляющие поведением системы. Однако их непосредственное использование часто оказывается затруднительным. Ниже пойдет речь идет как о подходах и методах решения определяющих уравнений, так и о вычислительных трудностях, связанных с отсутствием информации, содержащейся в решении точных уравнений и путях ее получения для решения вопроса о

замыкании системы. Кроме того, видно, что первый шаг в построении математической модели связан с формулировкой модели явления на основе физических законов и их формализации математическим языком. Перейдем к краткой характеристике основных понятий физико-математического моделирования и технологии решения задач.

ГЛАВА 4. ТЕХНОЛОГИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

4.1. Обзор методов и алгоритмов решения определяющих уравнений. Для простоты изложения особенностей моделирования сложного сдвигового течения воспользуемся декартовой системой и предположением, что поток двухмерный. В этих условиях система определяющих уравнений будет иметь вид.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

Уравнения движения в проекциях на оси Ox , Oy соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (4.3)$$

где ν - кинематическая вязкость.

Основная трудность численного интегрирования системы (4.1) – (4.3) (определения поля скорости) связана с определением поля давления. Градиент давления составляет часть источникового члена в уравнении количества движения, при этом нет явного уравнения для определения давления. При заданном поле давления решение уравнений количества движения не представляет собой сложности. Однако способ нахождения поля давления не очевиден. Поэтому в пособии алгоритмам его нахождения уделяется особое внимание. Отметим отдельные подходы, дающие возможность обойти эту проблему. В их числе известны *методы, основанные на решении уравнения для вихря*. Они привели к возникновению методик, основанных на решении уравнений, получаемых при исключении давления из системы определяющих уравнений. При этом в нашем случае (постановки для двухмерных задач) исключение давления из двух уравнений количества движения путем перекрестного дифференцирования каждого уравнения будет приводить к *уравнению переноса вихря*. Вместе с введением функции тока для стационарных двухмерных течений этот метод является основой широко известного метода решения в переменных функция тока – вихрь, описанного, например, в [9].

Подход с использованием завихренности и функции тока в качестве независимых переменных является одним из распространенных методов решения

двумерных уравнений Навье - Стокса для несжимаемой жидкости. Суть в следующем. Делают замену переменных, переходя от компоненты скорости к завихренности ζ и функции тока ψ .

В декартовых двухмерных координатах ζ определяется как:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.4)$$

а ψ определяется как:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v. \quad (4.5)$$

Используя новые независимые переменные, два уравнения движения (4.2) и (4.3) можно скомбинировать, исключая давление, что дает вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right). \quad (4.6)$$

Это параболическое уравнение с частными производными называется *уравнением переноса завихренности*. Затем, подставив (4.4) в (4.5), получают дополнительно уравнение для независимых переменных эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta. \quad (4.7)$$

Это эллиптическое уравнение с частными производными является *уравнением Пуассона*.

В результате такой замены переменных осуществляется разделение смешанной эллиптически-параболической системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости на одно параболическое уравнение (уравнение переноса завихренности) и одно эллиптическое уравнение (уравнение Пуассона). Обычно эти уравнения решают *методом установления по времени*.

С точки зрения *технологии их решения* отметим, что параболические уравнения переноса вихря и эллиптические уравнения Пуассона естественно рассматривать по отдельности, так как методы их решения, очевидно, различны. Однако сразу следует заметить, что при численном решении задачи гидродинамики фактически существует обратная связь между этими уравнениями. Например, в силу того, что эти уравнения решаются циклически, увеличение допустимых временных шагов для уравнения переноса вихря должно быть компенсировано увеличением числа итераций при итерационном решении уравнения Пуассона. Неправильное обращение с *граничными условиями* в одном уравнении может привести к нарушению сходимости в другом. Еще важнее то обстоятельство, что приходится явно искусственно отделять нахождение решения во внутренних точках от расчета граничных условий, так как обе эти процедуры должны выполняться совместно.

Окончательный выбор *метода решения уравнения переноса вихря* зависит от многих факторов. Таких, как: 1) граничные условия; 2) геометрия задачи; 3) тип искомого решения (стационарный или зависящий от времени); 4) возможная

необходимость расчета поля температуры; 5) при решении нестационарной задачи важен выбор интервала изменения рассматриваемых параметров, в частности, числа Рейнольдса.

Рассматриваемый метод имеет несколько *особенностей*. Давление не входит в число зависимых переменных, и вместо того, чтобы иметь дело с двумя уравнениями количества движения и уравнением неразрывности, необходимо решить только два уравнения для нахождения функции тока – вихря. Некоторые из граничных условий записываются достаточно просто: если к расчетной области примыкает внешнее безвихревое течение (вихрь на границе удобно положить равным нулю). Однако метод решения в переменных функция тока – вихрь имеет серьезные *недостатки*. Условие для вихря на стенке задать трудно, и это часто осложняет получение *сходящегося решения*. Давление, которое было так успешно исключено из формулировки задачи, часто оказывается искомым конечным результатом решения или промежуточным результатом, необходимым для расчета плотности и других теплофизических, молярных и других свойств жидкости. В этих случаях трудности, возникающие при определении давления по полю вихря, компенсируют преимущества использования переменных функция тока – вихрь. Кроме того, *основным недостатком метода* является невозможность использования его в случае трехмерных задач, для которых не существует функции тока. Но большинство практических задач трехмерны, поэтому метод, ограниченный двумя измерениями, сильно проигрывает от этого существенного ограничения.

В трехмерном случае при введении вихря в качестве независимой переменной формулировка гидродинамической части задачи будет включать шесть независимых переменных, а именно, три составляющие вихря и три составляющие вектора потенциала скорости. Таким образом, задача оказывается сложнее, чем при использовании непосредственно трех составляющих скорости и давления. Введение вектора вихря и вектора потенциала скорости вместо составляющих скорости и давления менее наглядно.

В качестве одного из первых методов решения уравнений Навье - Стокса для несжимаемой жидкости, записанных относительно *примитивных переменных*, был предложен *метод искусственной сжимаемости*. В этом методе в уравнение неразрывности включен член с искусственной сжимаемостью, который обращается в нуль, когда решение устанавливается во времени. При этом уравнения Навье - Стокса образуют смешанную систему гиперболических и параболических уравнений, которая решается *методом установления*. Остановимся кратко на подходах этого направления к определению поля скорости.

4

.1.1. Алгоритм SIMPLE.

Алгоритм, разработанный для расчета поля течения, получил название **SIMPLE** (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), что означает полунявный метод для связывающих давление уравнений. Данный алгоритм описывался в [2].

Дискретизация (получение конечно-разностного аналога исходной системы дифференциальных уравнений) производится *методом контрольного объема*. *Основная идея метода* контрольного объема легко понятна и поддается прямой физической интерпретации. Так, расчетная область разбивается на некоторое конечное число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме. Дифференциальное

уравнение интегрируется по каждому из контрольных объемов. Для вычисления интегралов используются кусочные профили, которые описывают изменение переменной между узловыми точками. В результате получается дискретный аналог дифференциальных уравнений, в который входят значения переменной в некоторых узловых точках.

Полученный подобным образом дискретный аналог выражает закон сохранения для конечного контрольного объема точно так же, как дифференциальное уравнение выражает закон сохранения для бесконечно малого контрольного объема. Одним из важных свойств метода контрольного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области [2]. Это свойство проявляется при любом числе узловых точек, а не только в предельном случае очень большого их числа. Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет точным интегральным балансам. Ниже приведены геометрии контрольных ячеек вокруг узла P (рис.4.1) и ячеек к расчету поля скорости (рис.4.2, 4.3). Причем символы w, n, e, s характеризуют “стороны света”, значения коэффициентов диффузии в конечно-разностных уравнениях.

Заметим, что перед применением метода контрольного объема для получения дискретизации исходной системы, строится шахматная сетка. Исходная область Ω покрывается равномерной сеткой $\omega = \{(x_i, y_j) | x_i = ih, y_j = jh, i, j = 0, N; h = L_x/N\}$.

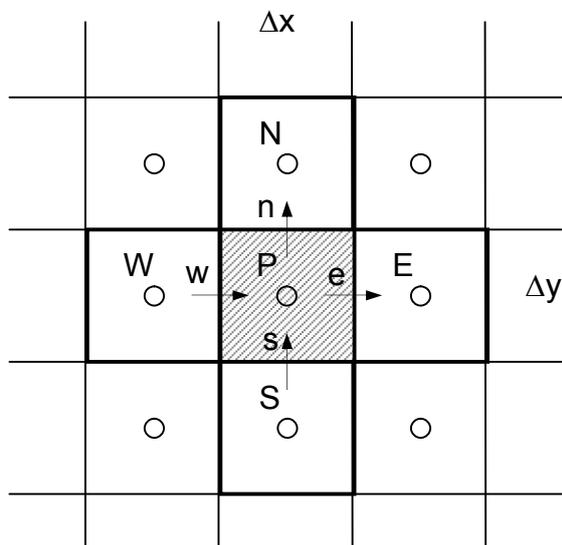


Рис. 4.1. Контрольный объем для поля давления p

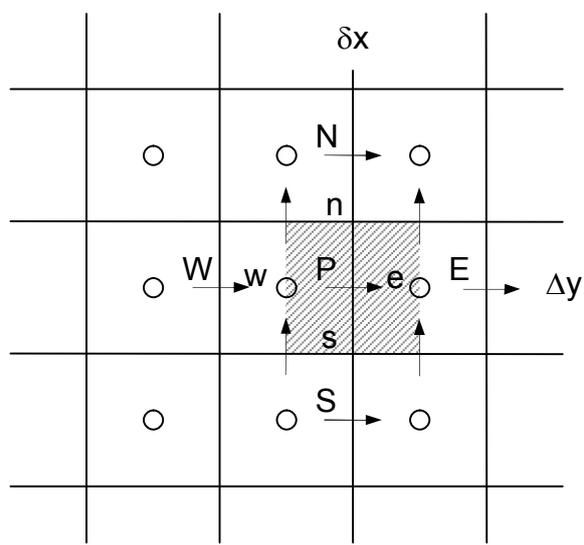


Рис. 4.2. Контрольный объем для определения поля u

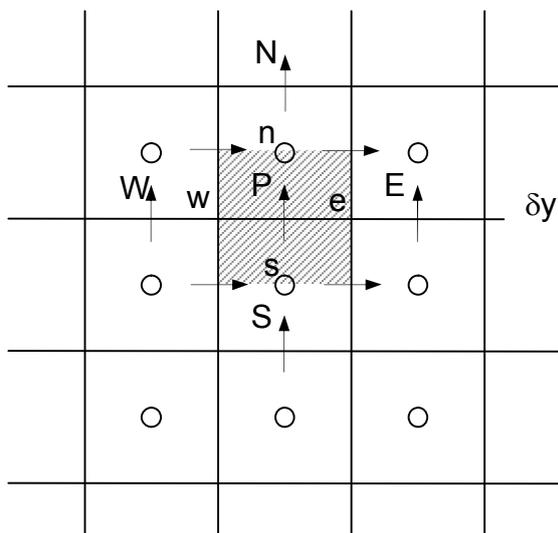


Рис. 4.3. Контрольный объем для определения поля v

Кроме того, видно, что давление определяется в узловых точках построенной сетки, а компоненты скорости определяются в точках расположенных на гранях контрольного объема.

Таким образом, строится шахматная сетка. Все достоинства выбора именно такой сетки описаны в [2, 5, 6]. Теперь перейдем к получению конечно-разностного аналога для дифференциальной системы уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение переноса:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + S, \quad (4.8)$$

где $\frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$ - диффузионные члены, $\frac{\partial}{\partial x}(u\Phi), \frac{\partial}{\partial y}(v\Phi)$ - конвективные, S - источниковый член.

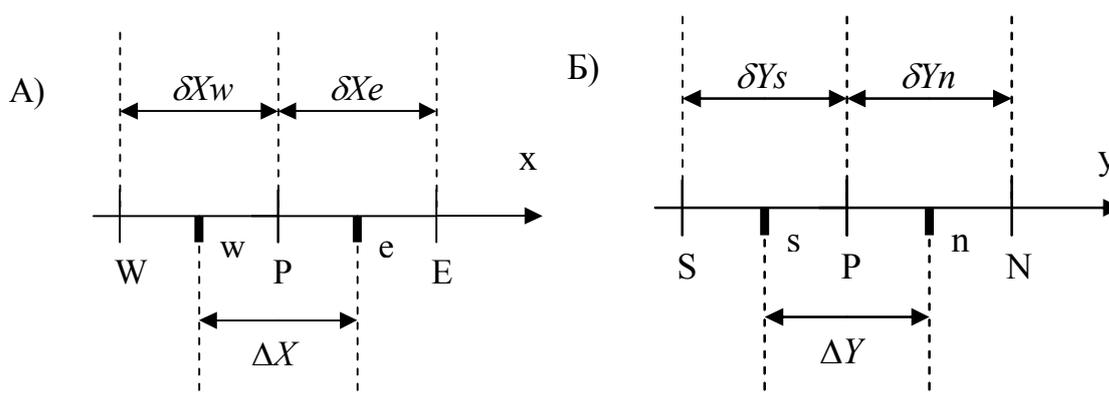


Рис. 4.4. Схемы построения дискретных аналогов в направлениях x (А), y (В).

Если вместо Φ подставлять соответственно u, v , то из уравнения (4.8) можно получить уравнения движения для соответствующих компонент скорости.

Интегрирование уравнения (4.8) по контрольному объему дает:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial t} (\Phi) dt dx dy + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} (u\Phi) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial y} (v\Phi) dx dy dt = \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} (g \frac{\partial \Phi}{\partial x}) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial y} (g \frac{\partial \Phi}{\partial y}) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^n S dx dy dt; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\Phi_P - \Phi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + ((u\Phi)_e - (u\Phi)_w) \Delta y + ((v\Phi)_n - (v\Phi)_s) \Delta x = \\ & = \left(\left(g \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e - \left(g \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \right) \Delta y + \left(\left(g \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n - \left(g \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x + S_P \Delta x \Delta y, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\Delta x, \Delta y, \delta x, \delta y$ - величины, показанные на рис. 4.4.

Если в уравнении (4.10) заменить производные, присутствующие в диффузионных членах на их центрально-разностные аналоги вида:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e & \cong \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x_e}, & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w & \cong \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta x_w}, \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_n & \cong \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta y_n}, & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s & \cong \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\delta y_s}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

а затем ввести обозначения:

$$\begin{aligned} F_e & = u_e \Delta y, \quad F_w = u_w \Delta y, \quad F_n = v_n \Delta x, \quad F_s = v_s \Delta x, \\ D_e & = g \Delta y / (\delta x)_e, \quad D_w = g \Delta y / (\delta x)_w, \quad D_n = g \Delta x / (\delta y)_n, \quad D_s = g \Delta x / (\delta y)_s, \end{aligned} \quad (4.12)$$

то уравнение (4.10) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{(\Phi_P - \Phi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [F_e \Phi_e - F_w \Phi_w] + [F_n \Phi_n - F_s \Phi_s] = \\ & = [D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_w (\Phi_P - \Phi_W)] + [D_n (\Phi_N - \Phi_P) - D_s (\Phi_P - \Phi_S)] + \\ & + S_P \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Аналогичным образом можно проинтегрировать уравнение неразрывности

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0. \quad (4.14)$$

Если умножить уравнение (4.14) на Φ_P и вычесть результат из уравнения (4.13) то получится уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{(\Phi_P - \Phi_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [F_e (\Phi_e - \Phi_P) - F_w (\Phi_w - \Phi_P)] + [F_n (\Phi_n - \Phi_P) - F_s (\Phi_s - \Phi_P)] = \\ & [D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_w (\Phi_P - \Phi_W)] + [D_n (\Phi_N - \Phi_P) - D_s (\Phi_P - \Phi_S)] + S_P \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Phi_P = \Phi(x_i, y_j); \Phi_E = \Phi(x_{i+1}, y_j); \Phi_W = \Phi(x_{i-1}, y_j); \Phi_S = \Phi(x_i, y_{j+1}); \Phi_N = \Phi(x_i, y_{j-1});$$

$$\Phi_e = \Phi(x_{i+1/2}, y_j); \Phi_w = \Phi(x_{i-1/2}, y_j); \Phi_s = \Phi(x_i, y_{j+1/2}); \Phi_n = \Phi(x_i, y_{j-1/2})$$

Выбор формул для определения значений Φ на гранях контрольного объема зависит от выбора схемы для аппроксимации конвективных членов. При использовании обычной схемы против потока (UPWIND) значение функции на грани контрольного объема полагается равным значению функции в узле, находящемся с «подветренной» стороны (рис. 4.5).

$$\Phi_w = \begin{cases} \Phi_W, & \text{если } u_w > 0, \\ \Phi_P, & \text{если } u_w \leq 0, \end{cases} \quad \Phi_e = \begin{cases} \Phi_P, & \text{если } u_e > 0, \\ \Phi_E, & \text{если } u_e \leq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_n = \begin{cases} \Phi_P, & \text{если } u_n > 0, \\ \Phi_N, & \text{если } u_n \leq 0, \end{cases} \quad \Phi_s = \begin{cases} \Phi_S, & \text{если } u_s > 0, \\ \Phi_P, & \text{если } u_s \leq 0. \end{cases} \quad (4/16)$$

Как нетрудно выяснить, построенные таким образом схемы являются схемами первого порядка. Результаты расчетов по таким схемам показывают проявление схемной вязкости, изменяющей картину течения [9]. Схемная вязкость проявляется в сглаживании резких, скачкообразных изменений функции Φ за счет возникновения искусственной диффузии при использовании схемы против потока.

