Классическая картина мира и необходимость введения квантовых представлений

Лекция 2.

доцент ОЭФ ИЯТШ ТПУ, к.физ.-мат.н.
Купрекова Елена Ивановна

Экспериментальные законы

1) Пьер Прево (1809г.) нашел правило: **если два тела поглощают различные количества энергии, то они и излучают разные количества энергии.**

2) Густав Кирхгоф (1859г.) использовал рассуждения Прево при доказательстве теоремы (закона Кирхгофа), доложенной Берлинской Академии в 1859г. («О связи между испусканием и поглощением света и тепла»): **отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, оно является для всех тел универсальной функцией частоты и температуры**

$$\boxed{\left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_2 = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_3 = \cdots = \frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = f(\omega,T)}$$

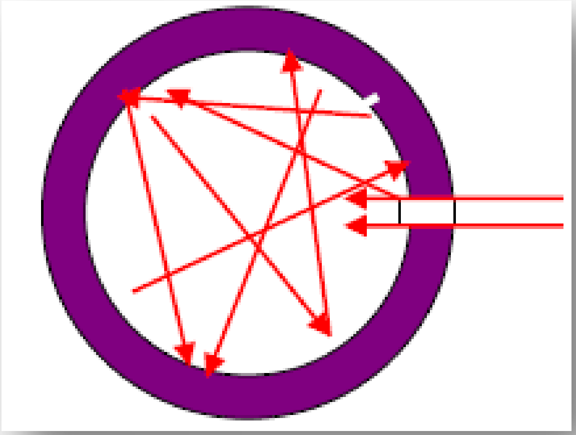
где 1,2,3,.... соответствуют разным телам, а $f(\omega,T)$ – универсальная функция. Сами величины $r_{\omega,T}$ и $a_{\omega,T}$ могут меняться очень значительно от одного тела к другому, однако их отношение оказывается одинаковым для всех тел:

сильнее поглощающее какие-либо лучи тело, будет их и сильнее испускать

Абсолютно черное тело

$a_{\omega,T} = 1$, т.е. **поглощается все, что падает на это тело при всех частотах излучения**.

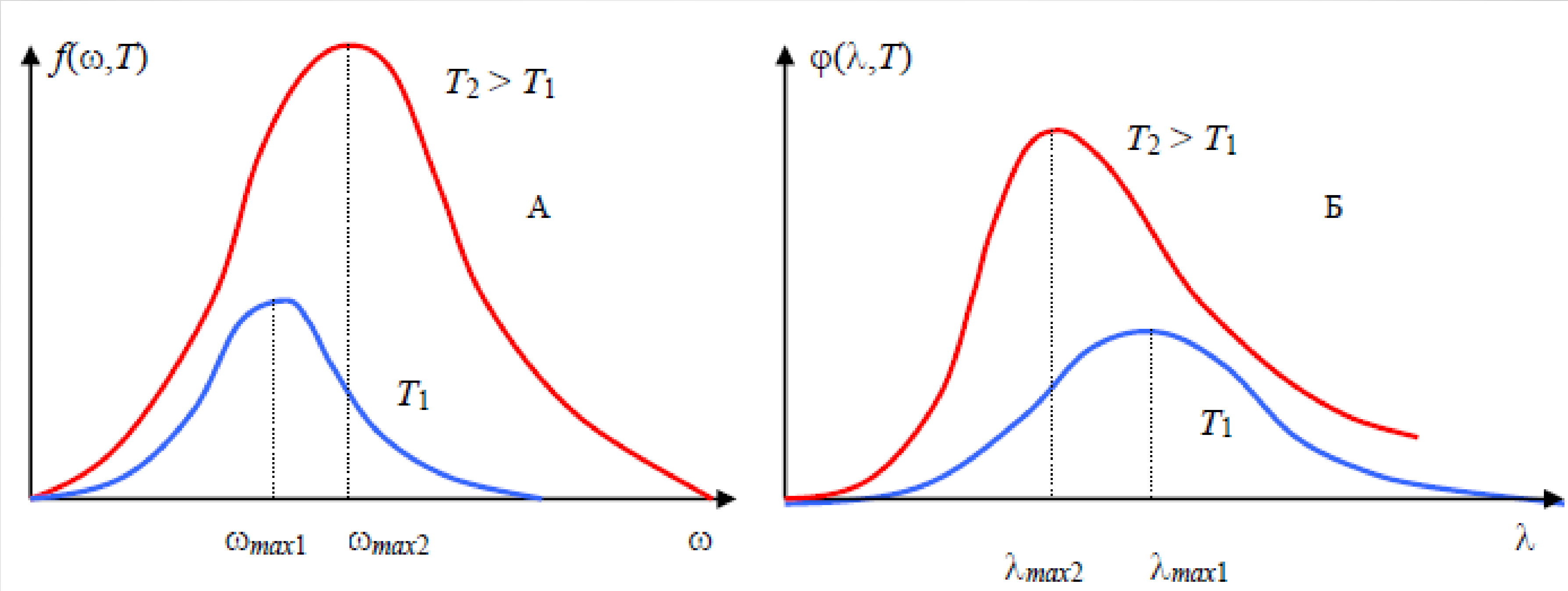
Абсолютно черных тел в природе не бывает. Наиболее близко к нему приближаются: сажа, платиновая чернь, но и то лишь в некоторой области частот.



