

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

В.Ф. Дядик, С.А. Байдали, Н.С. Креницын

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 681.51.01 (075.8)

ББК 32.965 я73

Д 992

Дядик В.Ф.

Д 992

Теория автоматического управления: учебное пособие/
В.Ф. Дядик, С.А. Байдали, Н.С. Криницын; Национальный ис-
следовательский Томский политехнический университет. –
Томск: Изд-во Томского политехнического университета,
2011. – 196 с.

В учебном пособии изложены основы теории линейных систем автоматического управления. Рассмотрены методы математического описания отдельных функциональных элементов; а также разомкнутых и замкнутых систем автоматического управления.

Описаны методы исследования устойчивости и оценки качества функционирования автоматических систем. Приведены методы синтеза промышленных систем автоматического управления.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по образовательной программе подготовки дипломированных специалистов по специальности 140306 «Электроника и автоматика физических установок» направления «Ядерная физика и технологии».

УДК 681.51.01 (075.8)

ББК 32.965 я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор СТИ НИЯУ МИФИ

Б.М. Кербель

Доктор технических наук, профессор ТГУ

В.Т. Калайда

© ГОУ ВПО НИ ТПУ, 2011

© Дядик В.Ф., Байдали С.А., Криницын Н.С., 2011

© Обложка. Издательство Томского
политехнического университета, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
1 Управление технологическим процессом. Регулирование	10
1.1 Основные вехи развития теории автоматического управления	10
1.2 Понятия управления и регулирования технологическим процессом	10
1.3 Объект управления	12
1.4 Классификация объектов управления	15
1.5 Фундаментальные принципы управления	16
1.5.1 Принцип разомкнутого управления	17
1.5.2 Принцип компенсации возмущений (управление по возмущению)	18
1.5.3 Принцип обратной связи. Управление по отклонению	19
1.6 Алгоритм управления	21
1.7 Функциональная схема системы автоматического управления	22
1.8 Классификация систем автоматического управления	23
2 Методы математического описания элементов и систем автоматического управления	25
2.1 Дифференциальные уравнения САУ	25
2.1.1 Дифференциальное уравнение динамического звена	25
2.1.1.1 Порядок составления дифференциального уравнения динамического звена	27
2.1.1.2 Линеаризация уравнения, описывающего динамическое звено	27
2.1.1.3 Стандартные формы записи дифференциального уравнения звена	29
2.1.1.4 Геометрическая трактовка процедуры линеаризации динамического звена	31
2.1.1.5 Графическая иллюстрация снятия статической характеристики звена	32
2.1.2 Составление дифференциального уравнения САУ по дифференциальным уравнениям звеньев	33
2.2 Передаточные функции системы автоматического управления	37
2.2.1 Передаточная функция динамического звена	37
2.2.1.1 Свойства передаточной функции динамического звена (системы)	40

2.2.2 Преобразование структурных схем систем автоматического управления.....	42
2.2.3 Передаточные функции систем автоматического управления по задающему и возмущающему воздействиям.....	51
2.2.3.1 Передаточная функция замкнутой САУ относительно управляемой величины по задающему воздействию	52
2.2.3.2 Передаточная функция замкнутой системы относительно управляемой величины по возмущающему воздействию	52
2.2.3.3 Передаточные функции САУ относительно сигнала рассогласования (ошибки).....	53
2.3 Временные характеристики систем автоматического управления	54
2.3.1 Переходная функция динамического звена.....	54
2.3.2 Весовая функция динамического звена	56
2.3.3 Определение реакции динамического звена на произвольное входное воздействие с помощью временных характеристик.....	57
2.3.4 Экспериментальные временные характеристики САУ	57
2.4 Частотные характеристики систем автоматического управления	58
2.4.1 Частотные характеристики динамического звена	58
2.4.2 Представление АФЧХ на комплексной плоскости.....	61
2.4.3 Определение АФЧХ звена по его дифференциальному уравнению.....	62
2.4.4 Логарифмические частотные характеристики	63
3 Характеристики типовых динамических звеньев линейных систем автоматического управления	66
3.1 Простейшие звенья	67
3.1.1 Пропорциональное звено.....	67
3.1.2 Интегрирующее звено	69
3.1.3 Дифференцирующее звено	71
3.1.4 Звено запаздывания	74
3.2 Звенья первого порядка	76
3.2.1 Инерционное звено.....	76
3.2.2 Инерционно-дифференцирующее звено.....	79
3.2.3 Форсирующее звено	82
3.2.4 Инерционно-форсирующее звено (упругое звено).....	84
3.3 Звенья второго порядка	88
3.3.1 Апериодическое (инерционное) звено второго порядка	89
3.3.2 Колебательное звено второго порядка.....	92
3.3.3 Консервативное звено второго порядка.....	97

4	Анализ устойчивости линейных систем автоматического управления	99
4.1	Основные понятия об устойчивости систем автоматического управления	99
4.1.1	Условие устойчивости систем автоматического управления	100
4.2	Алгебраические критерии устойчивости систем автоматического управления	104
4.2.1	Критерий устойчивости систем автоматического управления Рауса	105
4.2.2	Критерий устойчивости систем автоматического управления Гурвица	107
4.3	Частотные критерии устойчивости систем автоматического управления	109
4.3.1	Принцип аргумента	109
4.3.2	Критерий устойчивости систем автоматического управления Михайлова	111
4.3.3	Критерий устойчивости систем автоматического управления Найквиста	115
4.3.4	Критерий Найквиста для астатических систем автоматического управления	118
4.3.5	Критерий Найквиста по логарифмическим частотным характеристикам	120
4.4	Построение областей устойчивости в плоскости параметров системы автоматического управления. D-разбиение	121
4.4.1	Понятие о D-разбиении	121
4.4.2	Построение областей устойчивости в плоскости двух параметров системы автоматического управления с помощью критерия Михайлова (D-разбиение)	124
4.4.3	Построение областей устойчивости методом D-разбиения, если параметры A и B входят в систему линейно	127
5	Методы оценки качества управления	129
5.1	Прямые показатели качества переходных процессов системы автоматического управления	130
5.1.1	Прямые показатели качества переходных процессов САУ по задающему воздействию	130
5.1.2	Прямые показатели качества переходных процессов САУ по возмущающему воздействию	133
5.2	Корневые методы оценки качества управления	136
5.3	Частотные показатели качества САУ	140

5.3.1	Оценка качества управления по амплитудно-частотной характеристике замкнутой САУ	140
5.3.2	Оценка качества управления по амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой САУ	142
5.3.3	Оценка качества управления по вещественной частотной характеристике замкнутой САУ	143
5.4	Интегральные критерии качества систем автоматического управления	146
6	Анализ систем автоматического управления в установившемся режиме.	154
6.1	Статическое и астатическое регулирование	154
6.2	Статические характеристики систем автоматического управления	157
6.2.1	Статические характеристики звеньев САУ	158
6.2.2	Статические характеристики соединений звеньев	160
6.2.2.1	Статическая характеристика параллельного соединения звеньев	160
6.2.2.2	Статическая характеристика последовательного соединения звеньев	161
6.2.2.3	Статическая характеристика звена с обратной связью (встречно-параллельного соединения звеньев).....	162
6.3	Статическая характеристика линейной замкнутой системы управления (системы стабилизации)	164
6.4	Погрешность систем автоматического управления при медленно изменяющихся воздействиях. Ряд ошибок	166
7	Синтез систем автоматического управления	173
7.1	Синтез одноконтурных систем автоматического управления по отклонению	173
7.1.1	Составление функциональной схемы САУ из функционально-необходимых элементов	173
7.1.2	Составление структурной схемы проектируемой САУ	175
7.1.3	Математическое описание функциональных элементов схемы	175
7.1.3.1	Математическое описание технологического объекта управления.....	175
7.1.3.2	Математическое описание функциональных элементов САУ	178
7.1.4	Представление САУ как совокупности обобщенного объекта и регулятора	179
7.1.5	Выбор закона регулирования	179

7.1.6 Расчет параметров настройки типовых регуляторов	180
7.2 Синтез комбинированных систем автоматического управления	185
7.3 Синтез корректирующих звеньев	188
7.3.1 Синтез последовательного корректирующего звена методом логарифмических амплитудно-частотных характеристик.....	189
7.3.2 Синтез параллельных корректирующих устройств по логарифмическим амплитудно-частотным характеристикам	190
Список литературы	194
Указатель сокращений	196

ПРЕДИСЛОВИЕ

Автоматизация является важным средством повышения эффективности производственных процессов. Экономичное, надежное и безопасное функционирование сложных промышленных объектов, какими являются технологические процессы предприятий ядерного топливного цикла, может быть обеспечено с помощью лишь самых совершенных принципов и технических средств управления.

Теория автоматического управления (ТАУ), - научная дисциплина, предметом изучения которой являются информационные процессы, протекающие в системах управления техническими и технологическими объектами. ТАУ выявляет общие закономерности функционирования, присущие автоматическим системам различной физической природы, и на основе этих закономерностей разрабатывает принципы построения высококачественных систем управления.

ТАУ при изучении процессов управления абстрагируется от физических и конструктивных особенностей систем и вместо реальных систем рассматривает их адекватные математические модели. Основными методами исследования в ТАУ являются математическое моделирование, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, операционное исчисление и гармонический анализ.

Учебное пособие содержит семь разделов. В первом разделе изложены основные понятия и определения теории управления, принципы управления и классификация систем автоматического управления (САУ). Математическому описанию непрерывных линейных САУ посвящен второй раздел. Здесь представлены все 4 способа их описания: с помощью дифференциальных уравнений, передаточных функций, временных и частотных характеристик. Характеристики типовых динамических звеньев линейных систем управления систематизированы в третьем разделе. Четвертый раздел посвящен анализу устойчивости линейных САУ. Приведены условия устойчивости, описаны алгебраические и частотные критерии устойчивости и метод построения областей устойчивости в плоскости 2-х параметров системы. Пятый раздел знакомит с методами оценки качества управления в переходном режиме. Описаны прямые и косвенные показатели качества. Анализ систем автоматического управления в установившемся режиме представлен в шестом разделе. Даны понятия статического и астатического регулирования, рассмотрены статические характеристики типовых соединений звеньев и замкнутой линейной САУ. Описаны методики определения погрешности САУ при медленно изменяющихся воздействиях. В седьмом разделе

ле излагаются методики синтеза одноконтурных систем автоматического управления по отклонению, комбинированных САУ, а также корректирующих устройств, обеспечивающих необходимые показатели качества.

Задача пособия – способствовать формированию у обучающихся знаний и умений в применении методов теории линейных систем автоматического управления для анализа и синтеза систем автоматического управления реальными технологическими процессами.

Авторы выражают глубокую благодарность инженеру кафедры ЭАФУ ТПУ Байдали М.А. за подготовку учебного пособия к изданию.

1 УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ. РЕГУЛИРОВАНИЕ

1.1 Основные вехи развития теории автоматического управления

Первыми промышленными регуляторами являются автоматический поплавковый регулятор питания котла паровой машины, построенной в 1765 г. И.И. Ползуновым в г. Барнауле и центробежный регулятор скорости паровой машины, на который в 1784 г. получил патент английский механик Дж. Уатт. Эти регуляторы открыли путь потоку изобретений принципов регулирования и регуляторов. Появляются регуляторы с воздействием по производной (братьев Сименсов), по нагрузке (инж. Ж. Понселе), сервомоторы с жесткой обратной связью (инж. Л. Франко), регуляторы с гибкой обратной связью (изодромные), импульсные регуляторы "на отсечку пара", электрические регуляторы и т. п.

Основу теории автоматического управления заложили четыре фундаментальные работы:

1. Дж. Максвелл "О регуляторах" (механизмах наведения телескопа) (1866г).
2. И.А Вышнеградский. "Об общей теории регуляторов" (1876 г).
3. И.А Вышнеградский. "О регуляторах прямого действия"(1877 г).
4. А.М.Ляпунов. "Общая задача об устойчивости движения"(1892 г).

Большой вклад в теорию автоматического управления внесли отечественные ученые: Петров Б.А., Попов Е.П., Красовский А.А., Поспелов Г.С., Шаталов А.С., Солодовников В.В., Кухтенко А.И., Фельтбаум А.А., Куневич В.М., Пугачев В.С., Болтянский В.Г. и многие другие.

1.2 Понятия управления и регулирования технологическим процессом

Протекание всякого технологического процесса характеризуется совокупностью физико-химических величин – показателей процесса. Для правильного протекания процесса на некоторые из этих величин должны быть наложены определенные условия, например:

- сохранение постоянного значения;
- удержание в заданных пределах;
- изменение по заданному закону (изменение температуры закалочной печи при закалке изделий по заранее заданному графику).

Совокупность операций, необходимых для пуска и остановки процесса, а также для поддержания или изменения в требуемом направлении величин, характеризующих процесс, называется управлением. Совокупность операций управления, которые относятся к поддержанию или изменению показателей процесса, представляют собой регулирование (рис. 1.1).

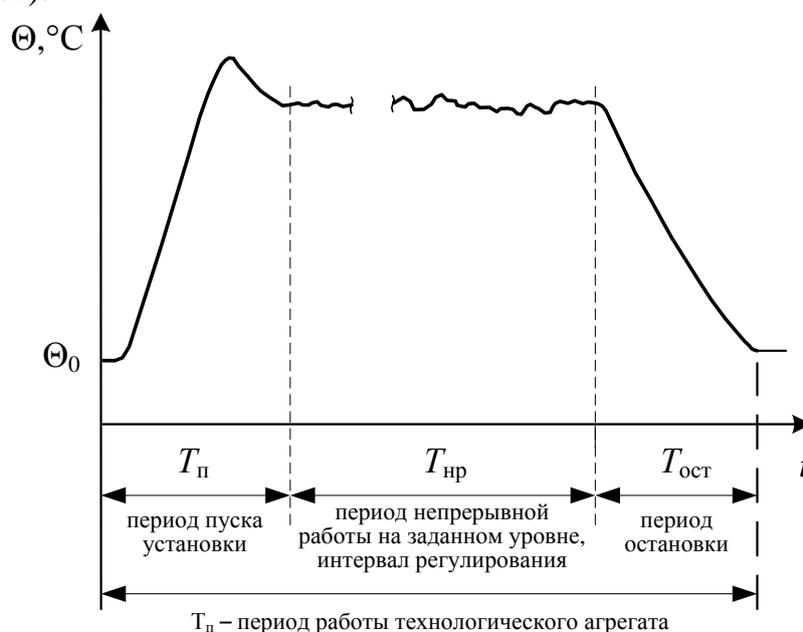


Рис. 1.1. Период работы технологического агрегата

Операции управления может осуществлять человек, тогда управление будет ручным. Если же управление осуществляется автоматическим устройством, то управление будет называться автоматическим управлением, а выполняющее его устройство – автоматическим управляющим устройством.

Наука об управлении техническими системами называется технической кибернетикой.

Разделами технической кибернетики являются:

- 1) теория информационных устройств, связанная со сбором и переработкой информации, необходимой для управления системой человеком;
- 2) теория автоматического управления, связанная с управлением системой без непосредственного участия человека.

Автоматическим регулированием называется поддержание постоянной, удержание в заданном диапазоне или изменение по заданному закону некоторой величины, характеризующей процесс, осуществляемое при помощи измерения состояния объекта или действующих на него возмущений и воздействия на регулирующий орган объекта.

Управление охватывает большой круг задач. Под автоматическим управлением понимается автоматическое осуществление совокупности воздействий, выбранных из множества возможных на основании определенной информации и направленных на поддержание или улучшение функционирования управляемого объекта в соответствии с целью управления. Сравнивая определения управления и регулирования, можно заметить, что задачи регулирования входят в состав задач управления. Кроме того, задачи автоматического управления охватывают такие вопросы, как:

- адаптация (самонастройка системы управления в соответствии с изменением параметров объекта или внешних воздействий);
- формирование оптимальных управляющих воздействий;
- автоматический выбор наилучших режимов из нескольких возможных;
- ряд других задач, не входящих в круг задач автоматического регулирования.

1.3 Объект управления

Техническое устройство, осуществляющее процесс, которым надлежит управлять, будем называть объектом управления (или управляемым объектом). Чтобы можно было осуществлять управление, объект должен иметь управляющий или регулирующий орган, изменяя положение или состояние которого мы могли бы изменять показатели процесса. В качестве примера объекта рассмотрим пламенный реактор получения гексафторида урана (рис. 1.2).

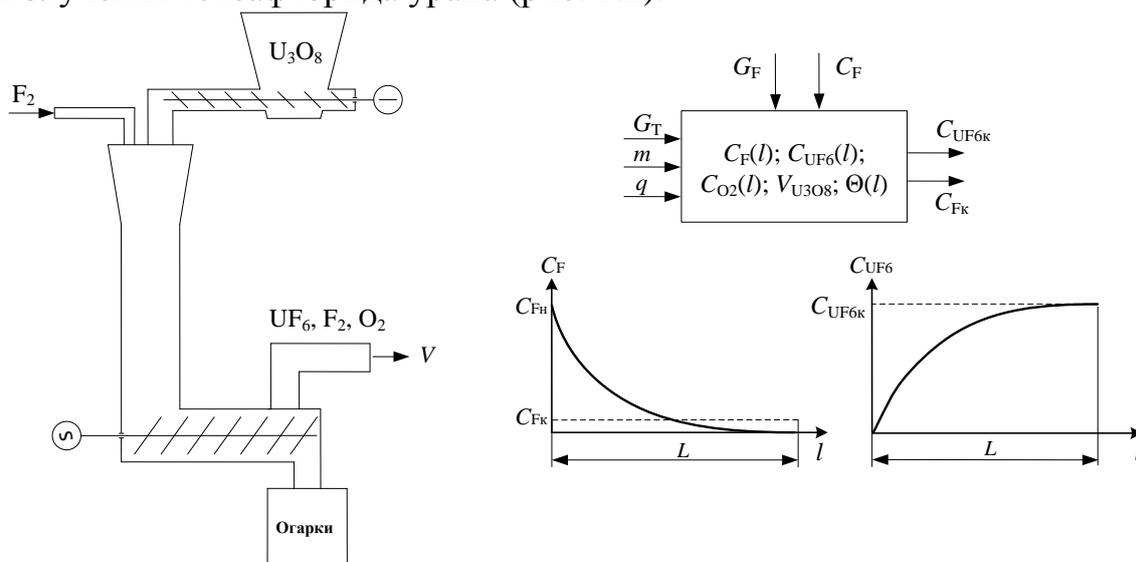
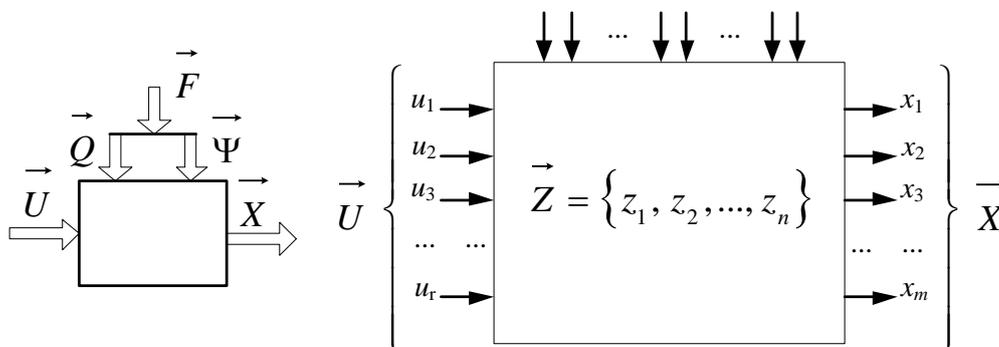


Рис. 1.2. Пламенный реактор получения гексафторида урана

Состояние объекта определяется рядом величин, характеризующих как воздействие на объект внешней среды и управляющих устройств, так и протекание процессов внутри самого объекта (рис. 1.3).

$$\vec{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \quad \vec{\Psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l\}$$



\vec{U} – управляющие (регулирующие) воздействия; $\vec{F}(\vec{Q}, \vec{\Psi})$ – возмущающие воздействия; \vec{Q} – нагрузка; $\vec{\Psi}$ – помехи; \vec{Z} – координаты (величины), характеризующие состояние объекта; \vec{X} – управляемые (регулируемые) координаты (величины)

Рис. 1.3. Информационная структура объекта управления

Одни из этих величин измеряются в процессе работы и называются контролируемыми. Другие, влияющие на режим работы объекта, не измеряются и называются неконтролируемыми.

Величины, выражающие внешние влияния на объект, называются воздействиями. Воздействия, вырабатываемые управляющим устройством (регулятором) или задаваемые человеком, называются управляющими (регулирующими) воздействиями. Воздействия на объект, не зависящие от системы управления, называются возмущающими воздействиями (возмущениями). Возмущения можно разделить на два вида:

- нагрузка;
- помехи.

Наличие изменяющейся во времени нагрузки обусловлено работой объекта, от нее объект принципиально не может быть защищен (производительность объекта). Помехи бывают связаны с нежелательными побочными явлениями, и всякое их уменьшение улучшает работу объекта. Совокупность как контролируемых, так и неконтролируемых величин, однозначно характеризующих состояние объекта, и обозначенная вектором $\vec{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ образует координаты состояния. Отдельные координаты векторов \vec{Z} и \vec{X} могут совпадать, при этом $m < n$.

Контролируемые величины, характеризующие состояние объекта, по которым ведется управление или регулирование, называются управляемыми или регулируемыми величинами. Обычно управляемые (регулируемые) величины в той или иной степени характеризуют качественные показатели процесса в управляемом (регулируемом) объекте.

1. Координаты векторов \vec{U} и \vec{X} будем называть соответственно управляющими и управляемыми координатами.
2. Координаты векторов $\vec{F}:(\vec{Q}, \vec{\Psi})$ – координатами внешних возмущающих воздействий.
3. Координаты векторов $\vec{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ – координатами состояния.

Переменные \vec{X} , \vec{U} , \vec{F} в зависимости от природы объекта (рис. 1.4) связаны различными математическими зависимостями (дифференциальными, интегральными или разностными уравнениями), в общем виде:

$$\vec{X} = A\{\vec{U}, \vec{F}\}, \quad (1.1)$$

где A – оператор, определяющий вид зависимости.

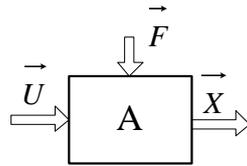


Рис. 1.4. Структурная схема объекта управления

Если известно математическое описание объекта, то известна и система уравнений, связывающая управляемые (регулируемые) координаты \vec{X} со всеми внешними воздействиями (\vec{U}, \vec{F}) . При известных начальных условиях эта система уравнений дает возможность по заданным внешним воздействиям (\vec{U}, \vec{F}) найти вектор состояния \vec{Z} и выходные управляемые (регулируемые) координаты \vec{X} .

Рассмотрим пример (рис. 1.5).

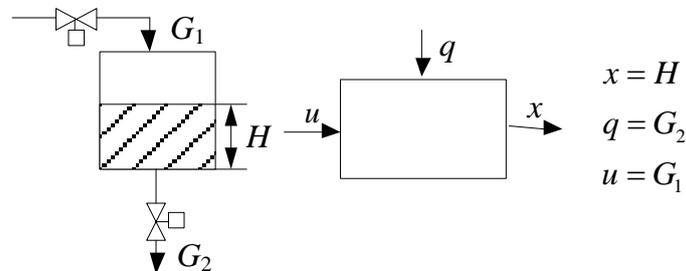


Рис. 1.5. Формализация объекта управления

[Скорость накопления жидкости] = [приток] – [сток].

$$\frac{SdH}{dt} = G_1 - G_2; \quad (1.2)$$

$$S \frac{dx}{dt} = u(t) - q(t).$$

1.4 Классификация объектов управления

1. По размерности координат объекта.

Если объект характеризуется одной управляющей (регулирующей) и одной управляемой (регулируемой) координатами, т. е. векторы \vec{U} и \vec{X} одномерные, то объект называется простым или односвязным (рис. 1.6).

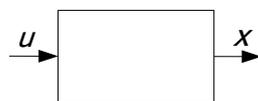


Рис. 1.6. Простой (односвязный) объект

При наличии нескольких взаимно-связанных координат векторов \vec{U} и \vec{X} , объект называется многомерным или многосвязным (рис. 1.7).

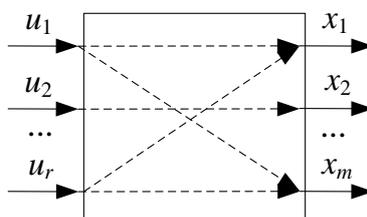


Рис. 1.7. Многомерный (многосвязный) объект

2. По виду математического описания.

Если объект описывается линейным дифференциальным уравнением, то объект называется линейным. При описании объекта нелинейным дифференциальным уравнением, объект называют нелинейным.

3. По признаку устойчивости.

Объекты управления могут быть: устойчивыми, неустойчивыми и нейтральными. Рассмотрим на примере одномерных объектов.

Устойчивые объекты иногда называются объектами с самовыравниванием.

Нейтральные объекты иногда называются объектами без самовыравнивания. Проиллюстрируем эти понятия на примере одномерных объектов, реакции на импульсные входные воздействия которых представлены на рис. 1.8.

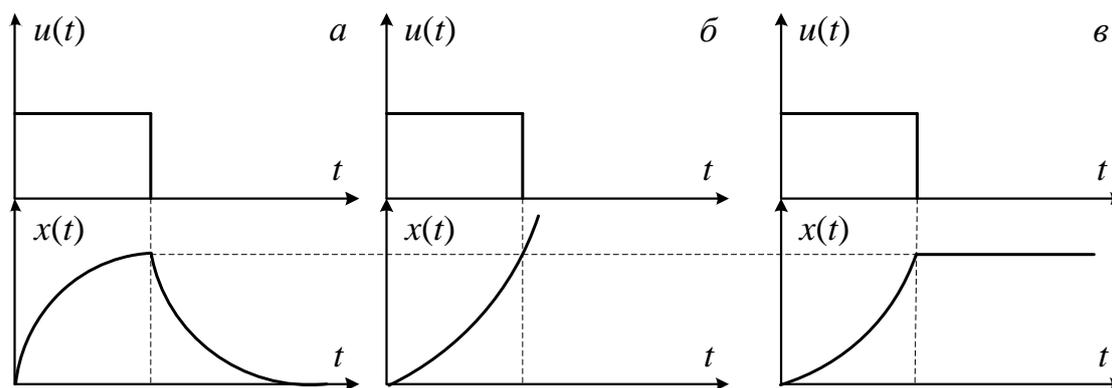


Рис. 1.8. Реакции на импульсные входные воздействия одномерных объектов: а – устойчивого; б – неустойчивого; в – нейтрального

Рис. 1.8, а иллюстрирует реакцию на импульсное входное воздействие устойчивого объекта, т. к. после кратковременного внешнего воздействия он с течением времени возвращается к исходному или близкому к нему состоянию. В неустойчивом объекте (рис. 1.8, б) по окончании воздействия, как бы мало оно ни было, управляемая координата продолжает изменяться. Нейтральными объектами являются такие объекты, в которых по окончании воздействия устанавливается новое состояние равновесия, отличное от первоначального и зависящее от произведенного воздействия (рис. 1.8, в).

1.5 Фундаментальные принципы управления

Автоматическое поддержание заданного закона изменения показателей процесса называется автоматическим регулированием. Изменяемые по заданному закону показатели процесса называются регулируемыми величинами или регулируемыми координатами. Автоматическое устройство, осуществляющее автоматическое регулирование, называется автоматическим регулятором.

Совокупность регулируемого объекта и автоматического регулятора образуют систему автоматического регулирования (САР).

Совокупность объекта управления и управляющего устройства называется системой автоматического управления (САУ).

Алгоритм функционирования САУ показывает, как должна изменяться управляемая (регулируемая) величина (либо вектор \vec{X}) по требованиям технологии, экономики или по другим соображениям без учета динамических искажений. В теории автоматического управления (регулирования) алгоритм функционирования считают заданным.

Алгоритм функционирования САУ задается видом «уставки» (т. е. требуемым характером управляемой величины).

Алгоритм управления (регулирования) показывает, как должно изменяться управляющее (регулирующее) воздействие $u(t)$ либо вектор \vec{U} , чтобы обеспечить заданный алгоритм функционирования – $x(t)$, либо вектор \vec{X} (рис. 1.9).

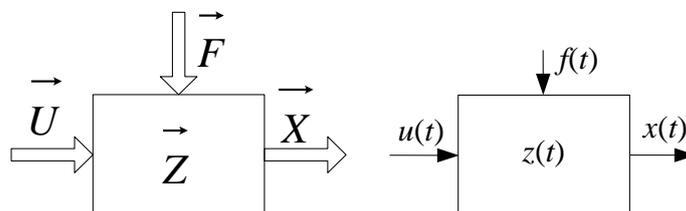


Рис. 1.9. Структурная схема алгоритма управления

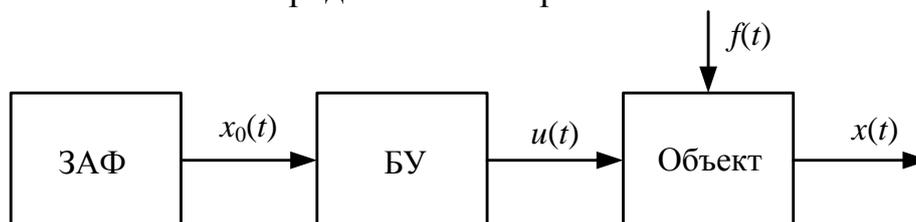
В основе построения систем автоматического управления (регулирования) лежат некоторые фундаментальные принципы управления (регулирования), определяющие каким образом осуществляется увязка алгоритмов функционирования и управления (регулирования).

В настоящее время в технике известны и используются три фундаментальных принципа управления (регулирования):

- принцип разомкнутого управления (регулирования);
- принцип компенсации возмущений – управление (регулирование) по возмущению;
- принцип обратной связи – управление (регулирование) по отклонению.

1.5.1 Принцип разомкнутого управления

Сущность принципа состоит в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется другими факторами – фактическим значением управляемой величины или величиной возмущения. Общая функциональная схема системы представлена на рис. 1.10.



ЗАФ – задатчик алгоритма функционирования; БУ – блок управления

Рис. 1.10. Функциональная схема разомкнутого управления

Схема управления имеет вид разомкнутой цепи, это и дало основание названию принципа. Близость x к x_0 обеспечивается жесткостью ха-

ра характеристик схемы. При наличии значительных возмущающих воздействий f величина x может заметно отклоняться от заданной, при этом управление станет непригодным и следует использовать другие принципы управления. Несмотря на очевидные недостатки, этот принцип используется очень широко. На рис. 1.11 изображен пример реализации этого принципа управления.

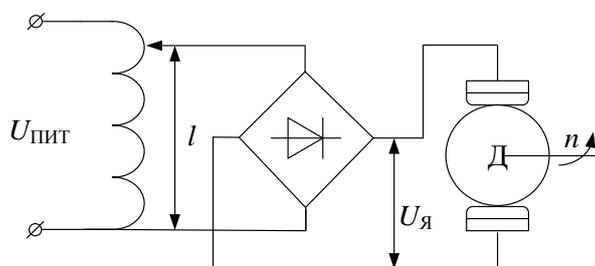


Рис.1.11. Реализация принципа разомкнутого управления

1.5.2 Принцип компенсации возмущений (управление по возмущению)

Для повышения точности управления можно, измерив возмущения, ввести по результатам измерения коррективы в алгоритм управления, которые компенсировали бы вызываемые возмущениями отклонения алгоритма функционирования. На рис. 1.12 изображена функциональная схема системы управления по возмущению.

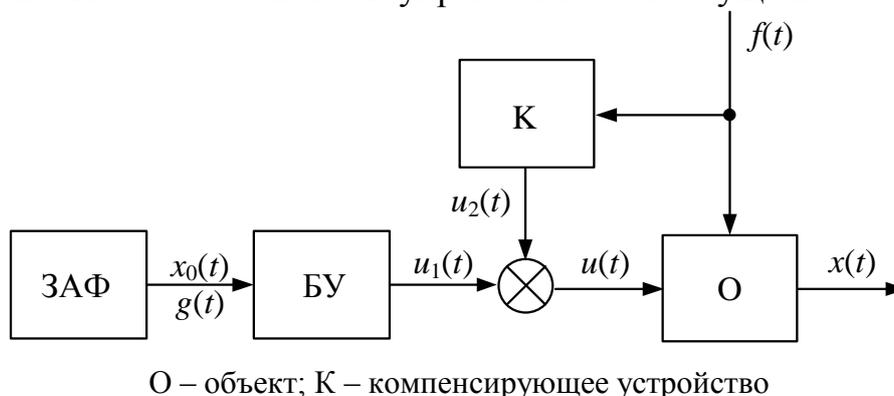


Рис. 1.12. Функциональная схема системы управления по возмущению

Пример реализации этого принципа управления приведен на рис. 1.13. Здесь применяется серийная обмотка – устройство, действующее непосредственно в функции возмущающего воздействия и компенсирующее его влияние. В связи с тем, что основным возмущающим воздействием в данном случае является нагрузка генератора, регулирование в функции величины этого возмущающего воздействия позволяет получить неизменное значение напряжения генератора в определенном диапазоне изменения нагрузки. Такой способ управления называется

управлением по возмущению. Однако при таком управлении не учитывается и не компенсируется отклонение выходной переменной, вызываемое другими факторами.

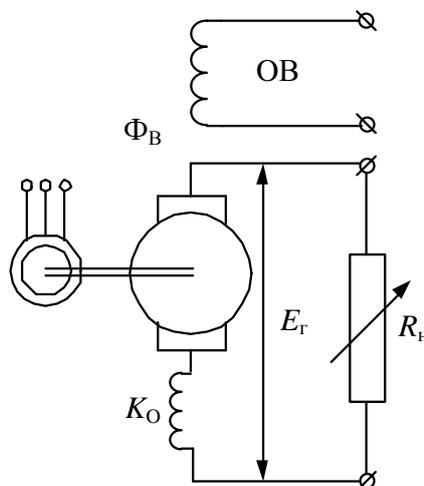


Рис. 1.13. Реализация принципа управления по возмущению

Цепь, по которой осуществляется управляющее воздействие в функции возмущения, называют компенсирующей цепью. При наличии нескольких возмущающих воздействий управляющее устройство (регулятор) должен иметь компенсирующие цепи по каждому из этих возмущений, чтобы обеспечить поддержание выходной переменной на заданном уровне. Но при этом усложнится конструкция управляющего устройства (регулятора) и потребуется большое количество разнообразных элементов.

Системы управления (регулирования) по возмущению в сравнении с системами, действующими по отклонению, отличаются обычно большими устойчивостью и быстродействием. К их недостаткам относятся трудность измерения возмущений, неполный учет возмущений.

1.5.3 Принцип обратной связи. Управление по отклонению

Систему можно построить так, чтобы точность выполнения алгоритма функционирования обеспечивалась и без измерения возмущений. В этом случае коррективы в алгоритм управления вносятся по фактическому значению регулируемой величины. На рис. 1.14 изображена функциональная схема системы управления по отклонению.

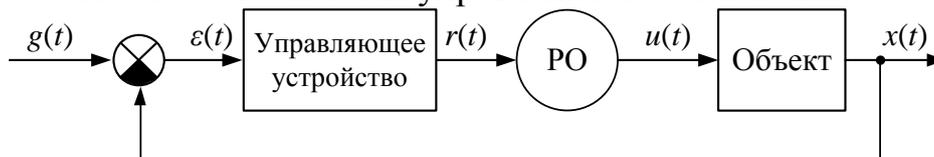


Рис. 1.14. Функциональная схема системы управления по отклонению

Схема имеет вид замкнутой цепи, что дало основание назвать осуществляемый в ней принцип принципом управления по замкнутому контуру. Так как направление передачи воздействий в дополнительной связи обратно направлению передачи основного воздействия на объект эту цепь называют цепью обратной связи.

В соответствии с этим принципом воздействие на регулирующий орган объекта (РО) вырабатывается как функция отклонения $\varepsilon(t)$ управляемой величины $x(t)$ от уставки $g(t)$:

$$\begin{aligned} r(t) &= F(\varepsilon); \\ \varepsilon(t) &= g(t) - x(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Функция $F(\varepsilon)$ должна быть не убывающей функцией $\varepsilon(t)$ и быть одного с ε знака. Кроме ε аргументами F могут быть также производные и интегралы ε по времени.

Управление (регулирование) в функции отклонения при упомянутых требованиях к функции $F(\varepsilon)$ называется управлением (регулированием) по отклонению.

Управляющее устройство в этом случае называется автоматическим регулятором. Обратная связь, образуемая регулятором, называется главной обратной связью. Могут быть и местные обратные связи. На рис. 1.15 для примера приведена принципиальная схема стабилизации частоты вращения вала двигателя постоянного тока, реализующая принцип обратной связи.

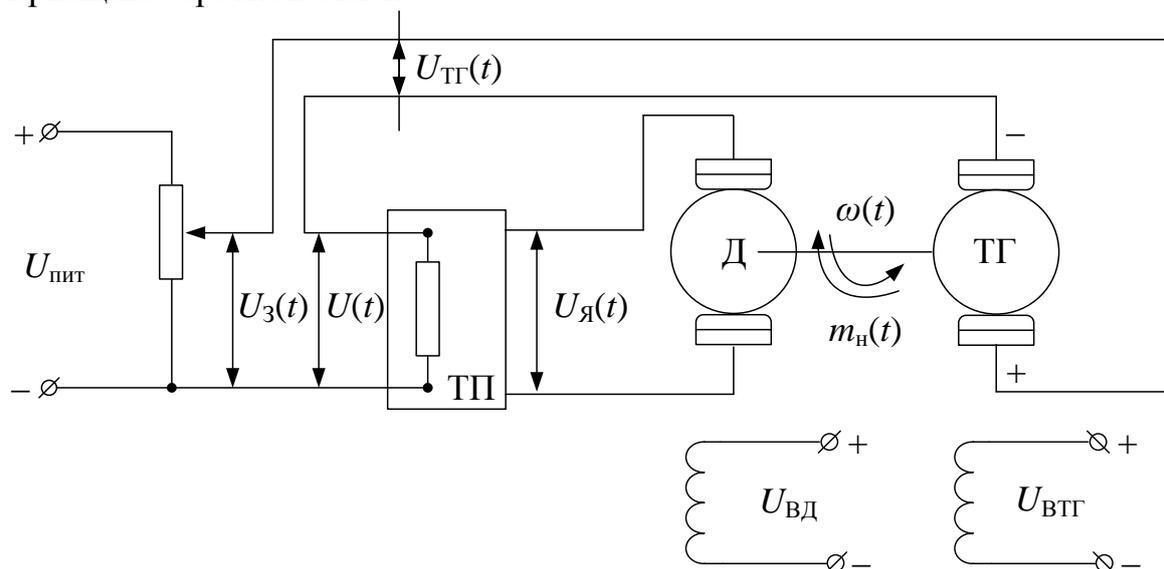


Рис.1.15. Принципиальная схема стабилизации частоты вращения вала двигателя, реализующая принцип обратной связи

Наиболее эффективными являются системы автоматического управления, реализующие совместно и принцип обратной связи (управление по отклонению) и принцип компенсации возмущений (управление по возмущению), т. н. комбинированные САУ (САУ). На рис. 1.16 приведена функциональная схема такой системы.

