Модель 2: Основные особенности квантовой механики

Лекция – практика 5.

Что такое квантовая физика?

Это некоторые квантовые принципы, применяемые к различным физическим явлениям.

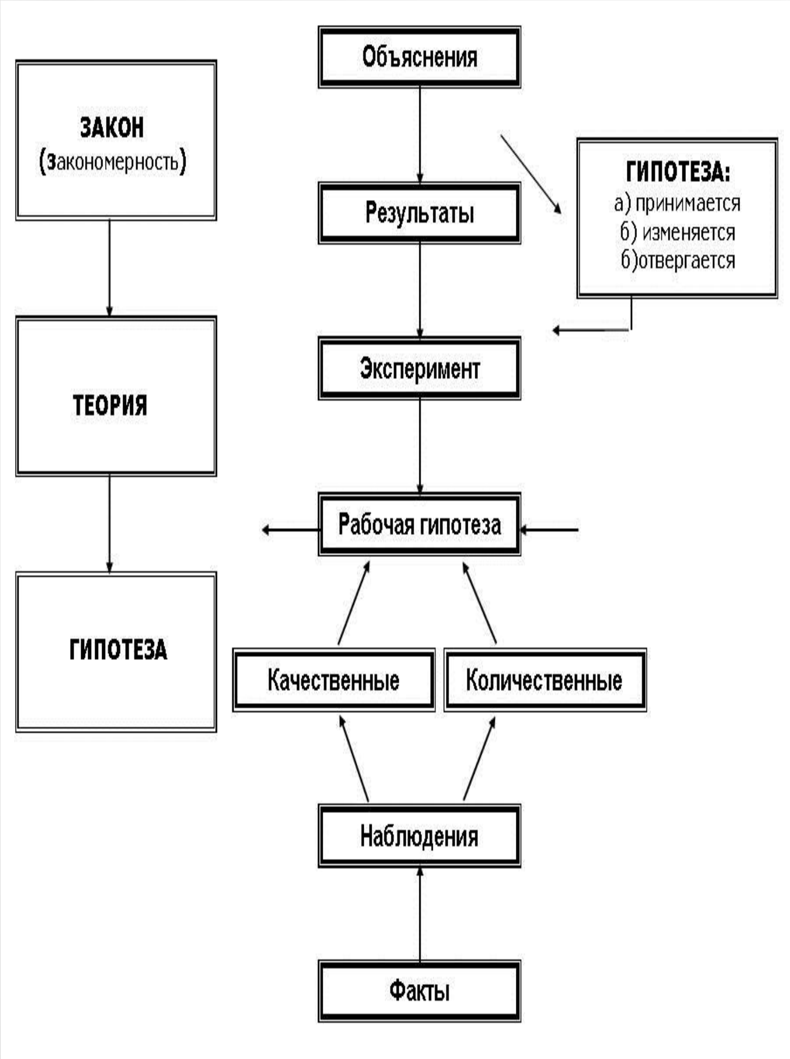
Пример:

- ✓ **Квантовая электродинамика = квантовая механика, примененная к электромагнетизму**
- ✓ **Квантовая хромодинамика = квантовая механика, примененная к сильному взаимодействию**
- ✓ **Квантовая оптика = квантовая механика, примененная к фотонам**
- ✓ **Квантовая гравитация = квантовая механика, примененная к гравитации**

О чем говорим сегодня?

1. Линейность квантовой механики
2. Необходимость квантовых чисел
3. Законы детерменизма
4. Необычные закономерности суперпозиции
5. Запутанность

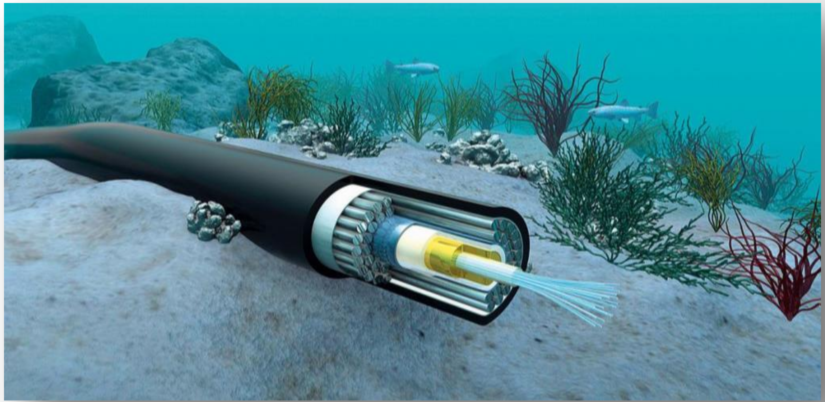
1. Линейность



Уравнения движения

Теория электромагнетизма Максвелла является линейной теорией:
1 решение - плоская волна →
2 решение – плоская волна ↓