Используя (4.16), выражение (4.15) можно представить в следующем виде.

$$\frac{(\Phi_P - \Phi_P^0)\Delta x \Delta y}{\Delta t} + (\max[0, -F_e] + D_e)(\Phi_E - \Phi_P) + (\max[0, F_w] + D_w)(\Phi_W - \Phi_P) +$$

$$(\max[0, -F_n] + D_n)(\Phi_N - \Phi_P) + (\max[0, F_s] + D_s)(\Phi_S - \Phi_P) + S_P \Delta x \Delta y. \quad (4.17)$$

Если ввести следующие обозначения:

$$a_E = \max[0, -F_e] + D_e, \quad a_W = \max[0, F_w] + D_w,$$

$$a_N = \max[0, -F_n] + D_n, \quad a_S = \max[0, F_s] + D_s,$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0, \quad b = S_P \Delta x \Delta y + a_P^0 \Phi_P^0, \quad a_P^0 = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}, \quad (4.18)$$

то тогда (4.17) можно записать в следующем виде:

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b. \quad (4.19)$$

Дискретные аналоги для определения компонент скорости u и v в соответствующих контрольных объемах (см. рис. 4.2, 4.3) имеют вид:

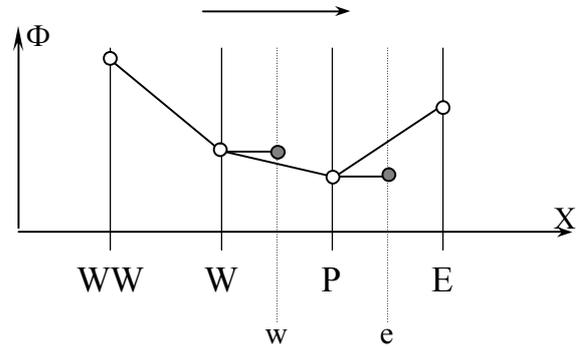


Рис. 4.5. Схема аппроксимации UPWIND.

$$a_p^u u_p = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb} + b^u + (p_w - p_e) \Delta y; \quad (4.20)$$

$$a_p^v v_p = \sum_{nb} a_{nb}^v v_{nb} + b^v + (p_s - p_n) \Delta x. \quad (4.21)$$

Значения коэффициентов a_{nb} , a_p связаны с влиянием совместных конвективных и диффузионных процессов на гранях контрольного объема и имеют вид, аналогичный (4.18) с учетом смещения контрольного объема.

Уравнения движения можно решить только в том случае, если поле давления задано или каким-либо образом найдено. Если при решении использовалось некорректное поле давления, найденное поле скорости не будет удовлетворять уравнению неразрывности. В этом случае поле скорости, получаемое с использованием приближенного поля давления p^* , выразим через u^* и v^* и найдем из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_p^u u_p^* = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}^* + b^u + (p_w^* - p_e^*) \Delta y; \\ a_p^v v_p^* = \sum_{nb} a_{nb}^v v_{nb}^* + b^v + (p_s^* - p_n^*) \Delta x. \end{cases} \quad (4.22)$$

Существует способ улучшения получения приближенного поля p^* таким образом, чтобы результирующее поле скорости с каждой итерацией лучше удовлетворяло уравнению неразрывности. Представим, что истинное давление может быть найдено из соотношения $p = p^* + p'$, где p' - поправка давления. Необходимо установить, как будут изменяться составляющие скорости в соответствии с таким изменением давления. Для этой цели введем поправки скорости $u = u^* + u'$, $v = v^* + v'$, где u', v' - добавки к скоростям на коррекцию. Вычитая из уравнений системы (4.20, 4.21) уравнения (4.22), а также пренебрегая членами $\sum_{nb} a_{nb}^u u'_{nb}$ и $\sum_{nb} a_{nb}^v v'_{nb}$, можно получить поправочные формулы для скорости:

$$u_p = u_p^* + d_p^u (p'_w - p'_e); \quad (4.23)$$

$$v_p = v_p^* + d_p^v (p'_s - p'_n), \quad (4.24)$$

где $d_p^u = \frac{\Delta y}{a_p^u}$, $d_p^v = \frac{\Delta x}{a_p^v}$.

Интегрируя уравнение неразрывности по контрольному объему, можно получить его дискретный аналог в виде уравнения для поправки давления, если вместо составляющих скорости подставить их выражения из поправочных формул для скорости:

$$[(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x = 0, \quad (4.25)$$

где $a_p p'_p = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b$;

$$\begin{aligned}
a_E &= \rho d_e^u \Delta y; \quad a_W = \rho d_w^u \Delta y; \\
a_N &= \rho d_n^v \Delta x; \quad a_S = \rho d_s^v \Delta x; \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S; \\
b &= [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta x.
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

Из (4.26) можно видеть, что член b в уравнении для поправки давления по существу равен левой части дискретного аналога уравнения неразрывности (4.14), записанного через значения составляющих скорости с индексом $*$. Равенство $b=0$ означает, что эти составляющие удовлетворяют уравнению неразрывности и не требуется никакой коррекции давления. Таким образом, член b представляет собой «источник массы», который должен быть скомпенсирован поправкой давления.

Таким образом, для нестационарного случая алгоритм SIMPLE Патанкара-Сполдинга можно представить в виде следующей последовательности этапов [2]:

1. Представления начального поля давления p^0 и задания $p^* = p^0, t=0$.
2. Определения начального поля скорости u^0, v^0 .
3. Решение уравнений движения для получения u^*, v^* .
4. Решение уравнения для p' (4.25) и расчет p путем добавления p' к p^* .
5. Нахождение u, v с помощью формул для поправки скорости (4.23), (4.24).
6. В случае, если $|p'|$ мало во всех узлах расчетной сетки, то полагаем $p^0 = p, u^0 = u, v^0 = v, t = t + \Delta t$. В противном случае используем найденное p как p^* и переходим к этапу п.3.
7. Если $t < T_{\max}$, то имеем возврат к п. 3.

Процедура SIMPLE с успехом была использована для решения целого ряда задач расчета течений несжимаемой жидкости. Однако в некоторых случаях скорость сходимости оказывается недостаточно быстрой. Это связано с тем, что уравнение для поправки давления дает завышенные значения, даже если соответствующие поправки к компонентам скорости вполне правдоподобны. Поэтому уравнение $p = p_0 + p'$ часто заменяют уравнением $p = p_0 + \alpha_p p'$, где α_p - параметр нижней релаксации. Поскольку сразу невозможно определить оптимальное значение параметра нижней релаксации, процедуру SIMPLE модифицируют с целью увеличения скорости сходимости. Такая модифицированная процедура получила название SIMPLER (SIMPLE revised) [2,6]. В ней поправки к скорости вычисляются так же, как и в процедуре SIMPLE, но используется полное уравнение Пуассона для давления. Кроме того, сначала приближенно задается поле скорости, а не поле давления. Поскольку в таких условиях вычисляемое в процедуре SIMPLER давление близко к корректному искомому, то необходимость в нижней релаксации становится существенно ниже. В результате этого сходимость решения достигается за меньшее число итерации.

4.1.2. Конечно-разностные методы расчета внутренних течений.

Конечно-разностные методы особенно пригодны в анализе развивающихся течений на участках от области непосредственного входа до зоны условно развитого течения. В настоящее время хорошо известно [8, 10, 11], что в общем случае движения сложного потока по каналу полной стабилизации не существует.

Напомним, что гидродинамически стабилизированным мы называем течение в котором распределение скорости в поперечном сечении статистически равнозначно и не меняется в осевом направлении. В условиях движения полностью развитого простого сдвигового потока метод конечных разностей не играет большой роли, так как в этом случае уравнения в частных производных могут быть сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Примером такого движения при вязкостном режиме течения выступает широко известное течение Хагена–Пуазейля.

Заметим, что особенностью расчета стационарных и нестационарных внутренних течений является задание при постановке задачи о течении расхода жидкости через любое сечение, перпендикулярное оси канала. Это дополнительное соотношение позволяет использовать эффективные и быстродействующие маршевые методы с оригинальными методиками нахождения поля давления при численном решении уравнений движения. Одной из таких методик выступает подход Л.М. Симуни [12].

4.1.3. Алгоритм Л.М. Симуни. Оригинальная версия.

Оригинальный и эффективный способ одновременного с полем скорости нахождения градиента давления применительно к стационарным течениям несжимаемой жидкости с переменными теплофизическими свойствами был предложен Л.М. Симуни. Так, используя симметричную аппроксимацию для всех производных по r и односторонние разности для производных по t и x , можно построить неявную схему, относительно каждой из маршевых переменных, для решения уравнений в Навье – Стокса в цилиндрических координатах в приближении “узкого канала”. В этом случае неизвестные значения сеточной функции $(u_x)_j$ определяются из трехточечного уравнения следующего вида:

$$a_j (u_x)_{j-1} + b_j (u_x)_j + c_j (u_x)_{j+1} = \partial p / \partial x + d_j. \quad (4.27)$$

Л.М. Симуни предлагает сеточную функцию $(u_x)_j$ представить в виде суперпозиции компонент скорости, опираясь на идею ее физического расщепления:

$$(u_x)_j = W_j + Z_j (\partial p / \partial x). \quad (4.28)$$

При этом сеточные функции W_j и Z_j находятся из следующих уравнений:

$$a_j W_{j-1} + b_j W_j + c_j W_{j+1} = d_j; \quad (4.29)$$

$$a_j Z_{j-1} + b_j Z_j + c_j Z_{j+1} = 1; \quad (4.30)$$

с граничными условиями, обеспечивающие на границах области течения выполнение физических условий для продольной компоненты вектора скорости.

Как видно из (4.29), (4.30), функции W и Z находятся независимо от величины $\partial p / \partial x$. Однако знание градиента давления необходимо при расчете продольной компоненты скорости течения среды по (4.28). Величина $\partial p / \partial x$ определяется из интегрального условия, выражающего собой баланс массы в области течения, расположенной левее выделенного сечения:

$$\partial p / \partial x = (G_0 - J_w) / J_z, \quad (4.31)$$

где

$$J_y = \pi \sum_{j=1}^N (Y_{j-1} r_{j-1} + Y_j r_j) \Delta r_{j-1/2}, \quad (4.32)$$

$$\Delta r_{j-1/2} = (r_j - r_{j-1}); \quad Y = W, Y; \quad G_0 = \int_0^R 2\pi U_0 r dr. \quad (4.33)$$

Здесь G_0 – приток среды через входное сечение. После вычисления градиента давления по (4.31) осевая компонента вектора скорости определяется по (4.28), а радиальную компоненту вектора скорости можно получить из конечно-разностного аналога уравнения неразрывности. Далее осуществляется переход к следующему слою по x , а после расчета всего поля течения и к следующему слою по времени.

4.1.4. Алгоритм метода дробных шагов

При построении схем численного интегрирования многомерных уравнений (движения, энергии) используют различные подходы, основанные на представлении разностной схемы в виде последовательности более простых разностных аналогов. Один из таких подходов предложил Яненко Н.Н [13], позднее названный как *метод дробных шагов*. Он позволяет свести решение сложной задачи к последовательному решению более простых и включает следующие идеи.

1. Геометрическое расщепление, сводящие многомерную задачу к временной последовательности чередующихся задач меньшей размерности или, в частности, к одномерным по пространству задачам. В последнем случае говорят о расщеплении по направлениям.
2. Физическое расщепление, в котором исходный физический процесс представляется в виде чередующейся временной последовательности процессов более простой физической структуры.
3. Аналитическое расщепление, позволяющие на дробных шагах решать различные аналитические задачи, например восстановление дивергентности в схеме *предиктор-корректор*. При аналитическом расщеплении возможно решение на отдельных дробных шагах аналитическими методами.

Рассмотрим несколько схем расщепления для системы уравнений (4.1) - (4.3).

Схема 1.

$$\begin{cases} \frac{\tilde{W} - W^n}{\Delta t} + L_h \tilde{W} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_h p^n, \\ \frac{W^{n+1} - \tilde{W}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_h p', \\ \text{div}_h W^{n+1} = 0, \end{cases} \quad (4.34)$$

где $W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $L_h \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_E^u u_E - a_W^u u_W - a_N^u u_N - a_S^u u_S + a_P^u u_P \\ -a_E^v v_E - a_W^v v_W - a_N^v v_N - a_S^v v_S + a_P^v v_P \end{pmatrix}$,

$$\text{grad}_h p = \begin{pmatrix} (p_e - p_w)\Delta y \\ (p_n - p_s)\Delta x \end{pmatrix}, \quad \text{div}_h \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u_E - u_W)\Delta y + (v_N - v_S)\Delta x.$$

Выражая W^{n+1} из второго уравнения системы (4.34) и подставляя в третье уравнение этой же системы, получим уравнение Пуассона для вычисления поправки давления. Таким образом, алгоритм расщепления, рассмотренный выше, можно представить в виде следующей последовательности этапов:

1. Определение начального поля давления p^0 и принятие $p^n = p^0$, $t = 0$.
2. Задание начального поля скорости W^0 .
3. Решение уравнений движения для получения \tilde{W} .
4. Расчет уравнения для p' и получение p^{n+1} путем добавления p' к p^n .
5. Получение W^{n+1} с помощью второго уравнения системы (4.34).
6. Принятие $t = t + \Delta t$, $n = n + 1$.
7. Проверка условия, если $t < T_{\max}$, то возврат к этапу п.3.

Схема 2.

$$\begin{cases} \frac{\tilde{W} - W^n}{\Delta t} + L_h W^{n+1} = 0, \\ \frac{W^{n+1} - \tilde{W}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_h p^{n+1}, \\ \text{div}_h W^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Выражая W^{n+1} из второго уравнения системы (4.35) и подставляя в третье уравнение этой же системы, получим уравнение Пуассона для вычисления давления. Таким образом, данный алгоритм расщепления позволяет представить в виде следующей последовательности шагов:

1. Задание начального поля скорости u^0, v^0 .
2. Расчет уравнений движения для получения \tilde{W} (для этого подставляем второе уравнение в первое).
3. Решение уравнения для p^{n+1} .
4. Определение W^{n+1} с помощью второго уравнения системы (4.35).
5. Принятие $t = t + \Delta t$.
6. Учет условия, если $t < T_{\max}$, то следует возврат к этапу п.2.

ГЛАВА 5. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ И ТЕПЛООБМЕНЕ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ

Особенности численных методик, их достоинства и недостатки легко уяснить на ряде примеров течений, наиболее распространенных в практических приложениях. Некоторые из таких движений происходят в условиях геометрии и режимах, описанных в п. 5.1. Остановимся на этих процессах подробнее.

5.1 Физическая постановка задачи. Часто предполагается, что течения вязких сред (несжимаемой жидкости или слабосжимаемого газа) в трубопроводах неустановившиеся или стационарные, развивающиеся или развитые, ламинарные или турбулентные, неизотермические или изотермические. Кроме того, будем считать, что область движения имеет особенности, связанные с изменением формы поперечного сечения по длине трубопровода. В этом случае, на участках со скачком площади поперечного сечения образуются зоны, существенно влияющие на интенсивность обмена теплом, импульсом и массой со стенками. Качественную картину подобного течения иллюстрирует рис. 5.1, где хорошо видны зонные особенности.

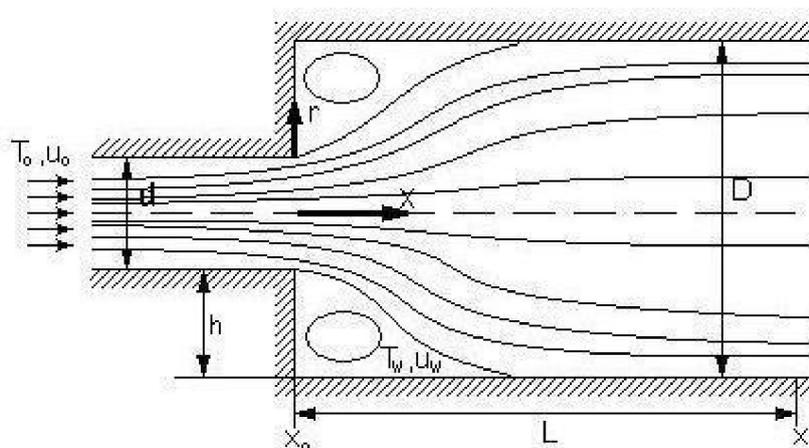


Рис 5.1. Схема течения в области канала с внезапным расширением.