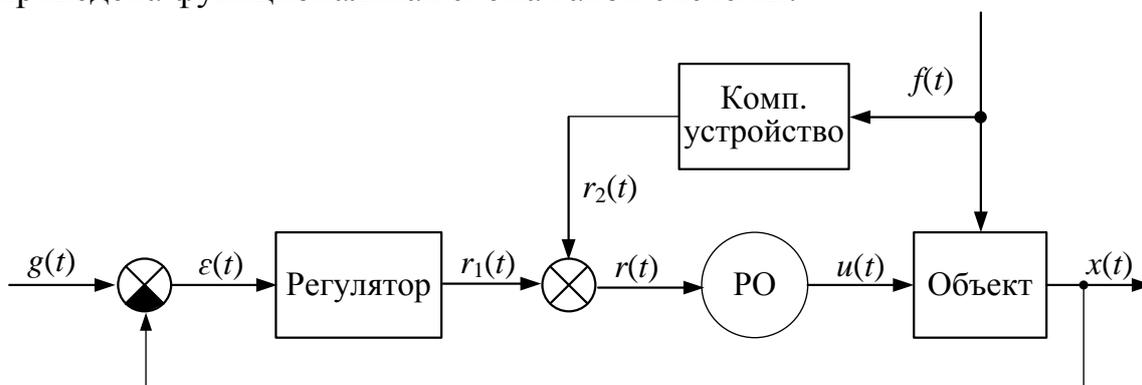


Рис. 1.16. Функциональная схема комбинированной САУ

1.6 Алгоритм управления

Алгоритм функционирования САУ показывает, как должна изменяться управляемая величина по требованиям технологии без учета динамических искажений.

Алгоритм управления (регулирования) показывает, как должно изменяться управляющее (регулирующее) воздействие $r(t)$, чтобы обеспечить заданный алгоритм функционирования $x(t)$.

Законом (алгоритмом) управления (регулирования) называют математическую зависимость выходной координаты регулятора $r(t)$ от отклонения $\varepsilon(t)$ ее производных и интегралов, возмущения $f(t)$ его производных и интегралов и других величин (рис. 1.17).

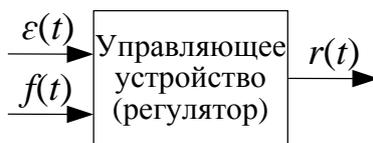


Рис. 1.17. Управляющее устройство

Входящие в алгоритм величины определяют принципы управления (регулирования):

1. Комбинированный принцип управления (регулирования):

$$r(t) = F(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots, \varepsilon^m, \dots, \int \varepsilon dt, \dots, f, f', \dots, \int f dt, \dots). \quad (1.4)$$

2. Принцип управления (регулирования) по возмущению:

$$r_1(t) = F_1(f, f', \dots, \int f dt, \dots). \quad (1.5)$$

3. Принцип управления (регулирования) по отклонению:

$$r_2(t) = F_2(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots, \int \varepsilon dt, \dots). \quad (1.6)$$

Автоматический регулятор, действующий по отклонению, обязательно реагирует на ε , стремясь ее уменьшить. Введение в закон регулирования остальных величин производных и интегралов от ε по времени играет вспомогательную роль (используется как коррекция качества регулирования).

В инженерной практике нашли наибольшее применение т. н. типовые алгоритмы (законы регулирования):

1) пропорциональный – П:

$$r(t) = k_R \varepsilon(t). \quad (1.7)$$

2) пропорционально-интегральный – ПИ (пропорциональный с воздействием по интегралу (изодромный)):

$$r(t) = k_R \varepsilon(t) + \frac{k_R}{T_{и0}} \int_0^t \varepsilon(t) dt. \quad (1.8)$$

3) пропорциональный с воздействием по интегралу и первой производной – ПИД (пропорционально-интегрально дифференциальный):

$$r(t) = k_R \varepsilon(t) + \frac{k_R}{T_{и0}} \int_0^t \varepsilon(t) dt + k_R T_{\partial} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (1.9)$$

4) интегральный – И:

$$r(t) = \frac{k_R}{T_{и0}} \int_0^t \varepsilon(t) dt. \quad (1.10)$$

5) пропорциональный с воздействием по первой производной – ПД (пропорционально-дифференциальный):

$$r(t) = k_R \varepsilon(t) + k_R T_{\partial} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (1.11)$$

где k_R – коэффициент пропорциональности; $T_{и}$ – время изодрома (время интегрирования); T_{∂} – время предварения.

1.7 Функциональная схема системы автоматического управления

На рис. 1.18 приведена типовая функциональная схема САУ.

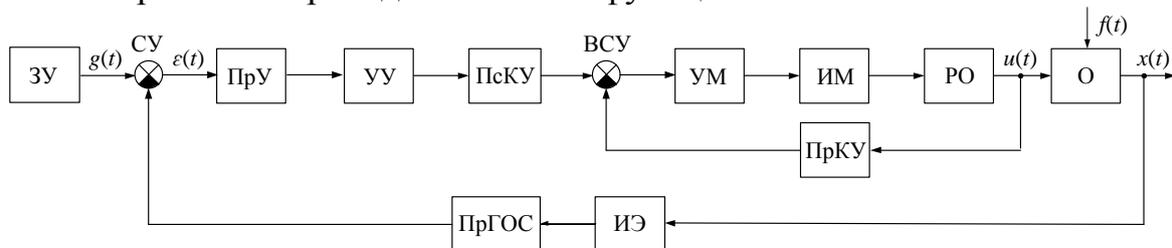


Рис. 1.18. Функциональная схема САУ (САР) по отклонению

На рис. 1.19 представлена упрощенная функциональная схема САУ по отклонению.

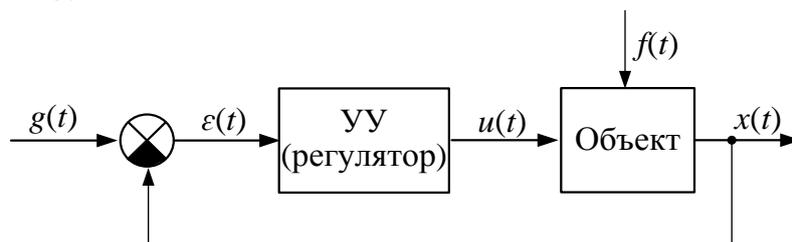


Рис. 1.19. Упрощенная функциональная схема САУ по отклонению

Перечень функциональных блоков типовой функциональной схемы САУ приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Перечень функциональных блоков САУ

Функциональный блок	Описание функционального блока
ЗУ	Задающее устройство
СУ	Сравнивающее устройство для сравнения заданного и действительного значений регулируемой величины
ПрУ	Преобразующее устройство
УУ	Управляющее устройство (регулятор), реализующее закон регулирования
ПсКУ	Последовательное корректирующее устройство для придания системе нужных динамических свойств
ВСУ	Вспомогательное сравнивающее устройство для суммирования сигналов местной обратной связи
УМ	Усилитель мощности управляющего сигнала
ИМ	Исполнительный механизм
РО	Регулирующий орган
О	Объект управления
ПрКУ	Параллельное корректирующее устройство для увеличения быстродействия исполнительного устройств
ИЭ	Измерительный элемент регулируемой величины
ПрГОС	Преобразователь сигнала главной обратной связи

1.8 Классификация систем автоматического управления

Все существующие системы автоматического управления можно классифицировать следующим образом:

1. По принципу управления:
 - САУ по возмущению;
 - САУ по отклонению;
 - комбинированные САУ.

2. По алгоритму функционирования:
 - системы стабилизации ($g(t) = \text{const}$);
 - системы программного управления [$g(t)$ – заданная $f(t)$];
 - следящие системы ($g(t)$ – неизвестная функция).
3. По характеру функционирования:
 - обычные;
 - адаптивные:
 - самонастраивающиеся;
 - экстремальные;
 - самоорганизующиеся.
4. По виду сигналов:
 - непрерывные;
 - дискретные:
 - цифровые;
 - релейные;
 - импульсные.
5. По виду математического описания:
 - линейные:
 - стационарные;
 - нестационарные;
 - нелинейные:
 - стационарные;
 - нестационарные.
6. По количеству координат объекта управления:
 - одномерные;
 - многомерные:
 - связанного управления;
 - несвязанного управления.
7. По энергии, используемой для перемещения регулирующего органа:
 - САУ прямого управления;
 - САУ непрямого управления.

2 МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1 Дифференциальные уравнения САУ

2.1.1 Дифференциальное уравнение динамического звена

Любая система автоматического управления может рассматриваться в виде совокупности отдельных связанных между собой элементов автоматики (чувствительных, промежуточных и исполнительных), взаимодействующих друг с другом и с объектом управления (регулирования).

Разбиение системы автоматического управления на элементы позволяет ввести понятие функциональной схемы автоматической системы, приносящее большую пользу при рассмотрении принципа действия и аппаратного состава систем управления.

Однако для аналитического исследования процессов, происходящих при автоматическом управлении, необходимы уравнения, описывающие работу САУ.

Ввиду сложности современных САУ уравнения, описывающие работу САУ, естественно получать, разбивая САУ на сравнительно простые части и составляя уравнения для каждой из таких частей по отдельности.

При таком подходе расчленение САУ на функциональные элементы автоматики не всегда приносит пользу для математического описания работы системы управления. Объясняется это, прежде всего тем, что уравнения многих современных элементов автоматики достаточно громоздки; кроме того, различные элементы автоматики часто описываются однотипными уравнениями.

Для математического описания работы САУ удобно разбивать ее не на функциональные элементы автоматики, а на динамические звенья. Поэтому вводится понятие динамического звена.

Динамическим звеном называется часть системы управления, либо вся система, описываемая дифференциальным (или иным) уравнением определенного вида. Приведенное определение является общим. Под него подходит любой элемент автоматики, совокупность таких элементов и даже вся система автоматического управления в целом.

Существенно, что в отличие от функционального элемента автоматики, динамическое звено не обязательно является конструктивно или схемно-оформленным устройством.

Например, в качестве динамических звеньев рассматриваются отдельные части функциональных элементов автоматики и объектов управления (обмотки возбуждения электрических генераторов, якорные обмотки электродвигателей, отдельные каскады усилителей и т. д.).

Состояние любого динамического звена может быть охарактеризовано совокупностью соответствующих физических величин – обобщенных координат.

Для электрических звеньев обобщенными координатами могут служить напряжения, токи и их производные; для механических – перемещения, скорости, ускорения. Многие звенья автоматических устройств обладают свойством направленного действия (однаправленности), т. е. передают воздействие только в одном направлении от входа к выходу. В таких звеньях при изменении входной величины $x_{\text{вх}}$ изменяется и выходная величина $x_{\text{вых}}$, изменения же выходной величины никак не сказывается на входной величине. Свойство однаправленности практически реализуется за счет усиления входного сигнала звена по мощности. Пассивные звенья (рычаг, редуктор, пассивные электрические цепи и др.) свойством направленного действия не обладают.

Уравнение звена должно быть составлено так, чтобы оно выражало зависимость (в динамическом процессе) между теми величинами, которые в схеме исследуемой системы указаны на выходе и входе данного звена, т. е. между величинами, представляющими воздействие данного звена на последующее по схеме звено и воздействие предыдущего звена на данное звено.

Дифференциальное уравнение отдельного звена составляется по правилам соответствующей технической науки. Звено иногда может иметь не одну входную величину, а несколько (например, при наличии дополнительных обратных связей).

Кроме входной и выходной величин звена, которые выражают собой внутренние связи между звеньями данной системы, может учитываться также внешнее воздействие на данное звено.

В большинстве случаев математическое описание динамических звеньев приводит к дифференциальным уравнениям того или иного вида. В результате физическая задача определения выходной величины звена при изменяющемся входном сигнале сводится к математической

задаче отыскания решения дифференциального уравнения, описывающего работу звена.

2.1.1.1 Порядок составления дифференциального уравнения динамического звена

Порядок составления дифференциального уравнения звена:

1. Определяют входную (-ые) и выходную (-ые) величины (координаты) звена и устанавливают дополнительные факторы, от которых зависит выходная величина.

2. Используя основные законы той отрасли науки и техники, к которой относится исследуемое звено:

- законы Кирхгофа для электрических звеньев;
- законы Ньютона для звеньев механической природы;
- законы сохранения энергии и вещества для гидравлических и пневматических звеньев,

составляют математическое описание звена в форме дифференциального уравнения.

3. Вводят те или иные упрощающие предположения (допущения) с целью упрощения исходного математического описания.

4. При необходимости осуществляют линеаризацию полученного дифференциального уравнения с целью получения линейного дифференциального уравнения звена.

2.1.1.2 Линеаризация уравнения, описывающего динамическое звено

Ставится задача математического описания динамического звена (рис. 2.1):

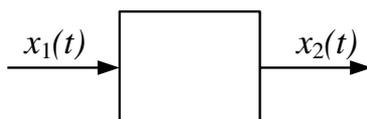


Рис. 2.1. Динамическое звено

В общем случае уравнение динамики звена системы, составленное на основании соответствующих фундаментальных законов, оказывается нелинейным. Предположим, что полученное нами уравнение звена, записанное в неявном виде, принимает вид:

$$F[x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t), \ddot{x}_2(t)] = 0. \quad (2.1)$$

Для того, чтобы система в целом была линейной, необходимо, чтобы все ее звенья были линейными.

Поэтому важной процедурой является процедура линеаризации исходного нелинейного уравнения, описывающего динамическое звено.

Линеаризация уравнения звена (2.1) основана на том, что в процессе регулирования все величины мало отклоняются от своих программных значений, иначе система не выполнила бы своей функции и не была бы системой регулирования (или управления).

Если функция F дифференцируема по всем своим аргументам, то она может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности произвольно выбранной точки. Так для функции двух аргументов:

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x + \Delta x; y + \Delta y) = & f(a; b) + \left. \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} \Delta x + \left. \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} \Delta y + \\ & \frac{1}{2!} \left\{ \left. \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} (\Delta x)^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} \Delta x \Delta y + \left. \frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=a \\ y=b}} (\Delta y)^2 \right\} + \dots + R_n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

где R_n – остаточный член.

Используя выражение (2.2) разложения функции для представления аналитических функций автоматических систем в виде ряда Тейлора, обычно пренебрегают членами второго порядка и более. Далее вычитают значение функции для установившегося состояния. Обозначим отклонения реальных значений x_1, x_2 через $\Delta x_1, \Delta x_2$. Тогда:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 + \Delta x_1(t); \quad x_1'(t) = \Delta x_1'(t); \\ x_2(t) &= x_2^0 + \Delta x_2(t); \quad x_2'(t) = \Delta x_2'(t); \quad x_2''(t) = \Delta x_2''(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где Δ – отклонения координат в процессе регулирования.

Из (2.1) запишем уравнение звена в установившемся состоянии:

$$F^0 \Rightarrow F(x_1^0; 0; x_2^0; 0; 0) = 0. \quad (2.4)$$

Разложив левую часть уравнения (2.1) в ряд Тейлора, при этом производные от координат рассматривают при разложении как независимые координаты, получим:

$$F^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}\right)^0 \Delta x_1'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)^0 \Delta x_2'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)^0 \Delta x_2''(t) + \dots + R_n = 0. \quad (2.5)$$

Вычитая из уравнения (2.5) уравнение (2.4) и отбросив все последующие члены разложения, кроме линейных, как малые высшего порядка, приходим к линейному уравнению динамики звена (опустив при этом знак отклонения Δ):

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 x_1(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}\right)^0 x_1'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 x_2(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)^0 x_2'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)^0 x_2''(t) = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) называется дифференциальным уравнением звена в отклонениях.

Введем обозначения:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)^0 = a_0; \left(\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)^0 = a_1; \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^0 = a_2; -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}\right)^0 = b_0; -\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 = b_1. \quad (2.7)$$

Тогда с учетом (2.7) уравнение (2.6) запишется:

$$a_0 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + a_2 x_2(t) = b_0 \frac{dx_1(t)}{dt} + b_1 x_1(t). \quad (2.8)$$

Это линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, записанное в развернутой форме, то же дифференциальное уравнение звена, записанное в операторной форме:

$$\left(a_0 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_2\right) x_2(t) = \left(b_0 \frac{d}{dt} + b_1\right) x_1(t). \quad (2.9)$$

С учетом того, что $p = \frac{d}{dt}$; $p^2 = \frac{d^2}{dt^2}$, уравнение (2.9) в операторной форме запишется:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x_2(t) = (b_0 p + b_1) x_1(t), \quad (2.10)$$

где

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = D(p), \quad b_0 p + b_1 = K(p) \quad (2.11)$$

– дифференциальные операторы левой и правой частей уравнения.

Уравнение (2.10) в компактной операторной форме записи принимает вид:

$$D(p) x_2(t) = K(p) x_1(t). \quad (2.12)$$

2.1.1.3 Стандартные формы записи дифференциального уравнения звена

Для представления уравнения (2.10) в первой стандартной форме записи, разделим все его коэффициенты на коэффициент при выходной координате (на a_2), введя обозначения:

$$\frac{a_0}{a_2} = T_2^2 [c^2]; \frac{a_1}{a_2} = T_1 [c]; k\tau = \frac{b_0}{a_2}; \tau = \frac{b_0}{b_1} [c]; \frac{b_1}{a_2} = k \left[\frac{\text{разм. } x_2}{\text{разм. } x_1} \right]. \quad (2.13)$$

Тогда дифференциальное уравнение звена (2.10), записанное в первой стандартной форме принимает вид:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) x_2(t) = k(\tau p + 1) x_1(t). \quad (2.14)$$

Уравнение вида $x_2 = k x_1$ будет являться уравнением статического режима этого звена.

Если все коэффициенты уравнения (2.10) разделить на коэффициент при входной величине b_1 , то получим так называемую вторую стандартную форму записи дифференциального уравнения звена:

$$(\tilde{T}_2^2 p^2 + \tilde{T}_1 p + \frac{1}{k}) x_2(t) = (\tau p + 1) x_1(t), \quad (2.15)$$

где $\tilde{T}_2^2 = \frac{a_0}{b_1} = \frac{T_2^2}{k}$; $\tilde{T}_1 = \frac{a_1}{b_1}$; $\frac{a_2}{b_1} = \frac{1}{k}$; $\frac{b_0}{b_1} = \tau$.

Для составления общего уравнения САУ уравнение каждого отдельного динамического звена записывается в специальной форме.

Рассмотрим динамическое звено (рис. 2.2):

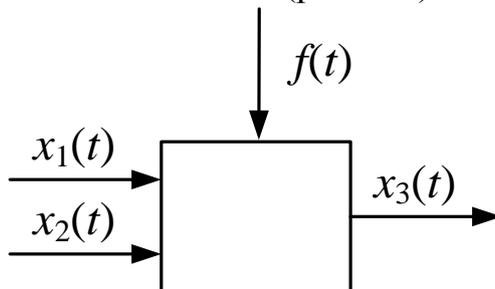


Рис. 2.2. Динамическое звено

При этом в левой части уравнения записываются все внутренние координаты системы управления со своими дифференциальными операторами; справа – внешние воздействия для системы в целом.

$$d_1(p) x_1(t) + d_2(p) x_2(t) + d_3(p) x_3(t) = k(p) f(t). \quad (2.16)$$

В ряде случаев отличие от линейности бывает столь незначительным, что даже в сравнительно большом диапазоне отклонений Δx_i можно считать систему линейной. В случае же ярко выраженной нелинейной зависимости, линеаризация будет справедлива лишь на соответствующем более узком участке отклонений Δx_i . Линеаризация может

быть совершенно недопустимой при скачкообразных зависимостях (релейные характеристики, сухое трение), такого рода зависимости называются нелинейными.

2.1.1.4 Геометрическая трактовка процедуры линейризации динамического звена

Приведем геометрическую трактовку этого способа линейризации. Изобразим графически зависимость F от x_1 при постоянных значениях всех остальных переменных (рис. 2.3).

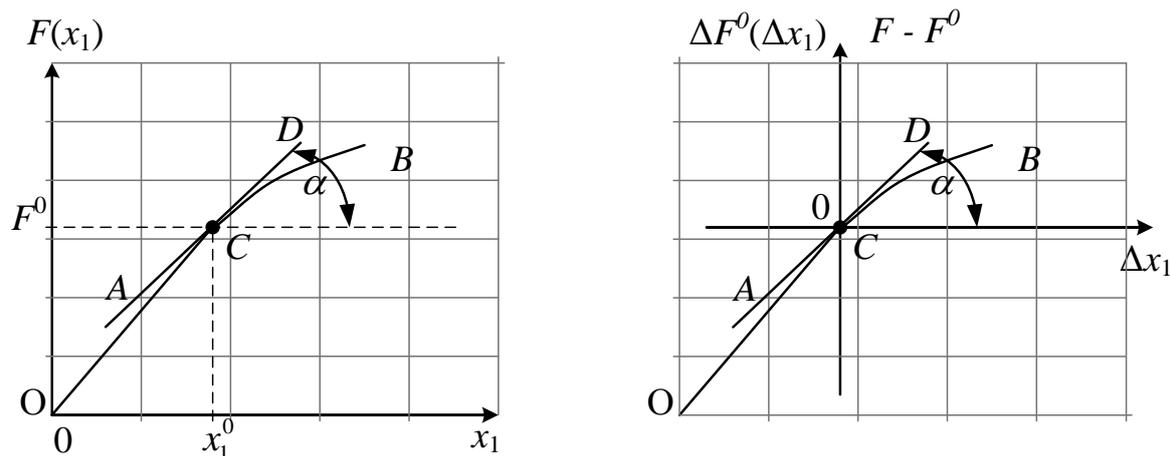


Рис. 2.3. Графическая иллюстрация процедуры линейризации статической характеристики звена

При этом:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^0 = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.17)$$

где α – угол наклона касательной в точке $C(x_1^0; F^0)$, для которой

$$x_1 = x_1^0; F^0 = F/x_1^0. \quad (2.18)$$

Замена $x_1 = x_1^0 + \Delta x_1$ на Δx_1 и вычитание члена F^0 , производящиеся раньше аналитически, здесь эквивалентны переносу начала координат в точку C .

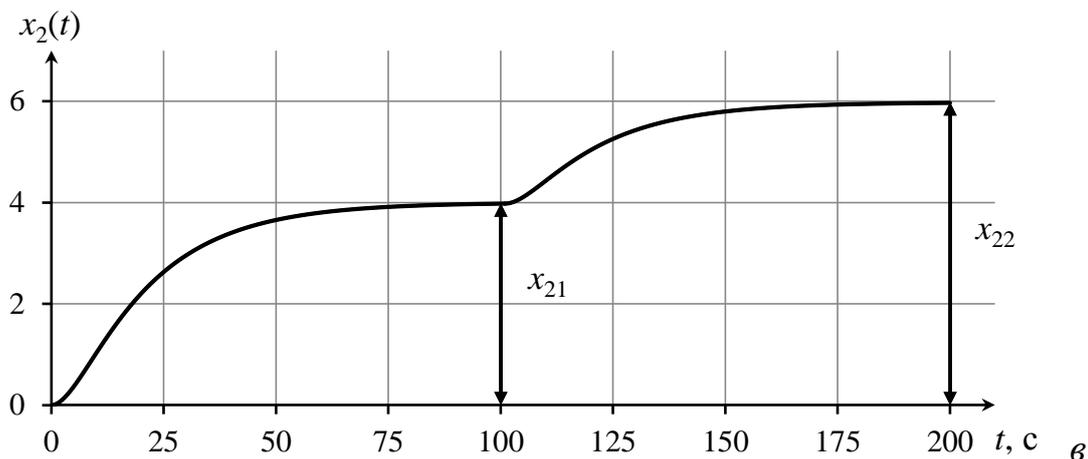
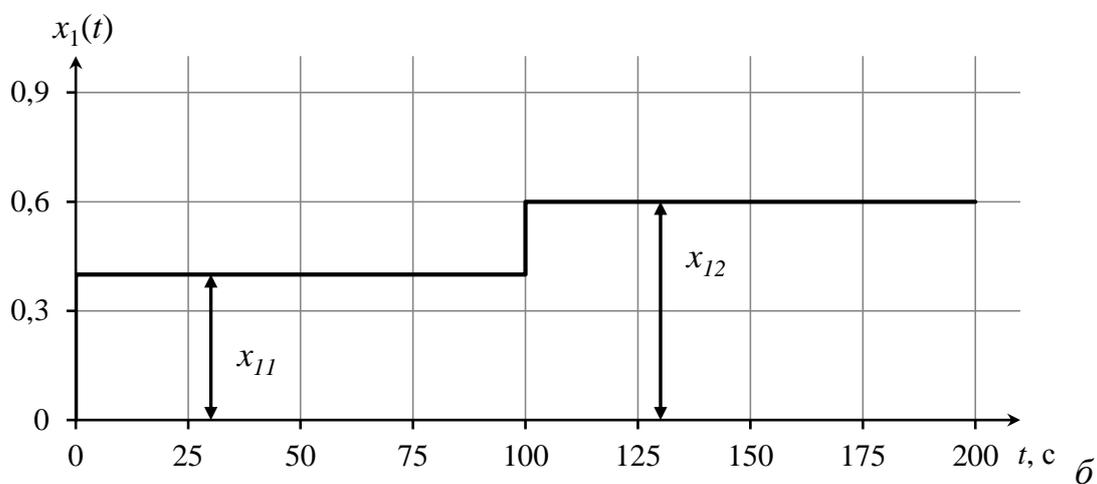
Первый член линейного уравнения (2.6) согласно (2.17) означает, что линейризация уравнения геометрически может трактоваться как замена исходной кривой OCB отрезком ее касательной ACD в точке C , соответствующей заданному режиму, и параллельный перенос начала координат в эту точку. Эта замена тем точнее, чем меньше величина отклонения Δx_1 при исследовании динамических процессов.

Из приведенной геометрической иллюстрации следует следующее: если все криволинейные зависимости, используемые при составлении уравнений звеньев, заменяются прямолинейными (касательными в со-

ответствующих рабочих точках), то уравнения звеньев будут линейными.

2.1.1.5 Графическая иллюстрация снятия статической характеристики звена

Статическая характеристика звена – зависимость установившихся значений выходной координаты от постоянных значений входной координаты ($x_1' = x_2' = x_2'' = 0$ – условие стационарности). Иллюстрация экспериментального снятия статической характеристики звена приведена на рис. 2.4.



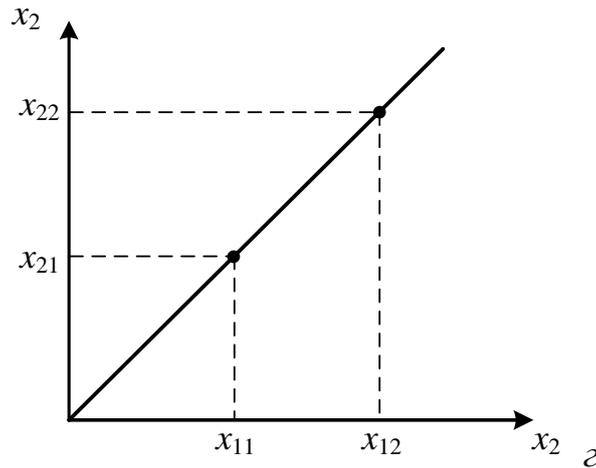


Рис. 2.4. Иллюстрация экспериментального снятия статической характеристики звена:

a – исследуемое звено; *б* – входные воздействия; *в* – реакции звена на входные воздействия; *г* – статическая характеристика звена

2.1.2 Составление дифференциального уравнения САУ по дифференциальным уравнениям звеньев

На рис. 2.5 задана структурная схема системы автоматического управления.

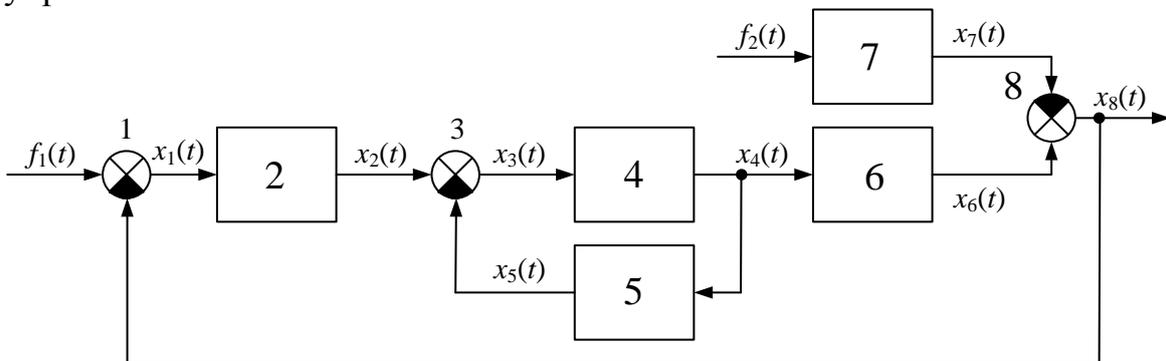


Рис. 2.5. Структурная схема системы автоматического управления

Структурная схема САУ показывает, из каких динамических звеньев она состоит и как эти звенья между собой взаимосвязаны, образуя систему.

Ставится задача составления дифференциального уравнения замкнутой системы относительно выбранной выходной координаты, что эквивалентно преобразованию структурной схемы САУ (рис. 2.5) к виду, представленному на рис.2.6.

$$\Delta x_k = \Delta_k, \quad (2.20)$$

где Δ – главный определитель системы (2.19), составленный из дифференциальных операторов $d_{ij}(p)$ левой части уравнений системы (2.19)

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_{11}(p) & d_{12}(p) & \dots & d_{1k}(p) & \dots & d_{1n}(p) \\ d_{21}(p) & d_{22}(p) & \dots & d_{2k}(p) & \dots & d_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(p) & d_{n2}(p) & \dots & d_{nk}(p) & \dots & d_{nn}(p) \end{vmatrix} = D(p), \quad (2.21)$$

где $D(p)$ – характеристический полином САУ, Δ_k – присоединенный определитель, полученный из главного определителя путем замены его k -го столбца правой частью системы уравнений (2.19) (k – индекс интересующей нас координаты, относительно которой мы хотим записать уравнение САУ).

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} d_{11}(p) & d_{12}(p) & \dots & k_{11}(p)f_1(t) + k_{12}(p)f_2(t) + \dots + k_{1m}(p)f_m(t) & \dots & d_{1n}(p) \\ d_{21}(p) & d_{22}(p) & \dots & k_{21}(p)f_1(t) + k_{22}(p)f_2(t) + \dots + k_{2m}(p)f_m(t) & \dots & d_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(p) & d_{n2}(p) & \dots & k_{n1}(p)f_1(t) + k_{n2}(p)f_2(t) + \dots + k_{nm}(p)f_m(t) & \dots & d_{nn}(p) \end{vmatrix}. \quad (2.22)$$

Уравнение САУ относительно сигнала рассогласования, полученное с помощью теоремы Крамера, принимает вид:

$$\Delta D(p)\varepsilon(t) = \overbrace{Q(p)g(t) + N(p)f(t)}^{\Delta_k}. \quad (2.23)$$

Для линейного уравнения с постоянными коэффициентами выполняется принцип суперпозиции. Он заключается в том, что каждая входная величина создает составляющую выходной величины (искомой функции времени) независимо как от наличия и характера изменения других входных величин, так и от начальных условий.

Решение уравнения (2.23) находится как сумма трех составляющих:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_g(t) + \varepsilon_f(t) + \varepsilon_{св}(t), \quad (2.24)$$

где $\varepsilon_g(t)$ является решением неоднородного уравнения

$$D(p)\varepsilon(t) = Q(p)g(t) \quad (2.25)$$

при нулевых начальных условиях.

$\varepsilon_f(t)$ является решением неоднородного уравнения

$$D(p)\varepsilon(t) = N(p)f(t) \quad (2.26)$$

при нулевых начальных условиях.

$\varepsilon_{св}(t)$ является решением однородного уравнения

$$D(p)\varepsilon(t) = 0 \quad (2.27)$$

при заданных начальных условиях:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon^0; \dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}^0; \dots; \varepsilon^{(n-1)}(0) = \varepsilon^{(n-1)0}. \quad (2.28)$$

Последняя составляющая $\varepsilon_{св}(t)$ называется свободной составляющей и определяется значениями корней характеристического уравнения

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (2.29)$$

составленному по характеристическому полиному САУ $D(p)$ заменой p на λ ($\lambda = \alpha \pm j\beta$ – комплексная величина).

Общее решение однородного уравнения представляет собой сумму частных решений, которые зависят от корней характеристического уравнения (2.29):

- каждому вещественному корню α_i соответствует частное решение вида

$$A_i e^{\alpha_i t} \text{ (в частом случае } \alpha_i \text{ может быть равно нулю);} \quad (2.30)$$

- каждому вещественному корню α_j кратности ν соответствует ν частных решений

$$e^{\alpha_j t} (A_j + A_{j+1}t + \dots + A_{j+(\nu-1)}t^{(\nu-1)}); \quad (2.31)$$

- каждой паре сопряженных комплексных корней $\alpha_l + j\beta_l$ и $\alpha_l - j\beta_l$ соответствует два частных решения:

$$e^{\alpha_l t} (A_l \sin \beta_l t + B_l \cos \beta_l t) = C_l e^{\alpha_l t} \sin(\beta_l t + \psi_l) \quad (2.32)$$

(в частном случае α_l может быть равно нулю).

Постоянные интегрирования, которые входят в частные решения и обозначены буквами A , B , C и ψ , определяют из системы алгебраических уравнений, составленных на основании начальных условий.

Итак, замкнутая система автоматического управления относительно сигнала рассогласования описывается дифференциальным уравнением (2.23), где $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ – характеристический полином, полученный из основного определителя исходной системы уравнений, при этом a_0, a_1, \dots, a_n в линеаризованной системе представляют собой постоянные коэффициенты.

Полином $Q(p)$ той же степени, что и $D(p)$ определяет влияние задающего воздействия $g(t)$ на характер изменения ошибки $\varepsilon(t)$.

$$Q(p) = c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_{n-1} p + c_n, \quad (2.33)$$

где c_0, c_1, \dots, c_n – постоянные коэффициенты.

Под задающим воздействием $g(t)$ понимается требуемый закон изменения управляемой величины $x(t)$. Поскольку после процедуры линеаризации мы записываем уравнения в приращениях, выражение $Q(p)g(t)$

не равно нулю в случае программного управления и в следящих системах. В системах автоматической стабилизации $g(t) = \text{const}$, поэтому всегда можно выбрать начало отсчета так, чтобы $\Delta g = 0$, $g(t) = 0$, что упрощает выражение (2.23) к виду:

$$D(p) \varepsilon(t) = N(p) f(t). \quad (2.34)$$

Полином $N(p)$ определяет влияние возмущающего воздействия $f(t)$ на характер изменения ошибки $\varepsilon(t)$. Может быть и несколько возмущений, тогда будут $N_1(p)$, $N_2(p)$ и т. д., а уравнение (2.34) запишется в виде $D(p) \varepsilon(t) = N_1(p) f_1(t) + N_2(p) f_2(t) + \dots$

Если для какого-либо возмущающего воздействия $f_j(t) \neq 0$ полином $N_j(p) = 0$, то говорят, что система является инвариантной относительно этого возмущения.

Равным образом в системах программного управления и в следящих системах равенство $Q(p) = 0$ означает, что система является инвариантной относительно задающего воздействия.

При решении системы дифференциальных уравнений (2.19) относительно управляемой величины $x(t)$ уравнение замкнутой САУ принимает вид:

$$D(p) x(t) = R(p) g(t) + K(p) f(t), \quad (2.35)$$

где $R(p) = D(p) - Q(p)$ – степень этого полинома $l \leq n$.

Как уже говорилось выше, в системах автоматической стабилизации $g(t) = \text{const}$, и, выбрав начало отсчета так, что $\Delta g(t) = 0$, получим:

$$D(p) x(t) = K(p) f(t), \quad (2.36)$$

где $K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m$ – полином, определяющий влияние возмущающего воздействия $f(t)$ на характер изменения управляемой величины – $x(t)$.

При заданных функциях времени $g(t)$ и $f(t)$ в правых частях уравнений (2.23), (2.34), (2.35) и (2.36) эти уравнения могут быть решены (проинтегрированы) относительно искомых функций времени, т. е. может быть найдено изменение ошибки управления во времени $\varepsilon(t)$ из (2.23) и (2.34) и изменение выходной координаты $x(t)$ из (2.35) и (2.36).

2.2 Передаточные функции системы автоматического управления

2.2.1 Передаточная функция динамического звена

Понятие передаточной функции динамического звена связано с операционным методом решения дифференциальных уравнений, основанном на применении преобразования Лапласа-Карсона.

Преобразованием Лапласа называют соотношение:

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad (2.37)$$

где $x(t)$ – оригинал; $X(s)$ – изображение, ставящее функции $x(t)$ вещественного переменного t в соответствие функцию $X(s)$ комплексной переменной s ($s = \sigma + j\omega$).

Преобразование Карсона имеет вид:

$$K\{x(t)\} = sL\{x(t)\} = s \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt. \quad (2.38)$$

Примеры преобразований: $K\{1(t)\} = 1$; $L\{1(t)\} = \frac{1}{s}$; $L\{\delta(t)\} = 1$.