Могу сформировать 3 решение = две плоские волны, распространяющиеся одновременно (1 + 2 = 3 – новое решение): Эти две волны распространяются
- ✓ **не касаясь друг друга**
- ✓ **не влияя друг на друга**



Математический смысл линейности

Максвелл: $\left(\vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{J}\right)$ **- некоторое решение**

?

Линейность означает, что **новое** **состояние:**
$\left(\overrightarrow{\alpha E}, \overrightarrow{\alpha B}, \alpha\rho, \overrightarrow{\alpha J}\right)$ **- некоторое** **новое** **решение, где** $\alpha \in$

Линейность подразумевает больше: есть два решения $\left(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{B_1}, \rho_1, \overrightarrow{J_1}\right)$ **и** $\left(\overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{B_2}, \rho_2, \overrightarrow{J_2}\right)$**, то линейность это** $\left(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2}, \rho_1 + \rho_2, \overrightarrow{J_1} + \overrightarrow{J_2}\right)$ **- тоже** **новое** **решение**

Линейное уравнение: $\boldsymbol{L\, u = 0}$

оператор **неизвестное**

$$L_1 u = 0$$
$$L_2 u = 0$$
$$\dots$$
$$L_n u = 0$$

$$L(u, w, \dots, v) = 0$$

***L*- может быть чем угодно, но**
***L* должен иметь определенные свойства**

Свойства линейного оператора

$Pr_л$

$$L(\underset{\#}{\alpha u}) = \alpha L u$$

$$L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2$$

$$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = L(\alpha u_1) + L(\beta u_2) = \{Pr_л\} =$$
$$= \alpha L u_1 + \beta L u_2$$

If $\boldsymbol{u_1}$ и $\boldsymbol{u_2}$ - решения L, то есть $Lu_1 = Lu_2 = 0,$ *то*
$\alpha u_1 + \beta u_2$ - тоже решение, т.к. $L(\alpha u_1 + \beta u_2) = 0$
И это линейное уравнение

Пример

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = 0, \text{ где } [\tau] = \text{с, мин, час}$$

Линейное уравнение - это $\quad Lu = 0$

$$Lu \equiv \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u$$

$$\boxed{\hat{L} = \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \text{ – линейный оператор}}$$

$$\hat{L}(\alpha u) = \frac{d(\alpha u)}{dt} + \frac{1}{\tau}(\alpha u) = \alpha\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right) = \alpha \hat{L} u$$

$$\boxed{\hat{L}(u_1 + u_2) = \hat{L} u_1 + \hat{L} u_2 \text{ - проверьте самостоятельно!}}$$

$$\hat{L}(u_1 + u_2) = \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)(u_1 + u_2) = \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{\tau} u_1 + \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{\tau} u_2 =$$

$$= \hat{L} u_1 + \hat{L} u_2$$

Одномерное движение

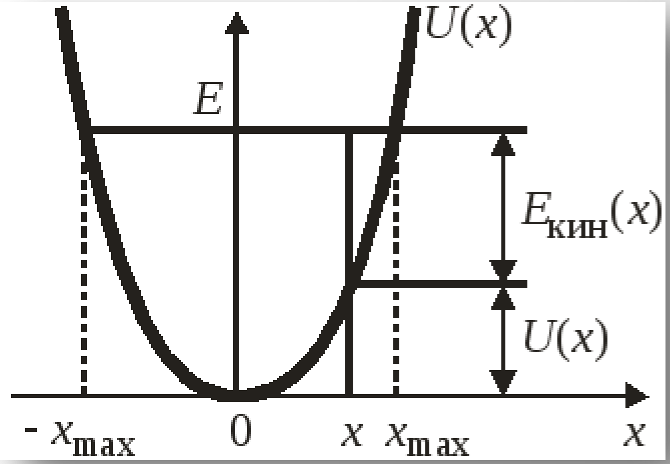
Классическая физика - нелинейная

$V(x)$ - не зависит от времени

$x(t)$- динамические переменные

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\mathrm{V}'\big(x(t)\big)$$

$$\mathrm{V}'^{(x(t))} = \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=x(t)}$$