Испускательная способность АЧТ равна универсальной функции $r_{\omega,T} = f(\omega, T)$.

Поэтому основная идея: **создать модель абсолютно черного тела и изучать его испускательную способность**.

Излучение через отверстие в полости с T = const может долго находиться внутри нее, отражаясь от стенок, поглощаясь ими, переизлучаясь и вновь поглощаясь. Этот непрерывный процесс со временем становится стационарным. Поэтому для маленького отверстия поглощательная способность $a_{\omega,T} = 1$



В экспериментальных исследованиях удобнее пользоваться функцией длины волны $\varphi(\lambda, T)$. В теоретических работах используют функцию частоты $f(\omega, T)$. Между этими функциями существует связь:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{\omega^2}{2\pi c} f(\omega, T)$$

$$f(\omega, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \varphi(\lambda, T)$$

Для АЧТ :

$$R(T) = \int_0^\infty r(\omega, T) d\omega = \int_0^\infty f(\omega, T) = \int_0^\infty \varphi(\lambda, T) d\lambda$$

Связь между энергетической светимостью R(T) и плотностью энергии излучения U(T)

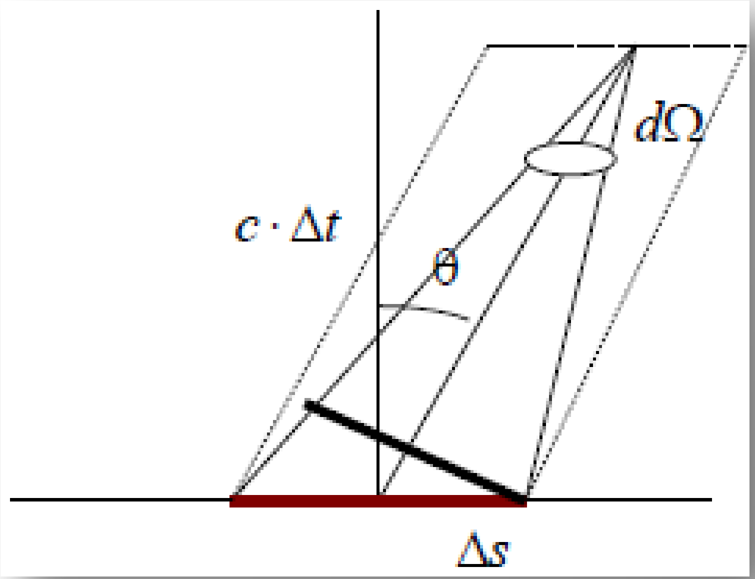
Допустим имеем модель АЧТ - полость с АЧ стенками при *T* = const. Внутри полости через любую точку во всех направлениях проходит поток энергии одинаковой плотности $u(\omega, T)$ или $U(T)$. Пусть

$$du = du_\theta = u\frac{d\Omega}{4\pi} = u\frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi}$$