Обратное преобразование Лапласа:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\omega}^{\sigma_0 + j\omega} X(s)e^{st} ds. \quad (2.39)$$

Теорема смещения:

$$\begin{aligned} L\{x(t - \tau)\} &= e^{-s\tau} L\{x(t)\} = e^{-s\tau} X(s), \\ x(t - \tau) &\doteq e^{-s\tau} X(s). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Связь конечного значения функции с изображением:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s), \\ x(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Связь начального значения функции с изображением:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} x(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s), \\ x(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Изображение производных функций:

$$\begin{cases} L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0); \\ \dots \\ L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \dots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0). \end{cases} \quad (2.43)$$

Рассмотрим пример. Пусть динамическое звено (рис 2.7) описывается дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^4 x(t)}{dt^4} + a_1 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_3 \frac{dx(t)}{dt} + a_4 x(t) &= \\ = b_0 \frac{d^3 f(t)}{dt^3} + b_1 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + b_2 \frac{df(t)}{dt} + b_3 f(t). \end{aligned} \quad (2.44)$$



Рис. 2.7. Динамическое звено

Найдем изображение Лапласа уравнения (2.44). Для этого последовательно определим изображения левой и правой частей уравнения (2.44):

$$\begin{aligned}
 L\{p^4 x(t)\} &= s^4 X(s) - \{s^3 x(0) + s^2 x'(0) + s x''(0) + x'''(0)\}, \\
 L\{p^3 x(t)\} &= s^3 X(s) - \{s^2 x(0) + s x'(0) + x''(0)\}, \\
 L\{p^2 x(t)\} &= s^2 X(s) - \{s x(0) + x'(0)\}, \\
 L\{p x(t)\} &= s X(s) - x(0), \\
 L\{p^3 f(t)\} &= s^3 F(s) - \{s^2 f(0) + s f'(0) + f''(0)\}, \\
 L\{p^2 f(t)\} &= s^2 F(s) - \{s f(0) + f'(0)\}, \\
 L\{p f(t)\} &= s F(s) - f(0).
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

С учетом (2.45) изображение уравнения (2.44) при нулевых начальных условиях принимает вид:

$$\begin{aligned}
 a_0 s^4 X(s) + a_1 s^3 X(s) + a_2 s^2 X(s) + a_3 s X(s) + a_4 X(s) &= \\
 = b_0 s^3 F(s) + b_1 s^2 F(s) + b_2 s F(s) + b_3 F(s) &= \\
 = (a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4) X(s) = (b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3) F(s).
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Тогда отношение изображения выходной координаты к изображению входной координаты рассматриваемого звена при нулевых начальных условиях примет вид:

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}. \tag{2.47}$$

В общем виде передаточная функция динамического звена запишется:

$$W(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \tag{2.48}$$

Таким образом, передаточная функция динамического звена есть отношение изображения (Лапласа-Карсона) выходной координаты звена к соответствующему изображению входной координаты звена при нулевых начальных условиях.

При этом изображение выходной координаты динамического звена (рис. 2.8) равно $X(s) = W(s) F(s)$, где $W(s)$ – передаточная функция динамического звена, а $F(s)$ – изображение входного воздействия.

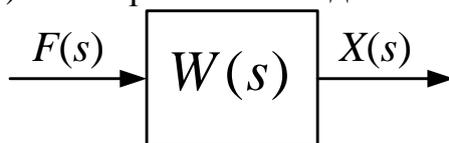


Рис. 2.8. Динамическое звено

В теории автоматического управления передаточные функции элементов и систем являются их важнейшими характеристиками, определяющими динамические свойства этих элементов и систем.

2.2.1.1 Свойства передаточной функции динамического звена (системы)

1. Передаточная функция линейного звена (системы) с постоянными параметрами является дробно рациональной функцией переменной преобразования Лапласа-Карсона комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$.

2. Все коэффициенты $b_0 \div b_m$ и $a_0 \div a_n$ полиномов числителя и знаменателя передаточной функции вещественны, т. к. они являются функциями от параметров САУ, которые могут быть только вещественными.

3. Невещественные нули и полюсы передаточной функции могут быть только комплексно-сопряженными.

4. Количество передаточных функций, которыми описывается звено с одной выходной координатой, равно числу его входов. Если звено (система) имеет несколько входов, то оно описывается количеством передаточных функций, равным количеству входов (рис. 2.9); при определении передаточной функции относительно какой-либо одной входной величины другие входные величины условно полагают равным нулю (согласно принципу суперпозиции).

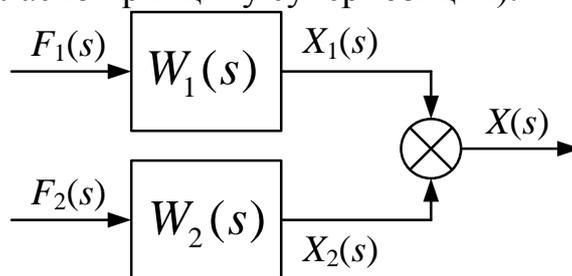


Рис. 2.9. Динамическое звено с двумя входными и одной выходной координатами

$$W_1(s) = \frac{X_1(s)}{F_1(s)} = \frac{X(s)}{F_1(s)} \Big|_{F_2(s)=0} ;$$

$$W_2(s) = \frac{X_2(s)}{F_2(s)} = \frac{X(s)}{F_2(s)} \Big|_{F_1(s)=0} ; \quad (2.49)$$

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) = W_1(s) F_1(s) + W_2(s) F_2(s).$$

В установившемся режиме передаточная функция линейного динамического звена трансформируется в коэффициент передачи $x = Kf$ (рис. 2.10).

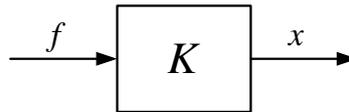


Рис. 2.10. Безынерционное динамическое звено

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_0 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \Big|_{s=0} = \frac{b_m}{a_n} = K \quad (2.50)$$

Передаточная функция звена (системы) есть изображение по Карсону выходной координаты звена (системы) при ступенчатом единичном воздействии на звено (систему): $K\{1(t)\}=1$; $X(s) = W(s) \cdot 1$ (рис. 2.11).

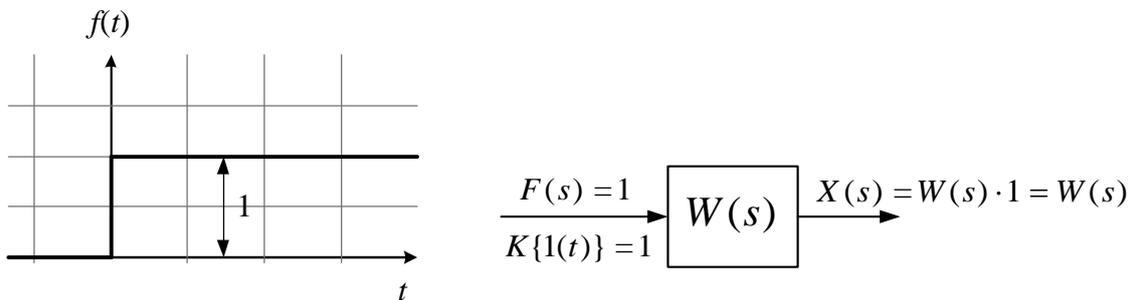


Рис. 2.11. Изображение реакции динамического звена на единичное ступенчатое воздействие

Передаточная функция звена (системы) есть изображение по Лапласу выходной координаты при идеальном импульсном воздействии $\delta(t)$ на входе: $L\{\delta(t)\} = 1$; $X(s) = W(s) \cdot 1$ (рис. 2.12).

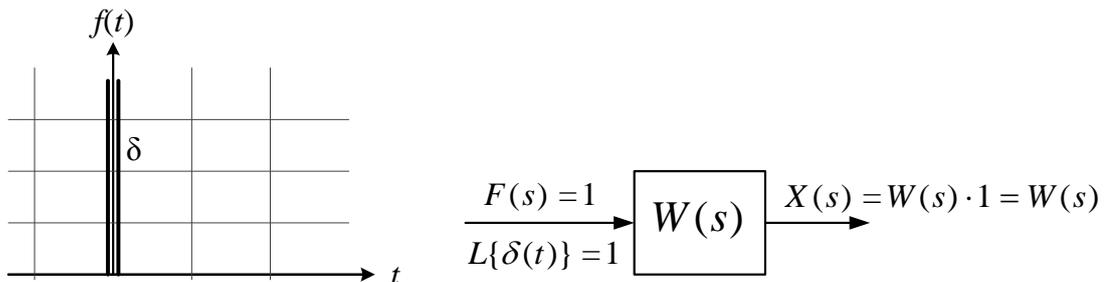


Рис. 2.12. Изображение реакции динамического звена на идеальное импульсное воздействие

2.2.2 Преобразование структурных схем систем автоматического управления

В большинстве случаев значительно быстрее, проще и нагляднее математическое описание САУ составлять не по уравнениям звеньев, а при помощи аппарата передаточных функций САУ.

Структурная схема САУ показывает, из каких динамических звеньев состоит САУ и как они взаимосвязаны между собой. На структурных схемах звенья условно изображаются прямоугольниками, внутри которых записываются их передаточные функции (рис. 2.13).

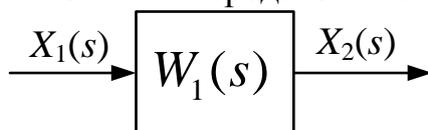


Рис. 2.13. Условное обозначение динамического звена

Соединения между звеньями выполняются прямыми линиями со стрелками, указывающими направление передачи воздействий. Внешние воздействия показываются также стрелками. Приведем пример структурной схемы (рис. 2.14):

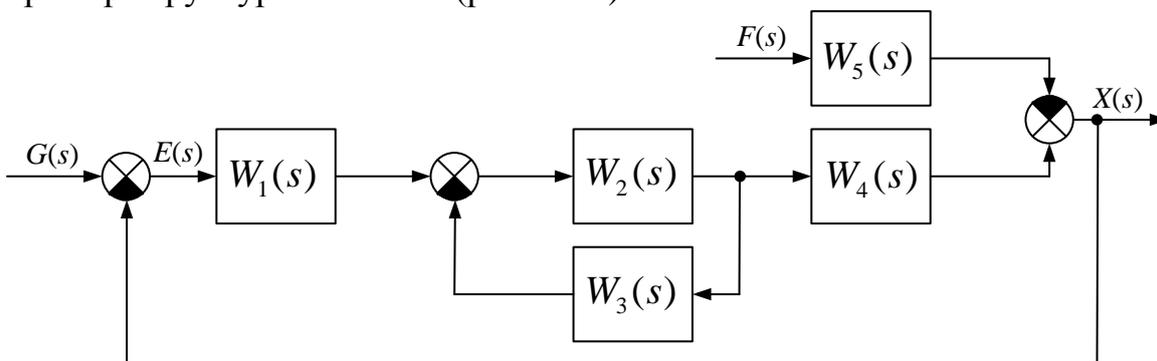


Рис. 2.14. Пример структурной схемы соединения динамических звеньев между собой

При таком начертании структурная схема САУ представляет собой графическое изображение системы дифференциальных уравнений, описывающих работу САУ.

Графическое изображение уравнений звеньев предпочтительнее обычной математической записи этих уравнений, так как позволяет весьма просто и по единообразным правилам производить «свертывание» этих уравнений.

Структурную схему любой сложности путем последовательных преобразований можно привести к эквивалентному динамическому звену. Эквивалентное звено тождественно исходной схеме, если оно определяет прежнюю зависимость выходных координат от входных.

Преобразование структурной схемы должно осуществляться на основании определенных правил.

1. Замена типовых соединений звеньев эквивалентным звеном.

Прежде всего, каждое имеющееся в схеме типовое соединение звеньев (последовательное, параллельное и звено, охваченное обратной связью) следует заменить эквивалентным звеном.

- Последовательное соединение звеньев.

Последовательным соединением называется соединение, при котором вход каждого последующего звена соединен с выходом предыдущего (рис. 2.15).

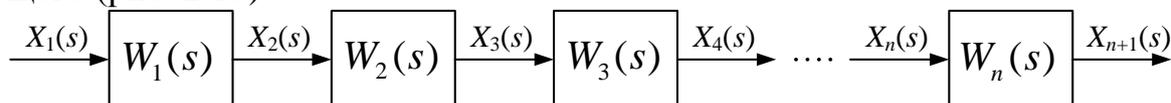


Рис. 2.15. Последовательное соединение звеньев

Запишем:

$$X_2(s) = W_1 X_1(s),$$

$$X_3(s) = W_2 X_2(s),$$

.....

$$X_{n+1}(s) = W_n X_n(s).$$

Исключив промежуточные координаты, получим:

$$X_{n+1}(s) = [W_1(s)W_2(s) \dots W_n(s)] X_1(s) = W(s)X_1(s).$$

Передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев, образующих это соединение (рис. 2.16):

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s).$$

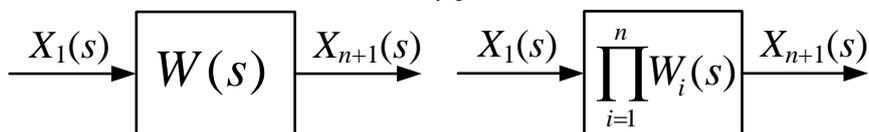


Рис. 2.16. Передаточная функция последовательного соединения звеньев

- Параллельное соединение звеньев.

Параллельным называется, соединение, при котором входная величина всех звеньев одинакова, а выходные величины всех звеньев суммируются (рис. 2.17).

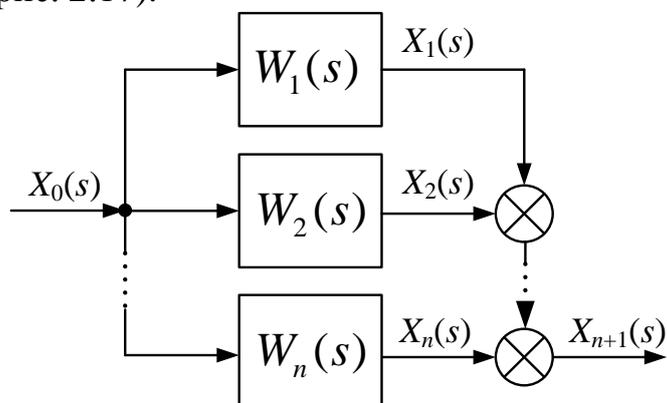


Рис. 2.17. Параллельное соединение звеньев

Тогда:

$$X_1(s) = W_1(s)X_0(s),$$

$$X_2(s) = W_2(s)X_0(s),$$

.....

$$X_{n+1}(s) = X_1(s) + X_2(s) + \dots + X_n(s) = W_1(s)X_0(s) + W_2(s)X_0(s) + \dots + W_n(s)X_0(s) = [W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_n(s)]X_0(s) = W(s)X_0(s).$$

Передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев, образующих это соединение (рис. 2.18):

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s).$$

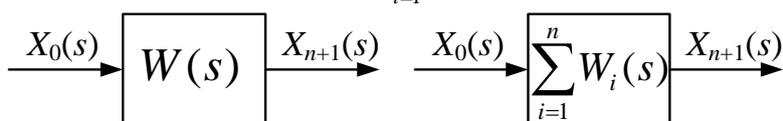


Рис. 2.18. Передаточная функция параллельного соединения звеньев

• Звено, охваченное обратной связью (обратное соединение; встречно-параллельное соединение) (рис. 2.19, 2.20).

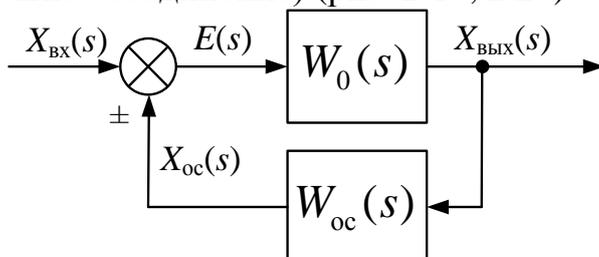


Рис. 2.19. Звено, охваченное обратной связью

$$\begin{aligned}
 X_{\text{вых}}(s) &= W_o(s)E(s); \\
 X_{\text{вых}}(s) &= W_o(s)[X_{\text{вх}}(s) \pm X_{\text{ос}}(s)]; \\
 X_{\text{ос}} &= W_{\text{ос}}(s)X_{\text{вых}}(s); \\
 X_{\text{вых}}(s) &= W_o(s)[X_{\text{вх}}(s) \pm W_{\text{ос}}(s)X_{\text{вых}}(s)]; \\
 X_{\text{вых}}(s) &= \frac{W_o(s)}{1 \mp W_o(s)W_{\text{ос}}(s)} X_{\text{вх}}(s); \\
 W(s) &= \frac{X_{\text{вых}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)} = \frac{W_o(s)}{1 \mp W_o(s)W_{\text{ос}}(s)},
 \end{aligned}$$

где $W_o(s)$ – передаточная функция звена прямой цепи, $W_{\text{ос}}(s)$ – передаточная функция звена обратной связи.

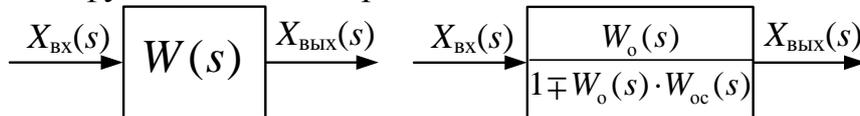


Рис. 2.20. Передаточная функция звена, охваченного обратной связью

При положительной обратной связи знаменатель равен $1 - W_o(s)W_{\text{ос}}(s)$, при отрицательной он равен $(1 + W_o(s)W_{\text{ос}}(s))$.

После замены типовых соединений звеньев эквивалентными звеньями (по приведенным правилам) выполняют перенос точек разветвления и сумматоров, чтобы в преобразованной таким образом схеме образовались новые типовые соединения звеньев. Эти соединения опять должны быть заменены эквивалентными звеньями, затем вновь может потребоваться перенос точек разветвления и сумматоров и т. д. Для предупреждения ошибок следует вычерчивать структурную схему после каждого этапа преобразований и указывать на ней значения или символы вводимых эквивалентных звеньев.

2. Перенос точки разветвления через звено.

- По направлению передачи сигналов.

Если точка разветвления переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить звенья с обратными передаточными функциями всех звеньев, встречающихся на пути между новой и прежней точкой разветвления (рис. 2.21).

В этом случае координата $X_3(s)$, определяемая из выражения $X_3(s) = X_0(s) [W_1(s) W_3(s)]$, после преобразования будет вычисляться:

$$X_3(s) = X_0(s) [W_1(s)W_2(s) \frac{1}{W_2(s)} W_3(s)].$$

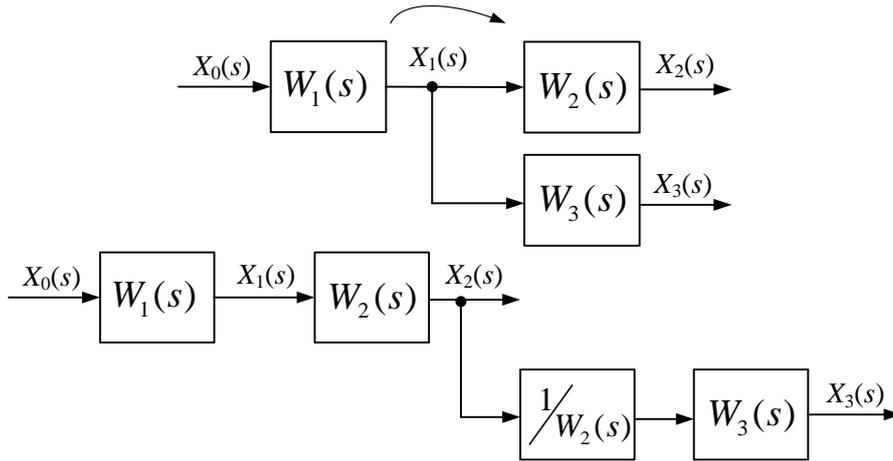


Рис. 2.21. Иллюстрация переноса точки разветвления через звено по направлению передачи сигналов

- Против направления передачи сигналов.

Если точка разветвления переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить звенья с передаточными функциями всех звеньев, встречающихся на пути между прежней и новой точками разветвления (рис. 2.22).

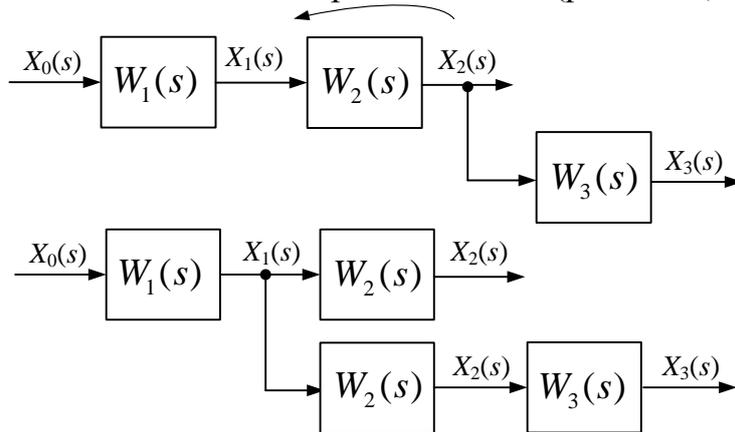


Рис. 2.22. Иллюстрация переноса точки разветвления через звено против направления передачи сигналов

В этом случае координата $X_3(s)$ определяемая из выражения $X_3(s) = X_0(s) [W_1(s) W_2(s) W_3(s)]$, после преобразования будет вычисляться также по выражению:

$$X_3(s) = X_0(s) [W_1(s)W_2(s)W_3(s)].$$

3. Перенос сумматора через звено.

- По направлению передачи сигналов.

Если точка суммирования переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить

элементы с передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между прежней и новой точками суммирования (рис. 2.23).

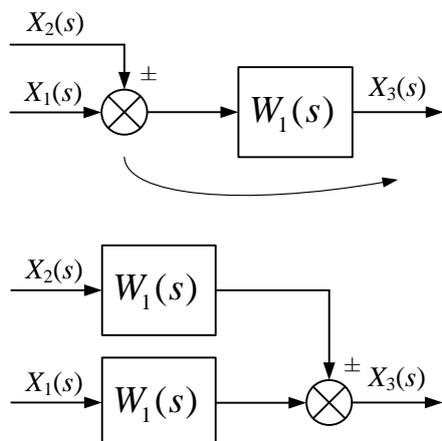


Рис. 2.23. Иллюстрация переноса сумматора через звено по направлению передачи сигналов

В этом случае координата $X_3(s)$, определяемая из выражения $X_3(s) = W_1(s) [X_1(s) \pm X_2(s)]$, после преобразования будет вычисляться также по выражению:

$$X_3(s) = W_1(s)X_1(s) \pm W_1(s)X_2(s) = W_1(s) [X_1(s) \pm X_2(s)].$$

- Против направления передачи сигналов.

Если точка суммирования переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с обратными передаточными функциями всех элементов, встречающихся между новой и прежней точками суммирования (рис. 2.24).

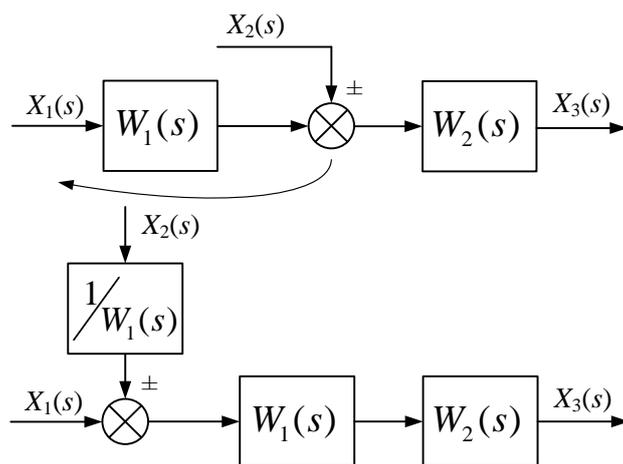


Рис. 2.24. Иллюстрация переноса сумматора через звено против направления передачи сигналов

В этом случае координата $X_3(s)$, определяемая из выражения $X_3(s) = [X_1(s) W_1(s) \pm X_2(s)] W_2(s)$, после преобразования будет вычисляться также по выражению:

$$X_3(s) = \left[X_1(s) \pm \frac{X_2(s)}{W_1(s)} \right] W_1(s) W_2(s) = [X_1(s) W_1(s) \pm X_2(s)] W_2(s).$$

4. Перестановка сумматора.

От перемены слагаемых сумма не меняется (рис. 2.25).

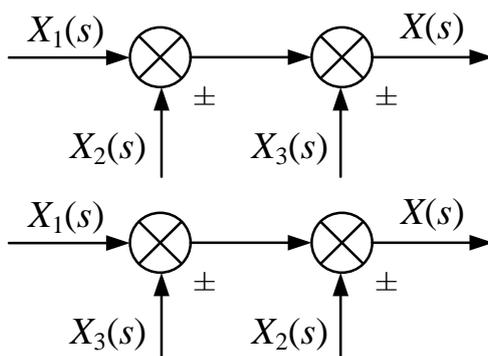


Рис. 2.25. Иллюстрация перестановки сумматора

5. Перенос точки разветвления через сумматор.

- По направлению передачи сигналов (рис. 2.26).

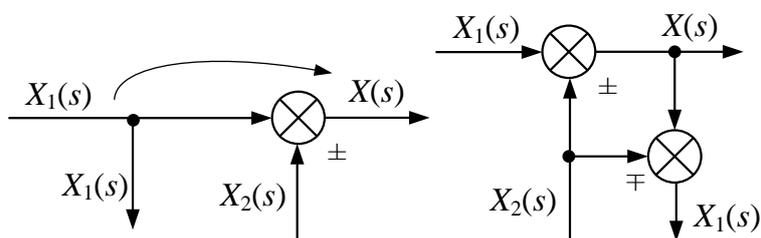


Рис. 2.26. Иллюстрация переноса точки разветвления через сумматор по направлению передачи сигналов

- Против направления передачи сигналов (рис. 2.27).

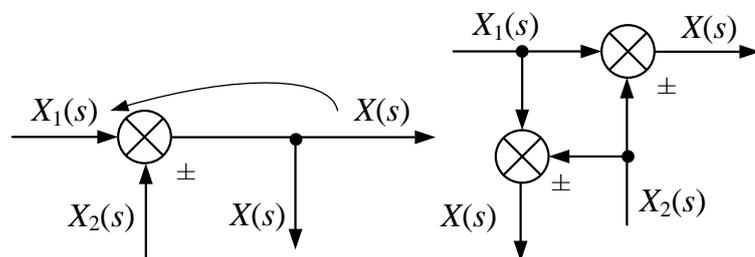


Рис. 2.27. Иллюстрация переноса точки разветвления через сумматор против направления передачи сигналов

6. Перенос обратной связи через сумматор.

- По направлению передачи сигналов (рис. 2.28).

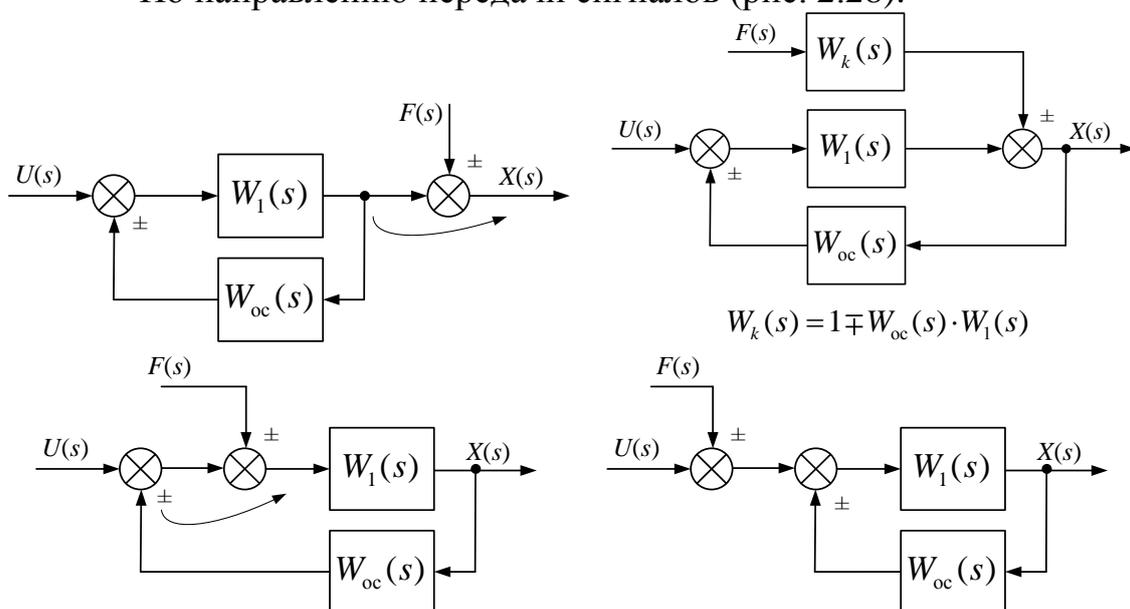


Рис. 2.28. Иллюстрация переноса обратной связи через сумматор по направлению передачи сигналов

- Против направления передачи сигналов (рис. 2.29).

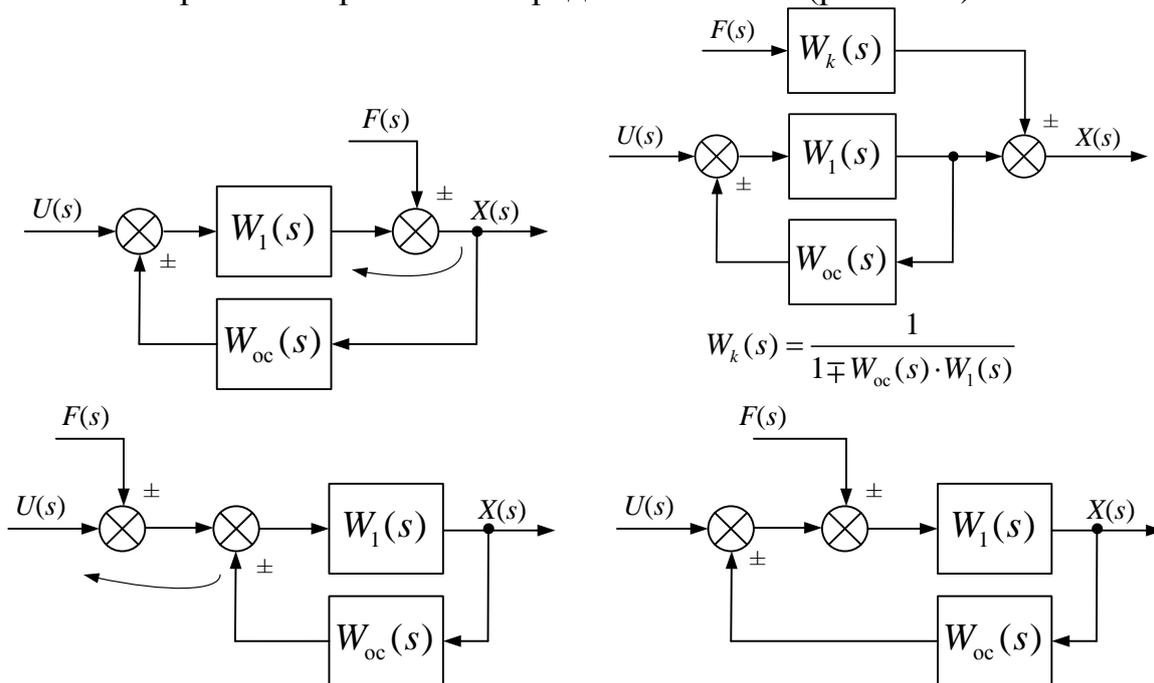


Рис. 2.29. Иллюстрация переноса обратной связи через сумматор против направления передачи сигналов

7. Перенос обратной связи через звено.

- По направлению передачи сигналов (рис. 2.30).

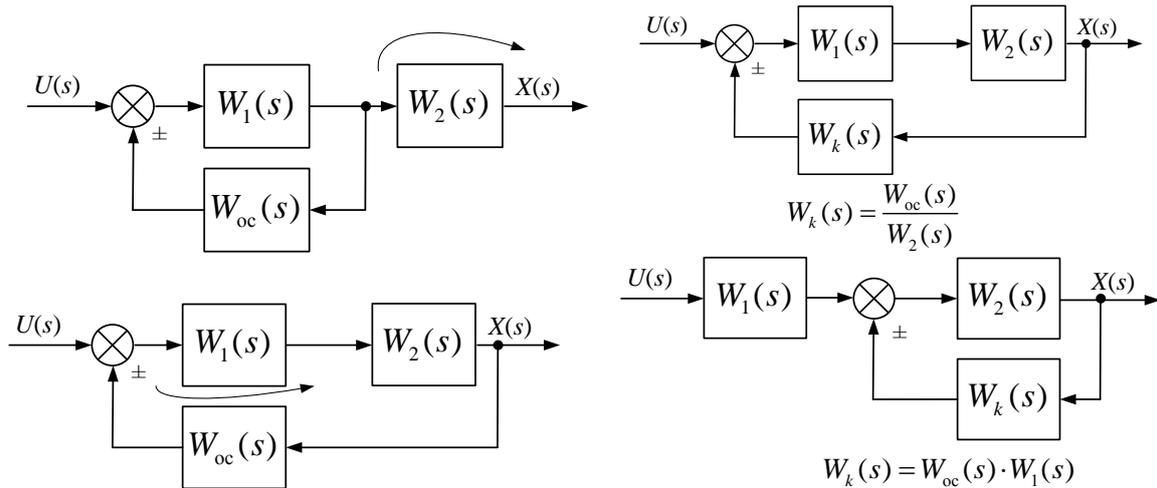


Рис. 2.30. Иллюстрация переноса обратной связи через звено по направлению передачи сигналов

- Против направления передачи сигналов (рис. 2.31).

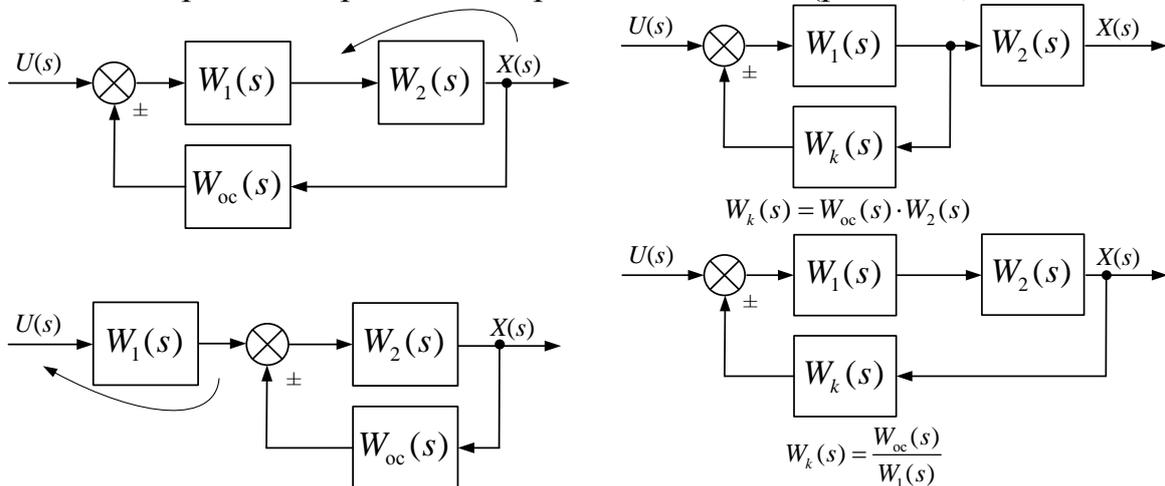


Рис. 2.31. Иллюстрация переноса обратной связи через звено против направления передачи сигналов

Следует заметить, что структурную схему можно рассматривать как один из видов направленного графа. Рассматривая структурную схему как граф, узлами (вершинами) считают все воздействия – внешние, внутренние и выходное, т. е. регулируемую величину; ветвями (дугами) – динамические звенья, а передаточными функциями определяют их пропускную способность.

2.2.3 Передаточные функции систем автоматического управления по задающему и возмущающему воздействиям

САУ характеризуется несколькими передаточными функциями. При одной выходной координате их количество равно числу входных (для всей системы) воздействий (рис. 2.32).

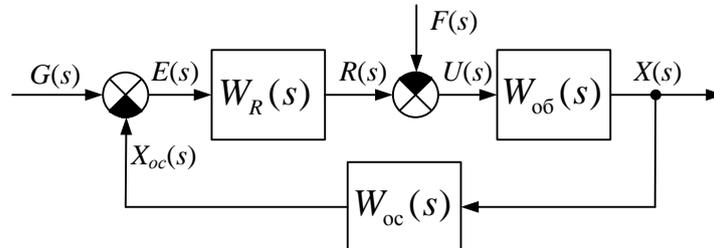


Рис. 2.32. Структурная схема замкнутой САУ

$$W_R(s) = \frac{K_R(s)}{D_R(s)}; \quad W_{об}(s) = \frac{K_{об}(s)}{D_{об}(s)}; \quad W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}(s)}{D_{oc}(s)}.$$

Если система автоматического управления имеет несколько входных воздействий (задающих и возмущающих), то при определении передаточной функции относительно какого-либо одного из этих воздействий остальные воздействия полагают равными нулю (согласно принципу суперпозиции).

Вводится понятие передаточной функции разомкнутой системы – отношение изображения $X_{oc}(s)$ – сигнала главной отрицательной обратной связи $x_{oc}(t)$ к изображению $G(s)$ – задающего воздействия $g(t)$.

$$W_{раз}(s) = \frac{X_{oc}(s)}{G(s)}.$$

При этом контур управления предполагают разомкнутым около главного сравнивающего устройства, при равенстве нулю всех внешних воздействий, кроме задающего. Для САУ, структурная схема которой представлена на рис. 2.32, передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{раз}(s) = W_R(s)W_{об}(s)W_{oc}(s).$$

Вводится также понятие передаточной функции прямого участка цепи САУ от точки приложения входного воздействия до выходной координаты при равенстве нулю остальных воздействий и разрыве главной отрицательной обратной связи:

$$f(t) \equiv 0 \rightarrow W_{np}^{gx}(s) = W_R(s)W_{об}(s).$$

$$g(t) \equiv 0 \rightarrow W_{np}^{fx}(s) = W_{об}(s).$$

2.2.3.1 Передаточная функция замкнутой САУ относительно управляемой величины по задающему воздействию

Передаточная функция замкнутой системы относительно управляемой величины $x(t)$ по задающему воздействию $g(t)$ - $W_{xg}(s)$ может быть определена на основании правил преобразования схем. При $f(t) = 0$ структурная схема САУ (рис. 2.32) принимает вид (рис. 2.33):

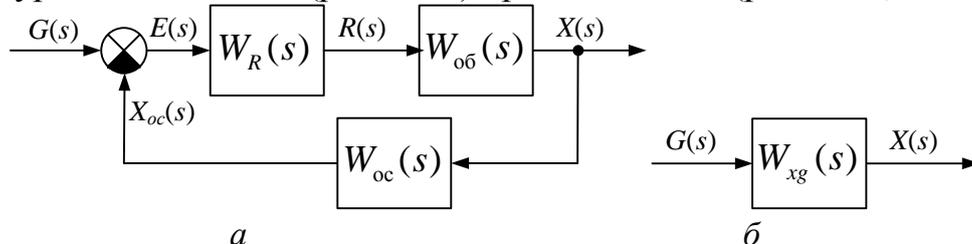


Рис. 2.33. Структурные схемы замкнутой САУ по задающему воздействию: а – исходная; б – эквивалентная

Тогда, согласно правилам преобразования структурных схем, передаточная функция замкнутой системы относительно управляемой величины $x(t)$ по задающему воздействию $g(t)$ равна:

$$W_{xg}(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W_R(s)W_{об}(s)}{1 + W_R(s)W_{об}(s)W_{oc}(s)} = \frac{W_{np}^{gx}(s)}{1 + W_{pas}(s)}$$

2.2.3.2 Передаточная функция замкнутой системы относительно управляемой величины по возмущающему воздействию

При $g(t) = 0$ структурная схема САУ (рис. 2.32) принимает вид, представленный на рис. 2.34.