Квантовая физика - линейная

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

Гамильтониан
(линейный оператор)

$$\boxed{\hat{L}\,\Psi = \mathbf{0}}$$

Уравнение Шредингера

$$\boxed{\hat{L}\,\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \hat{H}\Psi}$$

$\Psi(x, t)$

$$\hat{H}(\Psi_1 + \Psi_2) = \hat{H}(\Psi_1) + \hat{H}(\Psi_2)$$

2. Необходимость квантовых чисел

i – комплексное число

$z = a + ib \in C, a, b \in \Re$

$Im(z) = b \quad Re(z) = a$

$z^* = a - ib \in C, a, b \in \Re$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

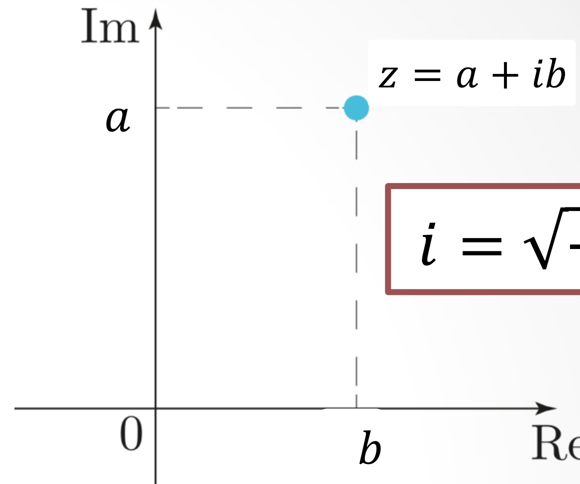
$$\boxed{|z|^2 = a^2 + b^2 = zz^*}$$

$$\boxed{z = cos\varphi + isin\varphi = e^{i\varphi}}$$

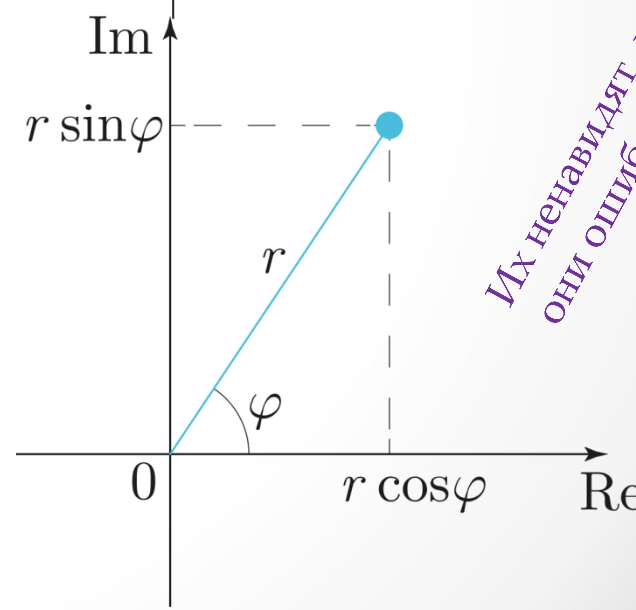
$$\boxed{\hat{L}\,\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \hat{H}\Psi \quad \rightarrow \Psi \in C \text{ (!)}}$$

C* #*s = необходимы!

Но их нельзя измерить



$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$



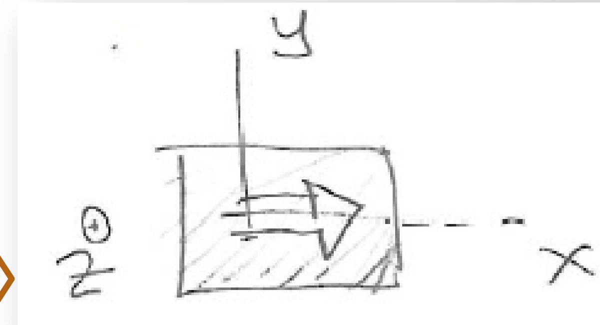
Их ненавидят, но они ошибаются!