доля объемной плотности энергии, которая распространяется в угле $d\Omega$

Тогда на площадку под углом θ за время t попадет энергия

$$dW = du \cdot \Delta V = u\frac{d\Omega}{4\pi}c\Delta t\Delta S\cos\theta$$



Полная энергия, прошедшая через площадку ΔS за время Δt (излучение падает со всех сторон, телесный угол полупространства $\Omega = 2\pi$), равна:

$$\Delta W = \frac{uc\Delta t\Delta S}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{c}{4}u\Delta t\Delta S$$

Связь между R(T) и U(T) (прод-е)

Плотность потока энергии через (или на) единичную площадку равна:

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S} = \frac{c}{4} u$$

Поток энергии, испускаемый единицей поверхности

$$R = \frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S}$$

Так как в равновесии исходящий и приходящий потоки энергии равны, то

$$R(T) = \frac{c}{4} U(T)$$

или для спектральных характеристик :

$$r(\omega, T) = f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T)$$

Закон Стефана-Больцмана $R(T) \sim T^4$

Стефан считал, что этот закон справедлив для интегральной светимости всех тел. Однако оказалось, что он строго выполняется только для АЧТ. Это показал в 1884 г. Л. Больцман, исходя из законов классической термодинамики и используя результаты ЭМТ Максвелла

$$\boxed{R^{\text{АЧТ}} = \int_0^{\infty} f(\omega, T)\, d\omega = \sigma T^4}$$

закон Стефана – Больцмана означает, что площадь под кривой растет пропорционально T^4

$$\boxed{\sigma = 5{,}6696 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4}$$

постоянная Стефана- Больцмана

Доказательство:

Запишем первое начало термодинамики:

$$dQ = dU + pdV \qquad dQ = TdS \qquad dU = TdS - pdV$$

делим на элемент объема dV при T = const (*S* – энтропия):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p$$

Свободная энергия : $\boxed{F = F(V,T) = U - TS}$

$$dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V}_{\text{диф} - \text{ем по } V} \\ &\underbrace{p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T}_{\text{диф} - \text{ем по } T} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= -\frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial F}{\partial T} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V &= -\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial F}{\partial V} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - \mathrm{p}$$

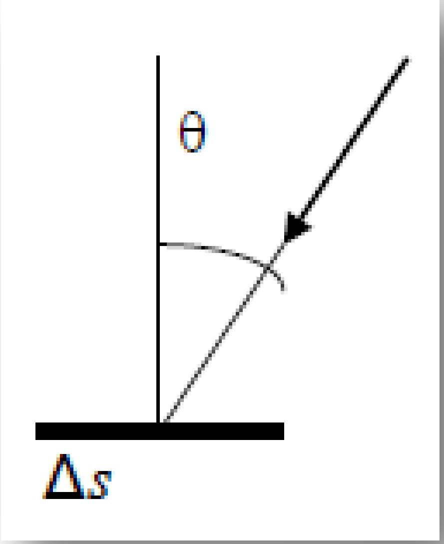
Для газа молекул и, аналогично, для излучения внутренняя энергия аддитивна:

$$\boxed{U = V \cdot u(T)}$$

Поток энергии :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}] \\ |\vec{S}| = c \cdot u(T)\end{gathered}}$$

$\vec{S}$**– вектор Пойнтинга.**



Поглощаемое площадкой ΔS **излучение, падающее под углом θ , передает за время** dt **импульс:**

$$dp_{\perp} = \frac{1}{c} dW \cdot cos\theta$$
$$= \frac{1}{c} \cdot u(T) \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \cdot c \cdot dt \cdot \Delta S \cdot cos^2\theta$$

Давление этой компоненты излучения определяется импульсом, переданным в единицу времени:

$$dp = \frac{dp_{\perp}}{dt \cdot \Delta S} = u(T) \cdot cos^2\theta \frac{sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi}{4\pi}$$