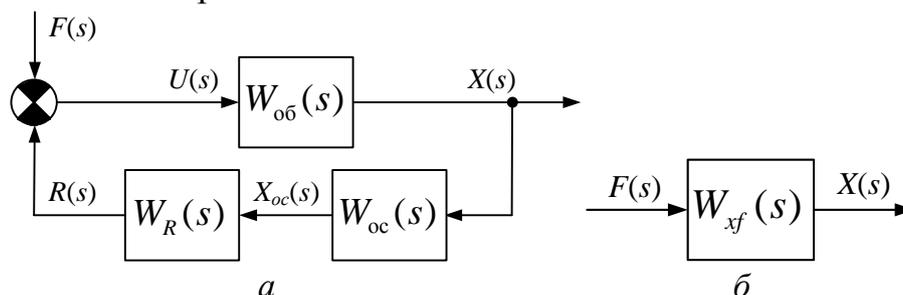


Рис. 2.34. Структурные схемы замкнутой САУ по возмущающему воздействию: а – исходная; б – эквивалентная

Как следует из структурной схемы (рис. 2.34), передаточная функция замкнутой САУ относительно управляемой величины $x(t)$ по возмущающему воздействию $f(t)$ равна:

$$W_{xf}(s) = \frac{W_{об}(s)}{1 + W_R(s)W_{об}(s)W_{oc}(s)} = \frac{W_{об}(s)}{1 + W_{раз}(s)} = \frac{W_{пр}^{fx}(s)}{1 + W_{раз}(s)}.$$

В результате исходная структурная схема САУ (рис. 2.32) преобразуется к виду (рис. 2.35).

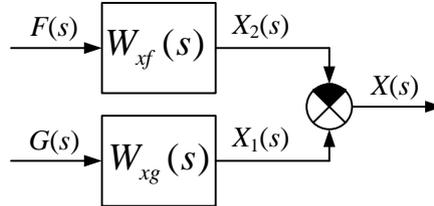


Рис. 2.35. Эквивалентная структурная схема замкнутой САУ

В итоге изображение управляемой величины будет равно:

$$\begin{aligned} X(s) &= X_1(s) - X_2(s) = W_{xg}(s)G(s) - W_{xf}(s)F(s) = \\ &= \frac{W_R(s)W_{об}(s)}{1 + W_R(s)W_{об}(s)W_{oc}(s)} G(s) - \frac{W_{об}(s)}{1 + W_R(s)W_{об}(s)W_{oc}(s)} F(s). \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция замкнутой системы относительно рассматриваемого воздействия – есть отношение передаточной функции прямого участка цепи от точки приложения воздействия до выходной координаты (при разомкнутой ГООС и равенстве нулю остальных входных воздействий) $W_{пр}^{gx}(s)$ либо $W_{пр}^{fx}(s)$ к $(1 + W_{раз}(s))$:

$$W_{зам}(s) = \frac{W_{пр}(s)}{1 + W_{раз}(s)}.$$

2.2.3.3 Передаточные функции САУ относительно сигнала рассогласования (ошибки)

Задана структурная схема САУ (рис. 2.36):

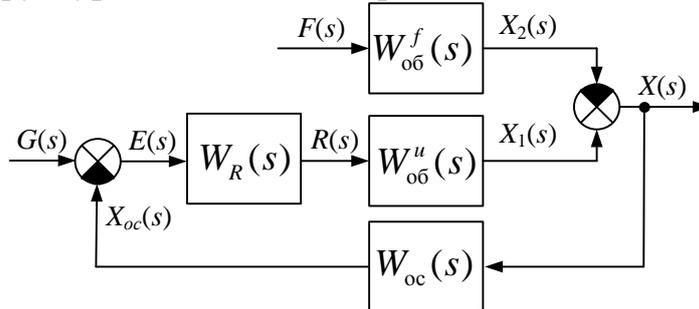


Рис. 2.36. Структурная схема САУ

Искомые передаточные функции САУ относительно сигнала рассогласования (ошибки) – $\varepsilon(t)$ по задающему и возмущающему воздей-

ствиям находятся согласно правилам преобразования структурных схем:

$$W_{\text{раз}}(s) = W_R(s)W_{\text{об}}^u(s)W_{\text{oc}}(s);$$

$$W_{\text{пр}}^{g\varepsilon}(s) = 1; \quad W_{\varepsilon g}(s) = \frac{W_{\text{пр}}^{g\varepsilon}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = \frac{1}{1 + W_R(s)W_{\text{об}}^u(s)W_{\text{oc}}(s)};$$

$$W_{\text{пр}}^{f\varepsilon}(s) = W_{\text{об}}^f(s)W_{\text{oc}}(s); \quad W_{\varepsilon f}(s) = \frac{W_{\text{пр}}^{f\varepsilon}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = \frac{W_{\text{об}}^f(s)W_{\text{oc}}(s)}{1 + W_R(s)W_{\text{об}}^u(s)W_{\text{oc}}(s)}.$$

Тогда исходную структурную схему САУ (рис. 2.36) можно представить в виде эквивалентной схемы (рис. 2.37).

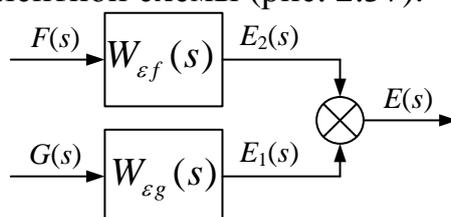


Рис. 2.37. Эквивалентная схема замкнутой САУ относительно сигнала рассогласования

В итоге изображение сигнала рассогласования (ошибки) будет равно:

$$E(s) = E_1(s) + E_2(s) = W_{\varepsilon g}(s)G(s) + W_{\varepsilon f}(s)F(s) =$$

$$= \frac{1}{1 + W_R(s)W_{\text{об}}^u(s)W_{\text{oc}}(s)}G(s) + \frac{W_{\text{об}}^f(s)W_{\text{oc}}(s)}{1 + W_R(s)W_{\text{об}}^u(s)W_{\text{oc}}(s)}F(s).$$

2.3 Временные характеристики систем автоматического управления

Другими важными характеристиками САУ (звеньев) являются переходные и весовые (импульсные переходные) функции и их графики – временные характеристики.

2.3.1 Переходная функция динамического звена

Переходная функция динамического звена $h(t)$ есть функция, описывающая реакцию звена на единичное ступенчатое воздействие $1(t)$ при нулевых начальных условиях (рис. 2.38, 2.39).

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}.$$

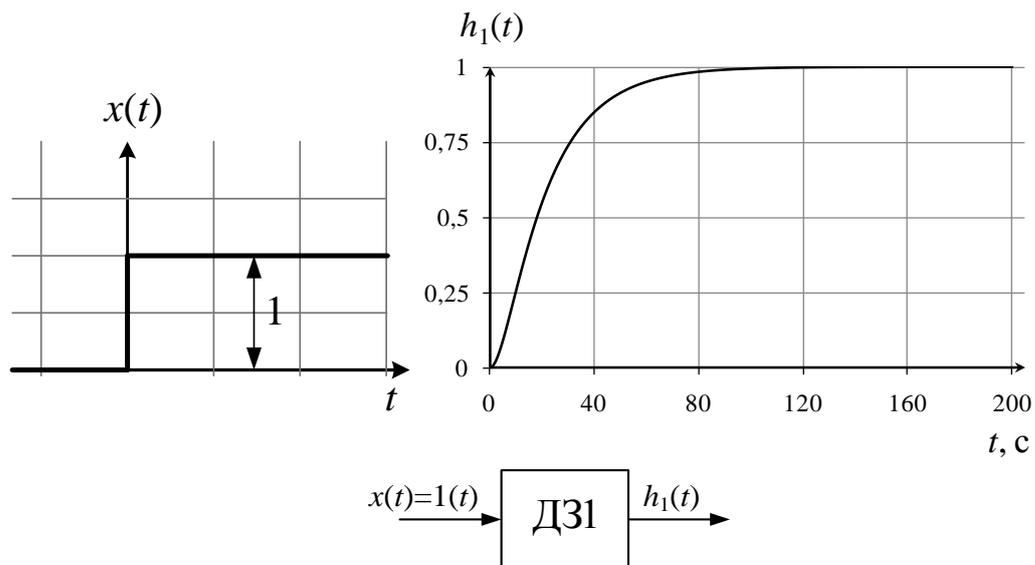


Рис. 2.38. Иллюстрация реакции ДЗ1 на единичное ступенчатое воздействие

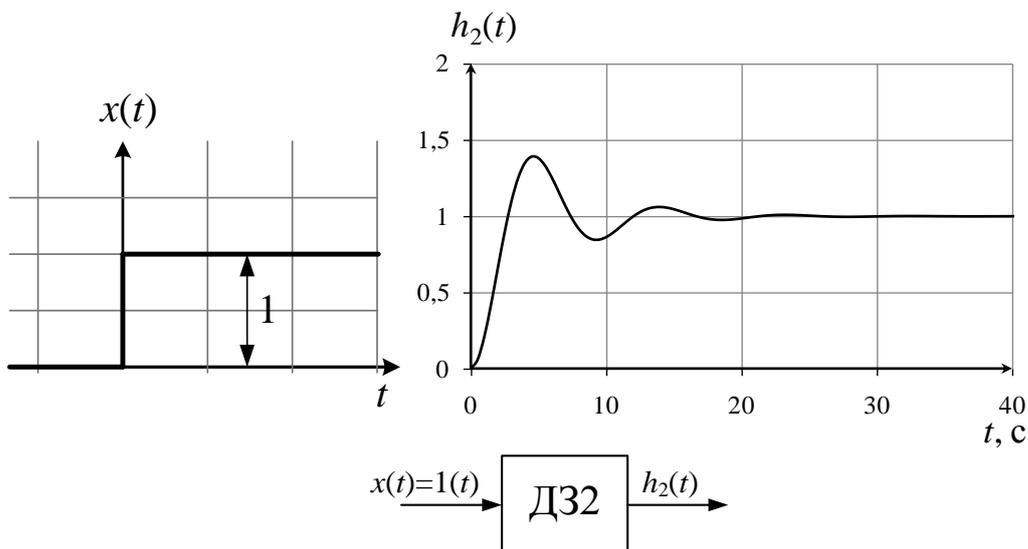


Рис. 2.39. Иллюстрация реакции ДЗ2 на единичное ступенчатое воздействие

Если известна передаточная функция динамического звена, то переходная функция определяется разложением Хевисайда.

Пусть $W(s) = K(s)/D(s)$. Если, к примеру, уравнение $D(s) = 0$ не имеет кратных корней, то переходная функция принимает вид:

$$h(t) = \frac{K(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{K(s_i)}{s_i D'(s_i)} e^{s_i t},$$

где $D'(s_i) = \left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_i}$ – первая производная от $D(s)$ при $s = s_i$; s_i – корни характеристического уравнения $D(s) = 0$.

2.3.2 Весовая функция динамического звена

Весовой или импульсной переходной функцией $w(t)$ называют функцию, описывающую реакцию динамического звена (системы) на идеальное импульсное воздействие $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях (рис. 2.40, 2.41).

Математически идеальное импульсное воздействие описывается дельта-функцией $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}; \quad \delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

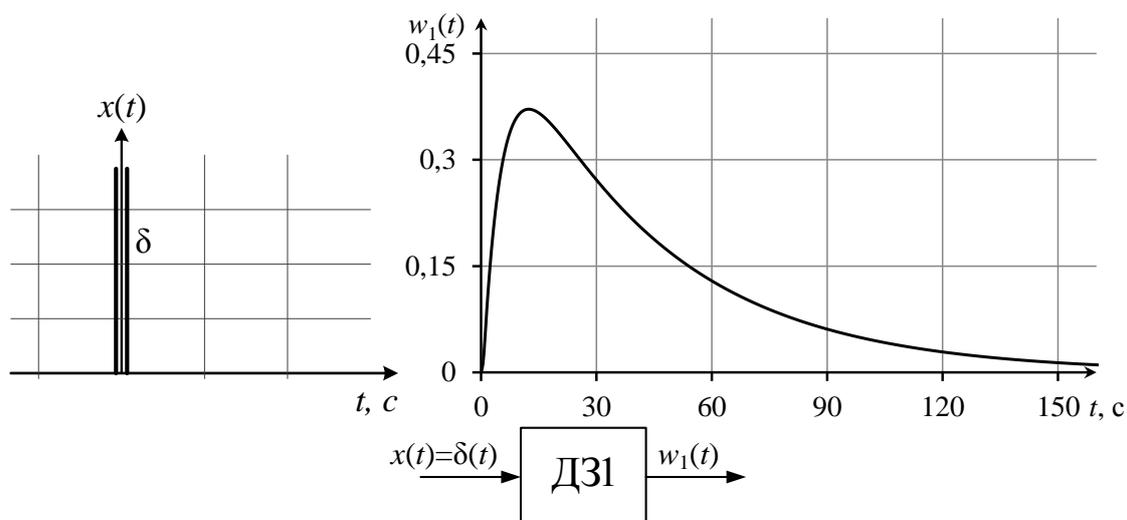


Рис. 2.40. Иллюстрация реакции ДЗ1 на идеальное импульсное воздействие

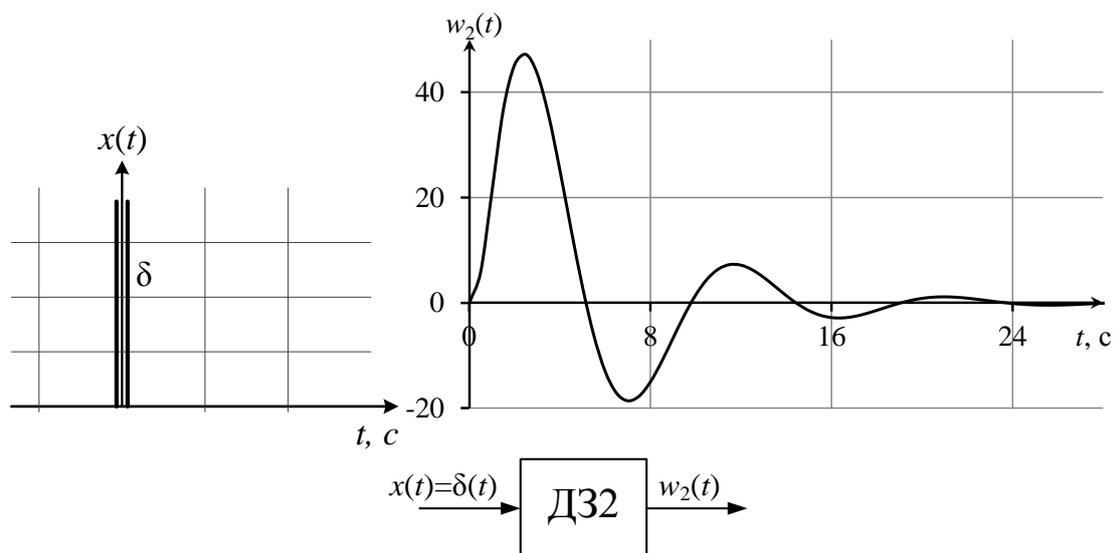


Рис. 2.41. Иллюстрация реакции ДЗ2 на идеальное импульсное воздействие

Весовая функция (так же как и переходная) может быть определена при известной передаточной функции этого звена с помощью формулы Хевисайда:

$$w(t) = \sum_{i=1}^n \frac{K(s_i)}{D'(s_i)} e^{s_i(t)},$$

поскольку $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$; $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$; $h(t) = \int_0^{\infty} w(t)dt$.

В свою очередь передаточная функция динамического звена может быть определена по его временным характеристикам.

Передаточная функция динамического звена есть изображение Карсона его переходной функции $W(s) = K\{h(t)\}$.

Передаточная функция динамического звена есть изображение Лапласа его весовой функции $W(s) = L\{w(t)\}$.

2.3.3 Определение реакции динамического звена на произвольное входное воздействие с помощью временных характеристик

Если известна реакция звена на единичное ступенчатое воздействие $h(t)$, то при произвольном воздействии $f(t)$, $f(t \leq t_0) \equiv 0$, переходный процесс $x(t)$ можно выразить через $h(t)$ и $f(t)$ с помощью интеграла Дюамеля:

$$x(t) = f(t)h(0) + \int_{t_0}^t h(t-\tau)f'(\tau)d\tau = f(t)h(0) + \int_{t_0}^t h(\tau)f'(t-\tau)d\tau.$$

Реакцию звена на произвольное воздействие $f(t)$ можно выразить и через весовую (импульсную переходную) функцию с помощью интеграла:

$$x(t) = \int_0^t w(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t w(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Эта формула справедлива только при нулевых начальных условиях.

2.3.4 Экспериментальные временные характеристики САУ

Экспериментально снятые временные характеристики широко используются для идентификации объектов управления. По виду переходной (либо весовой) функции определяют тип звена, а по специальным методикам рассчитывают параметры уравнения (передаточной функции) этого звена.

Так для переходной функции технологического объекта управления (ТОУ), изображенной на рис. 2.42, можно предположить, что ТОУ описывается дифференциальным уравнением

$$T_{об} \frac{dy}{dt} + y(t) = k_{об} x(t - \tau_{об}) \text{ или передаточной функцией } W(s) = \frac{k_{об} e^{-\tau_{об}s}}{T_{об}s + 1}.$$

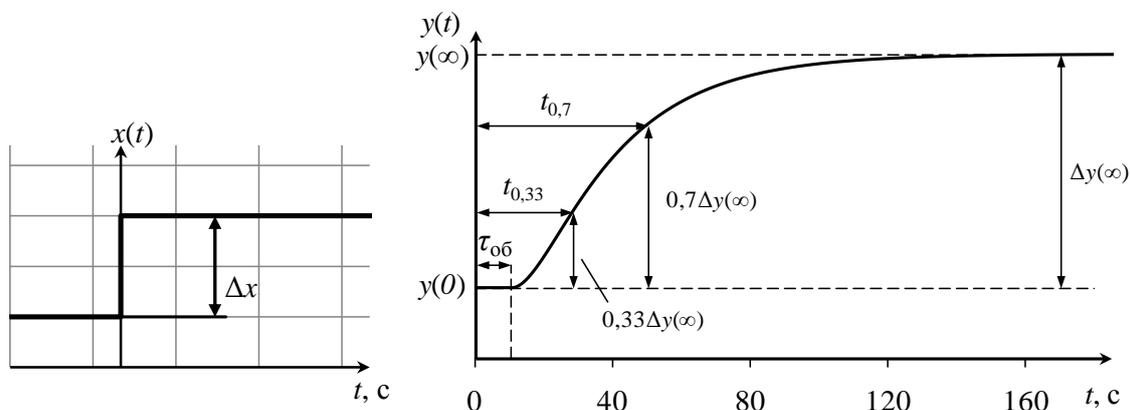


Рис. 2.42. Экспериментальная переходная функция технологического объекта управления

Последовательность определения параметров звена ($T_{об}$, $\tau_{об}$, $k_{об}$) по методу Орманса такова:

1) по экспериментальной переходной функции (кривой разгона), представленной на рис. 2.42, определяется время $t_{0,7}$ при $y(t_{0,7}) = y(0) + 0,7\Delta y(\infty)$ и $t_{0,33}$ при $y(t_{0,33}) = y(0) + 0,33\Delta y(\infty)$;

2) вычисляется время запаздывания $\tau_{об}$ по формуле:

$$\tau_{об} = 0,5(3t_{0,33} - t_{0,7});$$

3) вычисляется величина постоянной времени $T_{об}$:

$$T_{об} = \frac{t_{0,7} - \tau}{1,2} = 1,25(t_{0,7} - t_{0,33});$$

4) коэффициент передачи звена $k_{об}$ находится из выражения:

$$k_{об} = \frac{\Delta y(\infty)}{\Delta x}.$$

2.4 Частотные характеристики систем автоматического управления

2.4.1 Частотные характеристики динамического звена

Наряду с вышеперечисленными способами математического описания (дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные характеристики) динамических звеньев и систем автоматического управления в целом в теории автоматического

управления для математического описания звеньев и систем широко применяются также частотные характеристики, которые определяют поведение отдельных звеньев и системы в целом при действии на их входе гармонических колебаний.

Частотными характеристиками называются формулы и графики, характеризующие реакцию звена на синусоидальное входное воздействие в установившемся режиме (т. е. вынужденные синусоидальные колебания звена).

Известно, что гармонические колебания $\bar{X}(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ (A – амплитуда; φ – фаза; ω – частота колебаний) описываются периодической функцией времени $\bar{X}(t) = \bar{X}(t + nT)$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний; n – любое целое число.

Отличительной особенностью периодических функций является то, что они существуют на бесконечном отрезке времени от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. С этой точки зрения они являются математической абстракцией, т. к. любой реальный процесс имеет начало и конец. Однако, если реальный процесс длится достаточно долго с периодическим повторением предыдущих значений, то его можно с достаточной точностью считать периодическим. Таким образом, в реальных условиях реакцией системы на периодические входные воздействия могут считаться только установившиеся колебания выходной величины, т. е. колебания, которые возникают в САУ по истечении достаточно большого времени после начала воздействия. В этом принципиальное отличие метода частотных характеристик от метода временных характеристик, так как в последнем рассматривается поведение САУ в переходных режимах. Несмотря на это, как увидим дальше, частотные характеристики также полностью определяют поведение во времени управляемой величины, вызванное как периодическими, так и непериодическими воздействиями.

В линейной САУ установившиеся колебания выходной величины, вызванные гармоническими воздействиями на входе, являются гармоническими колебаниями той же частоты, но амплитуда и фаза их будут уже другими.

$$X_{\text{вх}}(t) = A_{\text{вх}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вх}}) \Rightarrow \boxed{\text{ДЗ}} \Rightarrow X_{\text{вых}}(t) = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{вых}}).$$

Запишем гармонические функции входа и выхода динамического звена в символической (комплексной) форме:

$$\bar{X}_{\text{ВХ}}(t) = A_{\text{ВХ}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{ВХ}})}; \quad \bar{X}_{\text{ВЫХ}}(t) = A_{\text{ВЫХ}} e^{j(\omega t + \varphi_{\text{ВЫХ}})}.$$

И взяв их отношение, получим:

$$\frac{\bar{X}_{\text{ВЫХ}}(t)}{\bar{X}_{\text{ВХ}}(t)} = \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{A_{\text{ВХ}}} e^{j(\varphi_{\text{ВЫХ}} - \varphi_{\text{ВХ}})} = W(j\omega). \quad (2.51)$$

При изменении частоты от 0 до $+\infty$ получаем комплексную функцию частоты $W(j\omega)$, которая называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой динамического звена. Ее модуль $\frac{A_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{A_{\text{ВХ}}(\omega)}$ определяет отношение амплитуд выходных и входных колебаний при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$. Эта зависимость отношения амплитуд выходных и входных гармонических сигналов от частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) динамического звена (рис. 2.43).

$$A(\omega) = \frac{A_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{A_{\text{ВХ}}(\omega)} = |W(j\omega)|_{\omega=0 \div +\infty}. \quad (2.52)$$

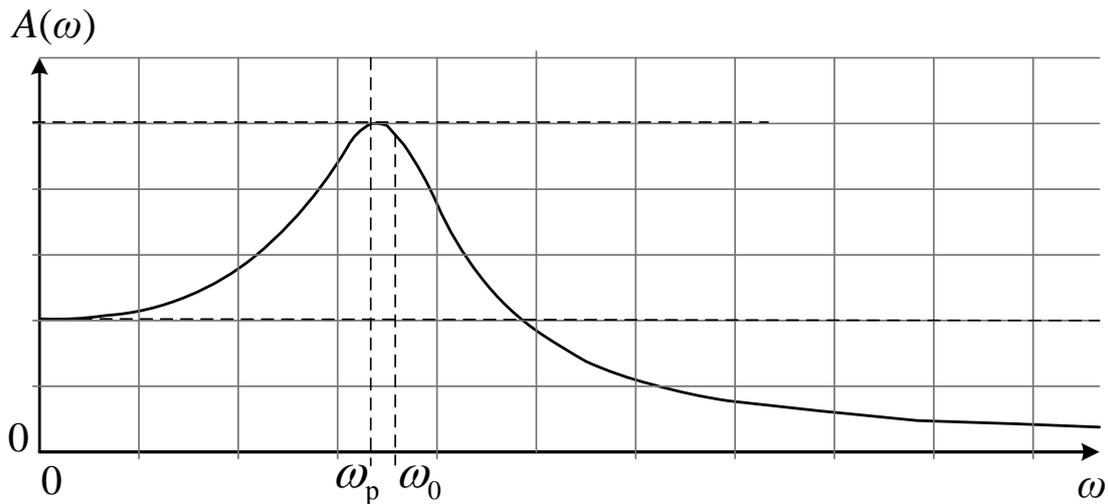


Рис. 2.43. Амплитудно-частотная характеристика динамического звена

Аргумент $\varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega) - \varphi_{\text{ВХ}}(\omega)$ выражения (2.51) определяет разность фаз выходных и входных колебаний. Зависимость разности фаз выходных и входных гармонических сигналов от частоты называется фазочастотной характеристикой (ФЧХ) динамического звена (рис. 2.44).

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ВЫХ}}(\omega) - \varphi_{\text{ВХ}}(\omega) = \text{Arg}W(j\omega)|_{\omega=0 \div +\infty}. \quad (2.53)$$

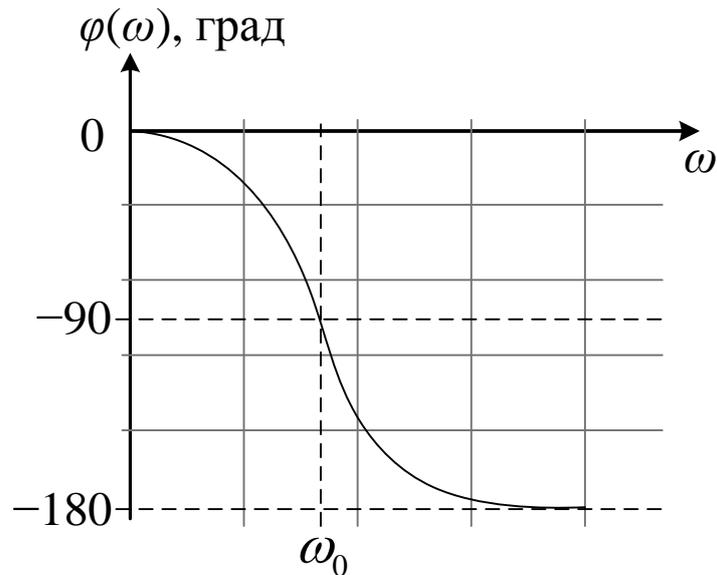


Рис. 2.44. Фазочастотная характеристика динамического звена

2.4.2 Представление АФЧХ на комплексной плоскости

Комплексная функция частоты

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.54)$$

называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой – АФЧХ динамического звена. Ее модуль есть АЧХ, а аргумент – ФЧХ. На комплексной плоскости величина $W(j\omega_1) = A(\omega_1)e^{j\varphi(\omega_1)}$ изображается вектором, длина которого равна отношению амплитуд, а угол – разности фаз выхода и входа.

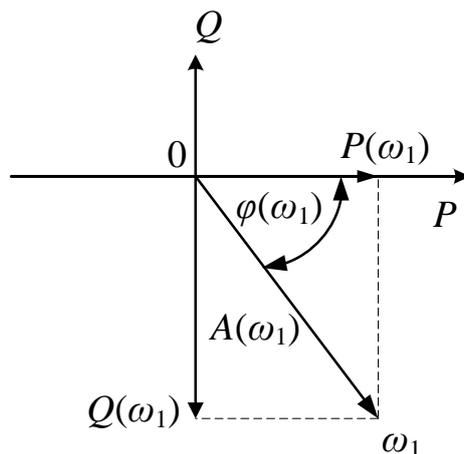


Рис. 2.45. Изображение на комплексной плоскости величины АФЧХ для определенного значения частоты ω_1

Соответственно на комплексной плоскости АФЧХ представляется кривой – годографом, которую вычерчивает конец вектора $A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ при изменении ω от 0 до $+\infty$.

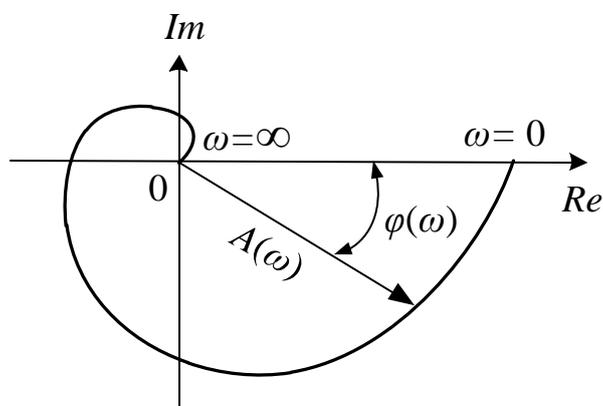


Рис. 2.46. Амплитудно-фазовая частотная характеристика динамического звена

АФЧХ может быть записана не только в показательном виде, но также в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.55)$$

которые определяются через АЧХ и ФЧХ:

$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); \quad Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (2.56)$$

С другой стороны $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ выражаются через $P(\omega)$ и $Q(\omega)$:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (2.57)$$

2.4.3 Определение АФЧХ звена по его дифференциальному уравнению

Амплитудно-фазовая частотная характеристика $W(j\omega)$ динамического звена может быть легко определена по его дифференциальному уравнению. Действительно, заметим, что для получения производной по времени от функции $\bar{X}(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$ достаточно умножить ее на $j\omega$. Для получения 2^й производной надо умножить ее на $(j\omega)^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{X}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} A e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega A e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \bar{X}(t); \\ \frac{d^2 \bar{X}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} A e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)^2 A e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)^2 \bar{X}(t); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^m \bar{X}(t)}{dt^m} = \frac{d^m}{dt^m} A e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)^m A e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)^m \bar{X}(t). \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Поэтому, подставляя в дифференциальное уравнение динамического звена

$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \bar{X}_{\text{вх}}(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) \bar{X}_{\text{вх}}(t)$ выражения для входных и выходных координат и их производных в комплексной форме (если входной сигнал является гармоническим), получим:

$$\begin{aligned} [a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n] \bar{X}_{\text{вх}}(t) &= \\ = [b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} (j\omega) + b_m] \bar{X}_{\text{вх}}(t). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Согласно приведенному выше определению (2.51):

$$W(j\omega) = \frac{\bar{X}_{\text{вх}}(t)}{\bar{X}_{\text{вх}}(t)} \Big|_{\omega=0 \div +\infty} = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1} (j\omega) + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n}. \quad (2.60)$$

Сравнивая (2.60) с выражением для передаточной функции звена

$$W(s) = \frac{X_{\text{вх}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)} = \frac{b_0 (s)^m + b_1 (s)^{m-1} + \dots + b_{m-1} (s) + b_m}{a_0 (s)^n + a_1 (s)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (s) + a_n}, \quad (2.61)$$

видим, что АФЧХ динамического звена можно получить из передаточной функции этого звена формальной заменой s на $j\omega$ и наоборот.

Между амплитудно-фазовой частотной характеристикой и весовой функцией существуют соотношения, определяемые прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$W(j\omega) = \int_0^{+\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt; \quad w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.62)$$

2.4.4 Логарифмические частотные характеристики

Различают логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) и логарифмические фазочастотные характеристики (ЛФЧХ).

При построении ЛАЧХ по оси ординат откладывают величину

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|, \quad (2.63)$$

единицей измерения для которой является децибел. По оси абсцисс откладывается частота ω [1/с] в логарифмическом масштабе. Равномерной единицей на оси абсцисс является декада – любой отрезок, на котором значение частоты увеличивается в десять раз (рис. 2.47).

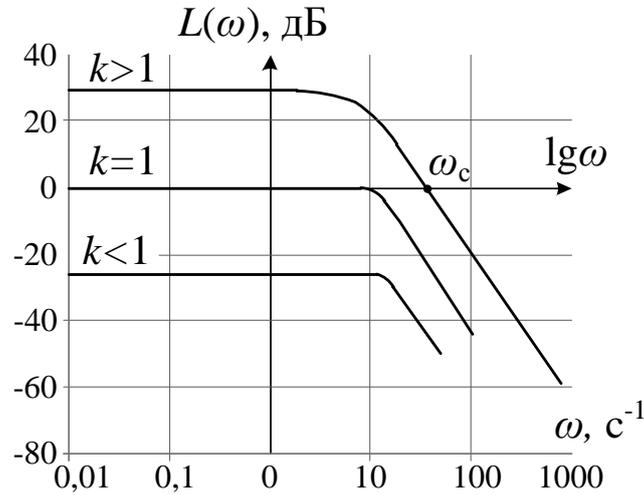


Рис. 2.47. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

Важно иметь в виду, что ось абсцисс ($L(\omega) = 0$), согласно (2.63), соответствует значению $A(\omega) = 1$, т. е. прохождению амплитуды сигнала через звено в натуральную величину. Верхняя полуплоскость ЛАЧХ соответствует значениям $A(\omega) > 1$ (усилению амплитуды), а нижняя полуплоскость – значениям $A(\omega) < 1$ (ослабление амплитуды).

При построении ЛФЧХ отсчет углов φ идет по оси ординат в обычном масштабе в угловых градусах. По оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе (рис. 2.48).

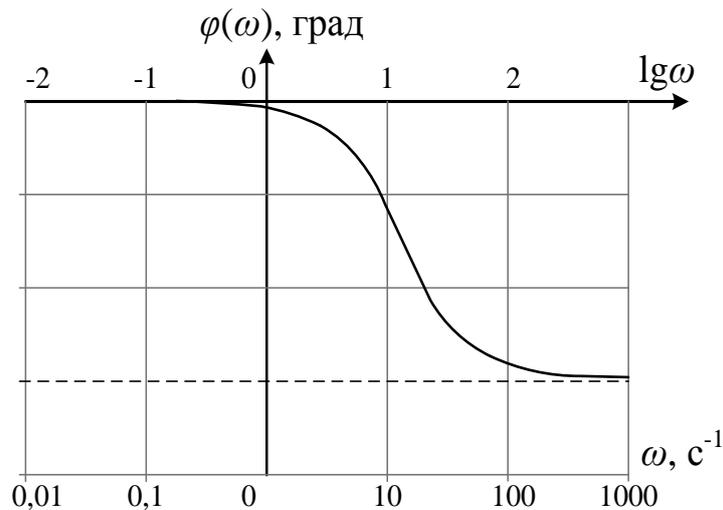


Рис. 2.48. Логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ)

Логарифмические частотные характеристики удобны тем, что небольшим графиком может быть охвачен широкий диапазон частот. При этом одинаково наглядно изменение частотных свойств звена как на малых, так на средних и высоких частотах.

Небольшим графиком охватывается и широкий диапазон изменения амплитуды с одинаковой наглядностью изменения больших и малых амплитуд.

Для реальных динамических звеньев значительные участки ЛАЧХ с большой точностью могут быть заменены прямыми линиями – асимптотами. Тогда ЛАЧХ изображается отрезками прямых (асимптотами) и называется асимптотической ЛАЧХ. При этом асимптоты (отрезки прямых линий) имеют отрицательные и положительные наклоны, кратные 20 дБ/дек (рис. 2.49).

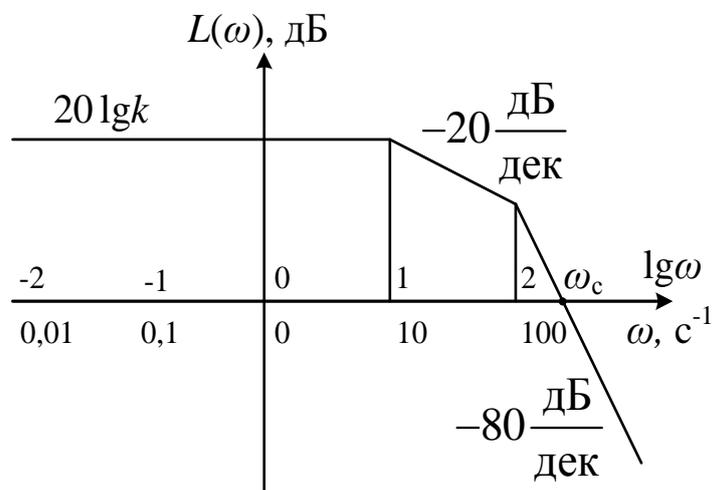


Рис. 2.49. Асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

Точка пересечения ЛАЧХ с осью абсцисс называется частотой среза ω_c .

Начало координат часто помещают в точке $\omega = 1$, т. к. $\lg 1 = 0$. Точка же $\omega = 0$ лежит в $-\infty$. Однако в зависимости от интересующего нас диапазона частот можно начало координат брать и в другой точке ($\omega = 0,1$; $\omega = 10$ и др.).

На практике (в инженерных расчетах) часто вместо истинной ЛАЧХ используют асимптотическую ЛАЧХ.

3 ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривая характеристики звеньев, независимо от их функционального назначения, физического принципа действия, мощности и скорости передаваемых сигналов, в ТАУ выделяют ряд типовых звеньев, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями не выше второго порядка:

1. простейшие звенья:
 - 1.1. пропорциональное;
 - 1.2. интегрирующее;
 - 1.3. дифференцирующее;
 - 1.4. звено запаздывания,
 - 1.5. звено чистого запаздывания;
2. звенья первого порядка:
 - 2.1. инерционное (апериодическое);
 - 2.2. инерционно-дифференцирующее;
 - 2.3. форсирующее;
 - 2.4. инерционно-форсирующее;
3. звенья второго порядка:
 - 3.1. апериодическое звено второго порядка;
 - 3.2. колебательное звено второго порядка;
 - 3.3. консервативное звено второго порядка.