Заметим, что предсказание структуры потока, механизмов конвективно-диффузионного взаимодействия в этих областях весьма важно для проектировщиков. Эти детали позволяют правильно оценить потери на трение и теплоотдачу к стенкам и корректно рассчитать наиболее оптимальный режим транспорта природного сырья по трубопроводу. Учтем данные положения в физической модели течения, а также, что течение осесимметричное в отсутствии действия внешних сил, наличия объемных источников тепла. Однако, считаем, что температурные перепады на отдельных участках могут быть значительными, а, следовательно, заметно меняются теплофизические свойства рабочей среды от температуры. Предполагаем далее, что из трубы диаметра d однородный поток поступает в трубу с большим диаметром D со скоростью u_0 и температурой T_0 . Допускается, что предвключенный участок с диаметром d достаточно протяженный. Тогда на входе в большой канал поток будет иметь (для простоты изложения) развитый профиль скорости Хагена-Пуазейля:

$$u = 2u_0(1 - (r/R)^2). \quad (5.1)$$

На стенках канала задан тепловой поток q_w или температура T_w , не равная температуре потока T_0 . Имеется прилипание частиц жидкости к твердой стенке. Это означает отсутствие скорости скольжения жидкости по поверхности. Таким образом, выполняется граничное условие равенства нулю скорости жидкости на поверхности неподвижных стенок u_w . Считается, что длина канала L достаточно протяженная, чтобы на выходе течение было развитым.

В таких условиях инженеру–вычислителю могут быть поставлены цели: а) построить и протестировать вычислительный алгоритм расчета устойчивых и переходных ламинарных и турбулентных неизотермических течений с особенностью границы области движения; б) оценить эффективность методики предсказания динамических и тепловых локальных и интегральных параметров течения и теплообмена, опираясь на сравнения с имеющимися опытными данными; в) исследовать влияния геометрии канала, высоты уступа, режима, скорости течения на область отрыва, присоединения потока, интенсивность и структуру вихреобразования. Данные положения следует формализовать с математической точки зрения.

5.2 Математическая формулировка проблемы. Система дифференциальных уравнений, определяющая теплообмен при турбулентном течении однородного инертного потока слабосжимаемого газа в канале с изотермической стенкой включает уравнения: неразрывности, осредненные уравнения Навье – Стокса (динамические уравнения Рейнольдса), энергии, которые в тензорной форме были представлены выше и имеют вид:

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0; \quad (5.2)$$

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\mu (\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}) - \overline{\rho u'_i u'_j}]; \quad (5.3)$$

$$\rho C_p U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho C_p \overline{u'_j t'}]. \quad (5.4)$$

Переменность теплофизических свойств от температуры определяется зависимостью Саттерленда:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{C+T_0}{T}\right), \quad (5.5)$$

где μ_0 – динамический коэффициент вязкости при нормальных условиях $T_0 = 273^0 K$; T – локальная температура; C – эмпирическая постоянная для закона (5.5), отвечающая конкретной газообразной среде. В случае анализа жидких капельных сред переменность теплофизических свойств учитывается формулой Рейнольдса-Филонова:

$$\mu = \mu_0 \exp(-k(T - T_0)), \quad (5.6)$$

где k – опытная константа.

Заметим, что в случае анализа ламинарного режима течения и теплообмена система (5.2) – (5.4) вырождается в систему уравнений Навье – Стокса и энергии с напряжениями $-\overline{\rho u'_i u'_j} = 0$, $-\rho C_p \overline{u'_i T'} = 0$, для решения которых используются технологии, сообщенные выше. При турбулентных процессах систему (5.2) - (5.4) необходимо дополнить зависимостями, определяющими коэффициенты турбулентного обмена μ_t, λ_t .

5.3. Модель турбулентности к замыканию уравнений, определяющих течение и теплоперенос во внутренних системах. Учитывая замечания к моделированию турбулентности, высказанные во введении, остановимся на моментной теории и многопараметрических (двухпараметрических тепловых и динамических) моделях. Тогда для напряжений Рейнольдса и турбулентных потоков тепла по подходу Колмогорова – Прандтля будем иметь:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}; \quad (5.7)$$

$$\mu_t / \mu = \alpha Re_t [1 - \exp(-\sigma_2 Re_t^2) + \sigma_3 Re_t^{1/2} \exp(-\sigma_1 Re_t^2)]; \quad (5.8)$$

$$Re_t = \rho \sqrt{EL} / \mu; \quad (5.9)$$

$$Pr_t^{-1} = \{(\mu_t / \mu)^2 / (2\delta_1 Pr)^2 + [1 + (\mu_t / \mu)^2 \delta_2] / \delta_3^2\}^{1/2} - \mu / (\mu_t 2\delta_1 Pr). \quad (5.10)$$

Замыкание определяющих уравнений проводится по К – L – модели, так как она более экономична при получении решения и эффективна в описании низкорейнольдсовых процессов. Ее транспортные уравнения имеют вид:

$$\rho(u_x \frac{\partial K}{\partial x} + u_r \frac{\partial K}{\partial r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu + b_1 \mu_t) \frac{\partial K}{\partial r}] + \mu_t \left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)^2 - \frac{b_2(\mu + b_1 \mu_t)}{L^2} K; \quad (5.11)$$

$$\rho(u_x \frac{\partial L}{\partial x} + u_r \frac{\partial L}{\partial r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\mu + b_3 \mu_t) \frac{\partial L}{\partial r}] - b_4 \frac{K}{L} \mu_t (\frac{\partial u_x}{\partial r})^2 + B b_5 \sqrt{K \rho} (1 - \frac{L}{(R-r)^2}). \quad (5.12)$$

Значения констант в k-L модели следующие:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.2; \quad \sigma_1 = 4 \cdot 10^{-4}; \quad \sigma_2 = 2.1 \cdot 10^{-4}; \quad \sigma_3 = 2 \cdot 10^{-2}; \\ b_1 &= 0.4; \quad b_2 = 3.93; \quad b_3 = 0.35; \quad b_4 = 0.125; \quad b_5 = 0.29; \\ B &= b_6 + b_7 / \text{Re}_t; \quad b_6 = 0.3; \quad b_7 = 1.75. \end{aligned} \quad (5.13)$$

В определении турбулентных тепловых потоков $\overline{u'_j t'}$ также используются двухпараметрические модели, представляющие уравнения для автокорреляций пульсаций температуры (энтальпии), скорости ее диссипации и имеют структуру, подобную уравнениям (5.11), (5.12):

$$\begin{aligned} \rho \frac{D \overline{h'^2}}{Dt} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\lambda}{C_p} + b_{11} \frac{\lambda_t}{C_p} \right) \frac{\partial \overline{h'^2}}{\partial r} \right) + \rho b_{12} \sqrt{v'^2} \sqrt{\overline{h'^2}} \frac{\partial h}{\partial r} - \\ &- \rho b_{13} a \frac{\overline{h'^2}}{L_h^2} - \rho b_{14} \frac{\sqrt{k}}{L_h} \overline{h'^2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{\varepsilon_{h^2}}}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[a \frac{\partial \overline{\varepsilon_{h^2}}}{\partial x_k} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_t \frac{\partial \overline{\varepsilon_{h^2}}}{\partial x_j} \right] + C_1 \frac{\overline{\varepsilon_{h^2}}}{h^2} a_t \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 - \\ &C_2 v_t \left(\frac{\partial v}{\partial x_k} \right)^2 - C_3 \frac{\overline{\varepsilon_{h^2}}}{h^2} - C_4 \frac{\overline{\varepsilon_{h^2}}}{K}; \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\rho C_p U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho C_p \overline{u'_j t'} \right]; \quad (5.16)$$

$$a_t = C_\lambda f_\lambda K \sqrt{\tau \tau_\theta}; \quad (5.17)$$

$$- \rho C_p \overline{u'_i T'} = \lambda_t \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (5.18)$$

$$\lambda_t = \rho C_p C_\lambda f_\lambda K \sqrt{\tau \tau_\theta}; \quad (5.19)$$

$$\tau = \frac{L}{\sqrt{K}}; \quad \tau_\theta = \frac{\overline{h'^2}}{2\varepsilon_{\overline{h'^2}}}; \quad (5.20)$$

5.4 Краевые условия. Для осредненных и пульсационных гидродинамических характеристик необходимые краевые условия к интегрированию определяющих уравнений имеют вид (см. рис. 5.2):

1. На оси ($r = 0$): условия симметрии $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$, $f = (U, T, K, L, \overline{h'^2} \varepsilon_{\overline{h'^2}})$;
2. На входе ($x = x_0$): $u = u_0$, $v = 0$, $T = T_0$, $K = \frac{3}{2} Tu_0^2 u_0^2$, где $Tu = 0.01\% \div 5\%$ – интенсивность турбулентности, интегральный масштаб турбулентности $L = (0.01 - 0.2)R$, $\overline{h'^2} = (\overline{h'^2})_0$, $\varepsilon_{\overline{h'^2}} = (\varepsilon_{\overline{h'^2}})_0$;
3. На стенке ($r = R$): выполняются условия прилипания, как для осредненных, так и пульсационных характеристик $u = v = K = L = 0$; $T = T_w$; $\overline{t'^2} = 0$; $\varepsilon_\theta = 0$;
4. На выходе ($x = x_l$): $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $f = (U, V, T, K, L, \overline{h'^2} \varepsilon_{\overline{h'^2}})$.

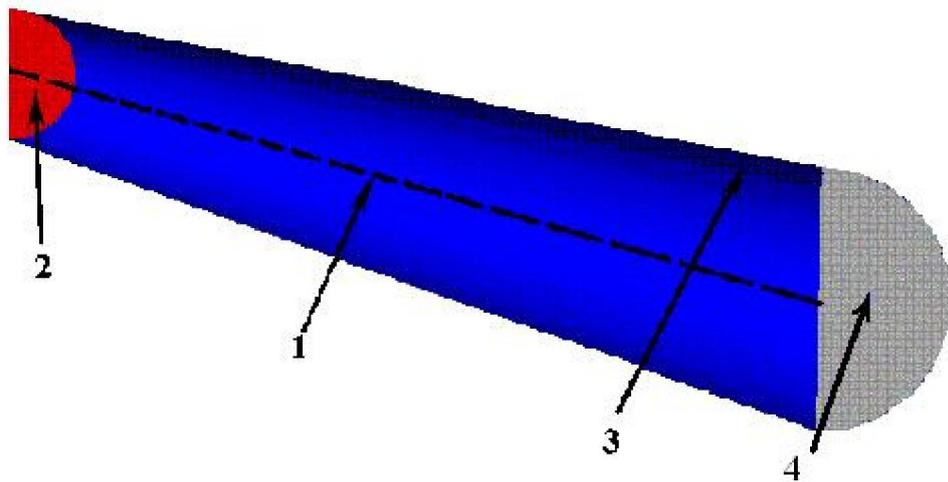


Рис. 5.2. Области постановки граничных условий:
1 – на оси; 2 – на входе; 3 – на стенке; 4 – на выходе

5.5. Особенности используемого численного метода и алгоритм решения задач теплообмена.

Представленный в данном разделе численный алгоритм отличается спецификой, которую вносит априорная информация о характере течения среды у стенки. Существование в пристеночной зоне трубопровода высоких поперечных градиентов искомых величин заставляет работать с неравными сетками. Кроме того, мы учитываем положительные моменты, которые дают маршевые методы и способы одновременного нахождения поля скорости и градиента давления. Поэтому сформулируем методику, широко апробированную на расчете внутренних течений, дающую удовлетворительные результаты анализа прямолинейных и закрученных инертных и химически реагирующих систем в трубах.

Итак, в алгоритме используем сетки со сгущением узлов в особых областях (стенка-ядро), итерационные методы, экономичные неявные конечно-разностные схемы, а также схемы расщепления по физическим процессам. Специфика расщепления будет заключаться в следующем. При малой интенсивности закрутки и небольших скачках площади поперечного сечения канала ($\tan\alpha < 0.1$, где α – угол наклона боковой поверхности к оси течения) используется *маршевый способ построения решения*. Далее этот алгоритм может быть обобщен на режимы с закруткой высокой интенсивности и умеренные размеры скачка сечения, но суть его, по-прежнему, будет заключаться в выделении маршевой переменной и способе одновременного с полем скорости нахождения градиента давления. В такой формулировке мы имеем версию, обобщения идей Л.М. Симуни [5, 8, 12] на случай переменного по сечению канала давления. Как показывает наш опыт, в классе осесимметричных задач построенный численный алгоритм по быстрдействию не будет уступать алгоритмам численного интегрирования уравнений двумерного пограничного слоя.

5.5.1. Схема численного интегрирования уравнений приближения “узкого канала”. При решении осесимметричных задач о течении вязкой несжимаемой жидкости в каналах постоянного и слабоменяющегося сечения в отсутствие влияния объемных сил используется следующая система уравнений импульсов и энергии:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S. \quad (5.5.1)$$

Т а б л и ц а 1

Коэффициенты обобщенного уравнения (5.5.1).

| Φ | Γ | S |
|----------|----------|---|
| U | v | $-(\partial P / \partial x) / \rho$ |
| θ | v | $-(\partial P / \partial r) / \rho - W^2 / r$ |
| W | v | $-VW / r - vW / r^2$ |
| T | a | 0 |

Здесь $\nu = \mu/\rho$ - коэффициент кинематической вязкости, $a = \lambda/(\rho c_p)$ – коэффициент температуропроводности.

Рассмотрим ключевые моменты в способе получения численного решения в этом случае. Уравнение (5.5.1) перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (U + |U|) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - |U| \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S. \quad (5.5.2)$$

Представление конвективного члена в форме (5.5.2) позволяет реализовать *двухстадийную схему* получения решения, причем на первой стадии корректным образом осуществить маршевую процедуру расчета, связанную с последовательным продвижением в положительном направлении оси Ox . Это возможно, поскольку коэффициент $(U + |U|)$ при $\partial \Phi / \partial x$ всегда неотрицателен даже при наличие в потоке интенсивных возвратных движений.

Рассмотрим аппроксимацию отдельных членов уравнения (5.5.2). Эволюционный член представим следующим образом:

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]^{i,j} \approx \frac{\Phi^{i,j} - \Phi_{i,j}}{\tau}. \quad (5.5.3)$$

Здесь и ниже верхнее расположение двойных индексов будет отвечать верхнему слою по времени, нижнее – нижнему, индекс i соответствует выделенному сечению по длине канала, j отмечает положение при продвижении вдоль радиальной координаты, τ - шаг по времени.

По возможности будем ориентироваться на разработку неявных схем, поэтому ниже все пространственные производные будут расписаны с использованием сеточных значений функций на верхнем слое по времени. В связи с этим, аппроксимация (5.5.3) представляет собой одностороннюю разность по времени и имеет первый порядок точности относительно τ . Все производные по радиальной координате будут аппроксимированы со вторым порядком точности относительно шага Δr , а производные по продольной – с первым относительно шага Δx . Сеточный шаблон, на котором расписаны пространственные производные, имеет следующий вид.

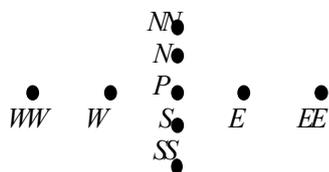


Рис. 5.3. Сеточный шаблон, используемый для записи разностного аналога уравнения (5.5.2).

Выпишем все необходимые аппроксимации:

$$\left[(U + |U|) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{i,j} = (U + |U|)^{i,j} (\Phi^{i,j} - \Phi^{i-1,j}) / \Delta x + o(\Delta x), \quad (5.5.4)$$

$$- \left[|U| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{i,j} = |U|^{i,j} (\Phi^{i,j} - \Phi^{i+1,j}) / \Delta x + o(\Delta x), \quad (5.5.5)$$

$$\left[V \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]^{i,j} = V^{i,j} (\Phi^{i,j+1} - \Phi^{i,j-1}) / (2\Delta r) + o(\Delta r^2), \quad (5.5.6)$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r}) \right]^{i,j} = \frac{1}{r_j \Delta r^2} \{ (r\Gamma)_{j-0,5} \Phi^{i,j-1} - [(r\Gamma)_{j-0,5} + (r\Gamma)_{j+0,5}] \Phi^{i,j} + (r\Gamma)_{j+0,5} \Phi^{i,j+1} \} + o(\Delta r^2), \quad (5.5.7)$$

где $(r\Gamma)_{j-0,5} = 0,5[(r\Gamma)_{j-1} + (r\Gamma)_j]$, $(r\Gamma)_{j+0,5} = 0,5[(r\Gamma)_{j+1} + (r\Gamma)_j]$.

