Модуль 2: Квантовый формализм

Лекция – практика 8.

Основные постулаты квантовой механики

Задача: формализовать описание движения микрочастиц.

1. Состояние частицы описывается волновой функцией $\Psi(x, y\ z, t)$ пространственных координат и времени

2. Каждой физической величине соответствует определенный оператор этой физической величины. Соотношения между операторами в квантовой механике аналогичны соотношениям между соответствующими физическими величинами в классической механике.

3. В результате измерения физической величины f в любой квантовой системе могут быть получены только такие значения, которые являются собственными значениями оператора $\hat{\Phi}$, соответствующего этой величине

Операторы физических величин

Оператор – математическое правило, следуя которому можно преобразовать одну функцию в другую.

Задать оператор – определить принцип преобразования (умножение на число или функцию, дифференцирование функции, перестановка аргументов функции, $\nabla \equiv grad$, $\Delta = \nabla^2$, $div \equiv (\nabla \ldots)$, $rot \equiv [\nabla]$).

Условие: оператор пишется всегда слева от функции, на которую он действует.

В квантовой механике применяются только *линейные операторы*, чтобы не нарушался принцип суперпозиции состояний.

$$\boxed{\hat{F}(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1\hat{F}\varphi_1 + C_2\hat{F}\varphi_2}$$

Символ оператора – величина со шляпкой - $\hat{x}$, $\widehat{p_x}$, $\hat{U}$

Оператор предполагается действующим на функцию (волновая). Равенство двух функций $\hat{A}\Psi = \hat{B}\Psi$ в операторной форме записывается как равенство операторов $\hat{A} = \hat{B}$.

1. Оператор координаты

Действие оператора на волновую функцию = умножение на соответствующую координату:

$$\boxed{\hat{x}\Psi = x\Psi, \hat{y}\Psi = y\Psi, \hat{z}\Psi = z\Psi}$$

В символической операторной форме записи:

$$\boxed{\hat{x} = x, \hat{y} = y, \hat{z} = z}$$

$$\boxed{\hat{\vec{r}} = \overrightarrow{e_x}\hat{x} + \overrightarrow{e_y}\hat{y} + \overrightarrow{e_z}\hat{z}}$$

2. Оператор импульса

Определяется с помощью операций дифференцирования:

$$\boxed{\widehat{p_x} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \widehat{p_y} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \widehat{p_z} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial z}}$$

$$\boxed{\hat{\vec{p}} = \overrightarrow{e_x}\widehat{p_x} + \overrightarrow{e_y}\widehat{p_y} + \overrightarrow{e_z}\widehat{p_z} = -\mathrm{i}\hbar\nabla}$$

$$\nabla = \overrightarrow{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

3. Оператор квадрата импульса:

$$p^2 = {p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2 = p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{p}^2 &= (\widehat{p_x})^2 + \left(\widehat{p_y}\right)^2 + (\widehat{p_z})^2 \\ &= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta}$$

4. Оператор момента импульса:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{\upsilon}]$$

$$\hat{\vec{L}} = [\vec{r}, \hat{\vec{p}}] = -i\hbar[\vec{r}, \hat{\nabla}]$$

$$\hat{\vec{L}} = \widehat{L_x}\vec{e}_x + \widehat{L_y}\vec{e}_y + \widehat{L_z}\vec{e}_z$$

$$\widehat{L_x} = \hat{y}\widehat{p_z} - \hat{z}\widehat{p_y} = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\widehat{L_y} = \hat{z}\widehat{p_x} - \hat{x}\widehat{p_z} = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\widehat{L_z} = \hat{x}\widehat{p_y} - \hat{y}\widehat{p_x} = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

5. Оператор проекции момента импульса

Поскольку нас будет интересовать приложение теории момента импульса к движению частицы в центральном поле, то удобнее представлять его в сферической системе координат (*r*,θ,φ):

$$x = r sin\theta cos\varphi \quad y = r sin\theta sin\varphi \quad z = r cos\theta$$

Пусть меняется только одна координата – угол φ, найдем производную от функции Ψ по координате φ (т.е. осуществляется вращение вокруг оси *z*):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial x}(-r sin\theta sin\varphi) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} r sin\theta cos\varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\cdot 0 = \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi$$