Введение типовых звеньев удобно для представления сложного звена параллельным, последовательным или встречно-параллельным соединением типовых звеньев.

Передачная функция всех типовых звеньев (рис. 3.1) представляет собой рациональную дробь:

$$W(s) = \frac{K(s)}{D(s)}. \quad (3.1)$$



Рис. 3.1. Типовое динамическое звено

Причем нули и полюсы функции $W(s)$, соответствующие уравнениям $K(\lambda) = 0$ и $D(\lambda) = 0$, лежат в левой полуплоскости λ или на ее границе, совпадающей с мнимой осью.

3.1 Простейшие звенья

3.1.1 Пропорциональное звено

1. Уравнение звена:

$$y(t) = kx(t), \quad (3.2)$$

где k – коэффициент передачи (усиления) звена.

Примерами такого звена являются: делитель напряжения, усилитель постоянного тока, рычажная передача, редукторная передача.

Пропорциональные звенья называются безынерционными.

2. Передаточная функция звена:

$$W(s) = k. \quad (3.3)$$

3. Временные характеристики пропорционального звена (рис. 3.2):

3.1. Переходная функция:

$$h(t) = k1(t). \quad (3.4)$$

3.2. Весовая функция:

$$w(t) = k\delta(t). \quad (3.5)$$

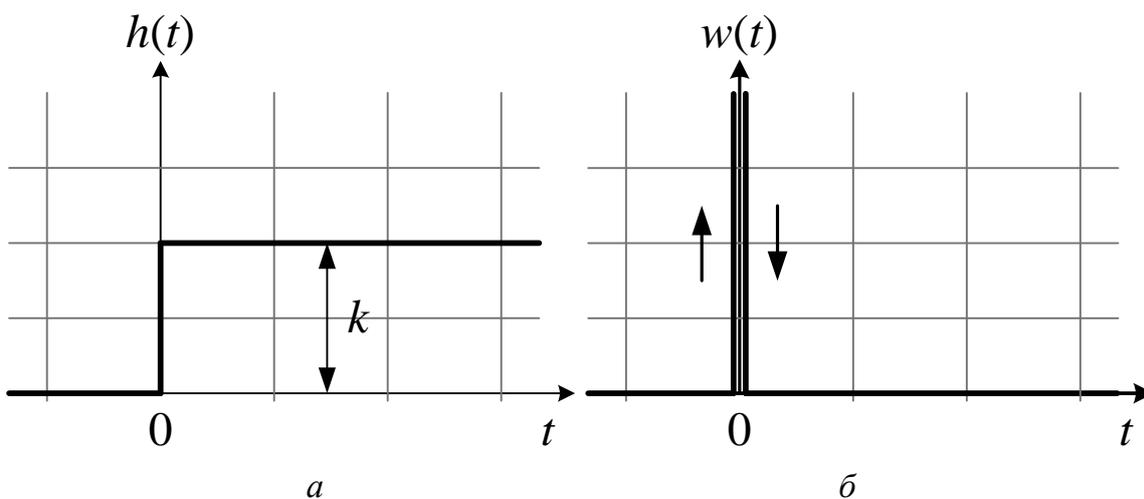


Рис. 3.2. Временные характеристики пропорционального звена:
a – переходная; *б* – весовая

4. Частотные характеристики пропорционального звена:

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 3.3):

$$W(j\omega) = k. \quad (3.6)$$

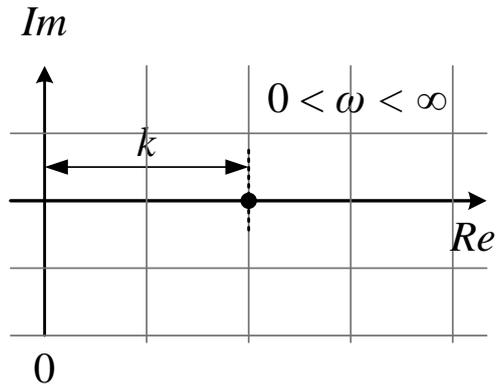


Рис. 3.3. Амплитудно-фазовая характеристика пропорционального звена

4.2. Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.4, а):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k. \quad (3.7)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.4, б):

$$\varphi(\omega) = 0. \quad (3.8)$$

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.4, в):

$$L(\omega) = 20 \lg k. \quad (3.9)$$

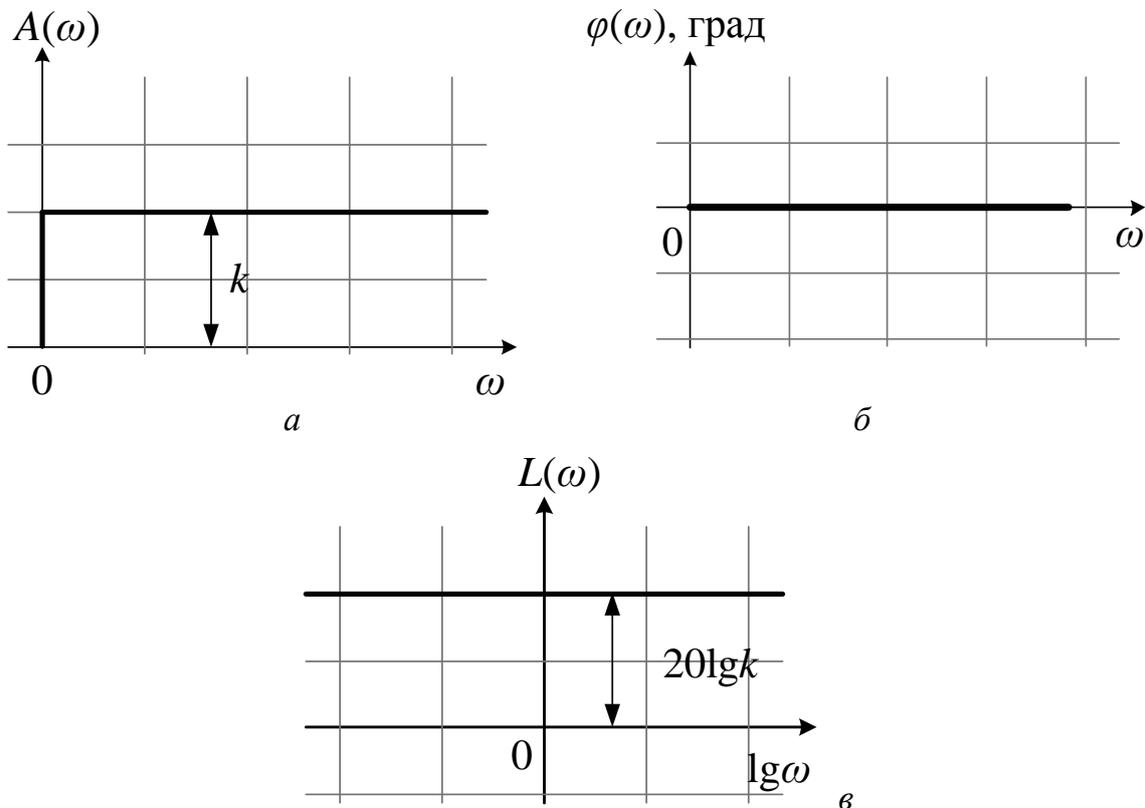


Рис. 3.4. Частотные характеристики пропорционального звена: а – амплитудная; б – фазовая; в – логарифмическая амплитудная

3.1.2 Интегрирующее звено

1. Уравнение звена:

$$y(t) = k \int_0^t x(t) dt + y_0; \quad \frac{dy(t)}{dt} = kx(t). \quad (3.10)$$

Примеры реальных элементов: вращающийся вал; гидравлический резервуар; гидравлический усилитель и т. д.

2. Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{s}. \quad (3.11)$$

3. Временные характеристики интегрирующего звена (рис. 3.5):

3.1. Переходная функция:

$$h(t) = k \int_0^t 1(t) dt = kt. \quad (3.12)$$

3.2. Весовая функция:

$$w(t) = k1(t). \quad (3.13)$$

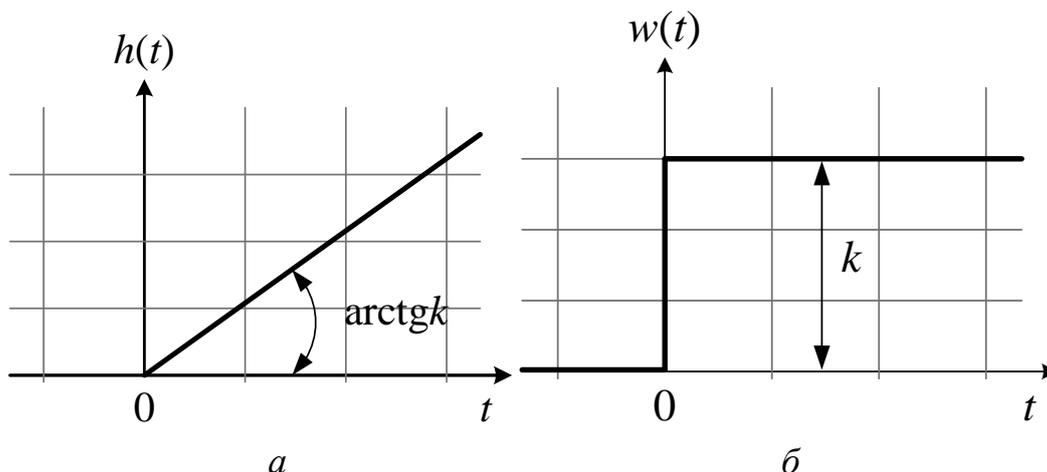


Рис. 3.5. Временные характеристики интегрирующего звена:
а – переходная; б – весовая

4. Частотные характеристики интегрирующего звена:

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}. \quad (3.14)$$

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

$$P(\omega) = 0; Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}.$$

АФЧХ интегрирующего звена совпадает с мнимой отрицательной полуосью (рис. 3.6).

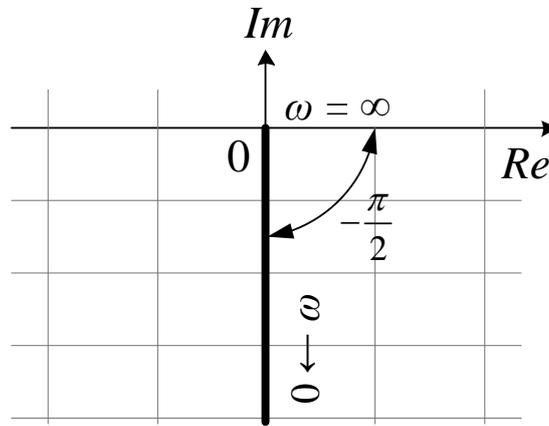


Рис. 3.6. Амплитудно-фазовая частотная характеристика интегрирующего звена

4.2. Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.7, а):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = |Q(\omega)| = \frac{k}{\omega}. \quad (3.15)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.7, б):

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q}{P} = \arctg(-\infty) = -90^\circ = \text{const}. \quad (3.16)$$

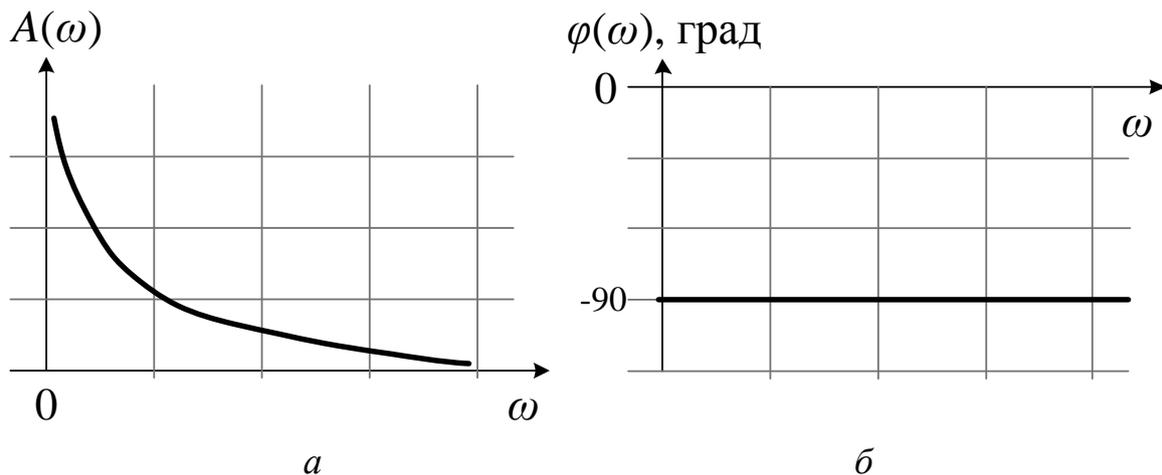


Рис. 3.7. Частотные характеристики интегрирующего звена:
а – амплитудная; б – фазовая

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.8, а):

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\omega}; \\ L(\omega) &= 20 \lg k - 20 \lg \omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

4.5. Логарифмическая фазочастотная характеристика (рис. 3.8, б):

$$\varphi(\lg \omega) = \arctg(-\infty) = -90^\circ = \text{const.} \quad (3.18)$$

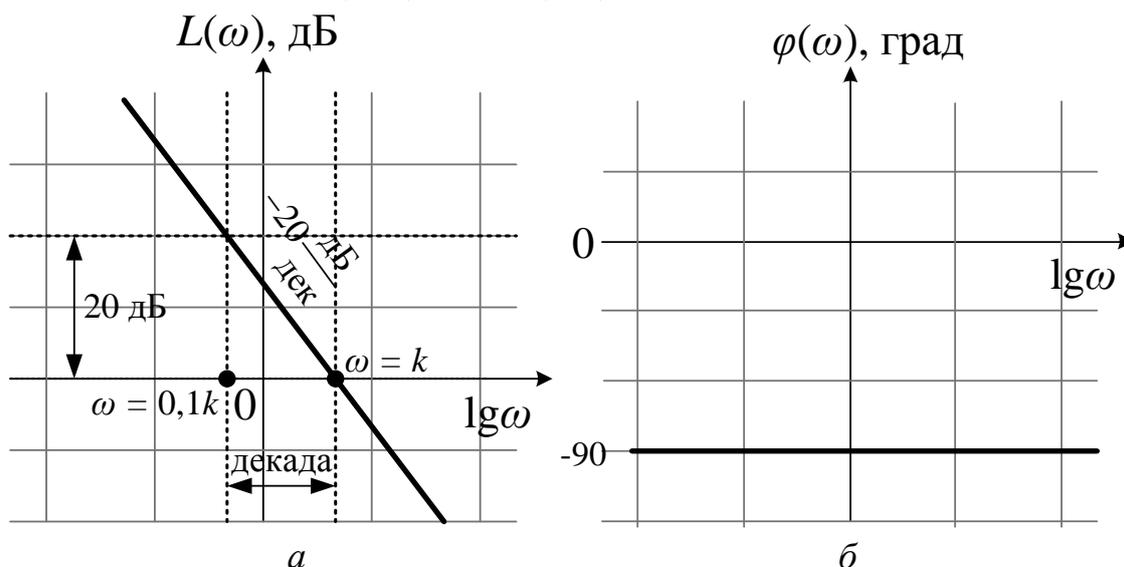


Рис. 3.8. Логарифмические частотные характеристики интегрирующего звена: а – амплитудная; б – фазовая

3.1.3 Дифференцирующее звено

На практике не существует такого реального элемента, в котором на выходе точно воспроизводилась бы производная от любого входного сигнала. Однако, составляя структурную схему системы, ее можно так разделить на звенья, что введение понятия дифференцирующего звена будет вполне обосновано.

1. Уравнение звена:

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}. \quad (3.19)$$

Примером таких звеньев могут служить: электрический тахометр.

2. Передаточная функция звена:

$$W(s) = ks. \quad (3.20)$$

3. Временные характеристики дифференцирующего звена (рис. 3.9):

3.1. Переходная функция:

$$h(t) = k \frac{d[1(t)]}{dt} = k\delta(t). \quad (3.21)$$

3.2. Весовая функция:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k\delta'(t). \quad (3.22)$$

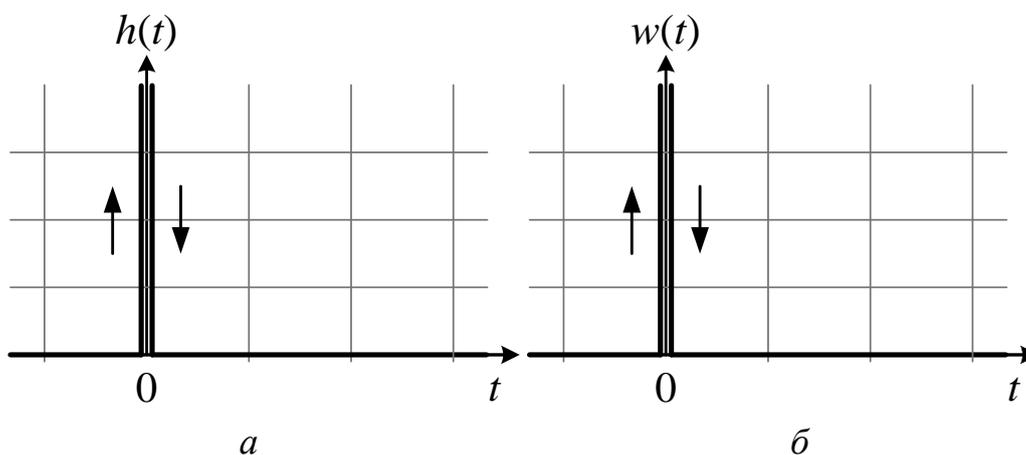


Рис. 3.9. Временные характеристики дифференцирующего звена:
а – переходная; б – весовая

4. Частотные характеристики дифференцирующего звена:

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 3.10):

$$W(j\omega) = jk\omega; \quad (3.23)$$

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = k\omega e^{j\frac{\pi}{2}};$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega);$$

$$P(\omega) = 0; \quad Q(\omega) = k\omega.$$

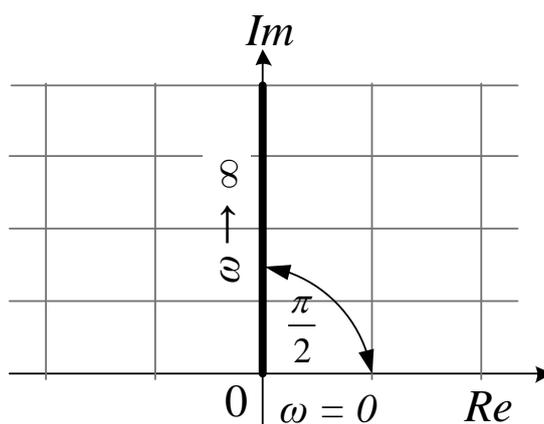


Рис. 3.10. Амплитудно-фазовая частотная характеристика дифференцирующего звена

4.2. Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.11, а):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k\omega. \quad (3.24)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.11, б):

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \infty = \frac{\pi}{2} = 90^\circ. \quad (3.25)$$

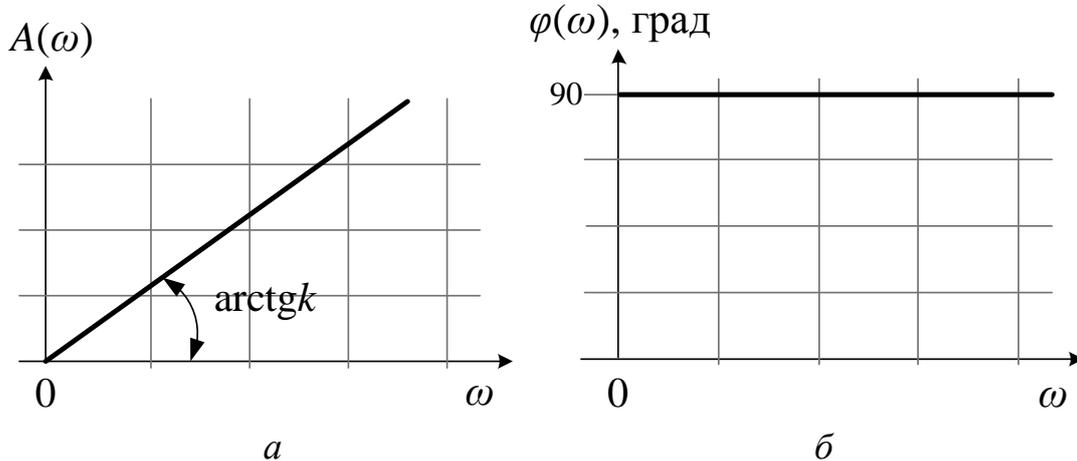


Рис. 3.11. Частотные характеристики дифференцирующего звена:
а – амплитудная; б – фазовая

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.12, а):

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k\omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega. \quad (3.26)$$

4.5. Логарифмическая фазочастотная характеристика (рис. 3.12, б):

$$\varphi(\lg \omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.27)$$

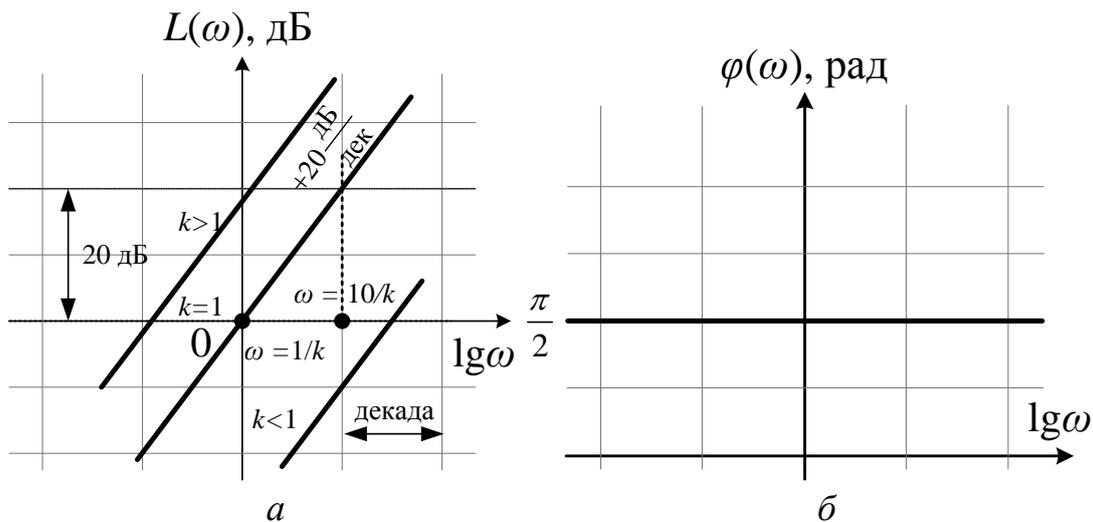


Рис. 3.12. Логарифмические частотные характеристики дифференцирующего звена: а – амплитудная; б – фазовая

3.1.4 Звено запаздывания

Примерами таких звеньев могут служить: технологические конвейерные установки, системы магнитной записи и воспроизведения. Выходная величина звена воспроизводит входной сигнал с отставанием во времени на величину запаздывания τ .

Звено запаздывания описывается уравнением:

$$y(t) = kx(t - \tau).$$

Передаточная функция звена запаздывания

$$W(s) = ke^{-\tau s}.$$

Если коэффициент звена запаздывания равен единице ($k = 1$), то такое звено получило название – звено чистого запаздывания.

1. Уравнение звена:

$$y(t) = x(t - \tau). \quad (3.28)$$

2. Передаточная функция звена:

$$W_0(s) = e^{-\tau s}. \quad (3.29)$$

3. Временные характеристики звена чистого запаздывания (рис. 3.13):

3.1. Переходная функция:

$$h(t) = 1(t - \tau). \quad (3.30)$$

3.2. Весовая функция:

$$w(t) = \delta(t - \tau). \quad (3.31)$$

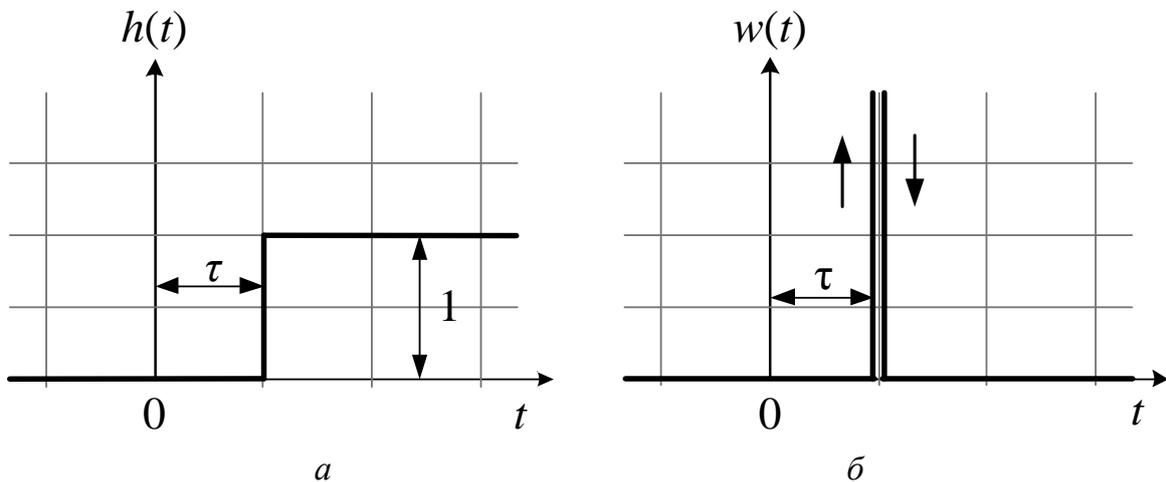


Рис. 3.13. Временные характеристики звена чистого запаздывания:

a – переходная; *б* – весовая

4. Частотные характеристики звена чистого запаздывания:

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 3.14):

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau). \quad (3.32)$$

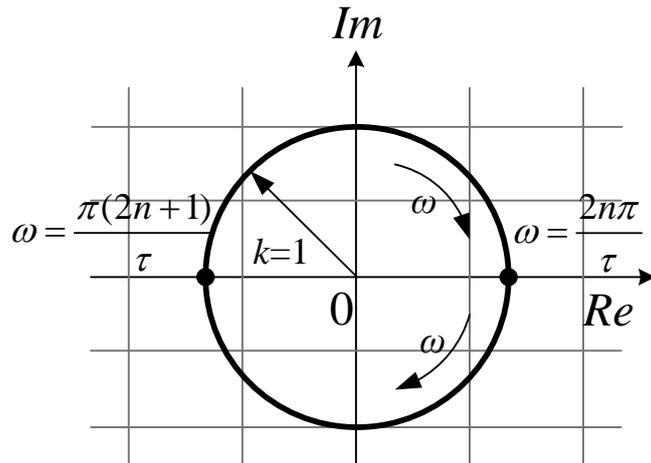


Рис. 3.14. Амплитудно-фазовая частотная характеристика звена чистого запаздывания

4.2. Амплитудно-частотная характеристика за 1 период (рис. 3.15, а):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = 1. \quad (3.33)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.15, б):

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau. \quad (3.34)$$

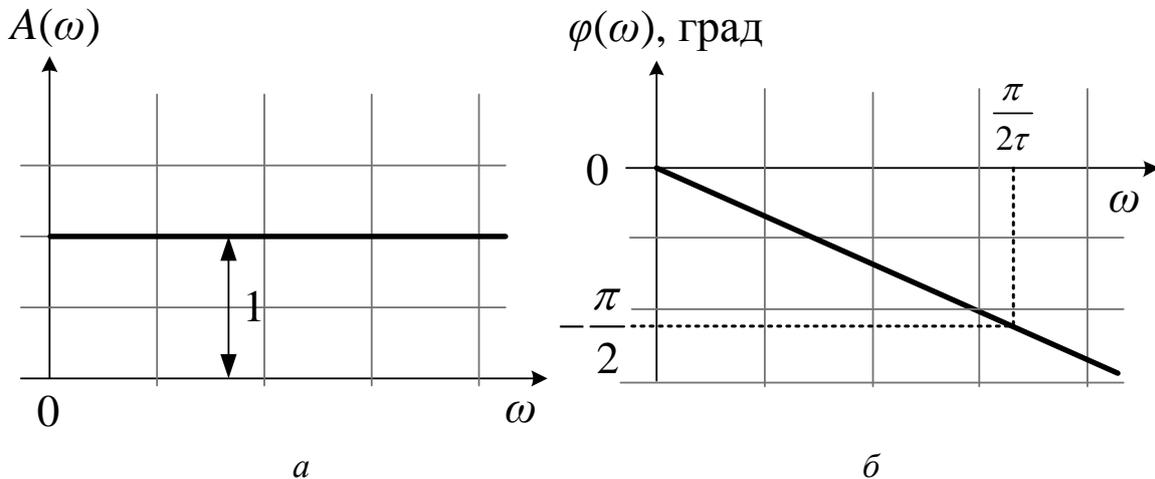


Рис. 3.15. Частотные характеристики звена чистого запаздывания:
а – амплитудная; б – фазовая

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика за 1 период (рис. 3.16, а):

$$L(\omega) = 0. \quad (3.35)$$

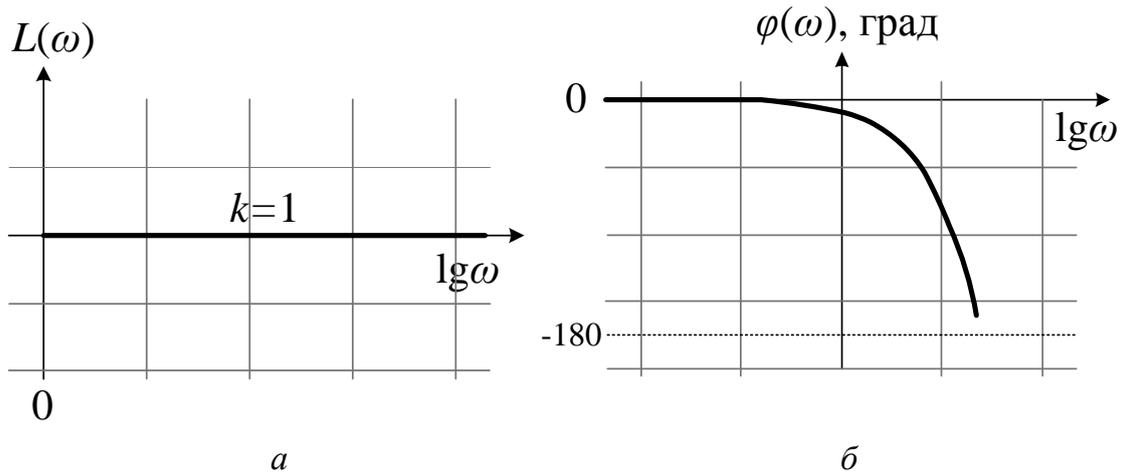


Рис. 3.16. Логарифмические характеристики звена чистого запаздывания:
a – амплитудная; *б* – фазовая

3.2 Звенья первого порядка

3.2.1 Инерционное звено

Одним из самых распространенных звеньев САУ является инерционное звено 1-го порядка.

При линеаризации уравнений и соответствующем упрощении математического описания примерами инерционных звеньев могут служить многие объекты: генераторы, двигатели, электрические печи, исполнительные механизмы, электронные и магнитные усилители, термопары и т. д.

1. Уравнение звена:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (3.36)$$

где T – постоянная времени; k – коэффициент передачи звена.

2. Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{Ts + 1}. \quad (3.37)$$

3. Временные характеристики инерционного звена (рис. 3.17):

3.1. Переходная функция:

$$h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) 1(t). \quad (3.38)$$

3.2. Весовая функция:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} 1(t). \quad (3.39)$$

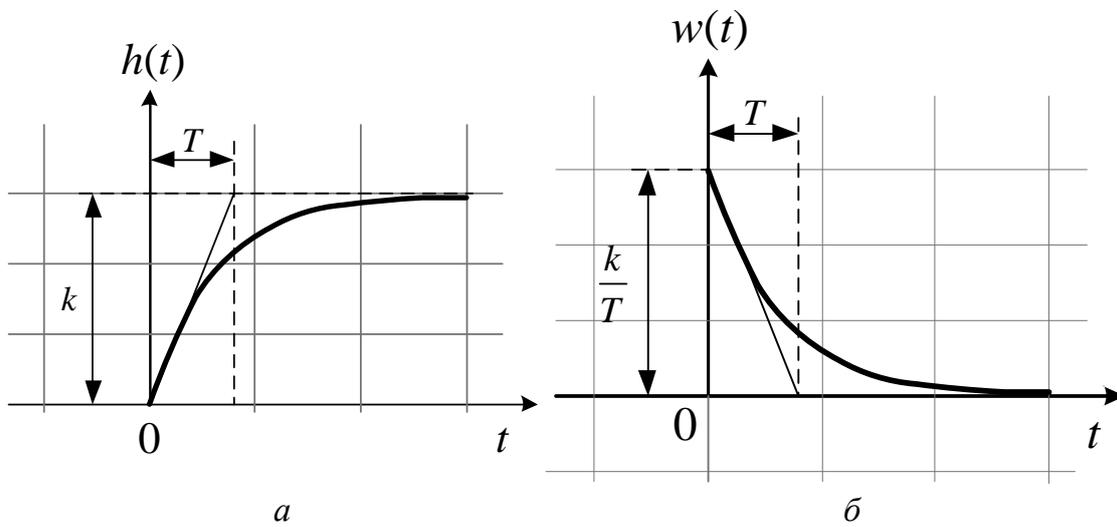


Рис. 3.17. Временные характеристики инерционного звена:
a – переходная; *б* – весовая

4. Частотные характеристики инерционного звена:

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 3.18):

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega}; \quad (3.40)$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega);$$

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + T^2 \cdot \omega^2}; Q(\omega) = -\frac{Tk\omega}{1 + T^2 \omega^2};$$

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \cdot e^{-j \arctg T\omega}.$$

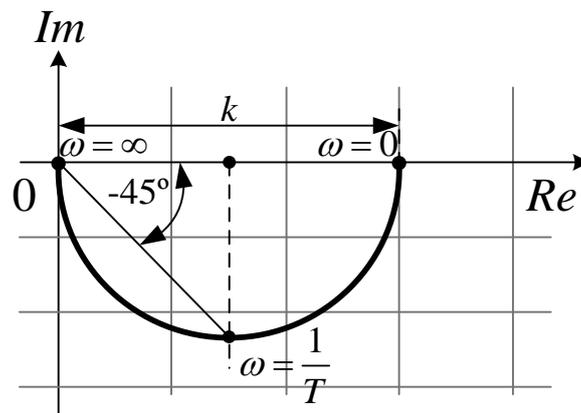


Рис. 3.18. Амплитудно-фазовая частотная характеристика инерционного звена

4.2. Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.19, а):

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \quad (3.41)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.19, б):

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \operatorname{arctg}(-\omega T) = -\operatorname{arctg} \omega T. \quad (3.42)$$

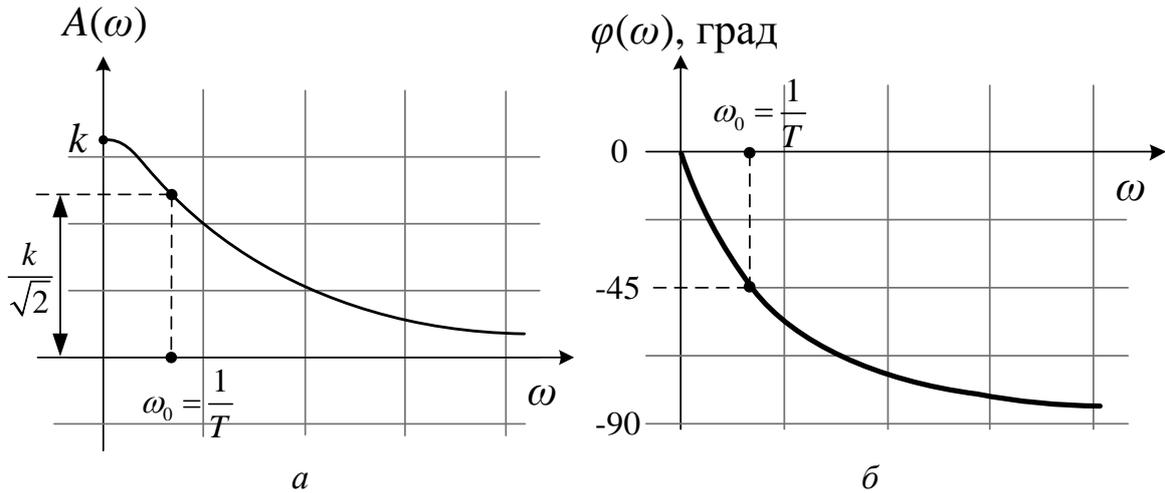


Рис. 3.19. Частотные характеристики инерционного звена:
а – амплитудная; б – фазовая

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.20, а):

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad (3.43)$$

4.4.1. Асимптотическая ЛАЧХ:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \omega T \leq 1 \\ 20 \lg k - 20 \lg \omega T & \text{при } \omega T \gg 1 \end{cases} \quad (3.44)$$

Если принять приращение частоты на одну декаду ($\omega_2 = 10\omega_1$), то амплитуда в децибелах изменится на величину

$$\Delta L_2 = -20 \lg(10)\omega_1 T + 20 \lg \omega_1 T = -20 \lg 10 = -20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}.$$