Далее введем обозначения:

$$\Phi^{i-1,j} = \Phi_W, \quad \Phi^{i,j} = \Phi_P, \quad \Phi^{i+1,j} = \Phi_E, \quad \Phi^{i,j-1} = \Phi_S, \quad \Phi^{i,j+1} = \Phi_N, \quad \Phi_{i,j} = \Phi_P^0$$

Тогда разностный аналог, отвечающий уравнению (5.5.2) будет выглядеть следующим образом:

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + b, \quad (5.5.8)$$

где

$$a_W = (U + |U|)_P / \Delta x, \quad a_E = |U_P| / \Delta x, \quad a_S = \frac{(r\Gamma)_{j-0,5}}{r_j \Delta r^2} + \frac{V_P}{2\Delta r}, \quad a_N = \frac{(r\Gamma)_{j+0,5}}{r_j \Delta r^2} - \frac{V_P}{2\Delta r},$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0, \quad a_P^0 = \frac{1}{\tau}, \quad b = \frac{\Phi_P^0}{\tau} + S_P. \quad (5.5.9)$$

Разностное уравнение (5.5.8) будем решать итерационным методом при обязательном прохождении двух последовательных этапов:

$$(I) \quad a_P \Phi_P^m = a_S \Phi_S^m + a_N \Phi_N^m + a_W \Phi_W^m + a_E \Phi_E^{m-1} + b, \quad (5.5.10)$$

$$(II) \quad a_P \Phi_P^{m+1} = a_S \Phi_S^m + a_N \Phi_N^m + a_W \Phi_W^m + a_E \Phi_E^{m+1} + b. \quad (5.5.11)$$

Здесь m – номер итерационного слоя. Рассмотрим подробнее первый этап вычислений. При однонаправленном во входном сечении движении жидкости значение субстанции Φ в этом сечении следует считать заданным. Мы уже упоминали, что при решении уравнений переноса на этапе (I) возможна реализация маршевой процедуры вычислений. Выполняя первый шаг этой процедуры найдем распределения Φ в первом сечении, далее во втором и т.д.

Таким образом, значения Φ_W , входящие в (5.5.10), всегда будут известны, а величину Φ_E на этом этапе берем с предыдущего итерационного слоя. Поэтому уравнения (5.5.10) можно переписать следующим образом:

$$a_P \Phi_P = a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + b', \quad (5.5.12)$$

где $b' = b + a_W \Phi_W + a_E \Phi_E$.

Система уравнений (5.5.12) может быть эффективно разрешена методом прогонки. При $\Phi = W, T$ из (5.5.12) получаются разностные уравнения, не содержащие градиента давления и их решение не связано с какими-либо сложностями. Остановимся на особенностях разрешения системы U -уравнений, полученной на основе (5.5.12). В эту систему уже входят неизвестные величины $(\partial P / \partial x)_P$.

Для решения этой системы мы используем способ одновременного с полем скорости нахождения градиента давления. Следуя которому сеточные значения

продольной компоненты вектора скорости записываются в виде, аналогичном [1], следующим образом:

$$U_j = Z_j \Pi_j + W'_j, \quad (5.5.15)$$

где $\Pi_j = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_j$. Для простоты записи в (5.5.13) индекс i опущен. Отличие (5.5.13)

от зависимости, предложенной в [1], состоит в том, что здесь сеточные значения Π зависят не только от i , но и от j , то есть Π является переменной по поперечному сечению величиной. Поэтому для определения продольного градиента давления недостаточно условия постоянства расхода и требуется некоторое уравнение, позволяющее его найти. В качестве такого используем уравнение количества движения в проекции на радиальное направление, разрешенное относительно поперечного градиента давления:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho W^2}{r} = \theta(t, x, r). \quad (5.5.14)$$

Соотношение (5.5.14) выражает баланс поверхностных и массовых сил (в данном случае центробежных). Дифференцируя его по x и строя подходящий разностный аналог, будем иметь:

$$\Pi_{j+1} = \Pi_j + \Omega_j, \quad (5.5.15)$$

где $\Omega_j = \left[\Delta r \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{j+0,5}$ и $\Delta r_{j+1/2} = r_{j+1} - r_j$. Такое представление обеспечивает

аппроксимацию с точностью до членов второго порядка малости относительно шага по радиальной координате.

При $\Phi = U$ из (5.5.12) имеем

$$a_P U_P = a_S U_S + a_N U_N + b'' - \frac{1}{\rho} \Pi_P, \quad (5.5.16)$$

где $b'' = b' - S_P$

Подставляя в (5.5.16) зависимость (5.5.13), получим

$$a_P Z_P = a_S Z_S + a_N Z_N - \frac{1}{\rho}; \quad (5.5.17)$$

$$a_P W'_P = a_S W'_S + a_N W'_N + b'' + a_P Z_S \Omega_S. \quad (5.5.18)$$

Используя связь (5.5.13) и формулу трапеций при вычислении интегрального потока массы, можно получить соотношение:

$$\sum_{j=0}^N m_j W'_j + \sum_{j=0}^N m_j Z_j \Pi_j = Q. \quad (5.5.19)$$

Здесь $m_j = 2\pi r_j \Delta r_j$, узел N относится к оси течения, Q – расход жидкости через поперечное сечение канала.

Из (5.5.15) следует равенство

$$P_j = P_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \Omega_k. \quad (5.5.20)$$

Тогда с использованием (5.5.19), (5.5.20) можем найти

$$P_0 = \frac{(Q - J_w - H)}{J_z}, \quad (5.5.21)$$

$$\text{где } J_w = \sum_{j=0}^N m_j W'_j; J_z = \sum_{j=0}^N m_j Z_j; H = \sum_{j=0}^N m_j W'_j \sum_{k=0}^{j-1} \Omega_k. \quad (5.5.22)$$

Зная величину продольного градиента давления на стенке P_0 и используя рекуррентное соотношение (5.5.15), можно рассчитать значения P_j во всех точках поперечного сечения канала, которые необходимы для определения сеточных значений продольной компоненты скорости по (5.5.13). Величина поперечной компоненты скорости находится из уравнения неразрывности.

Мы уже ввели переменный шаг по поперечной координате при изложении способа одновременного с полем скорости нахождения градиента давления. Не составит большого труда построить разности (5.5.6), (5.5.7) применительно к этому случаю. Поэтому, здесь уместно сделать замечания, относящиеся к построению неравномерных сеток, которые будут полезны при рассмотрении задач о турбулентном закрученном течении.

При построении сгущающейся сетки у стенки и у оси канала используются преобразования вида:

$$\eta = \ln(R - r + \Delta), \quad r_* < r < R; \eta' = -\ln(r + \Delta_1), \quad 0 < r < r_*,$$

$$\text{где } R - \text{ радиус канала, } r_* - \text{ точка, для которой принимается, что } \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\partial \eta'}{\partial r},$$

т.е. $1/(R - r_* + \Delta) = 1/(r_* + \Delta_1) \Rightarrow r_* = (R + \Delta - \Delta_1)/2$ (*). Тогда $\Delta\eta = [\ln\Delta - \ln(R - r_* + \Delta)]/N_1$; $\Delta\eta' = [\ln\Delta_1 - \ln(r_* + \Delta_1)]/N_2$. Здесь N_1, N_2 – количество точек разностной сетки, определяющее общее число узлов по поперечной координате (NG): $NG = N_1 + N_2$. Необходимо также потребовать, чтобы $\Delta\eta = \Delta\eta'$, т.е. $[\ln\Delta - \ln(R - r_* + \Delta)]/N_1 = [\ln\Delta_1 - \ln(r_* + \Delta_1)]/N_2$. Из последнего соотношения находим $\Delta_1 = e r_* / (1 - e)$ (**), где $e = \exp\{(N_2/N_1) \cdot [\ln\Delta - \ln(R - r_* + \Delta)]\}$. Заметим, что r_* также зависит от Δ_1 , однако эта зависимость является слабой. Полагая в (**) $r_* = R/2$, сразу находим более или менее подходящее приближение для Δ_1 . Далее оно может быть уточнено простым пересчетом по формулам (*) и (**). Таким образом, задавая Δ, N_1, N_2 , можно найти Δ_1 и, соответственно, все элементы преобразования координат.

Замечания о сходимости итерационного процесса. Исходные уравнения нелинейны. Их линеаризация осуществляется сносом коэффициентов, содержащих значения искомой функции на предыдущий итерационный слой. Далее осуществляются как локальные, так и глобальные итерации. Сходимость итерационного процесса обеспечивается тем, что при реализации прогонок вдоль координатных линий мы стремимся обеспечить диагональное преобладание

(хорошую обусловленность метода прогонки). В результате всегда выполняется критерий Скарбороу:

$$\sum |a_{nb}|/|a_p| = \begin{cases} \leq 1 & \text{во всех точках} \\ < 1 & \text{хотя бы в одной точке} \end{cases} \quad (5.5.23)$$

где $\sum |a_{nb}| = |a_W| + |a_E| + |a_S| + |a_N| + |a_p^0|$ [см. (5.5.9)].

Из (9) следует, что для того, чтобы выполнялось правило положительной определенности коэффициентов необходимо, чтобы сеточное число Рейнольдса, определенное по поперечной компоненте скорости и шагу по радиальной координате, было меньше 2. Это ограничение не является слишком жестким, т.к. в рамках рассматриваемого класса задач величина V значительно меньше U , а большие градиенты по r требуют использования мелкого шага по поперечной координате.

Разностная аппроксимация и схема интегрирования полных уравнений Навье-Стокса. Далее рассмотрим процедуру расчета закрученного течения жидкости в канале с резким расширением площади поперечного сечения. В этом случае следует опираться на систему полных уравнений Навье-Стокса. Обобщенное уравнение, отвечающее этой системе, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S. \quad (5.5.24)$$

Значения коэффициентов Γ и S даются приводимой ниже таблицей.

Таблица 2.

Коэффициенты обобщенного уравнения (24).

| Φ | Γ | S |
|--------|----------|---|
| U | ν | $-(\partial P / \partial x) / \rho$ |
| V | ν | $-(\partial P / \partial r) / \rho + W^2 / r$ $-\nu V / r^2$ |
| W | ν | $-VW / r - \nu W / r^2$ |
| T | a | 0 |

Описанный выше алгоритм решения уравнений движения, записанных в приближении “узкого канала”, может быть обобщен на случай полных уравнений Навье-Стокса. Обобщенное уравнение (5.5.24) представим аналогично (5.5.2) следующим образом:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (U + |U|) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - |U| \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (V + |V|) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - |V| \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + S. \quad (5.5.25)$$

Для того, чтобы записать разностный аналог этого уравнения используем аппроксимации (5.5.5) – (5.5.9), а также разностные представления вновь введенных членов:

$$\left[(V + |V|) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]^{i,j} = (V + |V|)^{i,j} (\Phi^{i,j} - \Phi^{i,j-1}) / \Delta r + o(\Delta r), \quad (5.5.28)$$

$$-\left[|V| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]^{i,j} = |V|^{i,j} (\Phi^{i,j} - \Phi^{i,j+1}) / \Delta r + o(\Delta r), \quad (5.5.29)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}) \right]^{i,j} &= \frac{1}{\Delta x^2} [\Gamma_{j-0,5} \Phi^{i-1,j} - (\Gamma_{j-0,5} + \Gamma_{j+0,5}) \Phi^{i,j} + \\ &+ \Gamma_{j+0,5} \Phi^{i+1,j}] + o(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (5.5.30)$$

Тогда разностный аналог, отвечающий уравнению (5.5.27), будет иметь вид:

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E + a_S \Phi_S + a_N \Phi_N + b, \quad (5.5.31)$$

где $a_W = (U + |U|)_P / \Delta x + \Gamma_{i-0,5} / \Delta x^2$, $a_E = |U_P| / \Delta x + \Gamma_{i+0,5} / \Delta x^2$,

$$a_S = \frac{(r\Gamma)_{j-0,5}}{r_j \Delta r^2} + (V + |V|)_P / \Delta r, \quad a_N = \frac{(r\Gamma)_{j+0,5}}{r_j \Delta r^2} + |V|_P / \Delta r,$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_P^0, \quad a_P^0 = \frac{1}{\tau}, \quad b = \frac{\hat{O}_P^0}{\tau} + S_P + \{b_U + b_V\}. \quad (5.5.32)$$

Видим, что все коэффициенты безусловно положительны. С помощью введенных в источник член “b” [см. (5.5.32)] добавок следующего вида:

$$\begin{aligned} b_U &= (U + |U|)_P [\Phi_P - \Phi_W - (3\Phi_P - 4\Phi_W + \Phi_{WW}) / 2] / \Delta x - \\ &- |U|_P [\Phi_P - \Phi_E - (3\Phi_P - 4\Phi_E + \Phi_{EE}) / 2] / \Delta x; \\ b_V &= (V + |V|)_P [\Phi_P - \Phi_S - (3\Phi_P - 4\Phi_S + \Phi_{SS}) / 2] / \Delta r - \\ &- |V|_P [\Phi_P - \Phi_N - (3\Phi_P - 4\Phi_N + \Phi_{NN}) / 2] / \Delta r \end{aligned}$$

на этапе установления итераций мы повышаем порядок аппроксимации конвективных членов и схемы в целом до второго (относительно шагов по пространственным координатам) и тем самым минимизируем схемную вязкость. Фигурные скобки в (5.5.32) означают, что значения искомой функции берутся с предыдущей итерации. Интегрируя систему уравнений Навье-Стокса мы проходим все этапы присущие схеме решения задач приближения “узкого канала”, а именно получаем уравнения (5.5.12), (5.5.13), расщепляем продольную компоненту скорости по (5.5.15) и т.д. Однако в форме (5.5.16) вместо $\theta(t, x, r)$ используем $\theta^1(t, x, r)$:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \theta^1(t, x, r). \quad (5.5.33)$$

Здесь уже $\theta^1(t, x, r)$: содержит все члены, дополняющие (5.5.16) до полноценного уравнения импульсов в проекции на радиальную координату. Последовательность проведения расчетов состоит в следующем. Сначала находятся распределения (в выделенном сечении) окружной компоненты скорости $\{W'_j\}$, поскольку соответствующее ей уравнение не содержит градиента давления. Потом

находятся [с использованием (5.5.16)] распределения $\{Z_j\}$, далее по (20) $\{W'_j\}$, после чего по (5.5.15) $\{U_j\}$, затем по (5.5.23) P_0 и $\{P_j\}$ по (5.5.22) и, наконец, $\{V_j\}$ из разностного аналога уравнения неразрывности. Далее переходим к другому сечению реализуя по существу маршевую процедуру вычислений (первый этап расчетов). В довершении всего с использованием (5.5.13) и прогонок в аксиальном направлении уточняем полученные распределения (второй этап). В качестве граничных условий в выходном сечении канала, необходимых для реализации второго этапа (продольных прогонок), берутся данные вычислений, полученных в конце первого этапа. Таким образом, по нашему алгоритму, как и в схеме расчетов, рекомендованной Патанкармом [2], физических граничных условий на выходе не требуется (требуется лишь, чтобы движение в выходном сечении было однонаправленным). Как видим в этом случае критерий Скарбороу (5.5.25) безусловно выполняется, что обеспечивает сходимость итерационных циклов. Получающаяся в результате расчетов схемная вязкость может быть минимизирована с использованием способа Рейсби [3].

Заметим, что описанная численная процедура имеет преимущество в быстродействии в сравнении с алгоритмом, предложенным для решения аналогичных задач С. Патанкармом. Это обусловлено тем, что в нашем случае нет необходимости в использовании итерационного процесса по согласованию полей скорости и давления. Последнее стало возможным благодаря отказу от требования консервативности на уровне элементарной расчетной ячейки. Однако на участке стабилизированного течения схема становится консервативной. Кроме этого, всегда имеется баланс массы по сечению канала или камеры ибо это условие существенным образом используется при определении градиента давления. Во многих случаях этого оказывается более чем достаточно и решение получается близким к аналитическим распределениям локальных гидродинамических величин либо к экспериментальным данным.

ГЛАВА 6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

6.1. Гидродинамическая часть задачи. Для большей общности постановки задачи, описанной в главе 5, добавим, что эффектами, осложняющими течение, выступают инерционные силы, организующие вращение потока в области входа. Движение может быть как ламинарным, так и турбулентным. Оно происходит в трубопроводе постоянного и переменного поперечного сечения. Предположим, что несжимаемая жидкость на входе в трубу имеет неизменную по сечению осевую скорость, нулевую радиальную и окружную, изменяющуюся по линейному закону (от нуля на оси до максимума у стенки). Как принято говорить, в таких случаях поток на входе в трубу закручен по закону твердого тела. Из-за наличия разности температур входящего в канал потока и стенки трубы течение является неизотермическим. При симметричных граничных условиях для скорости и температуры получающиеся стационарные распределения должны быть осесимметричными.