$$\boxed{\text{Макс Борн: } |\Psi|^2 = \Psi\Psi^* \text{ - вероятность}}$$

3. Потеря Детерминизма

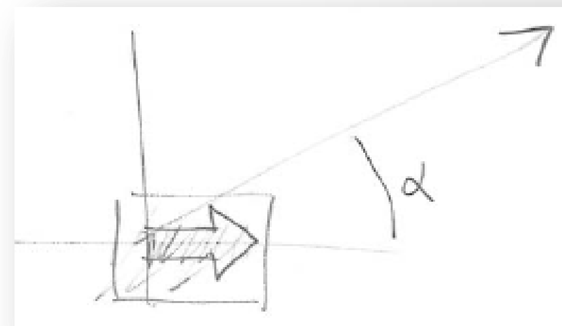
учение о всеобщей закономерной связи и причинной обусловленности всех явлений

фотон/свет ⇒ волны/частицы



Ньютоновская частица → Объект нулевого размера, характеризующийся энергией, точными значениями координаты и скорости в любой момент времени

$$\overrightarrow{E_\alpha} = \vec{E}_0 cos\alpha\hat{x} + \vec{E}_0 cos\alpha\hat{y}$$



Неделимое количество энергии, или импульс, который (ое) распространяется ← **Квантовая частица**

$$E = h\nu \ (\nu\lambda = c)$$

$$\overrightarrow{E_\alpha} = \vec{E}_0 cos\alpha\hat{x}$$

$$W \sim E^2 \sim (cos\alpha)^2$$

$$\alpha = 0 \quad cos\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad cos\alpha = 0$$

КМ: свет – пакеты энергии, неделимые кванты, у которых нет определенных значений координаты и скорости и они не могут распадаться на более мелкие образования

Странно!?

Все миллионы фотонов (идентичных) не являются идентичными!

Мы посылаем фотоны по одному в заданное состояние и смотрим, что случится. И мы знаем, что случится, т.к. классическое поведение правильное. Они все должны пройти. Не может быть так, что часть прошла, а другая потерялась, фотоны все идентичные. Согласно классической физике (опыт с пулями) частицы если проходят, то все, если не проходят, то тоже все. А у нас получается, что в одном случае фотоны поглощаются, а в другом проходят. Теряется предсказуемость.

Получили головную боль для Эйнштейна

Можно утверждать: Ну да, фотоны-то идентичны, но тогда поляризатор имеет какую-то субструктуру, т.е. фотоны в одном межатомном направлении проходят, в другом – поглощаются. Но эксперименты проводят множество раз, а результаты повторяются.

Эйнштейн: существуют какие-то другие (спрятанные) переменные, что-то внутри фотона, что делает его отличным от других внешне идентичных фотонов – неравенства Бэлла

"Бог не играет в кости"

Мы потеряли детерминизм, мы **можем только предсказывать вероятность**

фотон	проходит не проходит

Состояния частицы, волновые функции, вектора

Вектора? Складываем, умножаем, чтобы масштабировать, тоже, что и с линейным уравнением

Дирак: вектор или волновая функция фотона, поляризованного в направлении x

$$|\text{фотон}, \boldsymbol{x}\rangle$$

$\vert.\rangle$	"кет"
$\langle.\vert$	"бра"
$\langle.\vert.\rangle$	вероятность

Фотон, поляризованный вдоль направления y

$$|\text{фотон}, \boldsymbol{y}\rangle$$

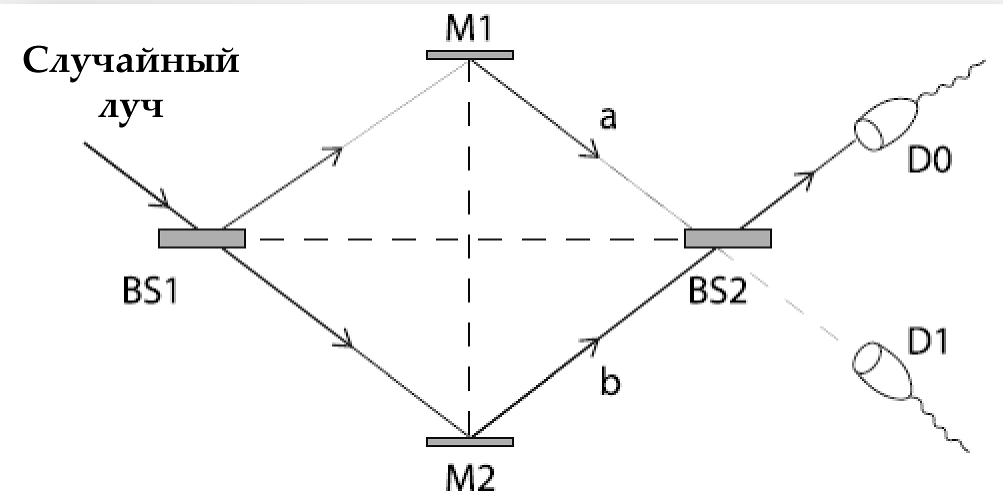
Линейность означает, что эти вектора могут создать суперпозицию, т.е. может существовать состояние фотона, поляризованного вдоль направления α