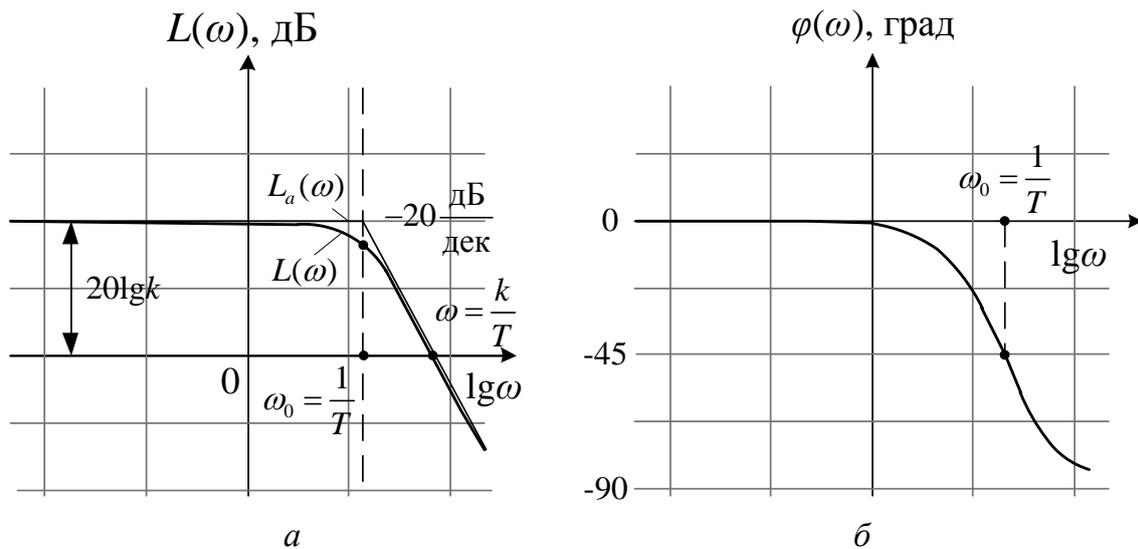


Рис. 3.20. Логарифмические частотные характеристики инерционного звена:
 а – амплитудная; б – фазовая

3.2.2 Инерционно-дифференцирующее звено

1. Уравнение звена:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}. \quad (3.45)$$

2. Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{ks}{Ts + 1}. \quad (3.46)$$

3. Временные характеристики инерционно-дифференцирующего звена (рис. 3.21):

- 3.1. Переходная функция:

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t). \quad (3.47)$$

- 3.2. Весовая функция:

$$w(t) = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t). \quad (3.48)$$

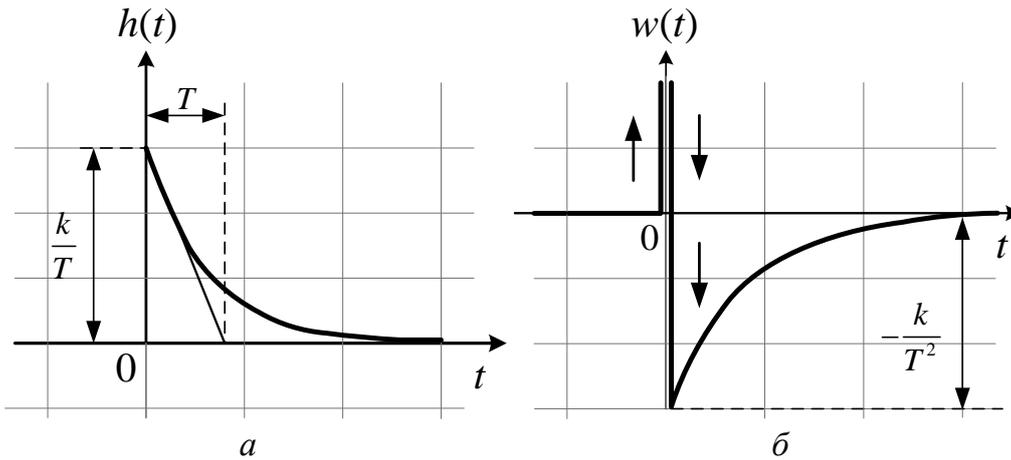


Рис. 3.21. Временные характеристики инерционно-дифференцирующего звена:
а – переходная; *б* – весовая

4. Частотные характеристики инерционно-дифференцирующего звена:

4.1. Амплитудно-фазовая характеристика звена (рис. 3.22):

$$W(j\omega) = \frac{jk\omega}{1 + jT\omega}. \quad (3.49)$$

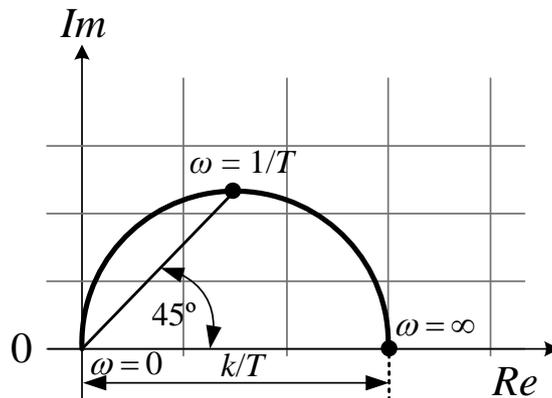


Рис. 3.22. Амплитудно-фазовая характеристика инерционно-дифференцирующего звена

4.2. Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.23, *а*):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}. \quad (3.50)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.23, *б*):

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(T\omega). \quad (3.51)$$

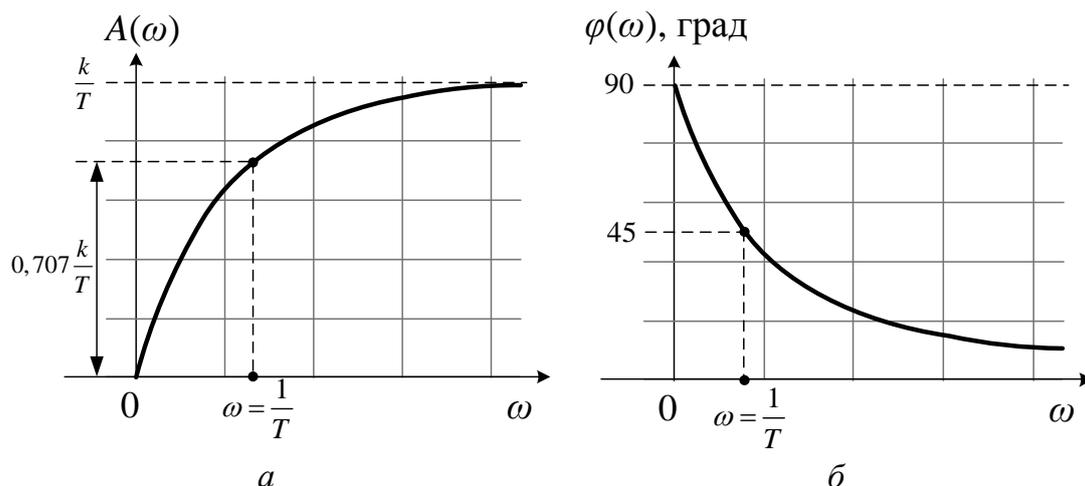


Рис. 3.23. Частотные характеристики инерционно-дифференцирующего звена:
а – амплитудная; б – фазовая

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика звена (рис. 3.24, а):

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k\omega - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}. \quad (3.52)$$

4.4.1. Асимптотическая ЛАЧХ:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k\omega & \text{при } \omega T \leq 1 \\ 20 \lg \frac{k}{T} & \text{при } \omega T > 1 \end{cases}. \quad (3.53)$$

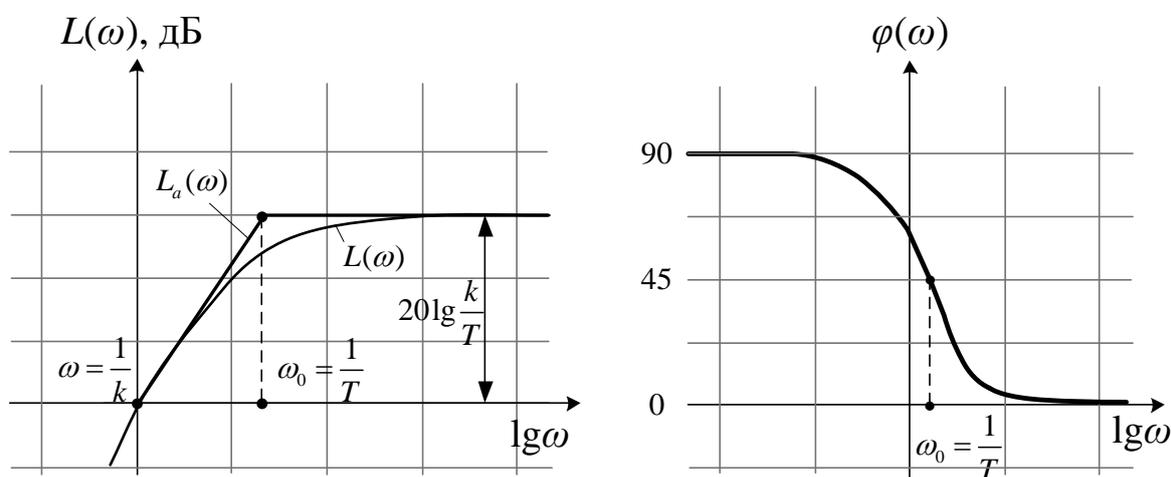


Рис. 3.24. Логарифмические частотные характеристики инерционно-дифференцирующего звена:
а – амплитудная; б – фазовая

3.2.3 Форсирующее звено

1. Уравнение звена:

$$y(t) = k \left[T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right]. \quad (3.54)$$

Такое звено получается в результате параллельного соединения пропорционального и дифференцирующего звеньев.

2. Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k(Ts + 1). \quad (3.55)$$

3. Временные характеристики форсирующего звена (рис. 3.25):

3.1. Переходная функция:

$$h(t) = k1(t) + kT\delta(t). \quad (3.56)$$

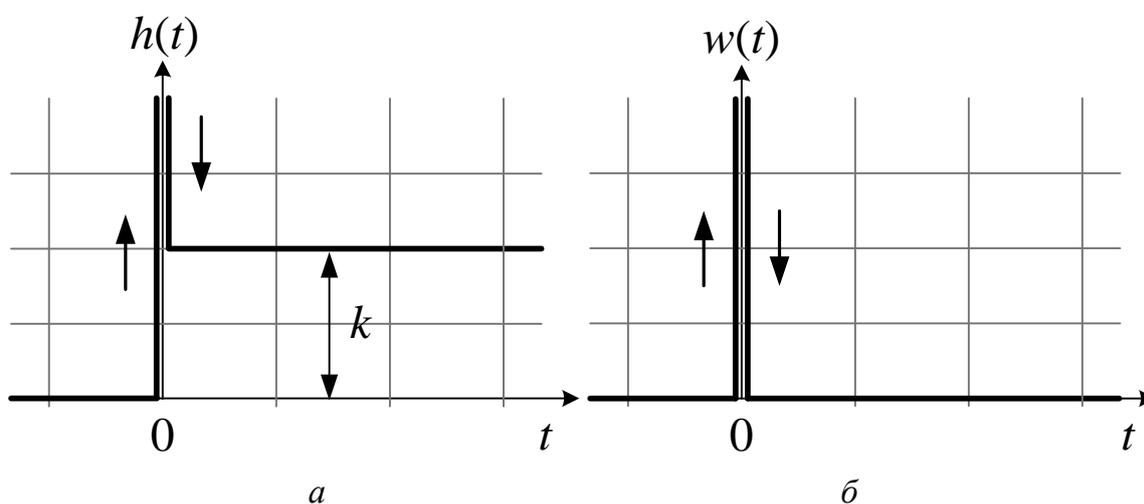


Рис. 3.25. Временные характеристики форсирующего звена:
а – переходная; б – весовая

3.2. Весовая функция:

$$w(t) = k\delta(t) + kT\delta'(t). \quad (3.57)$$

4. Частотные характеристики форсирующего звена:

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 3.26):

$$W(j\omega) = k(1 + j\omega T); \quad (3.58)$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega);$$

$$P(\omega) = k; Q(\omega) = kT\omega.$$

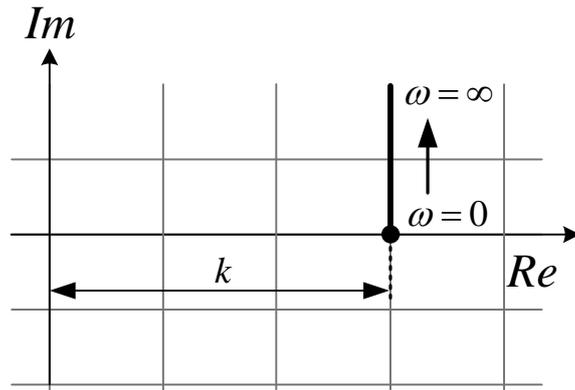


Рис. 3.26. Амплитудно-фазовая характеристика форсирующего звена

4.2. Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.27, а):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k\sqrt{1 + (\omega T)^2}. \quad (3.59)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.27, б):

$$\varphi(\omega) = \arctg\omega T. \quad (3.60)$$

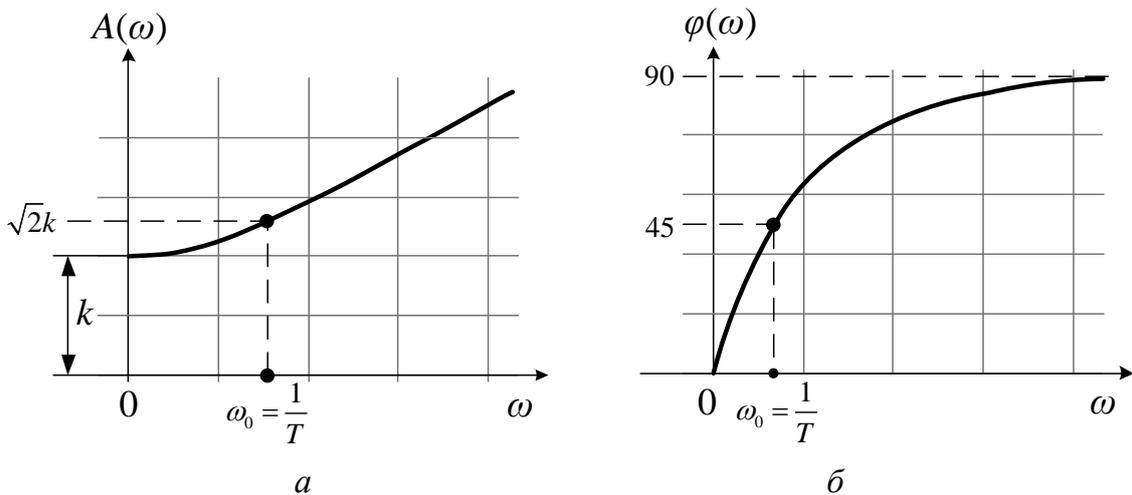


Рис. 3.27. Частотные характеристики форсирующего звена:
а – амплитудная; б – фазовая

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.28, а):

$$L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\sqrt{1 + (\omega T)^2}. \quad (3.61)$$

4.4.1. Асимптотическая ЛАЧХ:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20\lg k & \text{при } 0 < \omega T \leq 1 \\ 20\lg k + 20\lg \omega T & \text{при } \omega T > 1 \end{cases} \quad (3.62)$$

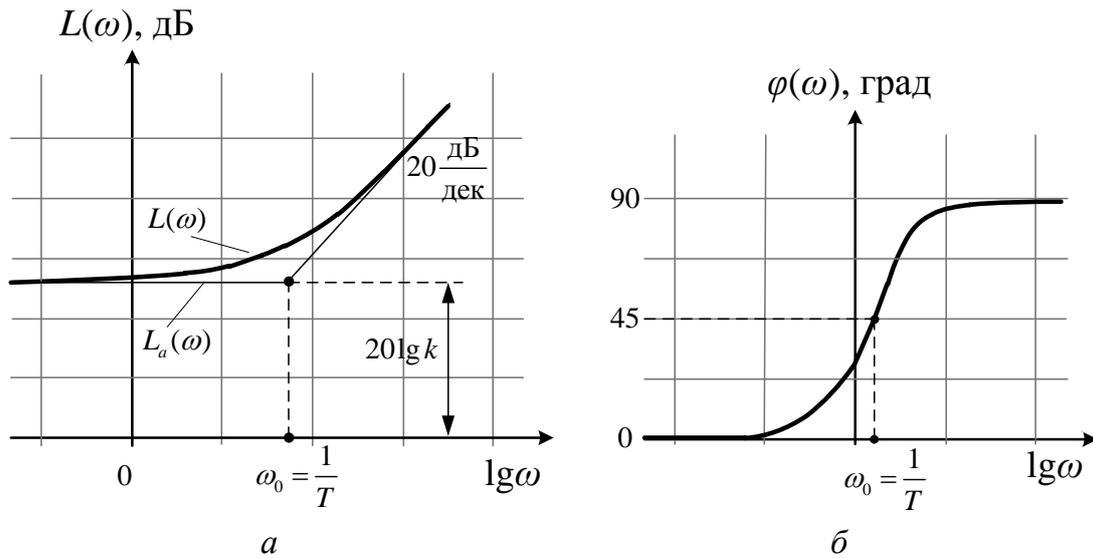


Рис. 3.28. Логарифмические частотные характеристики форсирующего звена:
а – амплитудная; б – фазовая

3.2.4 Инерционно-форсирующее звено (упругое звено)

1. Уравнение звена:

$$T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left[T_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right]. \quad (3.63)$$

Существенным параметром инерционно-форсирующего звена является коэффициент $\tau = T_1/T_2$. Если $\tau < 1$, то это звено по своим свойствам приближается к интегрирующему и инерционному звеньям. Если же $\tau > 1$ – то звено ближе к дифференцирующему и инерционно-дифференцирующему звеньям.

2. Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k(T_1 s + 1)}{T_2 s + 1}. \quad (3.64)$$

3. Временные характеристики инерционно-форсирующего звена (рис. 3.29):

3.1. Переходная функция:

$$h(t) = k \left[1 + (\tau - 1) e^{-\frac{t}{T_2}} \right] 1(t). \quad (3.65)$$

3.2. Весовая функция:

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k}{T_2} (1 - \tau) e^{-\frac{t}{T_2}} 1(t) + k\tau \delta(t). \quad (3.66)$$

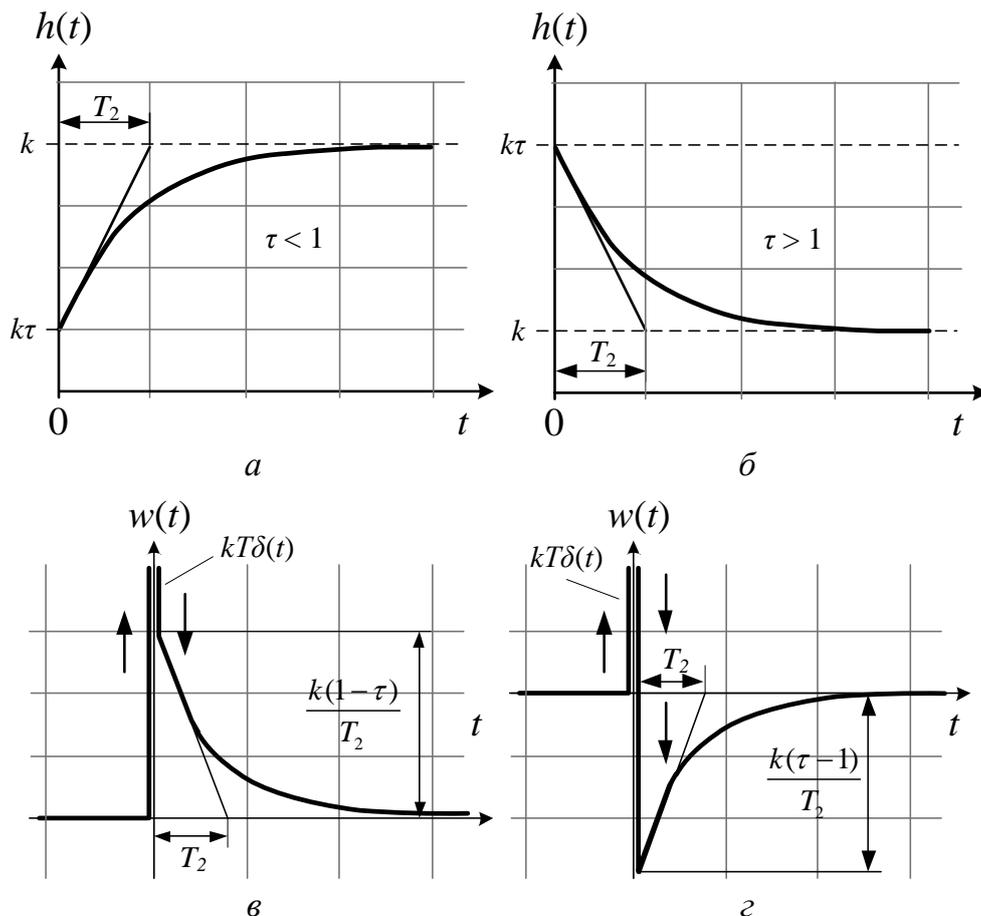


Рис. 3.29. Временные характеристики инерционно-форсирующего звена:
a, б – переходные; *в, г* – весовые

4. Частотные характеристики инерционно-форсирующего звена:
 Введем относительную безразмерную частоту:

$$\Omega = \omega T_2; \quad \omega = \frac{\Omega}{T_2}; \quad \omega T_1 = \frac{\Omega}{T_2} T_1 = \Omega \tau; \quad \tau = \frac{T_1}{T_2}.$$

Частотные характеристики будем строить для нормированных значений

$$W_0(j\Omega) = \frac{W(j\Omega)}{K}$$

в зависимости от относительной безразмерной частоты $\Omega = \omega T_2$.

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 3.30):

$$W(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega T_1)}{1 + j\omega T_2}; \quad (3.67)$$

Нормированная амплитудно-фазовая характеристика как функция относительной безразмерной частоты Ω :

$$W_0(j\Omega) = \frac{1}{k} W(j\Omega); W_0(j\Omega) = \frac{1 + j\Omega\tau}{1 + j\Omega}. \quad (3.68)$$

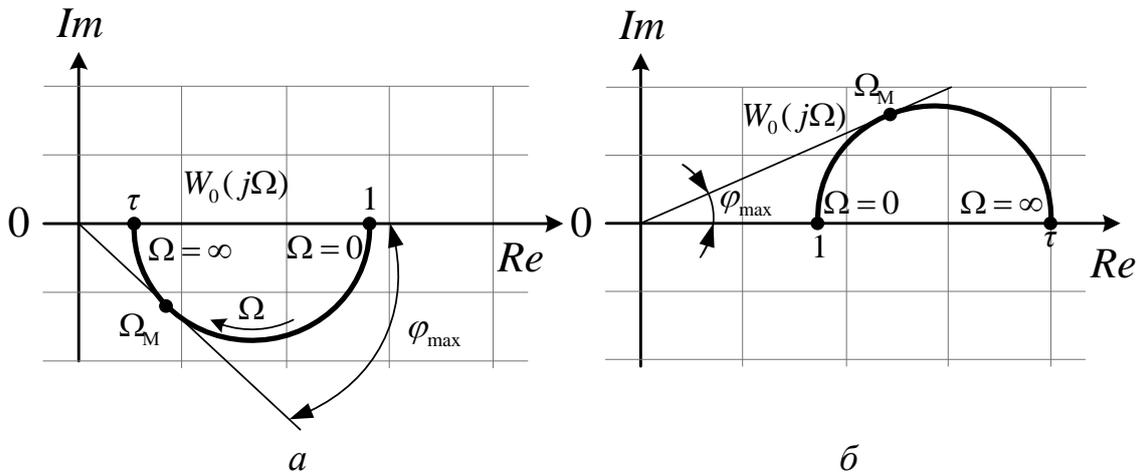


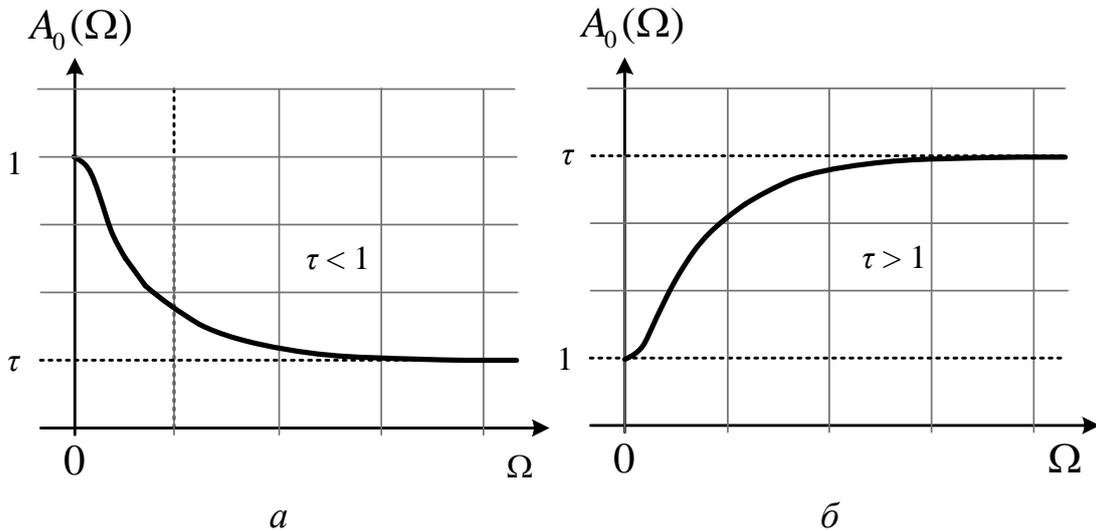
Рис. 3.30. Амплитудно-фазовые частотные характеристики инерционно-форсирующего звена:
a – при $\tau < 1$; *б* – при $\tau > 1$

4.2. Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.31, *a*, *б*):

$$A_0(\Omega) = |W_0(j\Omega)| = \sqrt{\frac{1 + (\Omega\tau)^2}{1 + \Omega^2}}. \quad (3.69)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.31, *в*, *г*):

$$\varphi(\Omega) = \arctg\Omega\tau - \arctg\Omega. \quad (3.70)$$



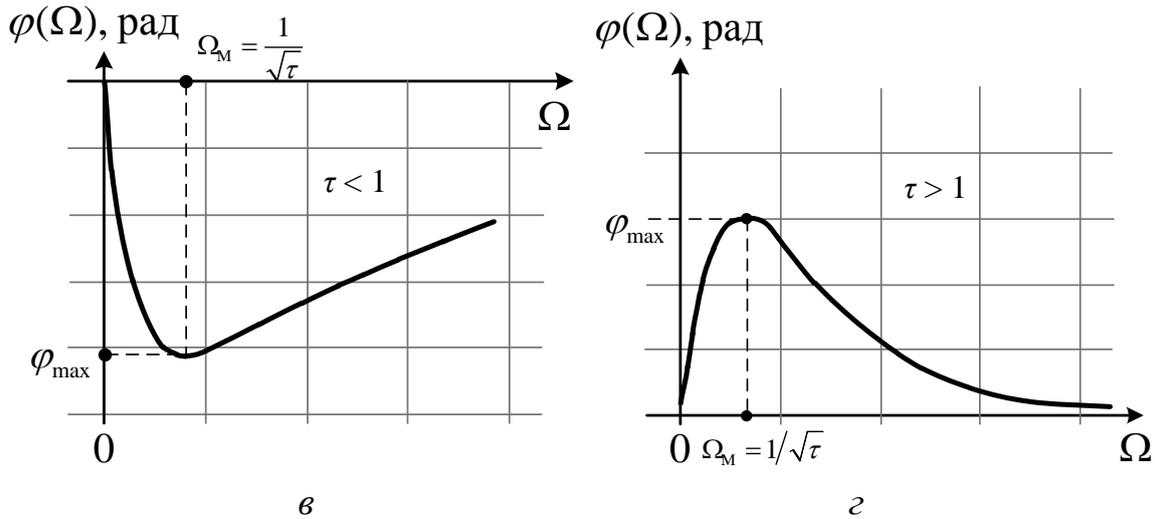


Рис. 3.31. Частотные характеристики инерционно-форсирующего звена:
 а, б – амплитудные; в, г – фазовые

Максимальный фазовый сдвиг $\varphi = \varphi_{\max} = \arcsin \frac{\tau - 1}{\tau + 1}$ достигается

при $\Omega = \Omega_M = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$.

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.32, а):

$$L_0(\Omega) = 20 \lg |W_0(j\Omega)| = 20 \lg \sqrt{1 + (\Omega\tau)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \Omega^2}. \quad (3.71)$$

4.4.1. Асимптотические логарифмические характеристики

Если $\tau < 1$, тогда

$$L_{0a}(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \Omega \leq 1; \\ -20 \lg \Omega & \text{при } 1 \leq \Omega \leq 1/\tau; \\ -20 \lg \tau & \text{при } \Omega \geq 1/\tau; \end{cases}$$

Если $\tau > 1$, тогда

$$L_{0a}(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \Omega \leq 1/\tau; \\ 20 \lg \Omega \tau & \text{при } \frac{1}{\tau} \leq \Omega \leq 1; \\ 20 \lg \tau & \text{при } \Omega \geq 1; \end{cases}$$

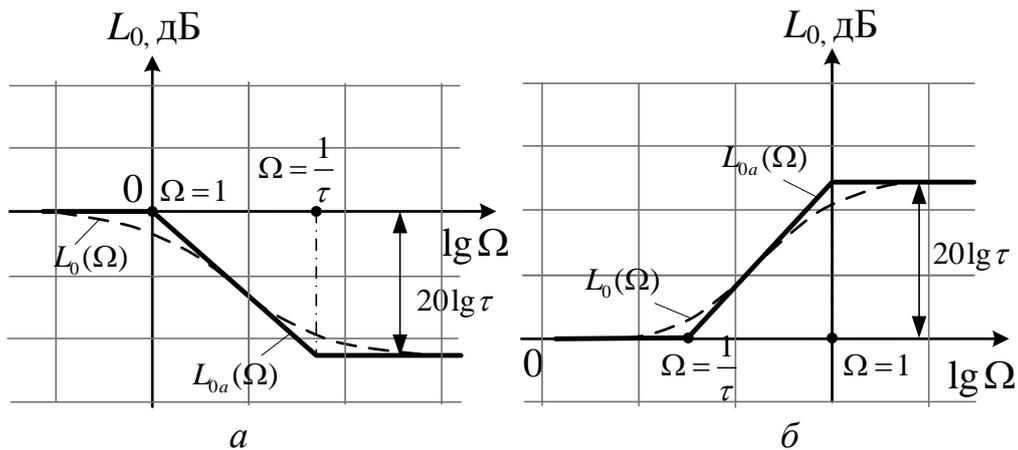


Рис. 3.32. Логарифмические амплитудно-частотные характеристики инерционно-форсирующего звена:
 а – для $\tau < 1$; б – для $\tau > 1$

3.3 Звенья второго порядка

Уравнения динамики звена второго порядка имеют вид:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) y(t) = kx(t); \quad (3.72)$$

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) y(t) = kx(t). \quad (3.73)$$

Передаточные функции звеньев второго порядка:

$$W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}; \quad (3.74)$$

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}, \quad (3.75)$$

где $T = T_2$; $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$.

Коэффициент ξ называют коэффициентом демпфирования.

В зависимости от вида корней характеристических уравнений

$$T_2^2 \lambda^2 + T_1 \lambda + 1 = 0 \quad \text{или} \quad T^2 \lambda^2 + 2\xi T \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}; \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2\xi T \pm \sqrt{4\xi^2 T^2 - 4T^2}}{2T^2}$$

Различают 3 типа звеньев:

1. Аперiodическое звено 2-го порядка [$T_1 \geq 2T_2$; ($\xi > 1$)] – корни различные вещественные отрицательные (либо 2 кратных отрицательных корня).

2. Колебательное звено [$T_1 < 2T_2$; ($\xi < 1$)] – корни комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью.
3. Консервативное звено [$T_1 = 0$; ($\xi = 0$)] – $\lambda_{1,2} = 0 \pm j \frac{1}{T_2}$; два комплексно-сопряженных корня с нулевой вещественной частью.

3.3.1 Аперидическое (инерционное) звено второго порядка

Примерами аперидических звеньев второго порядка можно назвать: двигатель постоянного тока, электромашинный усилитель, двухзвенные RC и LC фильтры и др.

1. Уравнение звена:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)y(t) = kx(t) \quad (3.76)$$

при $T_1 > 2T_2$.

Если разложить дифференциальный оператор левой части уравнения (3.76) на сомножители, то его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (T_3 p + 1)(T_4 p + 1)y(t) &= kx(t); \\ [T_3 T_4 p^2 + (T_3 + T_4)p + 1]y(t) &= kx(t). \end{aligned} \quad (3.77)$$

где $T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$; ($T_3 > T_4$).

При этом $T_3 T_4 = T_2^2$; $T_2 = \sqrt{T_3 T_4}$; $T_1 = T_3 + T_4$.

2. Передаточная функция звена:

$$\left\{ \begin{aligned} W(s) &= \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}; \\ W(s) &= \frac{k}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}; \\ W(s) &= \frac{k}{(Ts + 1)^2} \text{ при } T_1 = 2T_2. \end{aligned} \right. \quad (3.78)$$

3. Временные характеристики аперидического звена второго порядка (рис. 3.33):

- 3.1. Переходная функция:

$$\begin{cases} h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \cdot 1(t) \text{ при } T_3 > T_4; \\ h(t) = k \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}} \right] 1(t) \text{ при } T_3 = T_4 = T. \end{cases} \quad (3.79)$$

3.2. Весовая функция:

$$\begin{cases} w(t) = \frac{k}{T_3 - T_4} \left(e^{-\frac{t}{T_3}} - e^{-\frac{t}{T_4}} \right) \text{ при } T_3 > T_4; \\ w(t) = \frac{k}{T^2} t e^{-\frac{t}{T}} \text{ при } T_3 = T_4 = T. \end{cases} \quad (3.80)$$

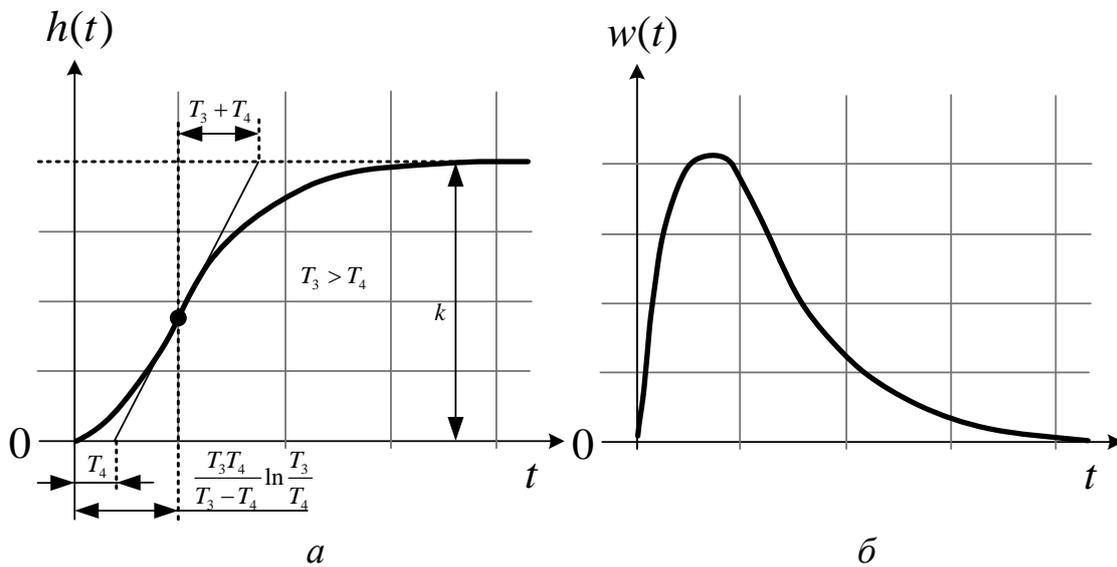


Рис. 3.33. Временные характеристики аperiodического звена 2 порядка:
а – переходная; б – весовая

4. Частотные характеристики аperiodического звена второго порядка:

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 3.34):

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{(1 - T_2^2 \omega^2) + j\omega T_1}; \\ W(j\omega) &= \frac{k}{(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

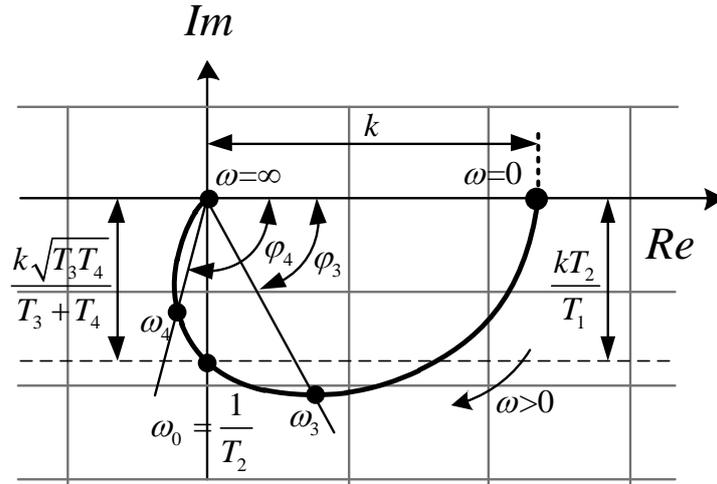


Рис. 3.34. Амплитудно-фазовая частотная характеристика аperiodического звена 2 порядка

4.2. Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.35, а):

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (T_1^2 - 2T_2^2)\omega^2 + T_2^4\omega^4}}; \\ A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 + \omega^2 T_3^2)(1 + \omega^2 T_4^2)}}. \end{cases} \quad (3.82)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.35, б):

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\arctg \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}; \\ \varphi(\omega) &= -\arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4. \end{aligned} \quad (3.83)$$

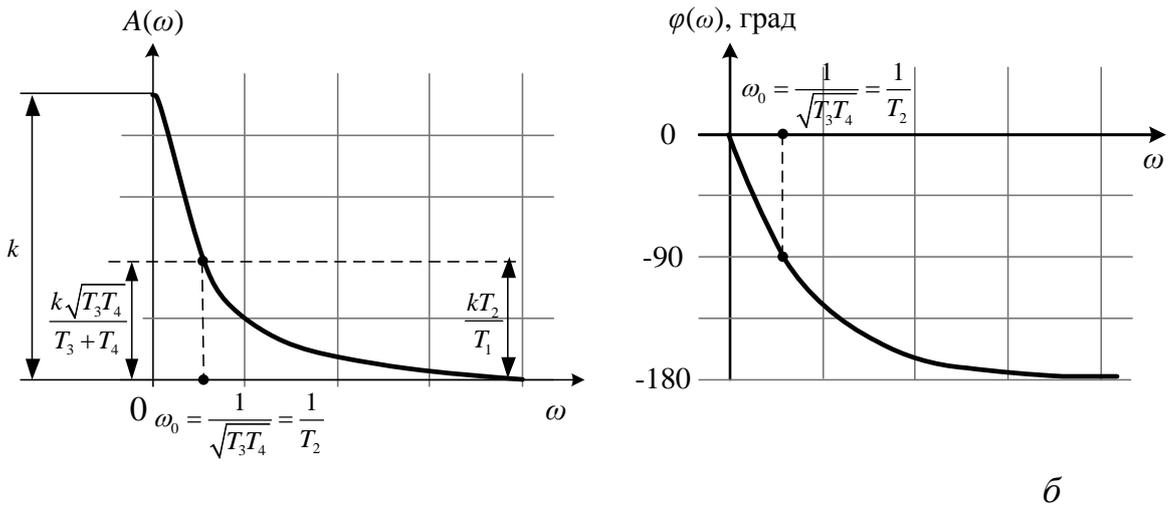


Рис. 3.35. Частотные характеристики аperiodического звена 2 порядка: а – амплитудная; б – фазовая

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.36, а):

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T_3^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_4^2}}; \quad (3.84)$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1}.$$

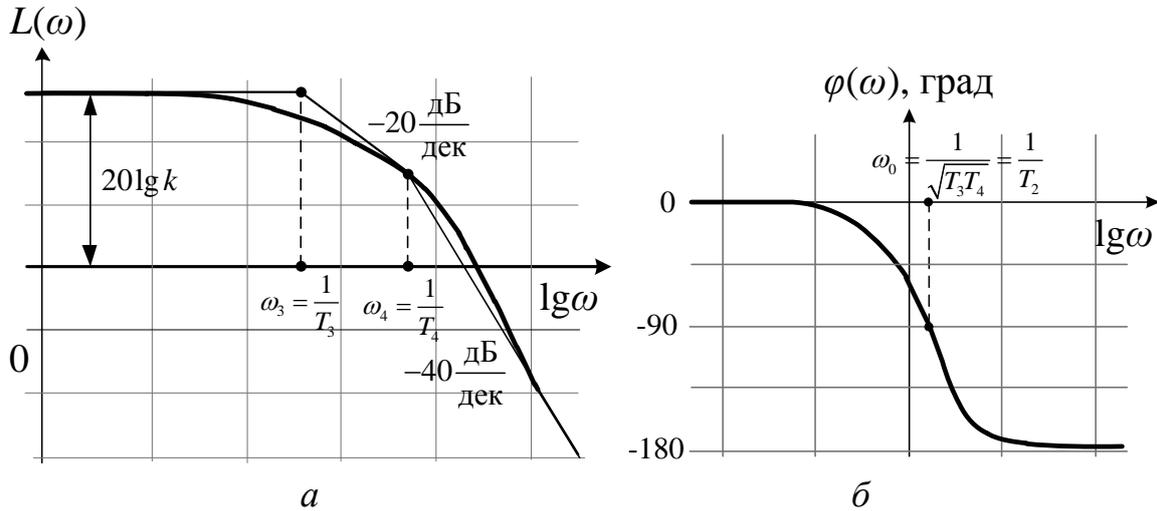


Рис. 3.36. Логарифмические частотные характеристики аperiodического звена 2 порядка: а – амплитудная; б – фазовая

4.4.1. Асимптотическая логарифмическая характеристика:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \omega < \frac{1}{T_3}; \\ 20 \lg k - 20 \lg \omega T_3 & \text{при } \frac{1}{T_3} \leq \omega \leq \frac{1}{T_4}; \\ 20 \lg k - 20 \lg \omega^2 T_3 T_4 & \text{при } \omega > \frac{1}{T_4}. \end{cases}$$

3.3.2 Колебательное звено второго порядка

Примерами колебательного звена могут служить: упругая механическая система с существенным влиянием массы, электрический колебательный контур и т. д.