Процедура численного решения задачи состоит в последовательной обработке блоков, связанных с интегрированием первоначально тепловой, а затем и динамической части задачи. Решение строится с использованием неравномерных сеток, конечноразностных схем, схем расщепления как по пространственным

переменным (при расчете полных уравнений баланса импульса и тепла), так и по физическим процессам с последующим применением метода прогонки и установления, о которых сообщалось в главе 5. Аппроксимация производных осуществляется со вторым порядком точности относительно шагов в радиальном направлении, с первым порядком точности в осевом. При определении поля давления используется модифицированный подход Л.М. Симуни.

Детали использования маршевого метода решения системы определяющих уравнений сводятся к следующему. Она записывается в нестационарном виде. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока при проведении итераций не будет достигнута сходимость по трению и теплообмену с точностью до 0.01%.

Как известно, в рамках ламинарного течения система дифференциальных уравнений в приближении «узкого канала» постоянного поперечного сечения в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0; \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (r\mu \frac{\partial u}{\partial r}); \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0. \quad (6.3)$$

Численное интегрирование определяющих уравнений выполняется с использованием неявных конечно-разностных схем, реализованных на неравномерных сетках со сгущением узлов к стенке по логарифмическому закону. С этой целью в исходных уравнениях необходима замена переменных:

$$\{x, r\} \longrightarrow \{x', \eta\} : x' = x, \quad \eta = \ln(R - r + \Delta), \quad (6.4)$$

где Δ – параметр преобразования, обеспечивающий попадание необходимого числа точек разностной сетки в вязкий подслой. Заметим, что такой переход, конечно же, более важен в описании турбулентных течений, поскольку структура турбулентного пограничного слоя включает универсальную логарифмическую зону. Таким образом, в преобразованном пространстве расчет ведется на равномерной сетке, в то время как результат в физическом пространстве выдается на неравномерной сетке, представленной на рис. 6.1, 6.2:

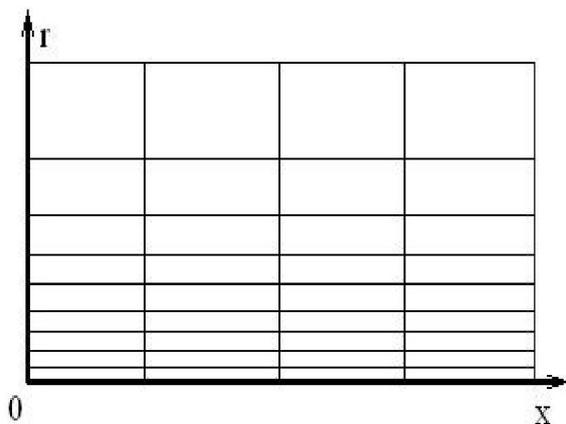


Рис. 6.1. Физическое пространство

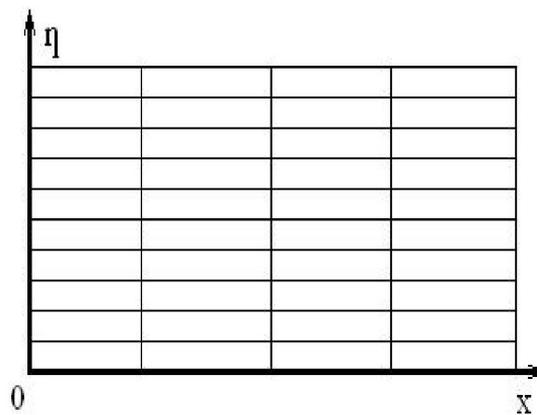


Рис. 6.2. Преобразованное пространство

Преобразованная таким образом система уравнений (6.1) – (6.3) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\chi}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial \eta} = 0; \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v\chi \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\chi}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \eta} (r\mu\chi \frac{\partial u}{\partial \eta}); \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \quad \chi = \frac{\partial \eta}{\partial r}. \quad (6.7)$$

В качестве примера подготовки уравнения движения к численной реализации выбран простой случай записи конечно-разностного аналога уравнения (6.6):

$$\begin{aligned} & \frac{u^{ij} - u_{ij}}{\Delta t} + u_{ij} \frac{u^{ij} - u^{i-1j}}{\Delta x} + v_{ij} \chi_j \frac{u^{ij+1} - u^{ij-1}}{2\Delta \eta} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\chi_j}{\rho r_j \Delta \eta} (r_{j+1/2} \mu_{j+1/2} \chi_{j+1/2} \frac{u^{ij+1} - u^{ij}}{\Delta \eta} - r_{j-1/2} \mu_{j-1/2} \chi_{j-1/2} \frac{u^{ij} - u^{ij-1}}{\Delta \eta}). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь верхний индекс указывает на величину на верхнем временном слое (см. рис. 6.3), Δt – шаг по времени; $\Delta x = \frac{L}{Xg}$ – шаг по оси x (L – длина канала, Xg –

количество узлов разностной сетки вдоль оси x); $\Delta \eta = \frac{\ln(1 + 1/\Delta)}{Yg}$ – шаг по

оси η ; u^{ij} – сеточные значения осевой скорости на верхнем временном слое; u_{ij} – соответствующие значения на нижнем временном слое; v_{ij} – сеточные значения радиальной скорости; r_j – значение локального радиуса в j -ой точке

($r_j = R(1 + \Delta - \exp(\eta_j))$); $r_{j+1/2} = \frac{r_{j+1} + r_j}{2}$. Ниже, на рис. 6.3, 6.4 изображены расчетная область и шаблон разностной сетки соответственно.

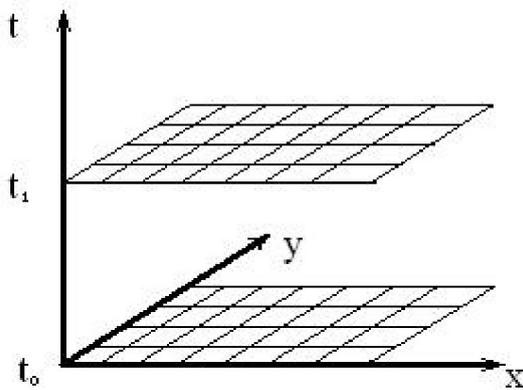


Рис 6.3. Расчетная область на нижнем и верхнем временном слое

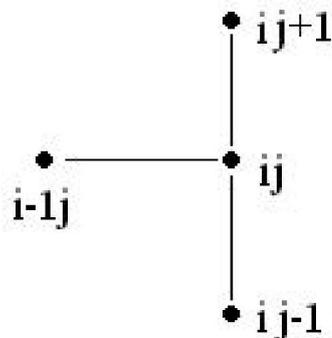


Рис 6.4. Шаблон разностной сетки

Таким образом, решение дифференциального уравнения (6.6) проводится по методике главы 5 на основе системы алгебраических уравнений. Данные системы имеют трехдиагональную матрицу с преобладающей главной диагональю. Такие системы решаются методом прогонки, которая является частным случаем метода Гаусса. Такие системы обычно записываются в каноническом виде:

$$\begin{aligned} a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_{i+1} x_{i+1} &= d_i, \quad 1 \leq i \leq n; \\ a_1 &= c_n = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Технология решения довольно проста, включает прямой и обратный ход, и подробно описана в специальной литературе. Искомые прогоночные коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{c_i}{b_i - a_i \alpha_i}; \\ \beta_{i+1} &= \frac{a_i \beta_i - d_i}{b_i - a_i \alpha_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.10)$$

Из (6.10) видно, что для начала расчета формально требуется задать величины α_1, β_1 и x_n , которые находятся из граничных условий (α_1, β_1 находятся из граничных условий на стенке: $x_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$; x_n находится из граничных условий на оси: $\frac{dx}{dr} = 0 \Rightarrow x_n = x_{n-1}$, следовательно:

$$x_n = \alpha_n x_n + \beta_n, \quad (6.11)$$

Отсюда

$$x_n = \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n}. \quad (6.12)$$

После того, как во всей расчетной области будет найдена осевая скорость радиальная скорость можно получить из конечно-разностного аналога уравнения неразрывности:

$$\frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{\Delta x} + \frac{\chi_j}{r_j} \frac{r_j v_{ij} - r_{j-1} v_{ij-1}}{\Delta \eta} = 0. \quad (6.13)$$

Отдельные результаты гидродинамических процессов. Как отмечалось выше, с целью выяснения достоинств метода, для оценки точности результатов должны привлекаться теоретические и опытные данные других авторов. Например, расчеты, выполненные в диапазоне изменений исходных параметров:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= 5 \cdot 10^2 \div 5 \cdot 10^5; \quad L = 60 \div 200D; \\ Tu &= (0.01 \div 10)\%; \quad h/R = 0.1 \div 0.5. \quad T_w / T_0 = 0.5 \div 2.0 \end{aligned}$$

показывают весьма удовлетворительное согласие с опытами на классе развивающихся течений (значки – данные Пфеннингера [14]).

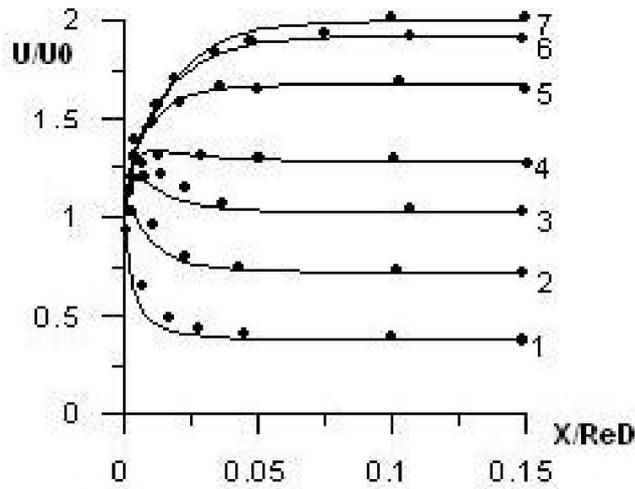


Рис. 6.5.

Распределения относительной осевой скорости по длине трубы в различных сечениях по радиусу ($1 - y/R=0.1$; $2 - 0.2$; $3 - 0.3$; $4 - 0.4$; $5 - 0.6$; $6 - 0.8$; $7 - 1.0$). Точками отмечен опыт Пфеннингера сплошной линией

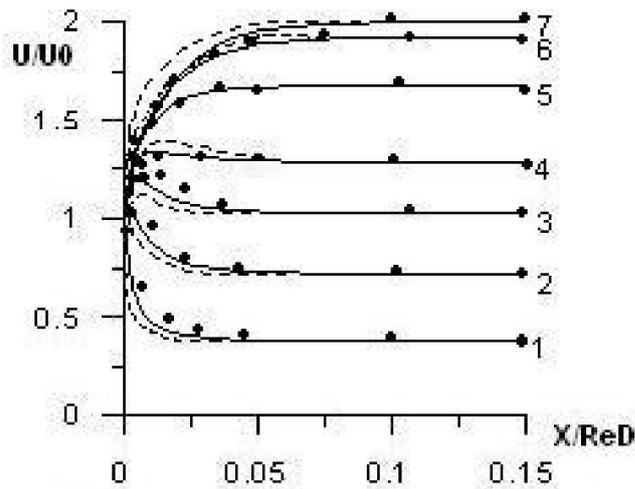


Рис. 6.6.

Изменения относительной осевой скорости по длине трубы в различных точках по радиусу ($1 - y/R=0.1$; $2 - 0.2$; $3 - 0.3$; $4 - 0.4$; $5 - 0.6$; $6 - 0.8$; $7 - 1.0$). Точками отмечены опытные данные Пфеннингера, сплошной линией – результат численного расчета. Пунктирной линией – учет переменности теплофизических свойств рабочего тела.

Так, на рисунке 6.5 приведены зависимости относительной осевой скорости по длине трубы в различных сечениях по радиусу ($1 - y/R=0.1$; $2 - 0.2$; $3 - 0.3$; $4 - 0.4$; $5 - 0.6$; $6 - 0.8$; $7 - 1.0$). При течении в канале постоянного поперечного сечения. Изотермический случай. Значками отмечены опытные данные, сплошной линией – результат численного расчета. Расчеты велись при $Re = 10 \div 1000$, $L = 60 \div 180D$. Рабочим телом является слабосжимаемый газ. Сравнение с опытными данными показывает, что алгоритм хорошо предсказывает развивающуюся картину изотермического течения в различных точках по радиусу.

Некоторые данные по учету переменности теплофизических свойств по всей длине канала даны на рисунке 6.6.

На рисунке 6.6 представлены графики изменений относительной осевой скорости по длине трубы в различных точках по радиусу для неизотермических течений рабочей среды. Здесь сплошными линиями изображено распределение скорости без учета

переменности теплофизических свойств, пунктирными – с учетом переменности теплофизических свойств. Из рисунков видно, что влияние переменности теплофизических свойств более заметно в области непосредственного входа в трубу. При $x/ReD \leq 0.05$ максимальное отличие имеется на оси $\Delta \approx 5\%$. Именно в этой части радиальные профили температуры более деформированы вследствие изменения молекулярных свойств рабочей среды.

6.1.1. Трубы и каналы постоянного и переменного поперечного

сечений. В трубах с особенностью границы области течения изображены на рис. 6.7 - 6.10. Расчеты выполнены при следующих значениях исходных параметров по методикам главы 5: $T_w = 295 K; T_g = 310 K; Pr=6,1; P_0=1 атм; Ro=0 \div 10; l_k=0,084 м; Re=160 \div 1600; D=0,007 м.$

На рис.6.7 приведены распределения относительной скорости на оси трубы (u_s/U_g) по длине канала в зависимости от безразмерного расстояния $X=x/(R \cdot Re)$ ($Re=U_g R/\nu$), отвечающие различным значениям параметра закрутки $Ro=\Omega R/U_0$ (числа Россби). Здесь u_s, U_g – скорости на оси трубы и входе в канал соответственно; R – радиус трубы; ν – вязкость жидкости; Ωr – окружная скорость во входном сечении; x, r – цилиндрические координаты. Значки ■ – экспериментальные данные В. Пфеннингера [14], представляющие осевую скорость на начальном участке трубы в прямоточном движении. Пунктир: линии 2, 3 – численное решение [15]; 4 – приближенное аналитическое решение М.А. Гольдштика [16] ($Ro=10, Re_D = \frac{2RU_g}{\nu} = 60$). Сплошная линия – расчет, полученный на основе предложенной численной модели при следующих значениях определяющих параметров: 1 – $Ro=0, 2-4, 3-5, Re_D=160; 4 – Ro=10, Re_D = 60$.

Из рисунка видно, что при $Ro>4$ появляется зона возвратных движений. С увеличением Ro зона возвратов существенно увеличивается, а точка минимального значения скорости смещается вниз по течению.

На рис.6.8 представлена кривая обратных токов, полученная расчетным образом (сплошная линия) и по приближенному аналитическому решению М.А.Гольдштика [16] (пунктир). Здесь $X=x/(R \cdot Re)$. График позволяет оценить размер зоны, где скорость на оси симметрии имеет противоположное основному потоку направление.

На рис.6.9 показаны зависимости коэффициента трения $c'_f=c_f Re_d$ от приведенной длины $X_3=x/(h \cdot Re_d)$. Здесь $c_f=2\tau_w/(\rho_g U_{cp}^2)$, $U_{cp} = U_g/(D/d)^2$, τ_w – напряжение трения на стенке, ρ_g – характерная плотность среды, d – диаметр входного сечения, $D=2R$ – диаметр камеры, $h=(D-d)/2$ – высота уступа, U_g – средняя скорость во входном сечении; $Re_d=U_g \cdot d/\nu$ – число Рейнольдса, $H=h/d$ – коэффициент

расширения потока, $S = 2(W_g / U_g)[1/3 - 1/(m + 3)]$ – параметр закрутки ($m = 0.41$). Сплошные линии (1–5) – расчет по предлагаемой модели; значки 1 – \circ , 2 – \blacksquare , 3 – \blacktriangle , 4 – \blacklozenge , 5 – \bullet – результаты измерений в круглой трубе. Кривые 1,2 отвечают соответственно значениям: $Re_d=10$ и 250 ; ($H=0,5$). Эти расчеты выполнены в условиях экспериментов Дж.П. Льюиса, Р.Х. Плетчера [17]. Кривые 3–5 соответствуют значениям $S=0,94$; $S=0,41$; $S=0$ ($Re_d=100, H=4,5$) соответственно.

На рис. 6.10 приведены распределение относительной осевой скорости по радиусу трубы с внезапным расширением в различных точках по длине. Высота уступа $d/D=0.5$, $Re=100$. 1-0.8D, 2-1.6D, 3-2.5D, 4 -3.5D.

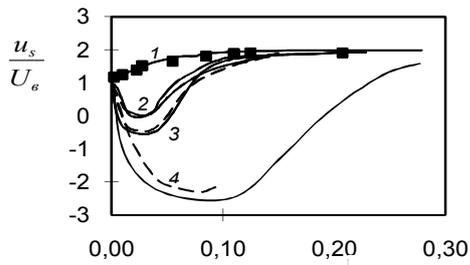


Рис. 6.7. Распределение относительной скорости на оси трубы u_s / U_0 в зависимости от приведенной длины $X=x/(R \cdot Re)$ при различных значениях параметра Россби Ro .