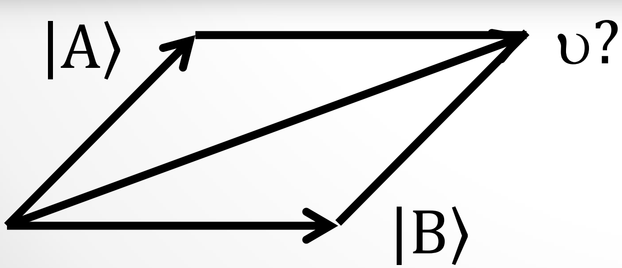
$$|\text{фотон}, \boldsymbol{\alpha}\rangle = \boldsymbol{cos\alpha}|\text{фотон}, \boldsymbol{x}\rangle + \boldsymbol{sin\alpha}|\text{фотон}, \boldsymbol{y}\rangle$$

4. Квантовая суперпозиция

Классическая физика	**Если мы имеем электрическое поле и другое ЭП, то при суперпозиции мы будем иметь снова ЭП и ничего более**

Интерферометр Маха-Цендера





Рассмотрим состояния $|A\rangle$ и $|B\rangle$

Предположим, что при

- ✓ измерении свойства Q в состоянии $|A\rangle$ получаем a
- ✓ измерении свойства Q в состоянии $|A\rangle$ получаем b

Предположим, что новое физическое состояние $|\Psi\rangle$- суперпозиция

$$|\Psi\rangle = \boldsymbol{\alpha}|A\rangle + \boldsymbol{\beta}|B\rangle, \quad \alpha, \beta \in C$$

Чему равно значение свойства Q в состоянии $|\Psi\rangle$?

Может нечто промежуточное?

Вероятность

1Коэффициенты α и β в приведенной суперпозиции влияют на вероятности, с которыми мы можем получить два возможных значения. На самом деле, вероятности получить *a* или *b*

$$Prob(a) \sim |\alpha|^2 \quad Prob(b) \sim |\beta|^2$$

А. Мы будем измерять либо α, либо β, но никогда что-то промежуточное ~~α + β~~, но с разной вероятностью

$$Prob(a) = \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \quad Prob(b) \sim \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$$

Если мы получаем значение *a*, промежуточные измерения тоже дадут *a* и состояние после измерения будет $|\mathrm{A}\rangle$, аналогично для *b*

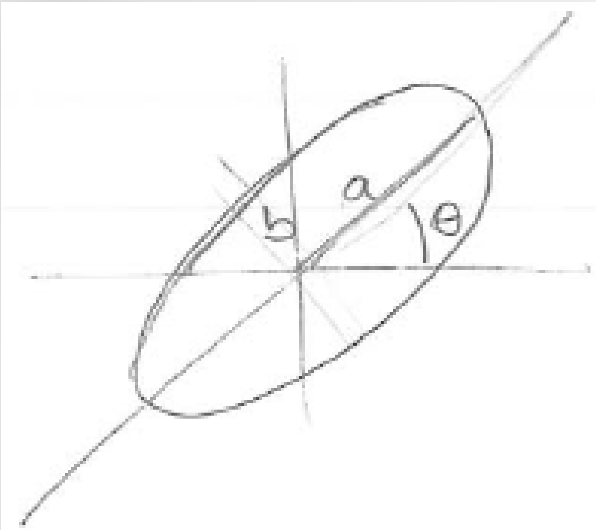
Б. Наложение состояния на себя не меняет физику

$$\boxed{|\mathrm{A}\rangle \cong \mathbf{2}|\mathrm{A}\rangle \cong -|\mathrm{A}\rangle \cong \boldsymbol{i}|\mathrm{A}\rangle \neq \mathbf{0}|\mathrm{A}\rangle}$$

Нулевое состояние

Все эти состояния физически эквивалентны, пока коэффициент ненулевой,
т.е. можем работать с тем состоянием, которое удобно – нормировка

Как проверить?