Тогда умножая последнее равенство на множитель «-*i*ħ», имеем:

$$\boxed{-i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi} = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = \hat{L}_z}$$

координат оператор проекции момента импульса на ось *z* в сферической системе

6. Оператор квадрата момента импульса

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x\hat{L}_x + \hat{L}_y\hat{L}_y + \hat{L}_z\hat{L}_z$$

Оператор момента импульса в сферической системе координат:

$$\boxed{\begin{gathered}\widehat{L_x} = -i\hbar\left(sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + ctg\theta cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ \widehat{L_y} = -i\hbar\left(cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - ctg\theta sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ \widehat{L_z} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}, \hat{L}^2 = -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi}\end{gathered}}$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

7. Операторы энергии

$$\hat{\mathrm{E}}_{\text{кин}} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta$$

$$\hat{U}\cdot\Psi = U\cdot\Psi, \qquad \hat{U} = U$$

$$\hat{H} = \hat{\mathrm{E}}_{\text{кин}} + \hat{U} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + U = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta + \mathrm{U}(x, y, z)$$

гамильтониан

$$\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Нестационарное уравнение Шредингера

Правила действия с операторами

1. **Суперпозиция действия операторов**

$$\hat{G}(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1\hat{G}\varphi_1 + C_2\hat{G}\varphi_2$$

2. **Сумма операторов**

$$(\hat{F} + \hat{G})\Psi = \hat{F}\Psi + \hat{G}\Psi$$

3. **Произведение операторов**

$$(\hat{G}\hat{F})\Psi = \hat{G}(\hat{F}\Psi)$$

4. **Коммутатор (скобки Пуассона)**

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

1). Физические величины, которым соответствуют некоммутативные операторы, не могут иметь одновременно определенные значения, не могут быть одновременно точно измерены.

2). Физические величины, чьи операторы коммутируют, могут быть измерены с любой точностью одновременно.

Примечание:

- ✓ **Коммутирующие операторы** $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$
- ✓ **Антикоммутирующие операторы** $\hat{A}\hat{B} = -\hat{B}\hat{A}$, $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = \{\hat{A}, \hat{B}\} = 0$

Собственные функции и собственные значения операторов

Определенные значения, которые может принимать данная физическая величина – собственные значения

Если при действии оператора на некоторую волновую функцию получается та же самая функция, умноженная на число, то такую функцию называют собственной функцией оператора, а число – собственным значением

$$\boxed{\hat{\Phi}\Psi = \boldsymbol{f}\Psi}$$

Квантово-механические операторы имеют множество собственных функций и соответствующих им собственных значений. Совокупность собственных значений – спектр оператора

1. **Спектр оператора может быть непрерывным или дискретным**
2. **Одному собственному значению $\boldsymbol{f_n}$ оператора может принадлежать несколько собственных функций $\Psi_{n1}, \Psi_{n2}, \dots \Psi_{nk}$ - вырожденные, k – кратность вырождения**

Измерения физической величины

Непосредственно измеряемые («наблюдаемые») физические величины действительные. Следовательно, все собственные значения оператора, соответствующего данной физической величине, должны быть вещественными.

Что мы получаем в результате измерения физической величины, описываемой оператором ?

1. Если физическая система (частица) находится в состоянии, описываемом собственной функцией Ψ_n, то при измерении получим собственное значение g_n, которое получаем из

$$\hat{G}\Psi_n = g_n\Psi_n$$

2. Если система (частица) описывается произвольной функцией Ψ , то при измерении наблюдаемой величины, т.е. при действии оператора, получим линейную комбинацию из собственных значений g_n– некое среднее значение, которое тоже вещественно.