Полное давление, оказываемое на стенку поглощаемым излучением равно:

$$p = \frac{u(T)}{4\pi} \int_0^{\pi/2} cos^2\theta \cdot sin\theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{6} u(T)$$

Если стенка излучает столько же, сколько поглощает, то $dp_{0\perp} = 2dp_{\perp}$, и давление на стенку, обусловленное поглощением и излучением равных порций излучения определяется:

$$\boxed{p = \frac{1}{3} u(T)}$$

Возвращаемся к производной по объему:

$$\boxed{U = V \cdot u(T)}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V}\big(V \cdot u(T)\big)_T = u(T)$$

и далее получаем следующее уравнение:

$$u(T) = T\frac{1}{3}\frac{du(T)}{dT} - \frac{1}{3}u(T)$$

$$\frac{4}{3}u(T) = \frac{1}{3}T\frac{du(T)}{dT}$$

Решая это дифференциальное уравнение путем разделения переменных:

$$4\frac{dT}{T} = \frac{du(T)}{u(T)}$$

$$4lnT = lnu(T) + lnA$$

Откуда получаем закон Стефана – Больцмана:

$$\boxed{u(T) = AT^4}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}u(T)}$$

Примеры оценки с помощью закона Стефана – Больцмана

$$\boxed{R^{\text{АЧТ}} = \sigma T^4}$$

$$\boxed{\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \text{Вт/м}^2\cdot\text{К}^4}$$

1) **При температуре $T = 300K$ абсолютно черное тело с 1 м^2 поверхности излучает**

$$\mathbf{R(300\ K) = 5{,}67\cdot10^{-8}\cdot 3^4\cdot 10^8 = 5{,}67\cdot 81 \cong 460\ \textit{Вт} \cong 0{,}5\ \textit{кВт}.}$$

2) Пусть АЧТ с температурой T_1 находится в среде с температурой T_2, причем $T_2 < T_1$. Количество энергии, уходящей с поверхности тела

$$W = \sigma(T_1^4 - T_2^4)S \approx 4S\sigma \cdot T^3 \Delta T,$$
$$\text{при } T_1, T_2 \gg \Delta T = T_1 - T_2$$

а) Если в комнате теплее, чем на улице (среда) на $\Delta T = 20^o$, и температура наружного воздуха $T = 300$ K, то уходящее из помещения через окно (как черное тело) излучение уносит энергию

$$\frac{W}{S} = 4 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 3^3 \cdot 10^6 \cdot 20 \cong 123\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \approx 0{,}1\ \text{кВт/м}^2$$

б) У змей высокая чувствительность к тепловому излучению. Кобра улавливает тепловое излучение тел, температура которых отличается от температуры среды на 0,1 ÷0,01, что соответствует потоку энергии с единицы (1 м^2) поверхности тела приблизительно 0,10÷0,06 *Вт*.

в) Высокочувствительные люди – экстрасенсы. Их чувствительность в инфракрасной (ИК) области очень высока, но зависит не только от интегральной интенсивности, но и от положения максимума энергетической светимости.

Критерий и закон смещения Вина

К концу XIX века было много попыток объяснения излучения АЧТ в рамках классической физики. Из самых общих свойств и законов термодинамики и максвелловской ЭМТ В. Вин (1893г.) сформулировал общее условие для универсальной функции

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right)$$

***Критерий Вина*: любая формула, предлагаемая для универсальной функции $f(\omega, T)$ не должна противоречить формуле Вина, поскольку последняя получена из общих соображений.**

Критерий Вина можно записать через переменные λ и *T*:

$$\varphi(\lambda, \mathrm{T}) = \frac{2\pi c}{\lambda^2}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right) = \frac{1}{\lambda^5}\Psi(\lambda, T)$$

С помощью критерия Вина можно получить другие важные соотношения:

1) **Закон Стефана-Больцмана.** Полная энергетическая светимость

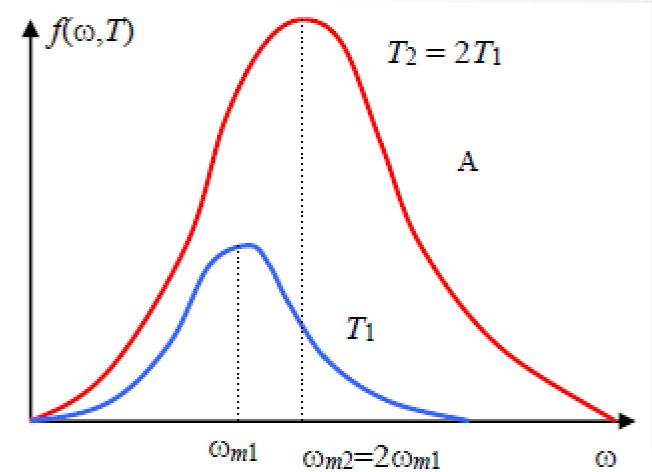
$$R(T) = \int_0^\infty \varphi(\lambda, T)d\lambda = \int_0^\infty \Psi(\lambda T)\frac{d\lambda}{\lambda^5}$$

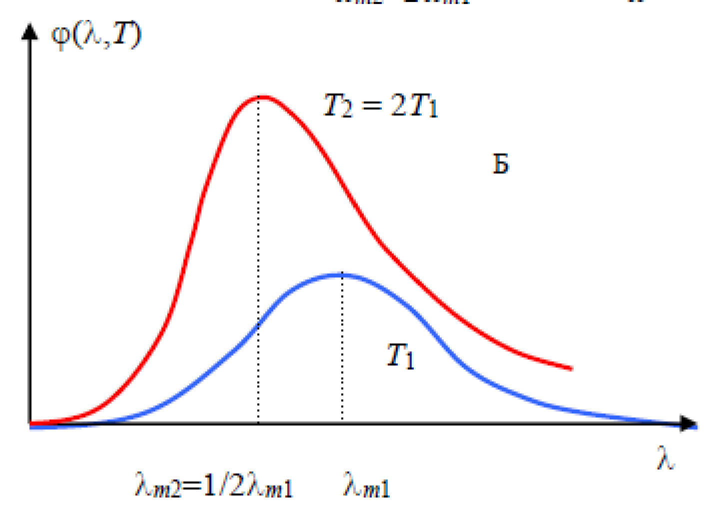
Делаем замену переменных $x = \lambda T$ и $d\lambda = dx/T$:

$$R(T) = T^4\int_0^\infty \Psi(x)\frac{dx}{x^5} = \sigma T^4$$

$$\sigma = \int_0^\infty \Psi(x)\frac{dx}{x^5} = \int_0^\infty y^3 F(y)dy$$

$$y = \frac{\omega}{T}$$





Таким образом, получаем, что площадь под кривой $f(\omega,T)$, или $\varphi(\lambda,T)$, растет с температурой пропорционально четвертой степени температуры

2). **Закон смещения Вина.** Найдем максимум функции распределения:

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right)$$

$$\left[\omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right)\right]'_\omega = 0 = 3\omega^2 F\left(\frac{\omega}{T}\right) + \omega^3 \frac{1}{T} F'\left(\frac{\omega}{T}\right)$$

Корень этого уравнения ω = 0 соответствует минимуму функции, равному нулю, поэтому сократим на ω и снова введем обозначение $y = \frac{\omega}{T}$. Тогда :

$$3F(y) + yF'(y) = 0$$

Допустим мы нашли решение этого уравнения y_0, соответствующее максимуму функции распределения

$$y = y_0 = \frac{\omega_{max}}{T}$$

Отсюда автоматически получаем закон смещения Вина (1896 г.):

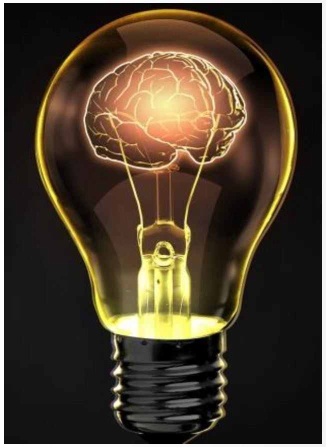
$$\frac{\omega_{max}}{T} = const = 0{,}37 \cdot 10^{12}\ \text{К}^{-1}\text{с}^{-1}$$

$$\lambda_{max} T = b$$

$b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}$ К ·м - **постоянная Вина**

Примеры оценки интенсивности с помощью закона Вина

1) Если человека рассматривать как АЧТ, то при $T = 300$ K максимум его светимости находится при $\lambda \approx 10$ *мкм*, т.е. лежит в инфракрасном (ИК) диапазоне.