Например, фотон, попадающий на поляризатор

$$\alpha|\text{фотон}; \boldsymbol{x}\rangle + \beta|\text{фотон}; \boldsymbol{y}\rangle, \qquad \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$$

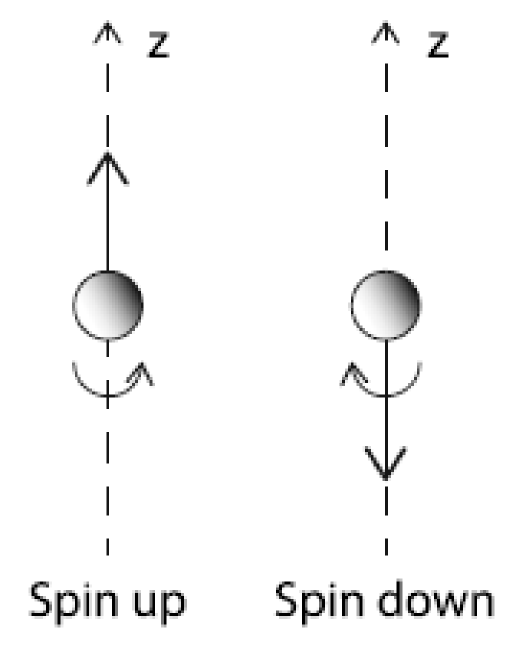
Имеем два комплексных параметра

$$|\text{фотон}; \boldsymbol{x}\rangle + \frac{\beta}{\boldsymbol{\alpha}}|\text{фотон}; \boldsymbol{y}\rangle$$

Имеем один комплексный параметр

$$\frac{\beta}{\boldsymbol{\alpha}} = \gamma = \mathbf{2}\ \textbf{реальных параметра}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{\theta}\right)$$

Спин



Свойство элементарной частицы

$$|\Psi\rangle = \left|\uparrow; z\right\rangle + \frac{\beta}{\alpha}\left|\downarrow; z\right\rangle$$

50% $\left|\uparrow; z\right\rangle$

50% $\left|\downarrow; z\right\rangle$

5. Запутанность

Мы говорим о запутанности, когда имеем две невзаимодействующие частицы

Предположим, что частицы могут быть в любом из этих состояний

Частица 1 $|u_1\rangle \quad |u_2\rangle$

Частица 2 $|v_1\rangle \quad |v_2\rangle$

Хотим описать полную систему, квантовое состояние двух частиц

Частица 1 может делать $|u_1\rangle$, Частица 2 может делать $|v_1\rangle$

Математически $|u_1\rangle \otimes |v_1\rangle$

Теперь частицы делают нечто другое

$$(\alpha_1|u_1\rangle + \alpha_2|u_2\rangle)\otimes(\beta_1|v_1\rangle + \beta_2|v_2\rangle)$$

$$=\alpha_1\beta_1|u_1\rangle\otimes|v_1\rangle + \alpha_1\beta_2|u_1\rangle\otimes|v_2\rangle + \alpha_2\beta_1|u_2\rangle\otimes|v_1\rangle + \alpha_2\beta_2|u_2\rangle\otimes|v_2\rangle$$

Могу записать другое состояние

$|u_1\rangle\otimes|v_1\rangle + |u_2\rangle\otimes|v_2\rangle = (\cdots)_1 \otimes (\cdots)_1$

Сравню эти состояния и вижу $\alpha_1\beta_1 = 1, \alpha_2\beta_2 = 1, \alpha_1\beta_2 = 0, \alpha_2\beta_1 = 0$

То есть $|u_1\rangle\otimes|v_1\rangle + |u_2\rangle\otimes|v_2\rangle \neq (\cdots)_1 \otimes (\cdots)_1$ это состояние сможет быть описано, если говоря о том, что делает частица 1, мы знаем, что делает частица 2, а для того, чтобы знать о частице 2, нужно знать, что делает 1. Это и есть запутанность, связность

Странное состояние

Можем сконструировать запутанное состояние для двух частиц со спином 1/2

$$|\uparrow;z\rangle_1 \otimes |\downarrow;z\rangle_2 + |\downarrow;z\rangle_1 \otimes |\uparrow;z\rangle_2$$