Пример: $\Psi = C_1\Psi_1 + C_1\Psi_1 + \cdots$, и если Ψ_n - СФО, то: $\hat{G}\Psi = C_1 g_1\Psi_1 + C_2 g_2\Psi_2 + \ldots$

Задача 1: **Примените сумму операторов $\widehat{A}$ = d/dy и $\widehat{5}$ к разности функций x^3 −2xy+ 5**

$$\left(\widehat{A}+\widehat{5}\right)\left(x^3-2xy+5\right)=$$

$$\widehat{A}\left(x^3-2xy+5\right)+\hat{5}\left(x^3-2xy+5\right)=$$

$$=\frac{d}{dy}\left(x^3-2xy+5\right)+5\left(x^3-2xy+5\right)=$$

$$=5x^3-10xy-2x+25$$

Задача 2. **Даны оператор и функция, найти собственное значение оператора**

$$\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \Psi(x) = \cos 3x$$

Решение:

$$\hat{A}\Psi(x) = \frac{d^2}{dx^2}\cos 3x =$$

$$= 3\frac{d}{dx}\sin 3x = -9\cos 3x = -9\Psi(x)$$

Следовательно, собственное значение оператора равно −9.

Коммутаторы

$$\left[\overset{\frown}{A},\overset{\frown}{B}\right]=\overset{\frown}{A}\overset{\frown}{B}-\overset{\frown}{B}\overset{\frown}{A}$$

Задача 3. Определить коммутатор квадрата координаты и одноименной проекции импульса

$$[\hat{x}^2,\hat{p}_x]\psi=\hat{x}^2\hat{p}_x\psi-\hat{p}_x\hat{x}^2\psi=$$

$$x^2(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\psi+i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x^2\psi)=$$

$$-i\hbar x^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\hbar x^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\hbar\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2)=$$

$$=-i\hbar x^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\hbar x^2\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\hbar\ \ 2x=2i\hbar x\psi$$

$$[\hat{x}^2,\hat{p}_x]=2i\hbar\hat{x}$$

ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Оператором физической величины может быть только *линейный* самосопряженный (эрмитов) оператор.

Оператор называется *эрмитовым* или *самосопряженным, если* выполняется равенство $\hat{F}^{+} = \hat{F}$:

действие самосопряженного оператора $\hat{F}$ на правую от него функцию совпадает с действием комплексно сопряженного оператора на левую

$$\int \Psi_1{}^{*}\,\hat{F}\Psi_2 dV = \int \Psi_2\left(\hat{F}\Psi_1\right)^{*} dV = \int \Psi_2 \hat{F}^{*}\Psi_1{}^{*}\,dV$$

$\hat{F}^{+}$– *сопряженный* оператор к оператору $\hat{F}$.

Свойства эрмитовых операторов

1. Собственные значения эрмитовых операторов – вещественные

Доказательство: Запишем уравнение на собственные значения и комплексно сопряженное ему уравнение

$$\hat{\Phi}\Psi_n = f_n\Psi_n \qquad \left(\hat{\Phi}\Psi_n\right)^* = f_n{}^*\Psi_n{}^*$$

Умножим слева первое уравнение на $\Psi_n{}^*$(либо второе на Ψ_n), проинтегрируем по всему пространству и воспользуемся свойством «эрмитовости»:

$$\int \Psi_n{}^*\,\hat{\Phi}\Psi_n dV = f_n\int |\Psi_n|^2\,dV = f_n = \int \Psi_n\left(\hat{\Phi}\Psi_n\right)^* dV = f_n{}^*$$

Отсюда $f_n = f_n{}^*$, то есть собственные значения эрмитовых операторов – действительные числа.

2. Произведение двух эрмитовых коммутирующих операторов = эрмитов оператор

Доказательство:

$$\boxed{\hat{\Phi}\hat{\boldsymbol{G}} = \hat{\Phi}^{+}\hat{\boldsymbol{G}}^{+} = \left(\hat{\boldsymbol{G}}\hat{\Phi}\right)^{+} = \left(\hat{\Phi}\hat{\boldsymbol{G}}\right)^{+}}$$

$\hat{\boldsymbol{G}}^{+}$– *сопряженный* оператору $\hat{\boldsymbol{G}}$

3. Собственные функции эрмитовых операторов – ортогональны, т.е. образуют полную систему ортонормированных волновых функций

$$\boxed{\int_N \Psi_n{}^* \Psi_m dV = \begin{Bmatrix} 0 & \boldsymbol{n \neq m} \\ 1 & \boldsymbol{n = m} \end{Bmatrix} = \delta_{nm}}$$

$\boldsymbol{\delta_{nm}}$= Символ Кронекера

Доказательство: Пусть дан дискретный набор собственных функций $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ и значений $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots$ оператора $\widehat{\Phi}$. Считаем, что нет вырождения, т.е. все волновые функции разные для разных собственных значений.