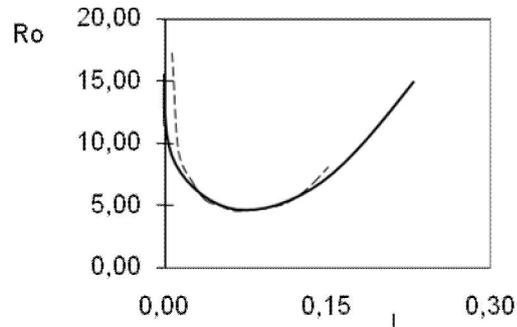


Рис. 6.8. Кривая обратных токов в зависимости от изменения чисел Россби (Ro) и приведенной длины X . Здесь сплошная линия – расчет по настоящей модели, пунктир – данные расчета М.А. Гольдштিকা [16].

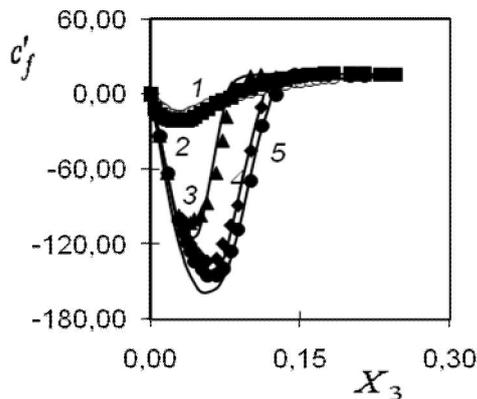


Рис. 6.9. Изменение коэффициента трения $c'_f = c_f Re_d$ от приведенной длины $X_3=x/(h \cdot Re_d)$.

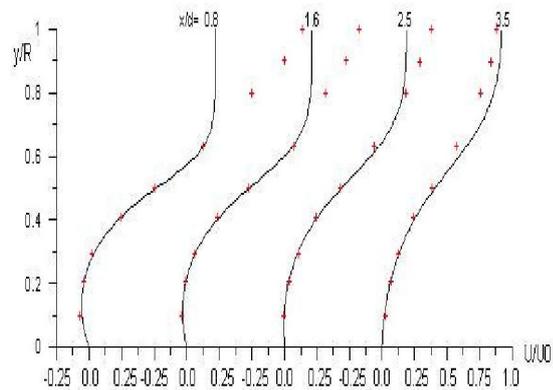


Рис. 6.10. Радиальные распределения относительной осевой скорости по длине трубы с внезапным расширением. Значки – опыт Льюиса.

Здесь линии- расчет, значки-опыт (J.P. Lewis). Видно, что алгоритм весьма эффективен в предсказании периферийных рециркуляционных процессов. Имеется удовлетворительное совпадение результатов расчета с опытом. Это позволяет

заклучить о высокой степени надежности представленного алгоритма в изучении механизмов отрыва и присоединения потоков к стенкам трубы, тех мест, где интенсифицируются процессы переноса импульса из-за вихреобразования.

6.1.2. Теплообмен при ламинарном режиме. В качестве полезной информации о корректности методики и использовании этих сведений для оценки возможностей построенных алгоритмов можно привести также данные изменений по длине трубы коэффициентов локального трения c_f (рис. 6.11) и теплоотдачи Nu (рис. 6.12). Пунктир – проявление влияния переменности теплофизических свойств на интенсивность обмена. Из рисунков видно, что за участком гидродинамической стабилизации численное решение хорошо удовлетворяет закону Стокса и процессам тепловой стабилизации с заданием на стенках граничных условий I рода, причем переменность теплофизических свойств приносит более быстрое выравнивание полей по сечению в сравнении с теплообменом при постоянных свойствах.

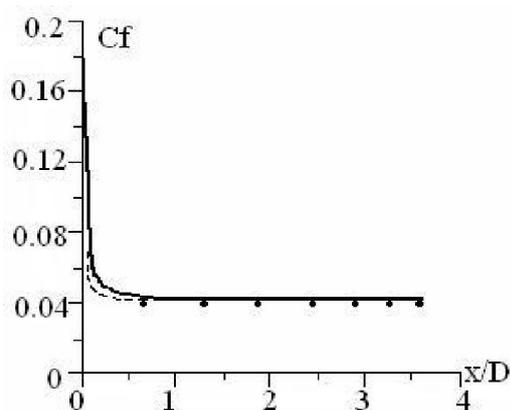


Рис. 6.11. Распределение коэффициента трения Фаннингера C_f в зависимости от безразмерной длины x/D . Здесь значки – аналитическое решение.

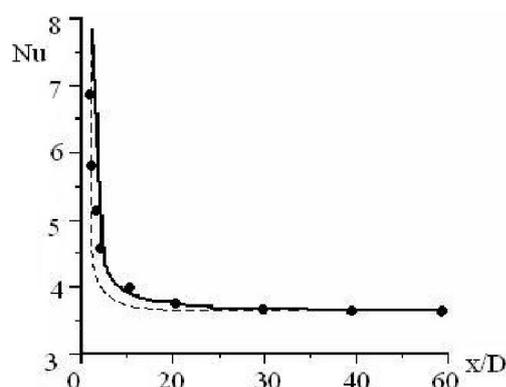


Рис. 6.12. Распределение критерия Нуссельта Nu в зависимости от безразмерной длины x/D . Значки - опыт Петухова Б.С.[4].

На рис. 6.13 наглядно проиллюстрировано развитие профиля скорости в области входного участка трубопровода с характерной длиной $L=10D$. На рис. 6.14 цветное решение показывает отличия в изменении поля температуры при ламинарном движении капельной среды с учетом (верхний схема) и без учета (нижняя схема) переменности теплофизических свойств. Видно, что изменение динамической вязкости и коэффициента теплопроводности на $10D$ заметно меняет тепловое поле.

На рис. 6.15, 6.16 изображены изотермы в области течения входного участка трубы со скачком площади поперечного сечения (высота уступа $d/D=0.5$, $Re=100$). Видно, что в зоне непосредственно за ступенькой имеют место рециркуляционные токи и это сопровождается интенсивными диффузионным движением.

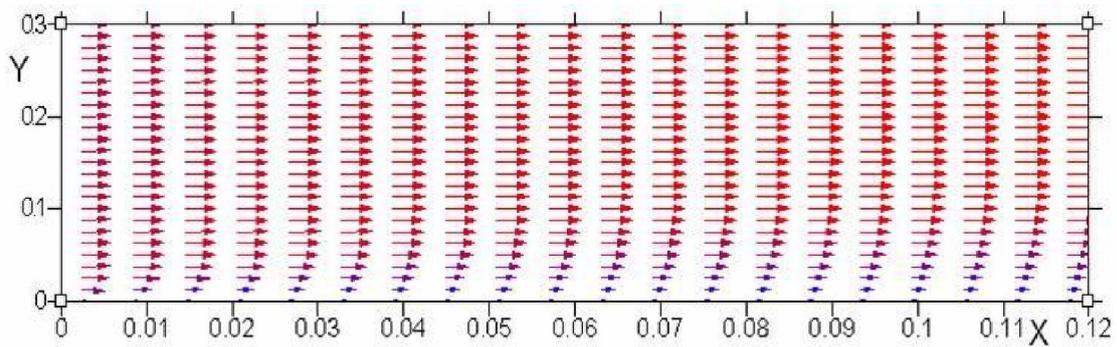


Рис. 6.13 .Векторное поле скорости при ламинарном движении среды в трубе на участке в 10D.

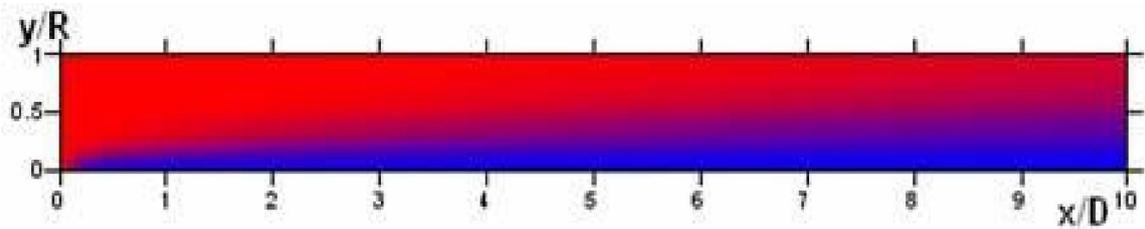
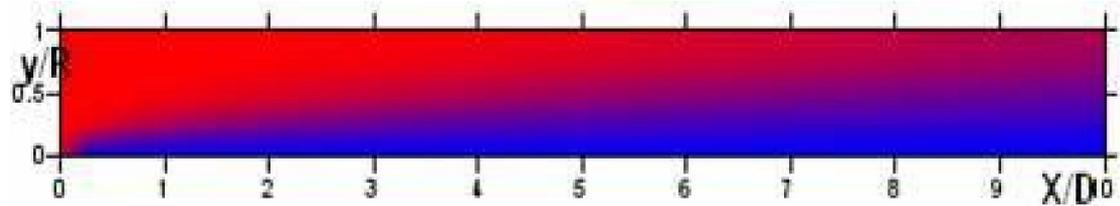


Рис.6.14. Сравнение полей температур при движении рабочего тела с учетом переменности теплофизических свойств (верхний рисунок) и без учета переменности (нижний рисунок)

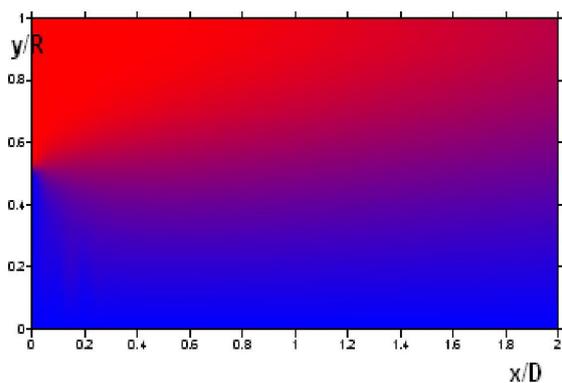


Рис. 6.15. Поле температур в канале с внезапным расширением. Высота уступа $d/D=0.5$, $Re=100$. Красным – 350К, синим – 300К

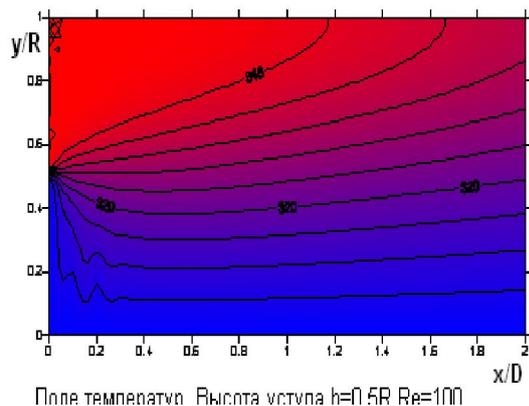
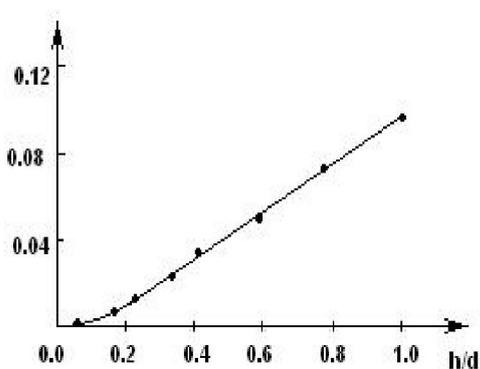


Рис. 6.16. Поле температур и изотермы в канале с внезапным расширением. Высота уступа $d/D=0.5$, $Re=100$. Красным – 350К, синим – 300К



Рис/ 6.17. Зависимость точки присоединения X_g от высоты уступа h/d .

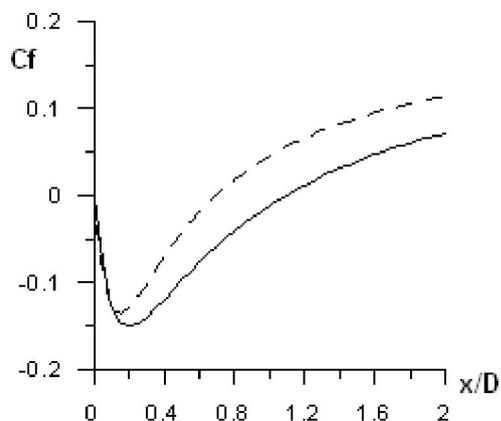


Рис. 6.18. Изменение коэффициента Фаннингера вдоль длины трубы с внезапным расширением. Высота уступа $d/D=0.5$ $Re=100$. Сплошная линия – расчет без учета переменности теплофизических свойств, пунктир – с учетом.

Расчеты гидродинамики и теплообмена в трубах и каналах со скачком поперечного сечения показывают, что изменение геометрии

усложняет теплодинамическую картину. При высоких скоростях среднего движения в осевом направлении за уступом возникают рециркуляционные зоны (см. рис. 6.9 - 6.18). Эти области хорошо предсказываются моделью. Отличие с опытом в рис 6.10 вызвано тем, что поток, входящий в канал с диаметром D считается развитым в эксперименте, а в расчетах однороден по сечению. Однако у стенки совпадение теории и опыта удовлетворительное, вплоть до точки присоединения (линия 4). Данные показывают также, что размер рециркуляционной зоны протяженный ($x/D \leq 1$). На него влияют высота уступа h/D , Re , переменность теплофизических свойств (см. рис. 6.9 – 6.18). В точке присоединения к стенке фиксируется относительное увеличение коэффициента теплоотдачи Nu/Nu_∞ до 2 раз. Кроме того, расчеты констатируют, что вплоть до $x/D \leq 2$ численный алгоритм, обобщающий идеи Л.М. Симуни весьма эффективен.

6.1.3. Турбулентный режим.

Во введении мы отмечали, что расчет гидродинамики и теплообмена в инженерных системах, включающих трубопроводные участки, как правило, требуют корректного моделирования низкорейнольдсовых процессов. В таких условиях нужны подходы с детальным анализом пульсационных эффектов в гидродинамике и теплообмене, высокоточные алгоритмы. Нам представляется целесообразным познакомить студентов с возможностями и принципами использования анизотропных моделей переноса рейнольдсовых напряжений в сочетании обобщенным нами алгоритмом Л.М. Симуни. В данном разделе будут рассмотрены несколько версий моделей переноса рейнольдсовых напряжений (ПРН-моделей), предназначенных для расчета развивающихся течений вязких сред в трубах и каналах с малыми числами Рейнольдса (Сима, Ханжалика-

Лаундера, Элгобаши), а также ПРН-L - модель с уравнением для интегрального масштаба турбулентных пульсаций L. Сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными о движении жидкостей и газов будет свидетельствовать о том, что учет влияния стенки трубопровода в членах высшего порядка модели турбулентности обеспечивает приемлемую точность алгоритма решения задачи. Мы также остановимся на достоинствах и недостатках ПРН – моделей. Забегая вперед подчеркнем, что согласно результатам анализа наиболее корректными в описании внутренних течений выступают модель с замыканиями отечественных ученых (ПРН-L- Глушко) и модель Элгобаши. Выбор двухпараметрической k-L базы очень важен, так как мы имеем успешно описывать процессы в буферных областях. В тех частях, в которых любая другая модель терпит неудачу. Примером могут служить данные, изображенные на рис. 6.19, 6.20. Видно, что у стенки кинетическая энергия турбулентности (рис. 6.19), интенсивность пульсаций температуры весьма удовлетворительны.

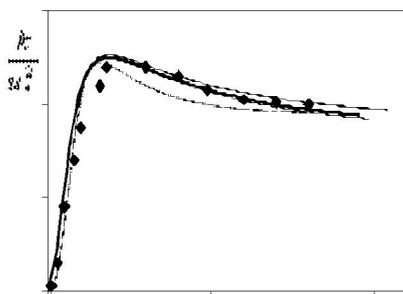


Рис. 6.19.

Распределение безразмерной кинетической энергии турбулентности k/u_*^2 в области стенки в зависимости от универсальной поперечной координаты y^+ при различных значениях относительной осевой координаты x/D . Здесь линии – расчет, значки – опыт Лауфера ($Re = 4,25 \cdot 10^5$, $Tu=5\%$), (1- $x/D=80$, 2-100, 3-120), ($x/D=160$).

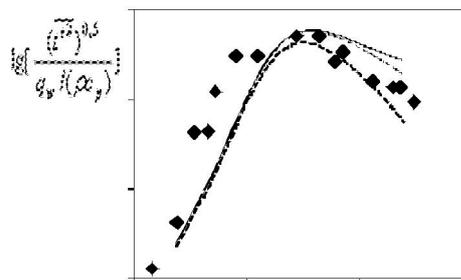


Рис.6.20.