1. Уравнение звена:

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) y(t) = k x(t). \quad (3.85)$$

Иногда уравнение (3.83) записывают в виде:

$$(p^2 + 2\xi \omega_0 p + \omega_0^2) y(t) = k_1 x(t), \quad (3.86)$$

где $k_1 = k\omega_0^2$; $\omega_0 = \frac{1}{T}$ – угловая частота свободных колебаний (при отсутствии затуханий); ξ – параметр затухания, лежащий в пределах $0 < \xi < 1$.

2. Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{k_1}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}. \quad (3.87)$$

3. Временные характеристики колебательного звена второго порядка:

3.1. Переходная функция (рис. 3.37):

$$h(t) = k \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right] 1(t). \quad (3.88)$$

3.2. Весовая функция (рис. 3.38):

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k\omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t 1(t). \quad (3.89)$$

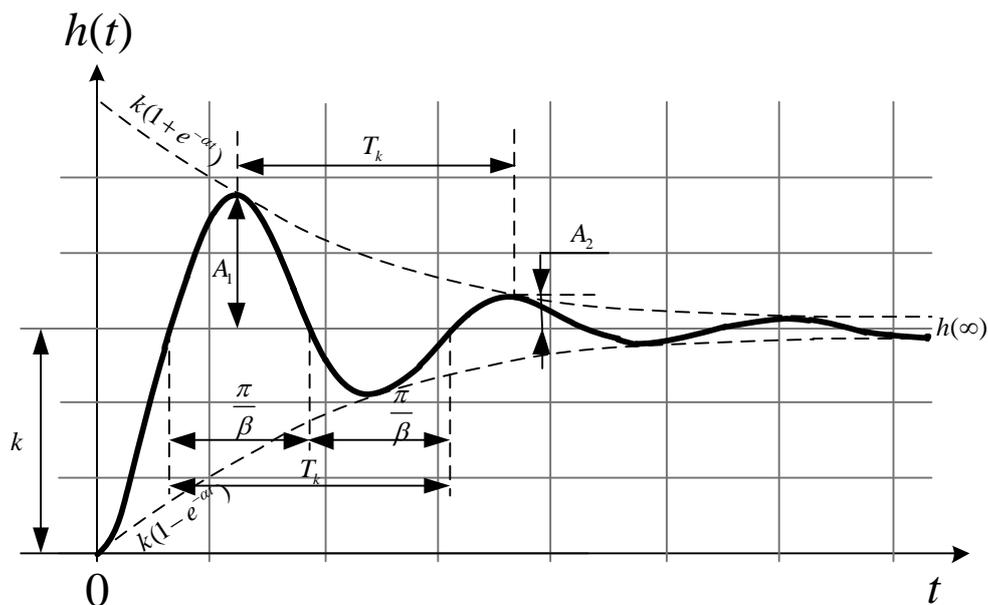


Рис. 3.37. Переходная функция колебательного звена второго порядка

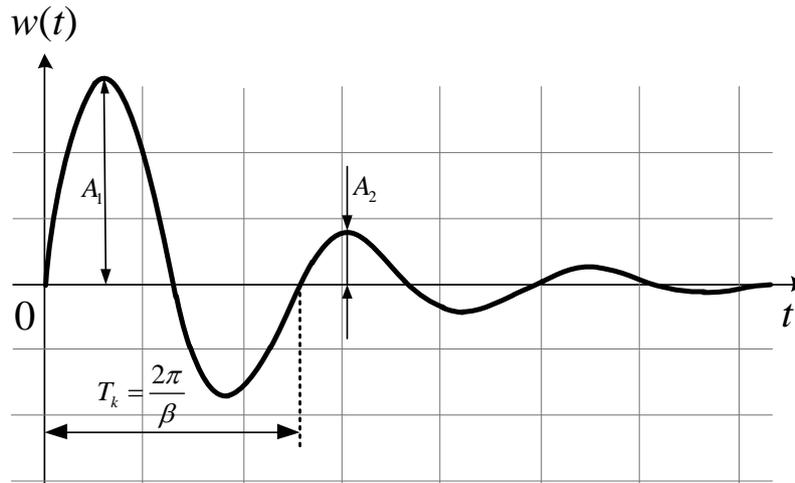


Рис. 3.38. Весовая функция колебательного звена второго порядка

По графику экспериментальной $h(t)$ определяются k , A_1 , A_2 и T_k и вычисляют все параметры звена:

$$\beta = \omega_1 = \frac{2\pi}{T_k}; \alpha T_k = \ln \frac{A_1}{A_2}; \omega_0 = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{1}{T}; \xi = \alpha T,$$

где T_k – период колебаний; A_1 и A_2 – амплитуды двух соседних колебаний относительно установившегося значения.

Оценку колебательности временной характеристики колебательного звена обычно производят по величине её степени затухания, которая равна отношению разности двух соседних амплитуд колебаний, направленных в одну сторону, к первой из них.

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}. \quad (3.90)$$

4. Частотные характеристики колебательного звена:

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 3.39):

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega}; \\ P &= \frac{k(1 - T^2\omega^2)}{1 + 2T^2\omega^2(2\xi^2 - 1) + T^4\omega^4}; \\ Q &= \frac{-2k\xi T\omega}{1 + 2T^2(2\xi^2 - 1)\omega^2 + T^4\omega^4}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

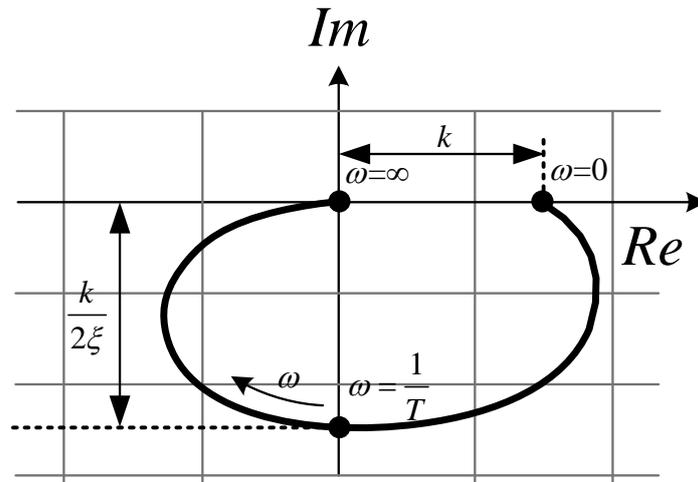


Рис. 3.39. Амплитудно-фазовая частотная характеристика колебательного звена второго порядка

С уменьшением ξ петля, очерченная годографом, увеличивается и при $\xi = 0$ характеристика вырождается в две полупрямые:

1. От $W(j\omega) = k$ до $W(j\omega) = \infty$ при $0 < \omega < \frac{1}{T}$.
2. От $W(j\omega) = -\infty$ до $W(j\omega) = 0$ при $\frac{1}{T} < \omega < +\infty$.

Если экспериментально получен частотный годограф реального звена, близкого к колебательному, то параметры соответствующего колебательного звена могут быть найдены по точкам характеристики, лежащим на вещественной и мнимой осях.

4.2. Амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.40, а):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{4\xi^2\omega^2T^2 + (1 - \omega^2T^2)^2}}. \quad (3.92)$$

4.3. Фазочастотная характеристика (рис. 3.40, б):

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \left[\frac{2\xi T \omega}{1 - \omega^2 T^2} \right]. \quad (3.93)$$

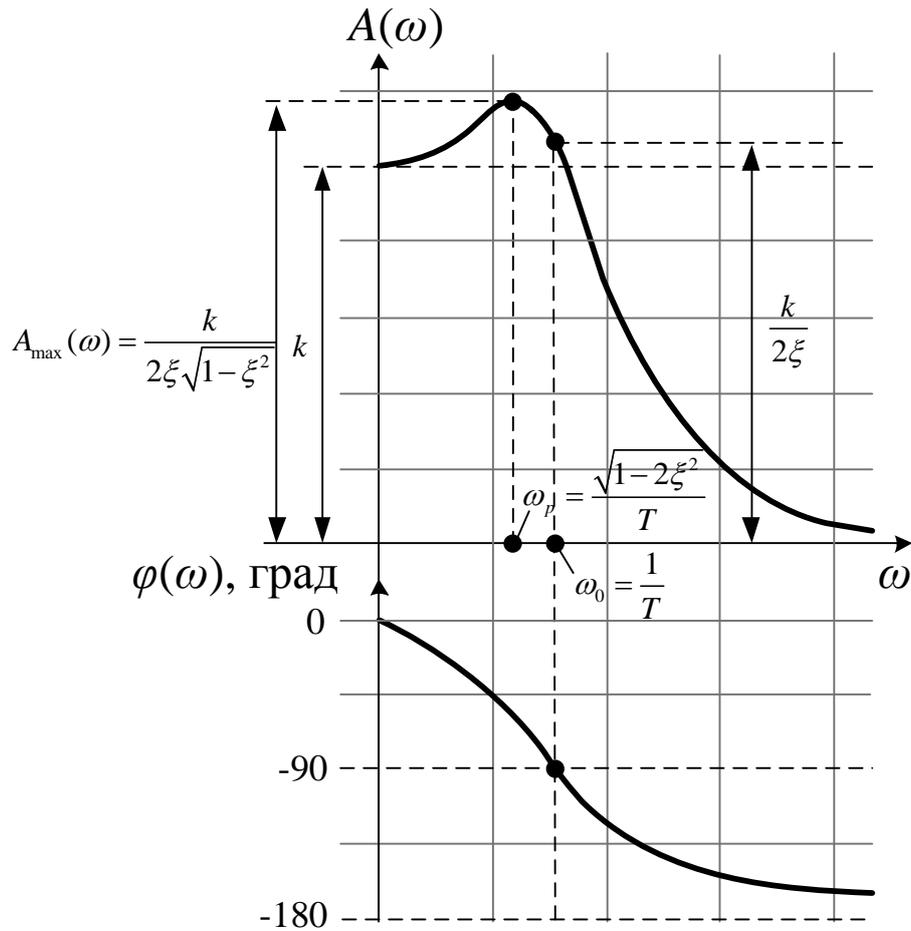


Рис. 3.40. Частотные характеристики колебательного звена 2 порядка:
а – амплитудная; б – фазовая

4.4. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (рис. 3.41):

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{4\xi^2 \omega^2 T^2 + (1 - \omega^2 T^2)^2}. \quad (3.94)$$

4.4.1. Асимптотические логарифмические характеристики

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T}; \\ 20 \lg k - 40 \lg T \omega & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

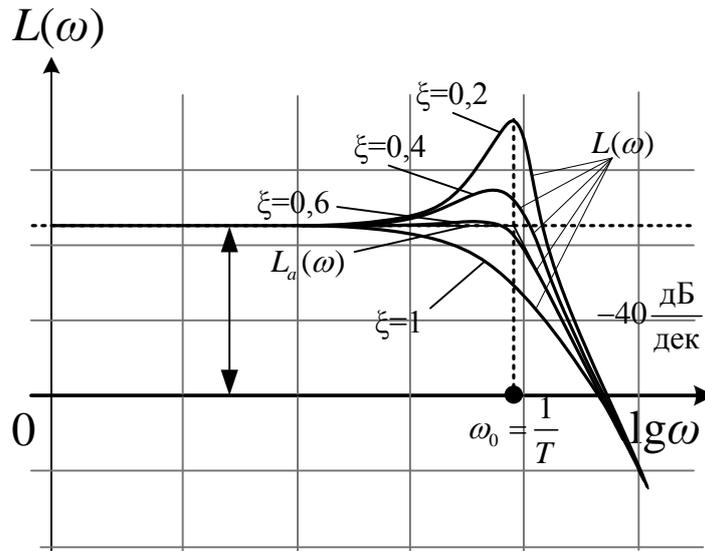


Рис. 3.41. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика колебательного звена 2 порядка

Вблизи точки резонанса ЛАЧХ сильно зависит от степени затухания ξ . С удалением от резонансной частоты характеристика практически перестает зависеть от ξ .

Поправка к асимптотической характеристике $\delta(\omega) = L(\omega) - L_a(\omega)$ зависит от степени затухания ξ .

3.3.3 Консервативное звено второго порядка

1. Уравнение звена:

$$(T^2 p^2 + 1) y(t) = kx(t). \quad (3.95)$$

2. Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}. \quad (3.96)$$

3. Временные характеристики консервативного звена второго порядка:

- 3.1. Переходная функция:

$$h(t) = k \left[1 - \cos \left(\frac{t}{T} \right) \right]. \quad (3.97)$$

- 3.2. Весовая функция:

$$w(t) = \frac{k}{T} \cdot \sin \left(\frac{t}{T} \right). \quad (3.98)$$

4. Частотные характеристики консервативного звена:

4.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2}. \quad (3.99)$$

4.2. Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = \left| \frac{k}{1 - T^2\omega^2} \right|. \quad (3.100)$$

4 АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

4.1 Основные понятия об устойчивости систем автоматического управления

Понятие устойчивости системы управления связано со способностью системы возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели её из этого состояния.

Система называется устойчивой, если из возмущенного состояния A_2 она перейдет в некоторую конечную область, окружающую невозмущенное состояние равновесия A_0 (рис.4.1).

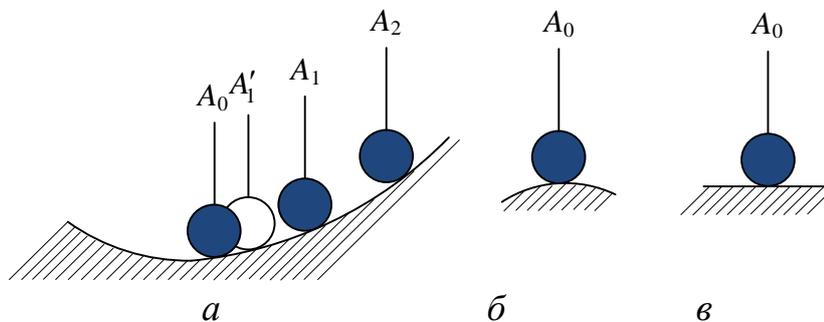


Рис. 4.1. Иллюстрация устойчивости положения равновесия системы:
а – устойчивое; б – неустойчивое; в – безразличное

Понятие устойчивости можно распространить и на случай движения некоторой системы. Пусть ее текущее состояние определяется координатами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Заданное движение системы определяется некоторым законом изменения координат: $x_{10}(t), x_{20}(t), \dots, x_{n0}(t)$.

Аналогично случаю положения равновесия заданное движение можно назвать невозмущенным движением. Приложение внешних сил к рассматриваемой системе вызовет отклонение действительного движения от заданного ($x_1(t) \neq x_{10}(t), x_2(t) \neq x_{20}(t) \dots$) (рис. 4.2).

Заданное невозмущенное движение будет устойчивым, если в результате приложения внешних воздействий (которые затем снимаются) возмущенное движение по истечении некоторого времени войдет в заданную область: $|x_i(t) - x_{i0}(t)| \leq \varepsilon_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

Ни одна реальная система автоматического управления не является

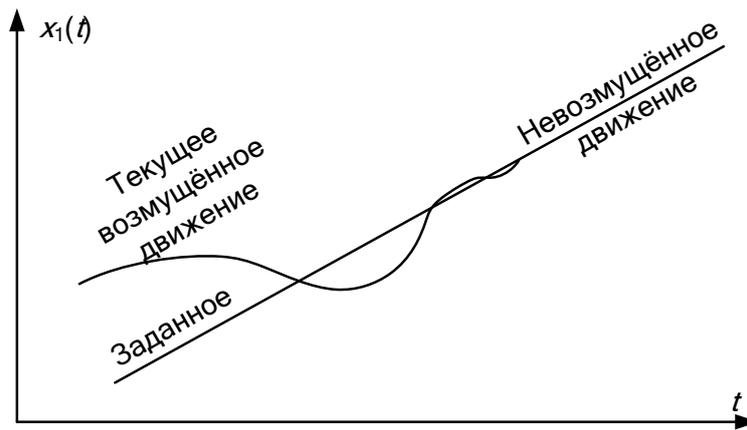


Рис. 4.2. Иллюстрация понятия устойчивости движения системы

строго линейной, а линейные уравнения САУ получают на основании специальной процедуры – линеаризации.

Обоснование законности такой линеаризации содержится в теоремах А.М.Ляпунова:

1. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то реальная система будет устойчивой, т. е. малые нелинейные члены не могут в этом случае нарушить устойчивость системы.

2. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то реальная система будет неустойчивой, т. е. малые нелинейные члены не могут сделать её устойчивой.

3. При наличии нулевых и чисто мнимых корней система находится на границе устойчивости и поведение реальной системы не всегда даже качественно определяется её линеаризованными уравнениями. При этом даже малые нелинейные члены могут коренным образом изменить вид переходного процесса, сделав систему устойчивой или неустойчивой.

Необходимым, но не достаточным условием устойчивости системы является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения. Оно достаточно только для уравнений первого и второго порядков.

4.1.1 Условие устойчивости систем автоматического управления

Уравнение системы автоматического управления относительно регулируемой величины имеет вид:

$$D(p)x(t) = R(p)g(t) + K(p)f(t). \quad (4.1)$$

Рассмотрим условие устойчивости САУ, описываемой уравнением (4.1).

Решение этого уравнения:

$$x(t) = \underbrace{x_{\text{вын}}(t)}_{\text{невозмущенное движение}} + \underbrace{x_{\text{перех}}(t)}_{\text{возмущенное движение}},$$

где $x_{\text{вын}}(t)$ – составляющая, характеризующая невозмущенное движение системы; находится как решение неоднородных уравнений:

$$D(p)x(t) = R(p)g(t); \quad D(p)x(t) = K(p)f(t) \quad (4.2)$$

при нулевых начальных условиях.

А переходная составляющая $x_{\text{перех}}(t)$ – характер поведения которой и определяет, является ли система устойчивой или неустойчивой – находится как решение однородного уравнения:

$$D(p)x(t) = 0, \quad (4.3)$$

т. е. уравнения:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n)x(t) = 0 \quad (4.4)$$

при заданных начальных условиях.

Решение его записывается в виде:

$$x_{\text{перех}}(t) = \sum_1^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (4.5)$$

где λ_i – корни характеристического уравнения:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (4.6)$$

составленного по уравнению (4.4) путем замены символа дифференцирования в дифференциальном операторе левой части этого уравнения

$$p = \frac{d}{dt} \text{ на } \lambda.$$

Если с течением времени переходная составляющая стремится к нулю, то система асимптотически устойчива. Рассмотрим, когда это условие выполняется:

1) корни вещественные (рис. 4.3): $\lambda_1 = -\alpha_1; \lambda_2 = \alpha_2;$

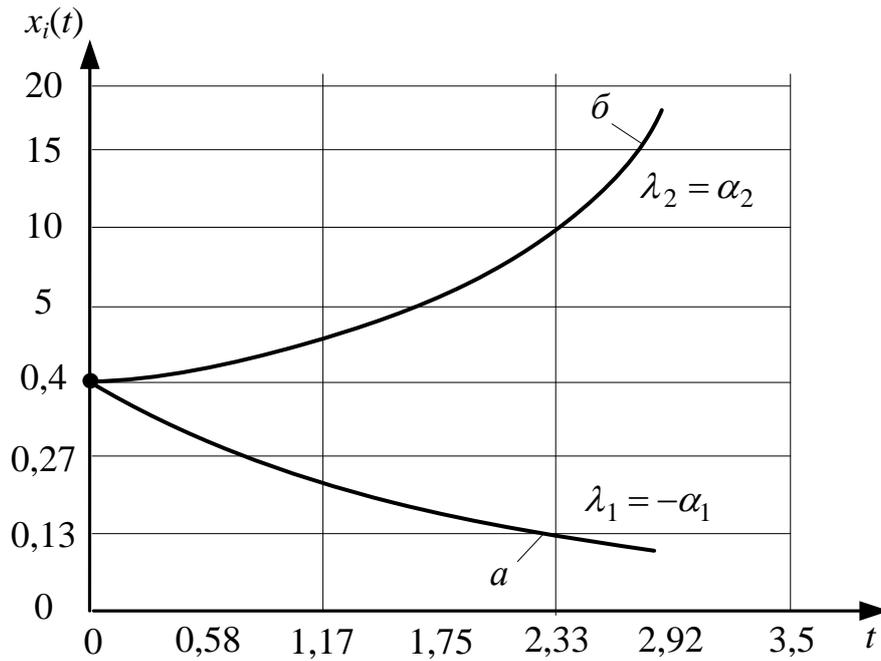


Рис. 4.3. Переходные процессы системы при вещественных корнях характеристического уравнения: а – устойчивой; б – неустойчивой

- 2) корни комплексно-сопряженные (рис. 4.4 и 4.5): $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$;
 $\lambda_{1,2} = +\alpha \pm j\beta$;

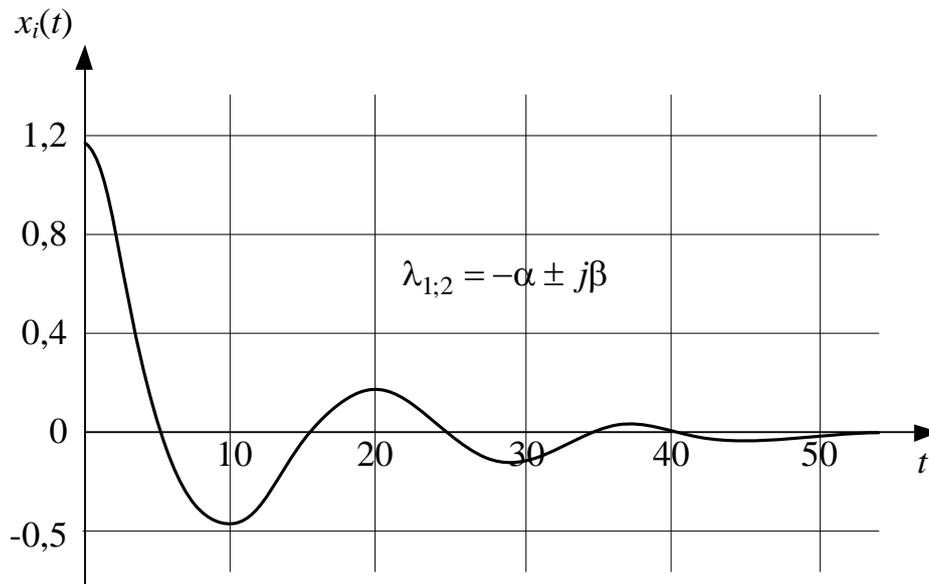


Рис. 4.4. Переходный процесс устойчивой системы при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения

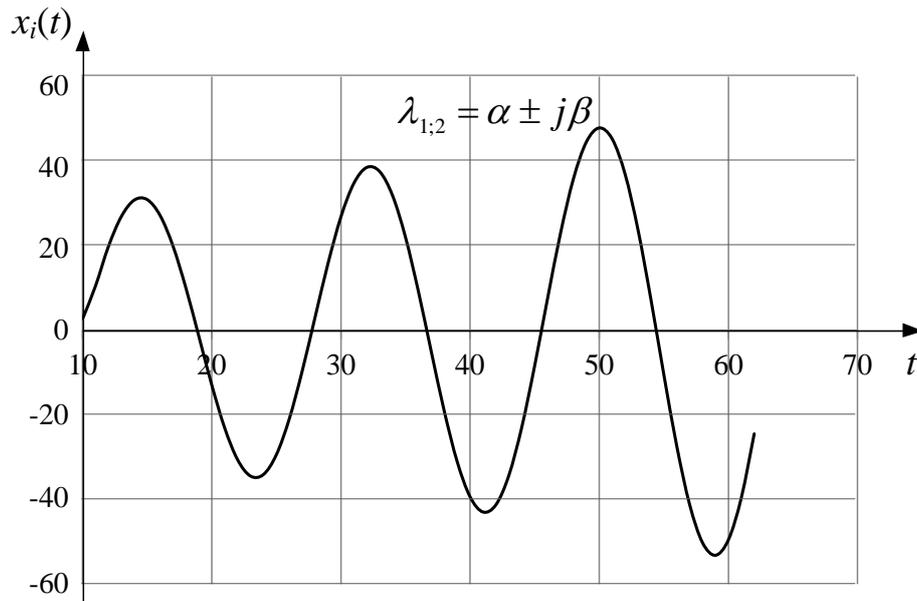


Рис. 4.5. Переходный процесс неустойчивой системы при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения

3) корни чисто мнимые (рис. 4.6): $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$.

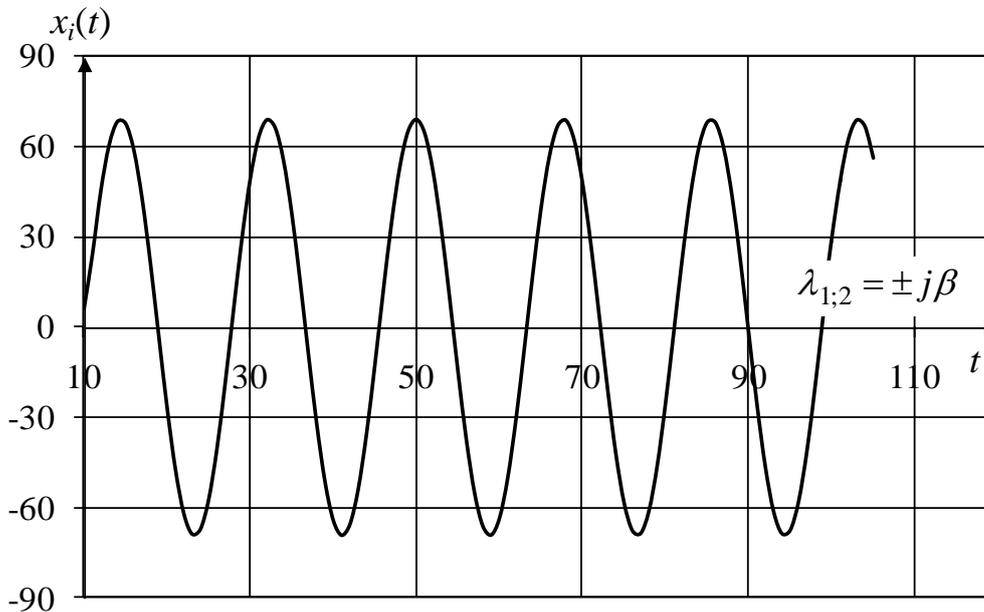


Рис. 4.6. Переходный процесс системы, находящейся на границе устойчивости, при чисто мнимых корнях характеристического уравнения

Итак, из анализа поведения приведенных выше возможных составляющих $x_{\text{перех}}(t)$ (рис. 4.3–4.6) можно сформулировать условие устойчивости линейной системы:

Чтобы линейная система была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни её характеристического уравнения были левыми, т. е. имели отрицательные вещественные части (рис. 4.7).

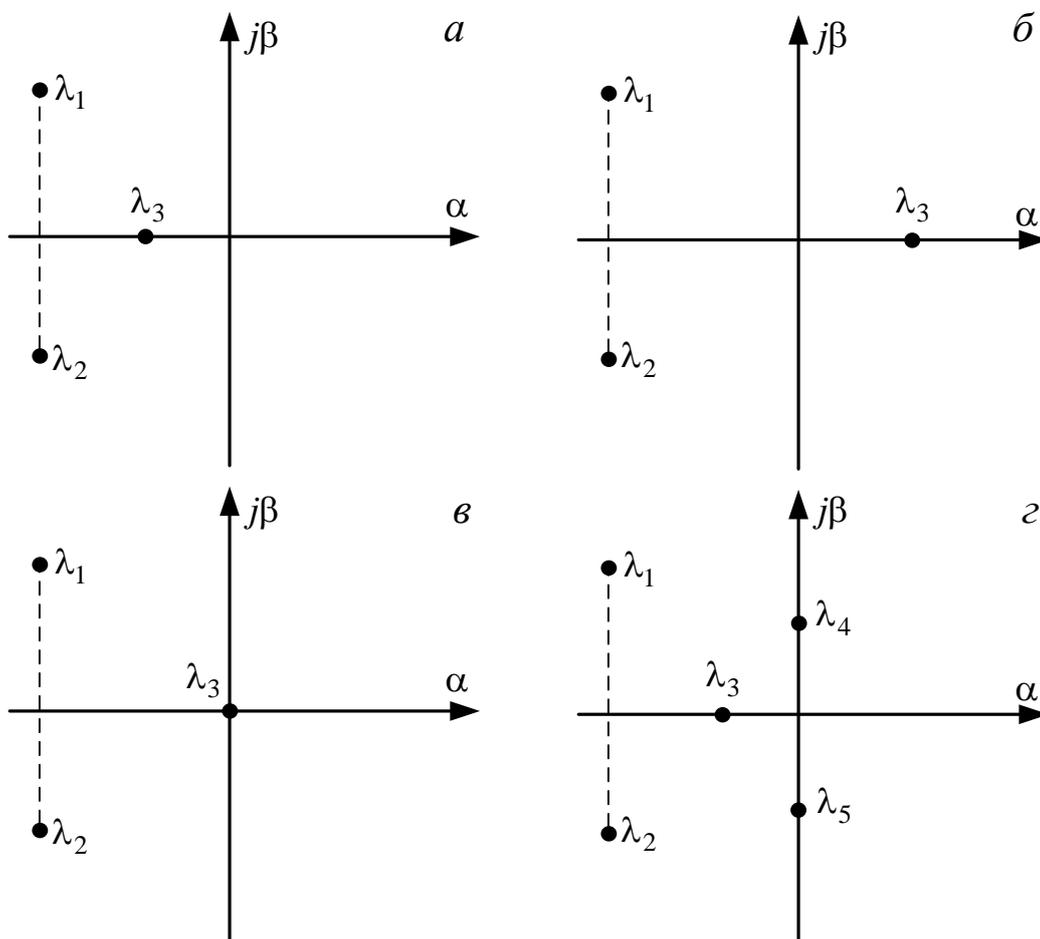


Рис. 4.7. Положения корней на комплексной плоскости:
а – устойчивой системы; *б* – неустойчивой системы; *в* – системы, находящейся на аperiodической границе устойчивости; *г* – системы, находящейся на колебательной границе устойчивости

Математическая формулировка условий, которым должны удовлетворять коэффициенты характеристического уравнения или какие-либо функции этих коэффициентов, для того чтобы система была устойчива, называется критерием устойчивости. Различают алгебраические и частотные критерии устойчивости.

4.2 Алгебраические критерии устойчивости систем автоматического управления

Алгебраические критерии устойчивости САУ представляют собой алгебраические неравенства, связывающие между собой коэффициенты

a_i характеристического уравнения замкнутой САУ, при которых корни этого характеристического уравнения являются левыми, а значит система – устойчивой.

1. Критерий Рауса – предложен английским математиком Э.Раусом в 1877 г.
2. Критерий Гурвица – разработан в 1895г. немецким математиком А.Гурвицем.

Идея критериев устойчивости – исследовать устойчивость САУ, минуя процедуру вычисления корней характеристических уравнений высоких порядков.

С помощью критериев устанавливается не только сам факт устойчивости, но и характер влияния на устойчивость системы отдельных параметров САУ.

Задано уравнение замкнутой системы автоматического управления $D(p) x(t) = R(p) g(t) + K(p) f(t)$ либо передаточная функция замкнутой системы относительно любого входного воздействия $W_{xg} = \frac{R(s)}{D(s)}$;

$W_{xf} = \frac{K(s)}{D(s)}$. При применении алгебраических критериев (Рауса и Гурвица) анализируется характеристический полином замкнутой САУ, который может быть получен:

- из дифференциального оператора левой части дифференциального уравнения замкнутой САУ:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots a_{n-1} p + a_n;$$

- из полинома знаменателя передаточной функции замкнутой САУ:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots a_{n-1} s + a_n;$$

- из полинома знаменателя АФЧХ замкнутой САУ:

$$D(p) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + a_2 (j\omega)^{n-2} + \dots a_{n-1} (j\omega) + a_n.$$

4.2.1 Критерий устойчивости систем автоматического управления Рауса

Применение критерия требует составления таблицы Рауса. Элементами её первой строки являются четные коэффициенты характеристического полинома замкнутой САУ, начиная с a_0 . Элементы второй его строки – нечетные коэффициенты, начиная с a_1 . Элементы остальных строк определяются по формуле:

$$c_{ik} = \begin{vmatrix} c_{i-2;k+1} & r_i \\ c_{i-1;k+1} & 1 \end{vmatrix} = c_{i-2;k+1} - r_i c_{i-1;k+1}; \quad r_i = \frac{c_{i-2;1}}{c_{i-1;1}}.$$

где i – номер строки; k – номер столбца.

Всего в таблице заполняют $(n+1)$ строк (n – порядок характеристического полинома).

Таблица 4.1

Таблица Рауса

Вспомогательные коэффициенты	Номер строки	Номер столбца			
		1	2	3	...
–	1	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$...
–	2	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23} = a_5$...
$r_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}} = \frac{a_0}{a_1}$	3	$c_{31} = c_{12} - r_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - r_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - r_3 c_{24}$...
$r_4 = \frac{c_{21}}{c_{31}} = \frac{a_1}{a_{31}}$	4	$c_{41} = c_{22} - r_4 c_{32}$	$c_{42} = c_{23} - r_4 c_{33}$	$c_{43} = c_{24} - r_4 c_{34}$...
...
$r_i = \frac{c_{i-2;1}}{c_{i-1;1}}$	i	$c_{i1} = c_{i-2;2} - r_i c_{i-1;2}$	$c_{i2} = c_{i-2;3} - r_i c_{i-1;3}$	$c_{i3} = c_{i-2;4} - r_i c_{i-1;4}$...
...
–	–	–	–	–	–

Система устойчива, если все элементы первого столбца таблицы Рауса имеют одинаковый знак. Обычно характеристическое уравнение приводят к такому виду, когда $a_0 > 0$. Тогда для устойчивости системы все остальные элементы первого столбца таблицы Рауса должны быть положительными:

$$c_{i1} > 0, i = 2, 3, \dots, n+1.$$

При наличии отрицательных элементов в первом столбце таблицы Рауса система неустойчива. Число таких элементов равно числу корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью.

Если один из промежуточных элементов первого столбца таблицы Рауса равен нулю, а остальные элементы положительные, то система – на границе устойчивости (характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней).

При равенстве нулю последнего $(n+1)$ -го элемента или v последних элементов первого столбца система также на границе устойчивости –

характеристическое уравнение имеет соответственно один или ν нулевых корней.

4.2.2 Критерий устойчивости систем автоматического управления Гурвица

Этот критерий опубликован А.Гурвицем в 1895 году.

Для того, чтобы все корни характеристического уравнения были левыми, а значит линейная САУ была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица были одного знака с a_0 .

Определители Гурвица составляются по коэффициентам характеристического уравнения замкнутой системы на основании заданного дифференциального уравнения либо передаточной функции замкнутой САУ.

Правило образования определителей Гурвица:

- верхняя строка – коэффициенты с нечетными индексами от 1 до $n(k)$, оставшиеся члены заполняются нулями;
- вторая строка – коэффициенты с четными индексами.

А вниз от каждого элемента верхней строки идут коэффициенты с индексами меньше на единицу, ниже a_0 ставятся нули.