Рассмотрим два неравенства

$$\begin{cases} \widehat{\Phi}\Psi_n = f_n\Psi_n \\ \widehat{\Phi}^*\Psi_m{}^* = f_m{}^*\Psi_m{}^* \end{cases}$$

Умножим слева первое уравнение на $\Psi_m{}^*$, а второе – на $\Psi_n{}^*$, и интегрируем по всему пространству. Вычитая второе уравнение из первого уравнения и учитывая, что $\widehat{\Phi}$ - эрмитов оператор и, следовательно, $f_m{}^* = f_m$, получаем:

$$0 = \int (f_n - f_m)\,\Psi_m{}^*\Psi_n dV$$

$$(f_n - f_m)\int \Psi_m{}^*\Psi_n dV = 0$$

Отсюда, если $f_n \neq f_m$, получаем ортогональность функций :

$$\boxed{\int \Psi_m{}^* \Psi_n dV = 0}$$

Полнота набора означает, что любую функцию можно разложить в ряд по функциям Ψ_n

В случае, когда имеем вырождение состояния, тогда введем новые волновые функции состояния и возьмем их в виде линейной комбинации:

$$\Psi_n = \alpha_{n_1}\Psi_{n_1} + \alpha_{n_2}\Psi_{n_2} + \cdots$$

где все волновые функции имеют одно и то же собственное значение $\widehat{\Phi}\Psi_{n_i} = \boldsymbol{f}_n\Psi_{n_i}$. При этом линейные комбинации можно сделать такими, что новые волновые функции Ψ_n были бы ортонормированными.

Вывод: условие ортонормированности собственных функций самосопряженных линейных операторов выполняется всегда.
В случае вырождения можно заменить собственные функции их ортонормированными линейными комбинациями.

4. Разложение в ряд по системе собственных функций самосопряженных линейных операторов.

Любую функцию можно представить в виде:

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n$$

Коэффициенты разложения можно определить из условия ортогональности собственных функций

$$\int_N \Psi \Psi_m{}^* \mathrm{dV} = \sum_n C_n \int_N \Psi_m{}^* \Psi_n \mathrm{dV} = \sum_n C_n \delta_{nm} = C_m$$

Отсюда, меняя обозначение m на n, получаем формулу для определения коэффициентов

$$C_n = \int_N \Psi \Psi_n{}^* \mathrm{dV}$$

Квадрат коэффициента $C_n{}^2$ дает вероятность того, что в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ, присутствует примесь состояния Ψ_n.

Для оператора, имеющего непрерывный спектр собственных значений *f*, лежащих в интервале *F* $\sum \rightarrow \int$

$$\Psi = \int_F C_f \Psi_f df$$

$$C_f = \int_N \Psi_f{}^* \Psi \mathrm{dV}$$

Примеры эрмитовых операторов

1) *Легко* убедиться, что оператор координаты эрмитов оператор

$$\int \Psi_1{}^* \hat{x} \Psi_2 dV = \int \Psi_2 (\hat{x}\Psi_1)^* \, dV = \int \Psi_2 (x\Psi_1)^* \, dV = \int \Psi_2 x (\Psi_1)^* \, dV$$

$$\hat{x} = x$$

2) Рассмотрим оператор дифференцирования $\hat{F} = \frac{d}{dx}$, при этом будем считать, что волновые функции $\Psi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ и $\Psi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$, равны нулю на бесконечности, т.е. $\Psi_{1,2}(-\infty, \boldsymbol{t})$= $\Psi_{1,2}(+\infty, \boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$. Вычислим сопряженный оператор с помощью интегрирования по частям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1{}^* \frac{d}{dx} \Psi_2 dx = \Psi_1{}^* \Psi_2 \Big|^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \frac{d}{dx} \Psi_1{}^* dx$$

$$= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \left(-\frac{d}{dx} \right) \Psi_1{}^* dx$$

Таким образом, оператор, сопряженный оператору $\hat{\boldsymbol{F}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}$, равен $\hat{\boldsymbol{F}}^+ = -\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}$ и, следовательно, не является эрмитовым