Безразмерные профили среднеквадратичных значений пульсаций температуры $\lg\left[\frac{(\overline{t'^2})^{0,5}}{q_w / (\rho c_p)}\right]$ в зависимости от универсальной координаты $\lg y^+$ в различных сечениях по длине канала. Здесь значки – опыт Tanimoto S. ($Re = 3,25 \cdot 10^4$), линии - расчет (1- $x/D = 4$; 2-12; 3 – 160).

Как известно, трубопроводный транспорт природного сырья и анализ структуры турбулентного потока в пристеночной зоне весьма сложен. Изменения в тонкой структуре при сложном движении подробно анализировались, например, в [18-20]. Данные этих работ до сих пор используются для сопоставления с результатами теоретического исследования развивающегося течения в каналах на базе утонченных моделей переноса рейнольдсовых напряжений (см. рис. 6.19, 6.20). Заметим, что прежде, чем приступить к использованию модели, необходимо убедиться в ее возможностях. В силу этого тестирование ПРН-моделей турбулентности с ε -базой (Ханжалика [21], Сима [22], Элгобаши [23]) это верный шаг к установлению степени доверия результатам. Кроме того, анализ литературы показывает, что такие версии весьма успешны в предсказании т гидродинамики турбулентных течений. Не будем забывать, что широко используемые в настоящее время двухпараметрические модели [типа (k- ε), (k-L), (k- ω)] применимы к практическим задачам (без их изменения на особенности процессов) в очень ограниченных случаях и требуют значительной модификации. Данный подход признан бесперспективным. Что касается алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений (АМН-моделей), то они вряд ли окажутся универсальными из-за способа построения, опирающегося на допущения об упрощении физического явления.

В связи с этим в настоящей разделе пособия поставлены цели: адаптировать различные версии моделей замыкания рейнольдсовых напряжений к оценке развивающихся турбулентных течений в трубах; утвердиться в достоинствах представленных ПРН-моделей в расчете анизотропных пристеночных течений путем сравнения с

экспериментальными данными по широкому кругу параметров; оценить замыкающие аппроксимации ПРН-моделей, значения ее численных параметров с целью развить форму модели, рекомендуемую к применению в широкой области технических приложений.

6.1.3.1. Математическая модель течения.

Общую систему определяющих уравнений, используемую для расчета развивающихся течений несжимаемой жидкости в каналах, из соображений простоты целесообразно дать в тензорной записи. В этом виде уравнения неразрывности, движения и ПРН-модель выглядят следующим образом [5]:

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0; \quad (1)$$

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} \right]; \quad (2)$$

$$U_j \frac{\partial \overline{(u'_i u'_k)}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial \overline{(u'_i u'_k)}}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_s f_\mu \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \overline{(u'_i u'_k)}}{\partial x_l} \right] + P_{ik} - \frac{2\varepsilon}{3k} [(1 - f_s) \sigma_{ik} k + \frac{3}{2} \overline{(u'_i u'_k)} f_s] + R_{ik}; \quad (3)$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_s f_\mu \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P -$$

$$c_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} + c_{\varepsilon 3} \nu \frac{k}{\varepsilon} f_\mu \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_l}; \quad (4)$$

$$\text{Здесь } P_{ik} = -(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}), P = -\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l}.$$

Следует остановиться на некоторых приемлемых и удачных в описании пристеночных течений в каналах подходах, используемых для замыкания уравнений рейнольдсовых напряжений, содержащих неизвестные члены высших порядков: диффузию скорости и давления (D_{ik}), перераспределения (R_{ik}) и диссипации (ε_{ik}).

M1- модель Ханжалика- Лаундера [21].

Данная модель – обобщенная версия модели [24], рекомендованная для потоков с высокими числами Рейнольдса – имеет следующие представления:

$$R_{ik} = R_{ik,1} + R_{ik,2} + R_{ik,w}, \quad (5)$$

$$R_{ik,1} = -c_1 \frac{\varepsilon}{k} a_{ij}, \quad (6)$$

$$R_{ik,2} = -\frac{(c_2 + 8)}{11} (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) - \frac{(8c_2 - 2)}{11} (D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) - \frac{(30c_2 - 2)}{55} k (\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}); \quad (7)$$

$$R_{ik,w} = [c_3 \frac{\varepsilon}{k} a_{ij} + c_4 (P_{ij} - D_{ij})] f_w (\frac{l}{x_n}), \quad (8)$$

где x_n -расстояние от стенки,

$$f_w = \frac{k^{1.5}}{\varepsilon x_n}, c_1 = 1.5, c_2 = 0.4, c_3 = 0.125, c_4 = 0.015,$$

$$a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k, D_{ij} = -(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}).$$

Для диссипативного уравнения принято:

$$f_s = (1 + 0.1 \text{Re}_t)^{-1}, \text{Re}_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}, c_\varepsilon = 0.15, c_{\varepsilon_1} = 1.275, c_{\varepsilon_2} = 1.8, c_{\varepsilon_3} = 2.0, \quad (9)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l} \right)^2, f_\varepsilon = 1.0 - \left(\frac{0.4}{1.8} \right) \exp\left(-\frac{\text{Re}_T^2}{36}\right), f_\mu = \exp\left(-\frac{3.4}{(1 + \text{Re}_t/50)^2}\right).$$

В настоящей пособии, основываясь на идеи [25], турбулентная диффузия в М1 упрощена и отвечает виду, представленному в (3) ($c_s = 0.22$).

М2-модель Сима [22].

С целью улучшения возможностей М1 в предлагаемой модели модифицирована постоянная c_1 в (6):

$$R_{ik,1} = -c_1^* \frac{\varepsilon}{k} a_{ij}, c_1^* = c_1 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{c_1} \right) f_w \right], f_w = \exp\left[-(c_w \text{Re}_{ts})^4\right], \quad (10)$$

где $c_w = 0.015, \text{Re}_{ts} = \frac{\sqrt{k} x_n}{\nu}$.

Член “быстрых изменений” $R_{ij,2}$ оставлен согласно (7). Член, определяющий влияние стенки на перераспределение определяется следующим образом:

$$R_{ij,w} = \left[c_{s1} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) + c_{s2} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] f_w,$$

где $c_{s1} = 0.45, c_{s2} = 0.08$.

Моделирование турбулентной диффузии представляется, как и М1,

согласно [21] ($c_s = 0.11$). В качестве замыкающего уравнения в М2 используется уравнение (4) вида:

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + c_{\varepsilon 1} (1 + c_{\varepsilon 3} f_w) \frac{\varepsilon}{k} P - c_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} + \left[\left(-2 + \frac{7}{9} c_{\varepsilon 2} \right) \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k} - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2k} \right] f_w, \quad (12)$$

где $c_\varepsilon = 0.15, c_{\varepsilon 1} = 1.8, c_{\varepsilon 2} = 1.35, c_{\varepsilon 3} = 1.0, f_\varepsilon = 1 - 0.22 \exp(-0.028 \text{Re}_t^2)$,

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_l^2}.$$

М3-модель Элгобаши [23].

Здесь диффузия турбулентности определяется по [25] ($c_s = 0.22$). При аппроксимации ε_{ij} особенности реального поведения нормальных напряжений учитываются видом:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\varepsilon}{k} f_s (1 - \delta_{ij}). \quad (13)$$

ε -уравнение в М3 имеет вид (4) со следующими постоянными и демпфирующими функциями:

$$c_\varepsilon = 0.15, c_{\varepsilon 1} = 1.45, c_{\varepsilon 2} = 1.9, c_{\varepsilon 3} = 2.0, f_\varepsilon = 1 - a_1 \exp(-a_2 \text{Re}_t^2),$$

$$a_1 = 1 - \frac{1.4}{c_{\varepsilon 2}}, a_2 = 0.028, f_\mu - по (9).$$

Моделирование перераспределяющего члена выполнено аналогично (5)-(8), где для $R_{i,j,w}$ принято

$$c_3 = 0, c_4 \cong 0.123, c_5 = 0.003, f_\mu = \exp(-c_5 \text{Re}_{t_s}).$$

В случае ПРН-L- модели уравнения (1) – (3) дополняются еще уравнениями для кинетической энергии турбулентности k и интегрального масштаба турбулентных пульсаций L :

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_s f_\mu \frac{L}{\sqrt{k}} \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P - c_d \frac{k^{1.5}}{L}; \quad (14)$$

$$U_j \frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial L}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_s f_\mu \frac{L}{\sqrt{k}} \overline{u'_j u'_i} \frac{\partial L}{\partial x_i} \right] + \left(c'_{L1} \frac{L}{k} P^{(r)} + c''_{L1} \frac{L}{k} P^{(i)} \right) + c_{L,f} c_{L2} k^{0.5} \left(1 - \frac{L^2}{s^2} \right), \quad (15)$$

где $P = P^{(r)} + P^{(i)}$; $P^{(r)}, P^{(i)}$ - касательная и нормальная составляющая P .

Значения постоянных для ПРН-L- модели турбулентности можно найти в [5].

6.1.3.2. Граничные условия и численный метод решения.

Система определяющих уравнений (1)-(4) и замыкающие соотношения (5)-(15) записываются в цилиндрической системе координат.

Краевые условия сводятся: к заданию на входе однородных профилей для осевой скорости осредненного течения, нормальных напряжений ($\overline{u'^2} = a_i k$, $a_1 = 0.96, a_2 = 0.48, a_3 = 0.56$), кинетической энергии и скорости диссипации ($k = 1.5 Tu_0^2 U_0^2, \varepsilon = 0.17 \frac{k^{1.5}}{l}$, где Tu -интенсивность турбулентности), другие параметры в этом случае равны нулю.

При $x = x_k$ (выход) принято $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, где $\varphi = U, W, \overline{u'_i u'_j}$. На стенке ($r=R$)

реализуются условия прилипания потока и отсутствия турбулентных пульсаций, а также $\varepsilon_w = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial r} \right)^2$. На оси симметрии ($r=0$):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \overline{u'_1 u'_1} = U, k, \varepsilon(L), \overline{u'_1 u'_2}, \overline{u'_2 u'_3}, \quad V=W=0, \quad \overline{u'_1 u'_2} = \overline{u'_1 u'_3} = \overline{u'_2 u'_3} = 0.$$

Численное интегрирование выполняется на неравномерных сетках. Сгущение узлов к твердым поверхностям отвечает замене переменных в исходных уравнениях:

$$\{x, r\} \rightarrow \{x', \eta\} : x = x', \eta = \ln(R - r + \Delta),$$

где Δ -параметр преобразования, обеспечивающий попадание трех- пяти узлов в область $y^* \leq 5$. Детали интегрирования преобразованных таким образом уравнений, выполненного с применением экономичных неявных конечно- разностных схем можно найти в [10].

6.1.3.3. Результаты анализа.

Расчеты выполнены при следующих параметрах: $Re=(0.1 \div 5) \cdot 10^5$, $D=0.007 \div 0.1$ м, $x_k=150D$, $Tu=(0.4 \div 10)\%$, рабочее тело - воздух, вода. Сравнение с данными [1-3,11,12] по параметрам $U, \overline{u'_i u'_j}, k$ в развивающемся осесимметричном потоке представлено на рис.6.21-6.24. Так, на рис.6.21 изображены распределения относительной скорости U/U_0 по поперечному сечению в зависимости от y/R (где $y=R-r$) в различных выделенных сечениях по длине от x/D канала. Линия 1 соответствует $x/D=3$, 2-12, 3-41. Сплошная линия относится к ПРН-L- модели [5], линия (----)-модель Элгобаши [23] М3, (— —) – модель Сима[22] М2, (— - - —) – модель Ханжалика [21] М1. Значки: - данные [26] ($Re=1.6 \cdot 10^5$, $D=0.01$ м, $Tu=0.43\%$, воздух). На рис.6.22 даны распределения U/U_0 по длине трубы (x/D) в различных точках по радиальной координате (y/R). Так, линии 1 отвечают $y/R = 1, 2-0.3, 3-0.15, 4-0.05$. Значки – эксперименты [27] ($Re=400000$, $Tu=0.43\%$, обозначения те же, что и на рис.6.21). Из рис. 6.21, 6.22 видно, что результаты теории неплохо согласуются с экспериментом. Отличие расчетных данных, полученных по различным моделям незначительно. Это неудивительно, т.к. все они предназначены для расчета развивающихся внутренних течений. Однако, в области $40 \leq x/D \leq 80$ как у оси, так и у стенки (рис.6.22,

линии 1,3,4) имеется некоторое рассогласование, связанное с большей чувствительностью (ПРН-ε)-моделей к возмущениям, идущим со входа и от стенки.

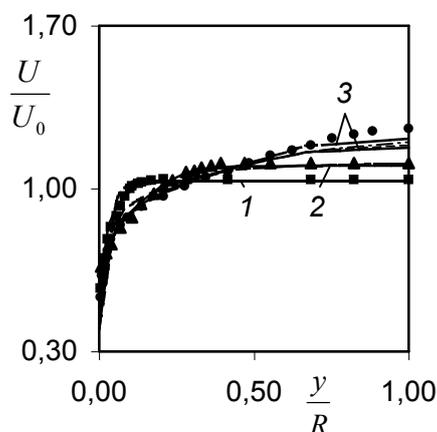


Рис.6.21

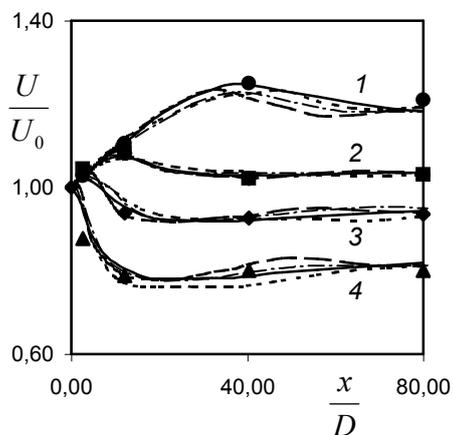


Рис.6.22

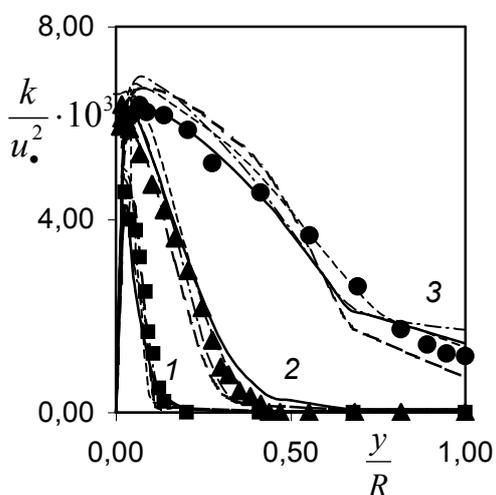


Рис.6.23

Рис.6.21. Профили осевой скорости U по поперечной координате во входной области. Здесь линия – расчет, значки – эксперимент [11]: 1- $x/D=3$ (n), 2-12 (s), 3-41 (l); (—) – ПРН-L, (— —) – M1, (- - -) – M2, (— - -) – M3-модели.

Рис.6.22. Распределения осевой скорости по продольной координате в выделенных точках по поперечной координате. Обозначения те же, что и на рис.1, значки – эксперимент [27]: 1- $y/R=1$ (l), 2-0.3 (n), 3-0.15 (u), 4-0.05 (s).

Рис.6.23. Распределение кинетической энергии турбулентности во входной области в зависимости от поперечной координаты. Обозначения те же, что и на рис.6.21.

На рис.6.23 приведены профили кинетической энергии $(k/u_*^2) \cdot 10^3$ (где u_* -

динамическая скорость) от y/R в сечениях канала $x/D=3, 12, 41$ (соответственно линии 1-3). Все обозначения, включая значки, отмечающие эксперимент те же, что и на рис.6.21. Видно, что наилучшее согласие демонстрирует ПРН-L-модель (сплошная линия). Расчеты показывают, что ни одна из ПРН- ϵ -моделей не предсказывает большой максимум k/u_*^2 достаточно точно, что является их общим недостатком в описании течений с малыми числами Рейнольдса. Данные о характере распределений компонентов тензора реинольдсовых напряжений $\overline{u'_i u'_j}$ приведены на рис. 6.24.