2) Сколько излучает человек?
Допустим
- средняя площадь поверхности человека ~ 1 $м^2$,
- разность температур тела и среды $\Delta T \sim 10$ K,

тогда мощность излучения

$$W = 4S \cdot \sigma T^3 \Delta T \approx 4 \cdot 1 \cdot 5,7 \cdot 10^{-8} \cdot 27 \cdot 10^6 \cdot 10 \cong 60\ Вт,$$

т.е. по интегральной мощности человек «светит», как 60-ваттная лампочка, но в ИК диапазоне.
На основе ИК излучения создаются приборы ночного видения.

Теория Рэлея - Джинса

Термодинамика не в состоянии определить вид универсальной функции. Оказалось необходимым привлечь статистические методы.

Д. Релей (1905) и Д. Джинс определяли $f(\omega,T)$, исходя из классических представлений и основываясь на законе о равномерном распределении энергии по степеням свободы. В равновесии существующее ЭМ поле (излучение) можно разложить по стоячим волнам, как в ряд Фурье. При этом на каждую стоячую волну приходится средняя энергия равная $2\cdot(1/2\kappa T)$, так как ЭМ волна имеет две степени свободы, соответствующие электрическому E и магнитному H полю:

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right)$$

Сосчитаем число стоячих волн, приходящихся на единицу интервала частот.

1). **Одномерный случай**

Стоячая волна представляет собой сумму 2-х волн, распространяющихся в противоположных направлениях – вдоль и против оси x

$$E = E_0 cos(\omega t - kx)$$

$$E = E_0 cos(\omega t + kx + \alpha)$$

Если одномерная область ограничена ($0 \le x \le a$), то на границах области проявляются либо узлы (закрепленная на краях струна), либо пучности (стержень, закрепленный посередине).

а) Если $\alpha = 0$, то в $x = 0$ будет пучность и сумма двух волн дает:

$$E = 2E_0 coskxcos\omega t$$

(при $x = 0$ имеем $E = 2E_0 cos\omega t$

б) Если $\alpha = \pi$, то в точке $x = 0$ имеем узел:

$$E = 2E_0 cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 2E_0 sinkxsin\omega t$$

(при $x = 0$ получаем $E = 0$).

Допустим, имеем на границах области узлы (те же результаты могут быть получены для пучностей), тогда на правой границе $x = a$ тоже узел, т.е. фаза, входящая в $Sinkx$, должна быть равна:

$$ka = \pi n, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

Пусть имеется 2 стоячих волны с разными волновыми числами:

$$k_1 = \left(\frac{\pi}{a}\right) n_1 \qquad k_2 = \left(\frac{\pi}{a}\right) n_2$$

Разность чисел (n_2 - n_1) определяет число стоячих волн, модули векторов которых лежат в интервале $\Delta k = k_2 - k_1$:

$$\Delta N_k = \frac{a}{\pi} \Delta k$$

Перейдем к непрерывной последовательности, считая, что Δk между соседними стоячими волнами - маленькая величина:

$$\Delta N_k = \frac{a}{\pi} \Delta k \qquad k = \frac{\omega}{c} \qquad dk = \frac{1}{c} d\omega$$

Итак, число стоячих волн, частоты которых лежат в диапазоне ω ÷ ω+dω определяется:

$$\boxed{dN = \frac{2a}{\pi c} d\omega}$$

$$\frac{dN}{d\omega}$$ **плотность состояний**

2 - так как возможны два типа поляризации э/м волн.