Задача 4: Докажите, что оператор проекции импульса является эрмитовым

Рассмотрим одномерный случай с границами определения a и b, где волновые функции обращаются в нуль.

$$\int_a^b \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi \mathrm{dx} = -i\hbar \int_a^b \psi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathrm{dx} =$$

$$= -i\hbar \left[\psi^* \varphi \Big|_a^b - \int_a^b \varphi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \mathrm{dx} \right] = i\hbar \int_a^b \varphi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \mathrm{dx}$$

$$= \int_a^b \varphi \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^* \mathrm{dx}$$

Спектры собственных значений операторов

1. Спектр собственных значений оператора координаты непрерывный

Доказательство: Так как действие оператора координаты на волновую функцию сводится к умножению на координату x, то

$$\hat{x}\Psi = x\Psi$$

Уравнение соответствует операторному равенству

$$\hat{x} = x$$

Которое, по определению, выполняется для любого значения $x \in (-\infty, +\infty)$

Аналогично для операторов $\hat{y}$ и $\hat{z}$.

2. Спектр собственных значений оператора проекции импульса непрерывный

Доказательство: Задача на собственные значения такого оператора сводится к решению уравнения

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x} = p_x\Psi$$

Из которого следует определить возможные значения p_x

Решение уравнения

$$\Psi = C exp\left(i\frac{p_x x}{\hbar}\right)$$

При всех действительных значениях p_x определяет функцию Ψ. Поэтому собственные значения оператора $\widehat{p_x}$ образуют непрерывный спектр

$$p_x \in (-\infty, +\infty)$$

Аналогично для операторов $\widehat{p_y}$ и $\widehat{p_z}$.

3. Спектр собственных значений оператора проекции момента импульса дискретный

Доказательство: Направим полярную ось сферической системы координат вдоль z.

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = L_z\Psi$$

Общее решение этого уравнения

$$\Psi = C\exp\left(i\frac{L_z\varphi}{\hbar}\right)$$

Собственные функции оператора $\widehat{L_z}$ должны быть однозначными функциями, а так как φ - циклическая переменная, то условие однозначности сводится к условию ее периодичности

$$\Psi(\varphi + 2\pi) = \Psi(\varphi)$$

$$exp\left(i\frac{L_z(\varphi + 2\pi)}{\hbar}\right) = exp\left(i\frac{L_z\varphi}{\hbar}\right)$$

$$exp\left(i\frac{L_z 2\pi}{\hbar}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{L_z 2\pi}{\hbar} = 2\pi m, m = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

Таким образом, получаем дискретный спектр собственных значений оператора проекции момента импульса

$$\boxed{L_z = m\hbar, m = 0, \pm1, \pm2, ..}$$

m -магнитное квантовое число.

$$\Psi = Cexp(im\varphi)$$

Значение константы выбираем из условия нормировки

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \Psi_m{}^*\Psi_m d\varphi = 1}$$

$$\int_0^{2\pi} \Psi_m{}^*\Psi_m d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} e^{im\varphi}e^{-im\varphi}d\varphi$$

$$= 2\pi A^2 = 1$$

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\Psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(im\varphi)\\ \hat{L}_z\Psi_m = m\hbar\Psi_m\end{gathered}}$$

Соответствующий набор собственных функций и собственных значений оператора

Итак, проекция момента импульса на выделенное направление квантована, т.е. может принимать только значения кратные ħ. Хотя направление оси *z* произвольное, но после выбора *z* – направления проекции L_z квантуются и принимают определенные дискретные значения, а другие проекции остаются неопределенными.

Некоторые табличные интегралы

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \frac{1}{a},\ a > 0$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}dx = \frac{1}{a^2},\ a > 0$$

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-ax}dx = \frac{2}{a^3},\ a > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0$$

Некоторые табличные интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}},\ \ a>0$$

$$\int x\sin^2(kx)\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin(2kx)}{4k} - \frac{\cos(2kx)}{8k^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}},\ \ a>0$$

$$\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)x]}{2(m-n)},\ \ m^2 \neq n^2$$

Тригонометрическая запись комплексного числа

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \cos x + i\sin x$$

$$\sin x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \quad \text{и} \quad \cos x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$$