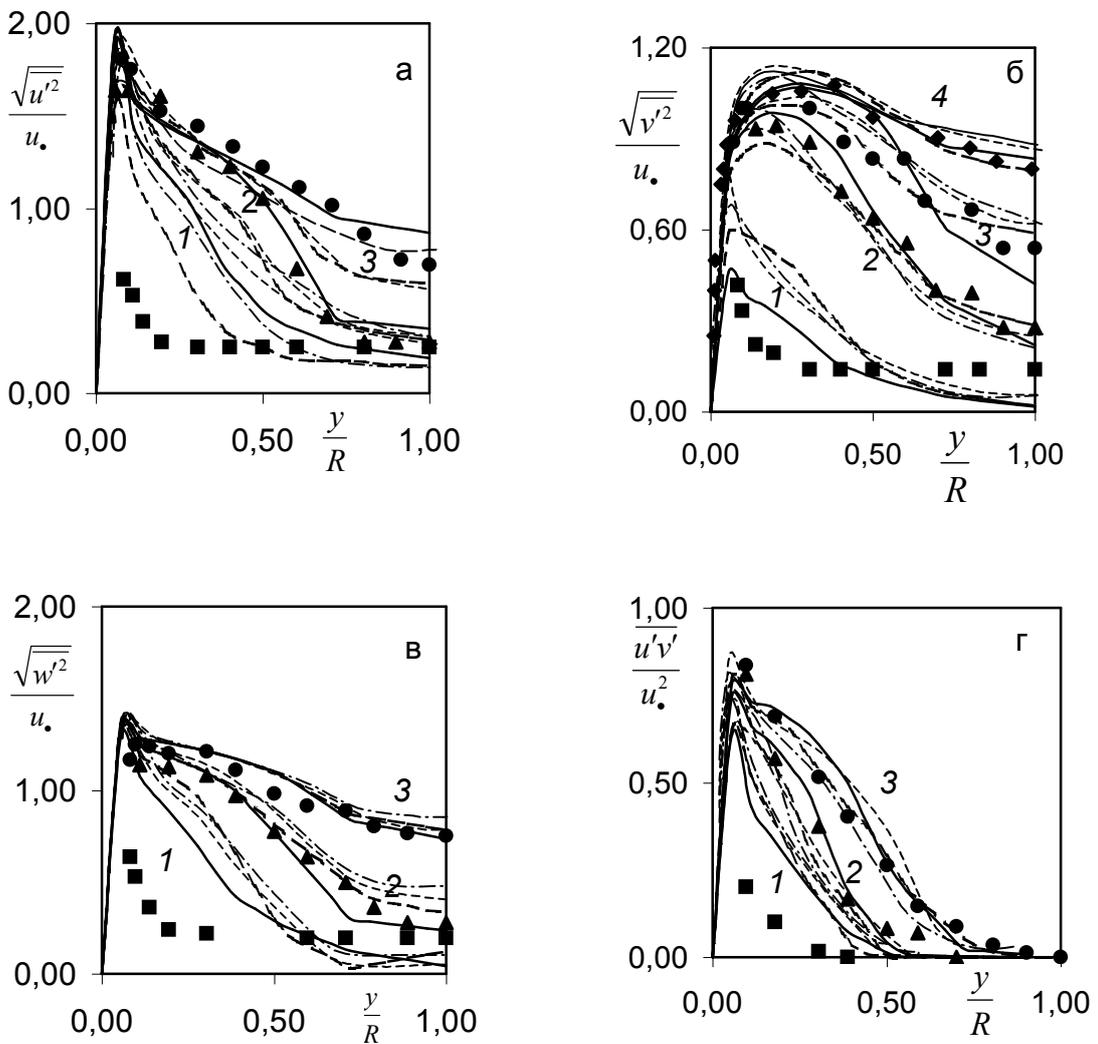


Рис.6.24. Радиальные распределения реинольдсовых напряжений во входной области. Здесь линия- расчет (обозначения прежние), значки – данные[18,19]: 1- $x/D=20$ (n), 2-30 (s), 3-50 (l), 4-150 (u).

Значки- результаты опытов [26]. ($Re=30000$ [19], $Re=423500$ [18], $D=0.1m$). Рисунки а)-г) отвечают распределениям $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{u'v'}$ в зависимости от y/R для сечений $x/D=20$ - линия 1, 30-2, 50-3, 150-4. Все модели удовлетворительно описывают течение в области $x/D \geq 30$, однако непосредственно во входной зоне имеется рассогласование. Это связано с ограниченностью экспериментальных данных: отсутствуют значения ε , k , $\overline{u'_i u'_j}$ на входе. Из рис.6.24 видно, что предпочтительнее выглядят модели ПРН-L, ПРН- ε (М3). Модель М1 (Ханжалика) весьма груба в определении нормальных компонент у стенки (особенно $\overline{u'^2}$). Модель М2 занижает большой максимум на участке стабилизированного течения на 12%, завышает максимум $\overline{v'^2}$ на 40% относительно данных [18]. Отклонение М3 в значениях $\overline{u'^2}$ порядка 8%. Использование L-уравнения [5] в ПРН-модели позволяет наиболее точно раскрыть пристеночную узкую зону течения. Из результатов следует, что отличие моделей в ядре канала незначительно. Это говорит о слабом влиянии способа аппроксимации $R_{ij,2}$ в данных моделях. У стенки М2, М3 близки, поэтому аппроксимация $R_{ij,w}$ в таких моделях достаточно успешна в описании прямоочных течений. В сравнении с ПРН-L- моделью все модели с ε - уравнением имеют недостаток в оценке $\overline{u'^2}$. Последняя характеристика имеет определяющее значение в пристенном распределении кинетической энергии турбулентности.

В качестве иллюстрации возможностей ПРН-L-модели (в пакете Fluent) в расчете конкретного гидродинамического течения

слабосжимаемого газа в сложном канале на рис.6.25(а-е) дана карта “тонких” пульсационных параметров: поля скорости (а), турбулентной кинетической энергии (б), компонент тензора напряжений Рейнольдса (в-е).

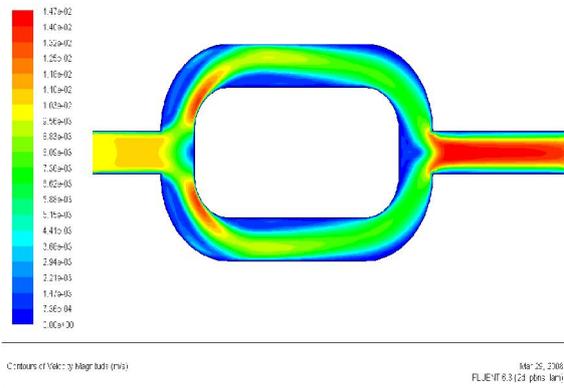


Рис. 6.25 (а). Поле скорости

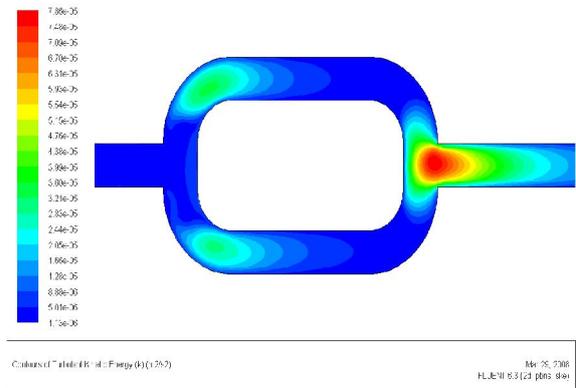


Рис. 6.25 (б). Поле турбулентной кинетической энергии

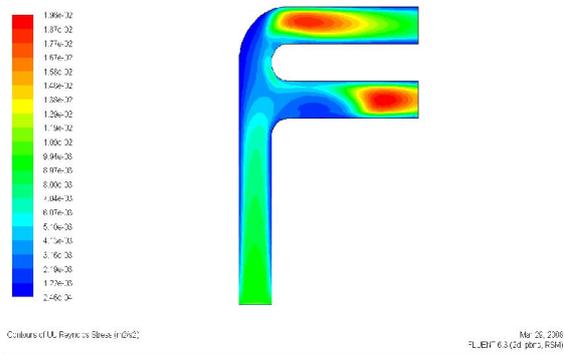


Рис. 6.25 (в). Осевая нормальная компонента тензора напряжений Рейнольдса

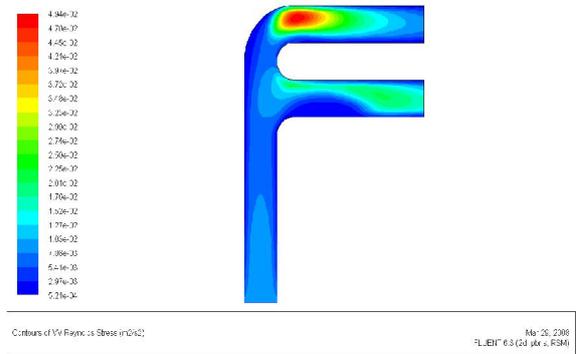


Рис. 6.25 (г) Радиальная нормальная компонента тензора напряжений Рейнольдса

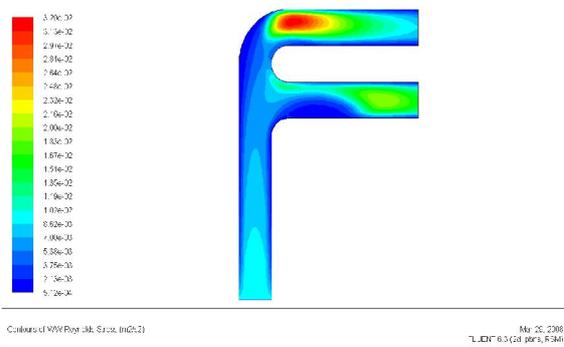


Рис. 6.25 (д) Окружная нормальная компонента тензора напряжений Рейнольдса

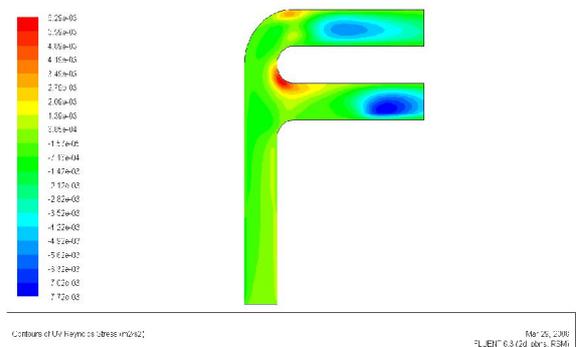


Рис. 6.25 (е) Напряжение сдвига $\overline{u'v'}$

ГЛАВА 7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как показывает вышеизложенный материал, практические результаты работы с модулями программ, описанными моделями, методами и схемами численного расчета сложных сдвиговых течений в трубах могут быть сведены к некоторым замечаниям. Так, *основные выводы* по анализу гидродинамики и теплообмена при турбулентных режимах течений в трубопроводных системах, трубах и каналах с короткими и протяженными участками показывают:

- более точное описание узких пристеночных зон на базе современных алгоритмов, ПРН-ε моделей турбулентности должно быть связано с поиском лучших аппроксимаций членов диффузии и перераспределения. Модель Элгобаши здесь имеет преимущества в корректности учета анизотропии течения и эффектов, связанных с малыми числами Рейнольдса;
- численный алгоритм при работе со связями Элгобаши является неэкономичным. Алгоритм, построенный на базе ПРН-L-модели, требует на 50% меньше времени в сравнении с остальными при получении установившегося решения. Видно также, что особенности внутренних течений достаточно корректно можно прогнозировать на основе ПРН-L-модели, учитывающих анизотропный характер турбулентности непосредственно у стенки и позволяющих воспроизводить эффекты смещения зон экстремальной интенсивности пульсаций вглубь потока, распада энергосодержащих вихрей и их восстановление, а

также элементы перемежаемости;

- описанные алгоритмы надежны и эффективны в расчете течений с особенностью границ течения, включающих неоднозначные эффекты конвективного и диффузионного взаимодействия;
- интегральный масштаб турбулентности L , уравнение интенсивности пульсаций температур весьма корректны в предсказании механизмов смещения турбулентности, ее вырождения и последующего восстановления;
- детальный анализ проблем, встречающихся при моделировании внутренних течений и теплообмена жидкости со стенками канала вполне возможен на уровне полных транспортных уравнений для тонких параметров;
- в силу взаимозависимости процессов переноса тепла, импульса по участкам труб меняющегося поперечного сечения высокие требования предъявляются эффективному численному алгоритму;
- в зависимости от высоты уступа, входных условий рабочей среды можно результативно управлять характером присоединения потока, интенсивностью механизмов переноса в рециркуляционных областях в трубопроводных системах.

Кроме того, материал позволяет отметить, что для решения уравнений механики жидкости и газа разработано большое количество конечно-разностных методов. Даже простое перечисление этих методов привело бы к длинному списку. Одни методы применяются редко и

представляют исторический интерес. Другие – широко используются при исследовании многих гидродинамических течений, и с их помощью можно получить интересные результаты. Некоторые выводы и наиболее характерные результаты мы описали выше. Несмотря на большое количество схем записи конечно-разностных уравнений, можно выделить ряд закономерностей. Это позволяет провести структурный анализ схем. Последний дает возможность уменьшить объем работ при разработке программ для ПЭВМ, модифицировать программы и модели турбулентности. Чтобы убедиться в достоинствах реализованной схемы целесообразно проводить расчеты одного и того же течения с привлечением нескольких методов разностной аппроксимации уравнений переноса.

Инженер-вычислитель должен строить свою работу, опираясь на ряд правил:

- 1) необходимо четко сформулировать задачу и определить цели ее исследования;
- 2) по возможности упростить постановку без потери в точности и качестве анализируемого процесса;
- 3) не ожидать от модели больше, чем она может дать;
- 4) если возможно, использовать для сравнения имеющийся опытный материал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений / Гл. ред. Физ.мат.лит. Наука. 1978. -592с.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости/ пер с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152с.
3. Launder R.E. Heat and Mass Transport Turbulence. Topics in Applied Physics. Berlin: Springer, 1976 - 232р.
4. Петухов Б.С. Вопросы теплообмена. Избранные труды. М.: Наука, 1987. -278с.
5. Бубенчиков А.М., Харламов С.Н. Математические модели неоднородной анизотропной турбулентности во внутренних течениях. -Томск: Изд.-во ТГУ, 2001. -448с
6. Турбулентные сдвиговые течения 1/ Под ред. Ф. Дурста и др. М.: Машиностроение. 1982. -432с.
7. Глушко Г.С. Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом. // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1971. №4. с128 -136
8. Харламов С.Н и др. Математические модели течения и теплообмена во внутренних задачах динамики вязкого газа. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. - 187с.
9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. - 616с.
10. Роже Пейре, Томас Д. Тейлор, Вычислительные методы в задачах механики жидкости: Пер с Англ. –Л.: Гидрометеиздат, 1986. -350с. с ил.
11. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1990. В 2-х т.
12. Симуни Л.М. Численное решение задачи при неизотермическом движении вязкой жидкости в плоской трубе// Инженерно – физический журнал 1966. Т10. №1, с. 86-91.
13. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т.: Пер. с англ. – М.: Мир,

- 1990.
14. Pfenninger W. Further laminar flow experiments in a 40-foot long two-inch diameter tube/ Northrop Aircraft, Hawthorne, CA, Rept. AM-133, 1951.
 15. Шнайдерман М.Ф., Ершов А.И. О влиянии закрутки потока на распределение скоростей и температур в круглой трубе // Инженерно-физический журнал. 1975. Т. 28. № 4. С. 630 - 635.
 16. Гольдштик М.А. Приближенное решение задачи о ламинарном закрученном потоке в круглой трубе// Инженерно - физический журнал. 1959. Т. 2. №3. С. 100-105.
 17. Lewis J.P., Pletcher R.H. Limitation of the boundary-layer equations for predicting laminar symmetric sudden expansion flows // AIAA Paper. 1986. №1131. P. 1-8.
 18. Laufer J. The structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow // NASA. -1954. Rep. 1174. P. 1-18
 19. Веске Д.Р., Стуров Г.Е. Экспериментальное исследование турбулентного закрученного потока в цилиндрической трубе// Изв. СО АН СССР. Сер. техн. н. -1972. -Вып.3. №13. -С.3-7.
 20. Richman J.W., Azad R.S. Developing Turbulent Flow in Smooth Pipes// Appl. Sci. Res. -1973. -V.28. -P.419-426.
 21. Hanjalic K., Launder B.E. Contribution towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence// Journal of Fluid Mechanics. -1976. -V.74. -P.593-610.
 22. Сима Н. Модель напряжений Рейнольдса для течения в пристеночных областях с низкими числами Рейнольдса// Теоретические основы инженерных расчетов. -1988. -№4. - С.241-251.
 23. Prud'homme M., Elghobashi S. Prediction of Wall-Bounded Turbulent Flows with an Improved Version of a Reynolds-Stress Model // Proceedings 4th Symposium on Turbulent Shear Flows, Karlsruhe. -1987. -P. 1.7-1.12
 24. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure// Journal of Fluid Mechanics. -1975. -V.68. -P.573-566.
 25. Daly B.J., Harlow F.H. Transport Equations of Turbulence// Physics of Fluids. -1970. -V. 13. -P.2634-2649.

26. Grutzner H. Uber einige Ergebnisse der Untersuchung einer turbulenten Rohreinlaufstromung bei ungestorter und gestorter Zuflussstromung. Beitrage zur theoretischen und experimentellen Untersuchung der Turbulenz. Herausgeg. V.M. Hoffmeister. Akademic- Verlag Berlin. 1976.
27. Барбин, Джоунс. Турбулентное течение на начальном участке гладкой трубы// Техническая механика. -1963. -№1. -С.34-41.