Рассмотрим правило построения определителей Гурвица на примере системы седьмого порядка:

$$a_0\lambda^7 + a_1\lambda^6 + a_2\lambda^5 + a_3\lambda^4 + a_4\lambda^3 + a_5\lambda^2 + a_6\lambda + a_7 = 0.$$

Порядок системы – 7, поэтому составляется симметричная матрица 7×7 :

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \end{vmatrix} = a_7 \Delta_6.$$

Так как характеристическое уравнение обычно приводится к виду, где $a_0 > 0$, то для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица были положительны:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_n \Delta_{n-1}.$$

Диагональные миноры определяются как:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 1; 2; n.$$

Для систем до 4-го порядка включительно условие положительности всех Δ_k (при $a_0 > 0$) можно заменить более простым эквивалентным условием.

Для устойчивости систем до 4-го порядка включительно необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы и определитель Δ_{n-1} были положительными.

1. Система 1-го порядка: $a_0\lambda + a_1 = 0$. Условие устойчивости: $a_0 > 0$; $\Delta_1 = a_1 > 0$. Коэффициенты > 0 .

2. Система 2-го порядка: $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Условие устойчивости: $a_0 > 0$; $\Delta_1 = a_1 > 0$; $\Delta_2 = a_1a_2 > 0 \rightarrow a_2 > 0$. Коэффициенты > 0 .

Итак, условием устойчивости систем 1-го и 2-го порядков является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

3. Система 3-го порядка: $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$. Условие устойчивости: $a_0 > 0$; $\dots \Delta_1 = a_1 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$.

Для уравнения 3-го порядка необходимо и достаточно, чтобы все его коэффициенты были положительными: $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $a_2 > 0$; $a_3 > 0$; \dots ; $a_i > 0$ и $\Delta_2 > 0 \rightarrow \Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2 > 0$.

4. Система 4-го порядка: $a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \Delta_3.$$

Условие устойчивости: $a_i > 0$; $\Delta_3 = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4 a_1^2 > 0$; $a_i > 0$ и $\Delta_3 > 0$.

Для САУ более высоких порядков нужны добавочные условия.

Обычно для САУ низкого порядка при исследовании устойчивости используют критерий Гурвица, для САУ высокого порядка – критерий Рауса.

Условие нахождения САУ на границе устойчивости:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0,$$

тогда:

$$\begin{cases} a_n = 0 & \text{– условие апериодической границы устойчивости;} \\ \Delta_{n-1} = 0 & \text{– условие колебательной границы устойчивости.} \end{cases}$$

4.3 Частотные критерии устойчивости систем автоматического управления

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем автоматического управления по виду их частотных характеристик. Эти критерии являются графоаналитическими и получили широкое распространение, так как позволяют сравнительно легко исследовать устойчивость систем высокого порядка, а также имеют простую геометрическую интерпретацию и наглядность. Частотные критерии используются для решения важных прикладных задач ТАУ, таких как построение областей устойчивости в плоскости параметров САУ, расчет параметров настройки регуляторов и т. п.

4.3.1 Принцип аргумента

В основе частотных критериев устойчивости лежит следствие из известного в теории функции комплексного переменного принципа аргумента, который состоит в следующем.

Пусть дан некоторый полином n -й степени:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n. \quad (4.7)$$

Этот полином в соответствии с теоремой Безу можно представить в виде

$$D(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n), \quad (4.8)$$

где $s_i = \alpha_i + j\omega_i$ – корни уравнения $D(s) = 0$.

На комплексной плоскости s каждый корень геометрически может быть изображен вектором, проведенным из начала координат к точке s_i (рис. 4.8, а). Длина этого вектора равно модулю комплексного числа s_i , т. е. $|s_i|$, а угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси, – аргументу или фазе комплексного числа s_i , т. е. $\text{Arg } s_i$.

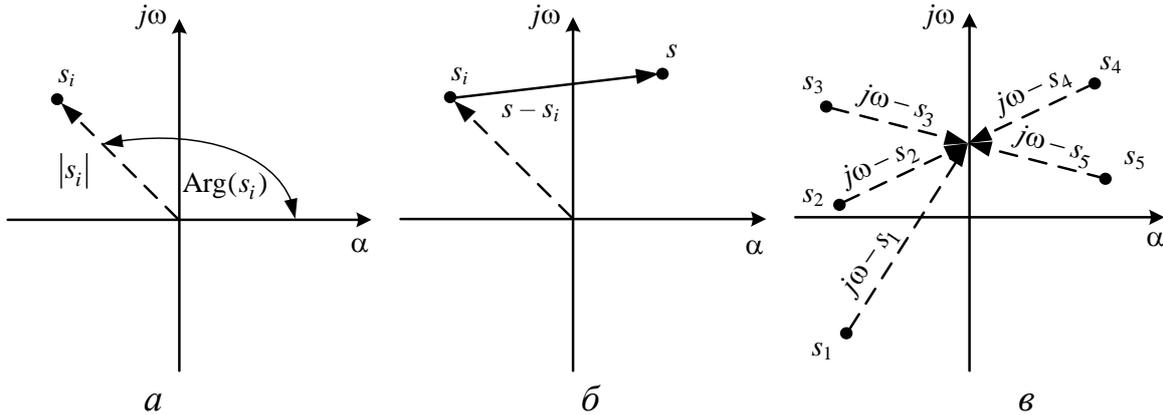


Рис. 4.8. Геометрическое изображение корней уравнения $D(s) = 0$ на комплексной плоскости

Величины $(s - s_i)$ геометрически изображаются векторами, проведенными из точки s_i к произвольной точке s (рис. 4.8, б).

В частном случае при $s = j\omega$ получим из (4.8):

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n). \quad (4.9)$$

Концы элементарных векторов $(j\omega - s_i)$ будут находиться на мнимой оси в точке $s = j\omega$ (рис. 4.8, в).

В выражении (4.9) $D(j\omega)$ представляет собой вектор, равный произведению элементарных векторов $(j\omega - s_i)$ и действительного числа a_0 .

Модуль этого вектора равен произведению модулей элементарных векторов и a_0 :

$$|D(j\omega)| = a_0 |(j\omega - s_1)| |(j\omega - s_2)| \dots |(j\omega - s_n)|, \quad (4.10)$$

а аргумент или фаза его равна сумме аргументов элементарных векторов:

$$\text{Arg} D(j\omega) = \text{Arg}(j\omega - s_1) + \text{Arg}(j\omega - s_2) + \dots + \text{Arg}(j\omega - s_n). \quad (4.11)$$

Условимся считать вращение против часовой стрелки положительным. Тогда при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый элементарный вектор повернется на:

- угол π , если его начало, т. е. корень s_i , расположен слева от мнимой оси,
- и на угол $-\pi$, если корень расположен справа от мнимой оси (рис. 4.9).

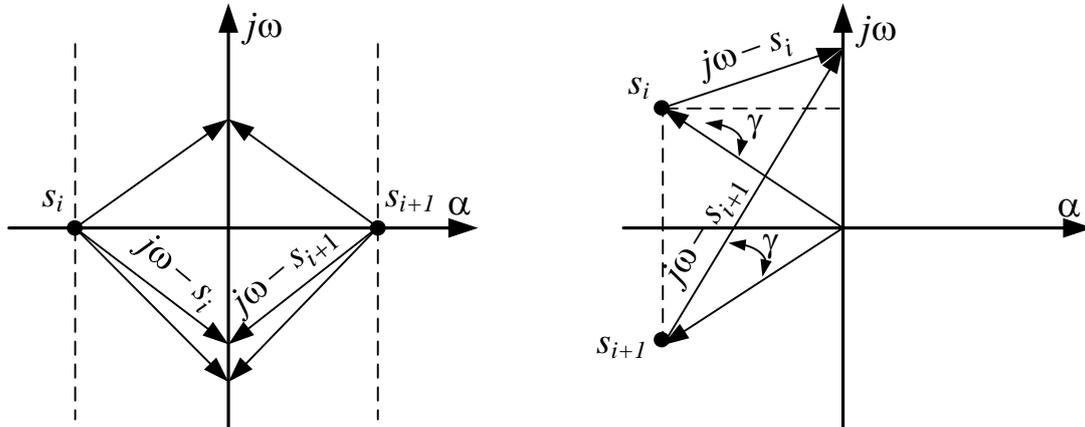


Рис. 4.9. Геометрическая трактовка принципа приращения аргумента вектора $D(j\omega)$

Предположим, что полином $D(s)$ имеет k правых корней и $(n - k)$ левых.

Тогда при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ изменение (приращение) аргумента $D(j\omega)$, равное сумме углов поворотов векторов $(j\omega - s_i)$, равно:

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega = -\infty}^{\omega = \infty} = \pi(n - k) - \pi k = \pi(n - 2k). \quad (4.12)$$

Очевидно, что при изменении частоты от 0 до $+\infty$, изменение (приращение) аргумента вектора $D(j\omega)$ будет вдвое меньше:

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega = 0}^{\omega = \infty} = \frac{\pi}{2}(n - 2k). \quad (4.13)$$

В основу частотных критериев устойчивости положены выражения (4.12) либо (4.13), формализующие «принцип аргумента» из теории функций комплексного переменного.

4.3.2 Критерий устойчивости систем автоматического управления Михайлова

Этот критерий устойчивости, сформулированный в 1938 г. советским ученым Михайловым А.В., является, по существу, геометрической интерпретацией принципа аргумента и позволяет судить об устойчивости систем на основании рассмотрения некоторой кривой, называемой

кривой Михайлова. Исходным материалом является дифференциальное уравнение, передаточная функция, либо АФЧХ замкнутой системы.

Полином левой части дифференциального уравнения замкнутой системы, либо знаменатель передаточной функции замкнутой системы есть исходный характеристический полином замкнутой системы:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n. \quad (4.14)$$

Если подставить в этот полином чисто мнимое значение $s = j\omega$, то получим комплексный полином, называемый полиномом Михайлова:

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + \dots + a_{n-1} j\omega + a_n = U(\omega) + jV(\omega) = D(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4.15)$$

где $U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots$ и $V(\omega) = \omega(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - \dots)$ – вещественная и мнимая функции Михайлова соответственно.

Функции $D(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ представляют собой модуль и фазу (аргумент) вектора $D(j\omega)$.

При изменении частоты ω вектор $D(j\omega)$, изменяясь по величине и направлению, будет описывать своим концом в комплексной плоскости кривую, называемую кривой (годографом) Михайлова.

Согласно принципу аргумента, угол поворота вектора $D(j\omega)$ вокруг начала координат при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ равен:

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} (n - 2k), \quad (4.16)$$

где n – порядок САУ; k – число правых корней характеристического полинома.

Отсюда определяем число правых корней полинома $D(s)$ (4.14), т. е.:

$$k = \frac{\frac{n\pi}{2} - \Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}}{\pi}. \quad (4.17)$$

Из (4.17) следует, что число правых корней k будет равно нулю при условии:

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{n\pi}{2}. \quad (4.18)$$

Условие (4.18) является необходимым, но не достаточным условием устойчивости.

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все n корней характеристического уравнения замкнутой САУ были левыми, иначе говоря, среди них не должно быть корней, лежащих на мнимой

оси и обращающих в нуль комплексный полином $D(j\omega)$, т. е. должно выполняться еще одно условие:

$$D(j\omega) \neq 0. \quad (4.19)$$

Формулы (4.18) и (4.19) представляют математическое выражение критерия устойчивости Михайлова:

Для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $n\frac{\pi}{2}$, где n – порядок характеристического полинома.

Заметим, что для устойчивых САУ кривая Михайлова начинается при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, поскольку при $a_0 > 0$, все коэффициенты характеристического полинома положительны и $D(0) = a_n > 0$.

Кроме того, для устойчивых САУ, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, фаза (аргумент) $\varphi(\omega)$ с ростом частоты ω должна возрастать монотонно, т. е. вектор $D(j\omega)$ должен поворачиваться только против часовой стрелки, поскольку с ростом частоты монотонно возрастают имеющие одинаковые (положительные) знаки фазы элементарных векторов $(j\omega - s_i)$, являющиеся слагаемыми фазы вектора $D(j\omega)$.

Учитывая сказанное выше, критерий устойчивости Михайлова можно сформулировать следующим образом.

Для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты от 0 до $+\infty$, начинаясь при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости; n – порядок характеристического уравнения.

Кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем конец её уходит в бесконечность в том квадранте координатной плоскости, номер которой равен порядку характеристического уравнения (степени полинома).

Кривые Михайлова устойчивых замкнутых САУ, описываемых дифференциальными уравнениями от первого ($n = 1$) до пятого ($n = 5$) порядков, приведены на рис. 4.10. Для удобства сравнения коэффициенты a_n во всех случаях приняты одинаковыми.

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности пройденных кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости, вследствие чего угол поворота вектора $D(j\omega)$ оказывается меньше, чем $n\frac{\pi}{2}$.

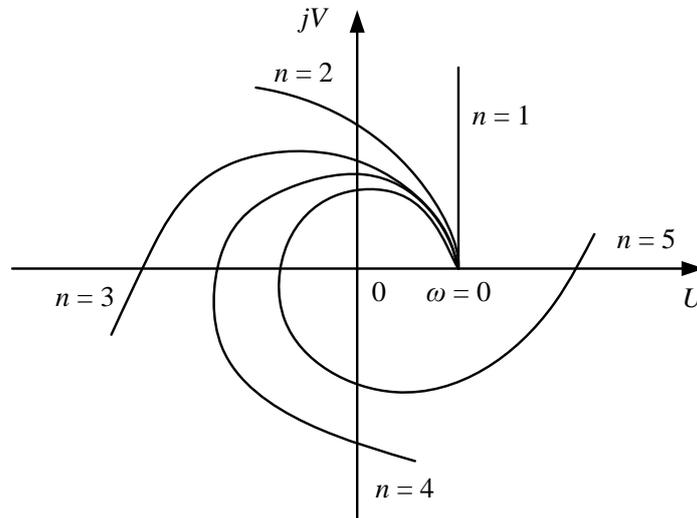


Рис. 4.10. Кривые (годографы) Михайлова для устойчивых САУ различных порядков

Число правых корней неустойчивой системы можно определить по формуле (4.17).

На рис. 4.11 показаны кривые Михайлова для неустойчивых систем.

На рис. 4.11, а система неустойчива, т. к. при $\omega = 0$ кривая Михайлова начинается на отрицательной вещественной полуоси.

На рис. 4.11, б порядок уравнения $n = 5$, а кривая Михайлова полностью находится в одном квадранте, следовательно, система неустойчива.

На рис. 4.11, в система неустойчива, т. к. нарушена последовательность прохождения квадрантов.

Условие нахождения САУ на границе устойчивости по Михайлову (рис. 4.12):

$$D(j\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} U(\omega) = 0 \\ V(\omega) = 0 \end{cases}$$

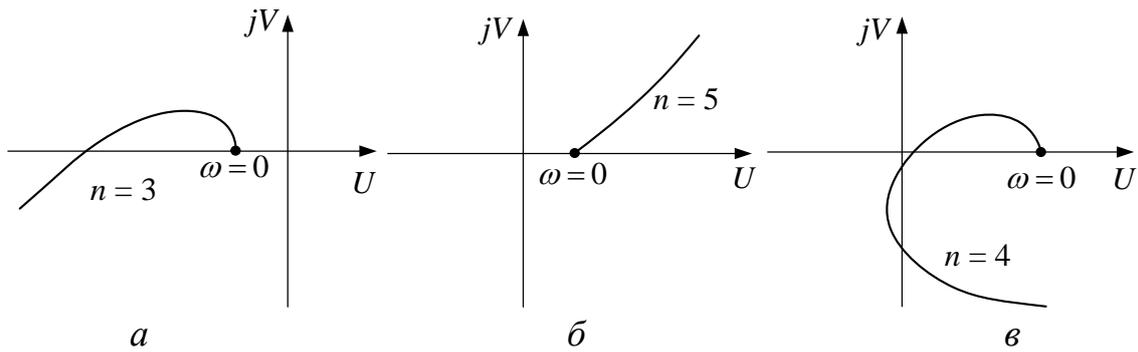


Рис. 4.11. Кривые Михайлова неустойчивых замкнутых САУ

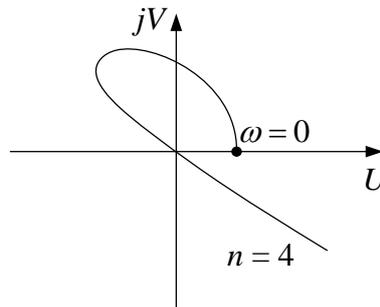


Рис. 4.12. Кривая Михайлова замкнутой САУ на границе устойчивости

4.3.3 Критерий устойчивости систем автоматического управления Найквиста

Опубликован в 1932г. американским ученым Найквистом.

Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой САУ (рис. 4.13) по амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы.

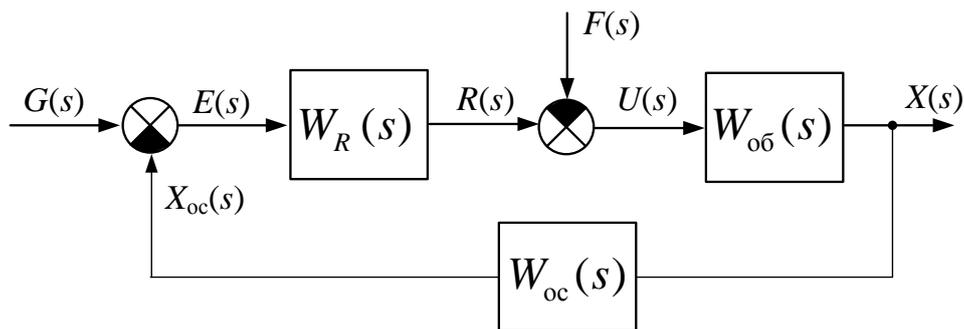


Рис. 4.13. Структурная схема замкнутой САУ

Передаточная функция замкнутой системы относительно сигнала рассогласования по задающему воздействию:

$$W_{\varepsilon g}(s) = \frac{W_{\text{np}}^{g\varepsilon}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)}. \quad (4.20)$$

Рассмотрим знаменатель передаточной функции замкнутой системы:

$$1 + W_{\text{раз}}(s) = 1 + \frac{K_{\text{раз}}(s)}{D_{\text{раз}}(s)} = \frac{D_{\text{раз}}(s) + K_{\text{раз}}(s)}{D_{\text{раз}}(s)}. \quad (4.21)$$

Числитель выражения (4.21) $D_{\text{раз}}(s) + K_{\text{раз}}(s)$ есть характеристический полином замкнутой системы $D_3(s)$, знаменатель $D_{\text{раз}}(s)$ – характеристический полином разомкнутой системы.

Так как в технически реализуемых системах порядок полинома $K_{\text{раз}}(s)$ не выше порядка полинома $D_{\text{раз}}(s)$, то порядки полиномов числителя и знаменателя выражения (4.21) равны между собой и равны n .

Тогда характеристические полиномы разомкнутой и замкнутой САУ соответствуют следующим выражениям:

$$\begin{cases} D_{\text{раз}}(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n; \\ D_3(s) = D_{\text{раз}}(s) + K_{\text{раз}}(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n. \end{cases} \quad (4.22)$$

Заменим $s = j\omega$, тогда:

$$1 + W_{\text{раз}}(j\omega) = \frac{D_{\text{раз}}(j\omega) + K_{\text{раз}}(j\omega)}{D_{\text{раз}}(j\omega)} = \frac{D_3(j\omega)}{D_{\text{раз}}(j\omega)}. \quad (4.23)$$

Примем, что характеристическое уравнение замкнутой САУ $D_3(s) = 0$ имеет l правых корней и $(n - l)$ левых корней. А характеристическое уравнение разомкнутой САУ $D_{\text{раз}}(s) = 0$ – k правых и $(n - k)$ левых корней.

Тогда приращение аргумента вектора $1 + W_{\text{раз}}(j\omega)$ равно:

$$\Delta \text{Arg} [1 + W_{\text{раз}}(j\omega)]_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \pi [(n - l) - l] - \pi [(n - k) - k] = 2\pi(k - l). \quad (4.24)$$

$$\Delta \text{Arg} [1 + W_{\text{раз}}(j\omega)]_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi(k - l). \quad (4.25)$$

Для устойчивости замкнутой САУ необходимо и достаточно, чтобы все корни её характеристического уравнения были левыми, т. е. $l = 0$.

Отсюда следует, что суммарный поворот вектора $1 + W_{\text{раз}}(j\omega)$ устойчивой САУ вокруг начала координат при изменении частоты от 0 до $+\infty$ в направлении против часовой стрелки должен быть равен πk .

На комплексной плоскости начало вектора $(1 + W_{\text{раз}}(j\omega))$ находится в точке с координатами: $(-1; j0)$, а конец на АФЧХ разомкнутой системы,

т. к. $W_{раз}(j\omega)$ есть амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы.

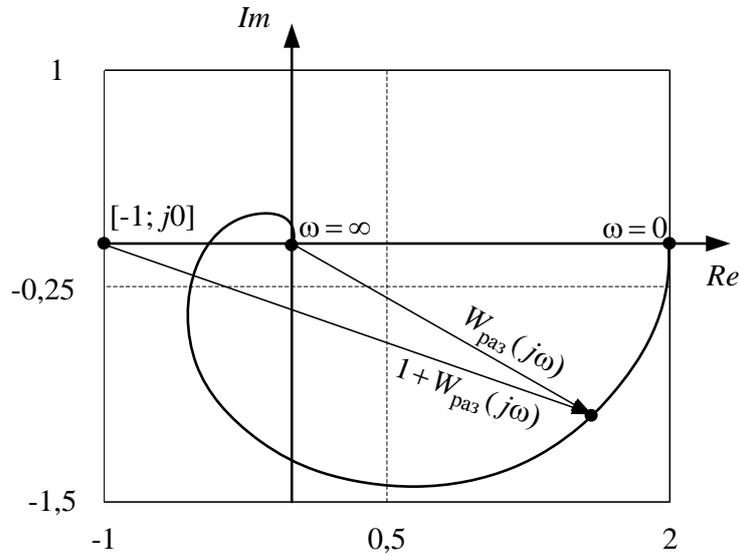
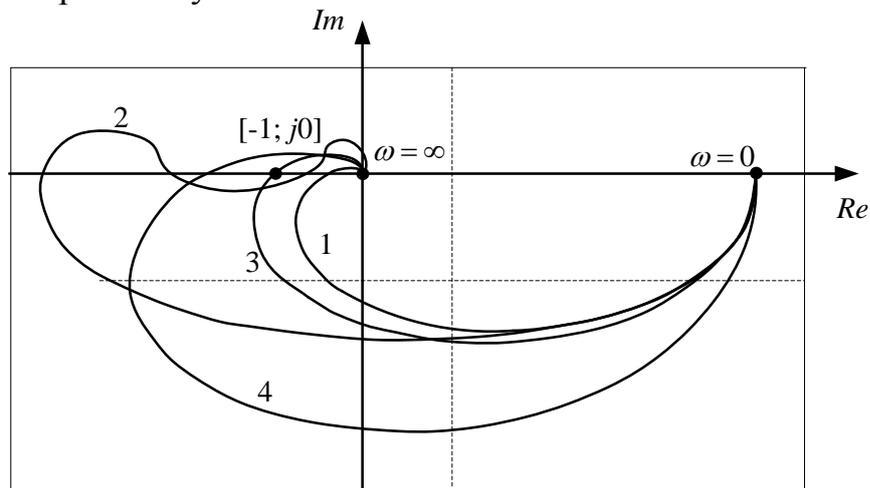


Рис. 4.14. Годограф АФЧХ устойчивой САУ

Из этого следуют формулировки критерия Найквиста.

Если разомкнутая система автоматического управления устойчивая, $k = 0$, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы при изменении ω от 0 до $+\infty$ не охватывала точку с координатами $[-1; j0]$ (рис. 4.14).

На рис. 4.15 изображены примеры амплитудно-фазовых частотных характеристик разомкнутых систем.



1 – замкнутая система абсолютно устойчива; 2 – замкнутая система условно устойчива; 3 – замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости; 4 – замкнутая система неустойчива.

Рис. 4.15. Типовые годографы АФЧХ разомкнутых САУ

Если же разомкнутая система автоматического управления неустойчива, то для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика неустойчивой разомкнутой системы ($k > 0$) при изменении частоты от 0 до $+\infty$ охватывала точку $[-1; j0]$ в положительном направлении $(k/2)$ раз, где k – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Назовем переход $W_{\text{раз}}(j\omega)$ через вещественную ось слева от точки $[-1; j0]$, т. е. через отрезок $(-\infty; -1)$, положительным, если он идет сверху вниз, и отрицательным, если он идет снизу вверх. Если $W_{\text{раз}}(j\omega)$ начинается на отрезке $(-\infty; -1)$ при $\omega = 0$, или заканчивается на нем при $\omega = +\infty$, то в этих случаях считают, что она совершила полперехода.

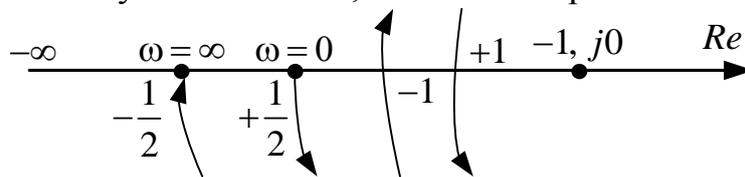


Рис. 4.16. Переходы $W_{\text{раз}}(j\omega)$ через вещественную ось слева от точки $[-1; j0]$

Тогда критерий Найквиста можно сформулировать так: если разомкнутая система автоматического управления неустойчива, то для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов АФЧХ разомкнутой САУ через отрезок вещественной оси $(-\infty; -1)$ при изменении частоты от 0 до $+\infty$ была равна $(k/2)$, где k – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой САУ.

4.3.4 Критерий Найквиста для астатических систем автоматического управления

Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой астатической системы автоматического управления имеет вид:

$$W_{\text{раз}}(j\omega) = \frac{K_{\text{раз}}(j\omega)}{(j\omega)^{\nu} D_{0\text{раз}}(j\omega)}.$$

Для применения критерия Найквиста АФЧХ астатической системы условно начинается на вещественной положительной полуоси и при $\omega \rightarrow 0$ дугой бесконечно большого радиуса перемещается на угол, равный $-\nu \frac{\pi}{2}$.

Если разомкнутая астатическая система устойчивая, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы ампли-

тудно-фазовая частотная характеристика устойчивой разомкнутой системы при изменении ω от 0 до $+\infty$, дополненная на участке разрыва дугой бесконечно большого радиуса до вещественной положительной полуоси, не охватывала точку с координатами $[-1; j0]$ (рис. 4.17).

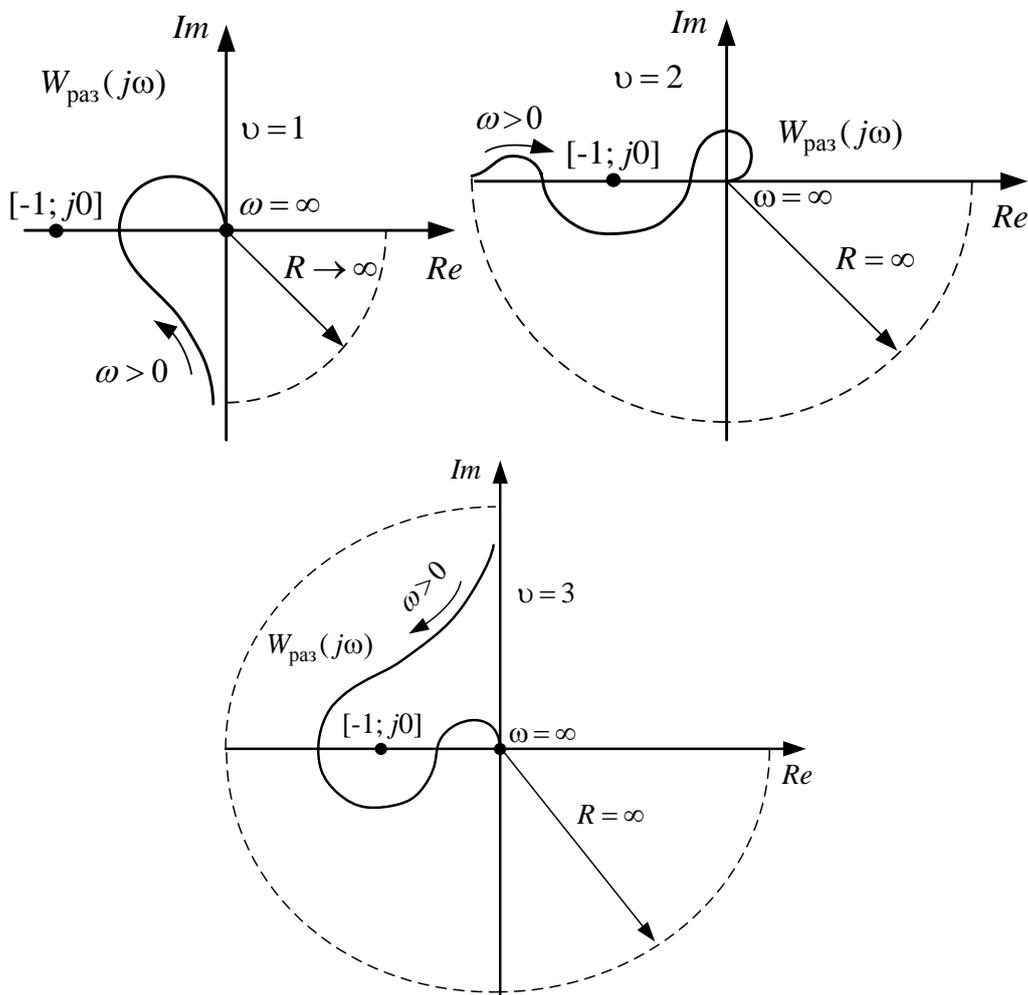


Рис. 4.17. Амплитудно-фазочастотные характеристики устойчивых разомкнутых систем

При неустойчивой разомкнутой астатической системе замкнутая система будет устойчива, если при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой астатической системы $W_{\text{раз}}(j\omega)$, дополненная дугой $\nu(\pi/2)$ бесконечно большого радиуса, охватит точку $[-1; j0]$ в положительном направлении $k/2$ раз, где k – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Астатическая система абсолютно устойчивой может быть лишь при степени астатизма $\nu \leq 2$. При большей степени астатизма может быть получена лишь условная устойчивость.

4.3.5 Критерий Найквиста по логарифмическим частотным характеристикам

Положительному переходу (сверху вниз) через отрезок $(-\infty; -1)$ характеристики $W_{\text{раз}}(j\omega)$ соответствует пересечение ЛФЧХ при $Lm > 0$ прямых $\pm\pi(2i + 1)$ снизу вверх (ω_7), а отрицательному переходу – сверху вниз (ω_6) (рис. 4.18).

Поэтому переход (пересечение) логарифмической фазочастотной характеристикой разомкнутой САУ линии (-180°) снизу вверх считается положительным переходом, а сверху вниз отрицательным.

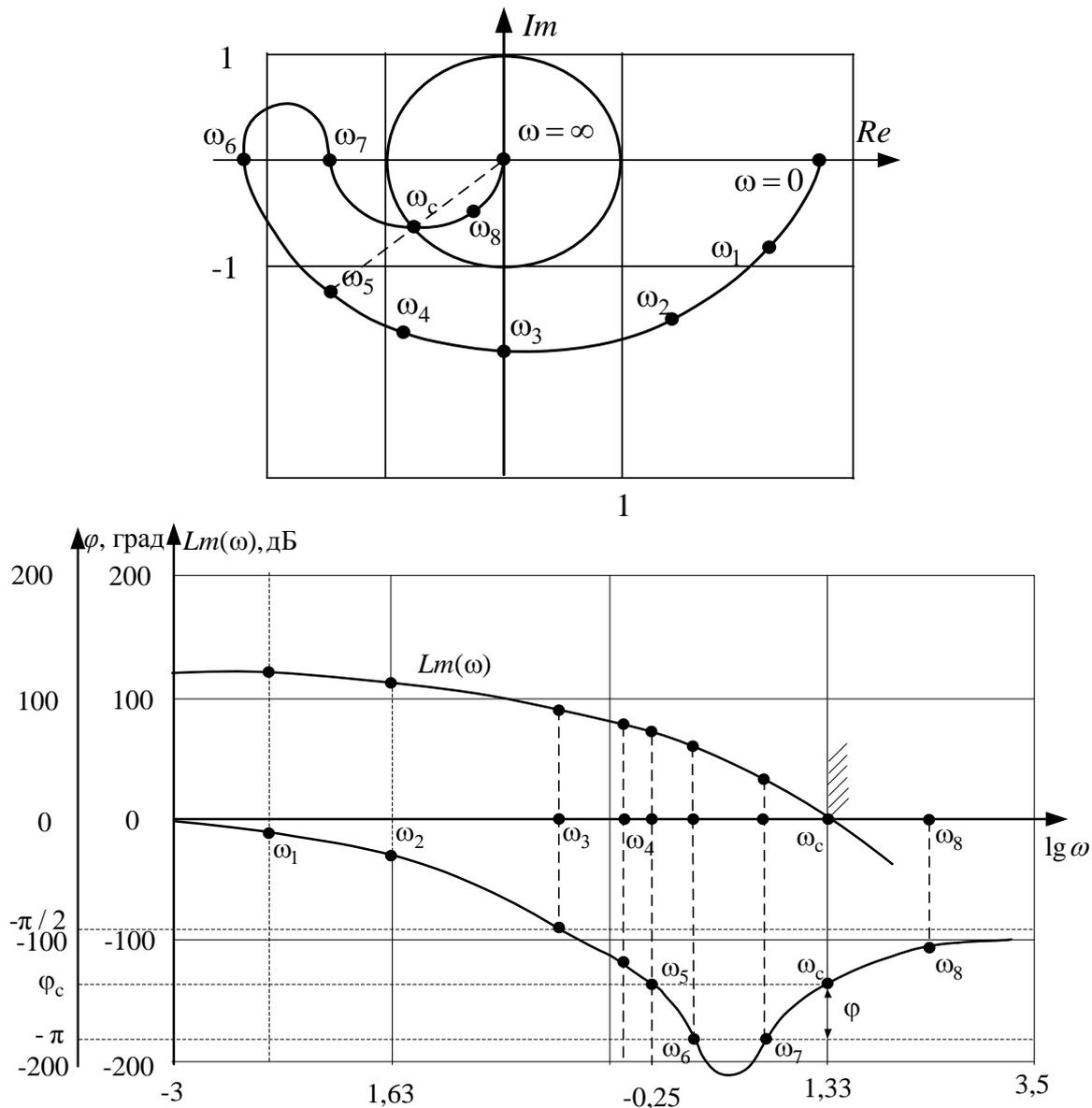


Рис. 4.18. Анализ устойчивости САУ по логарифмическим частотным характеристикам

Критерий устойчивости Найквиста применительно к логарифмическим частотным характеристикам может быть сформулирован следующим образом:

Для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов логарифмической фазочастотной характеристикой прямых $\pm\pi$ либо в общем случае $\pm\pi(2i + 1)$, где $i = 0, 1, 2, \dots$ во всех областях, где ЛАЧХ положительна $Lm > 0$, была равно $(k/2)$, где k – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой САУ.

4.4 Построение областей устойчивости в плоскости параметров системы автоматического управления. D–разбиение

При исследовании устойчивости большое практическое значение имеет построение областей устойчивости в плоскости одного или каких-либо двух параметров, влияние которых на устойчивость исследуют, а также построение семейства областей устойчивости в плоскости двух параметров при различных фиксированных значениях третьего параметра.

Уравнение границ областей устойчивости можно находить, пользуясь любым критерием устойчивости. Часто для этих целей используют критерий Михайлова.

4.4.1 Понятие о D–разбиении

Характеристическое уравнение замкнутой системы n –порядка имеет вид:

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (4.26)$$

или

$$D(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0, \quad (4.27)$$

где $c_i = a_i/a_0$.

Представим себе n –мерное пространство, по координатным осям которого отложены коэффициенты уравнения (4.27). Это пространство называют пространством коэффициентов. Каждой точке пространства коэффициентов соответствуют конкретные численные значения коэффициентов уравнения (4.27) и соответствующий им полином n -го порядка. Уравнение (4.27) имеет n корней, расположение которых на комплексной плоскости корней λ зависит от численных значений коэффициентов c_i .

Если изменять коэффициенты c_i уравнения (4.27), то его корни, в силу их непрерывной зависимости от коэффициентов, будут переме-

щаться в комплексной плоскости корней, описывая корневые годографы.

Чтобы представить сказанное выше геометрически, рассмотрим характеристическое уравнение третьего порядка ($n = 3$).

$$D(\lambda) = \lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0. \quad (4.28)$$

Если взять три взаимно-перпендикулярные оси и откладывать по ним значения коэффициентов c_1, c_2, c_3 , то получим трехмерное пространство коэффициентов, каждой точке которого (рис. 4.19) соответствует вполне определенный полином (4.28) и вполне определенные три корня в комплексной плоскости корней λ (рис. 4.20).

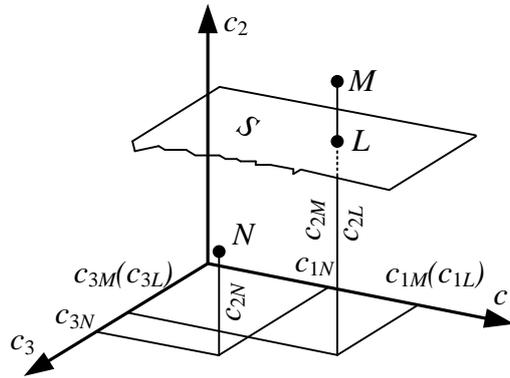


Рис. 4.19. 3х-мерное пространство коэффициентов полинома $D(\lambda)$

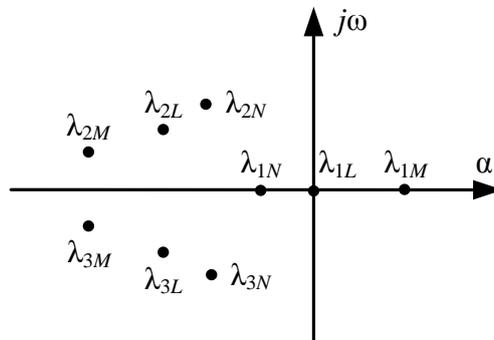


Рис. 4.20. Расположение корней полинома $D(\lambda)$ на комплексной плоскости

т.Н коэффициенты $c_{1N}; c_{2N}; c_{3N}$ полинома $D_N(\lambda) = \lambda^3 + c_{1N}\lambda^2 + c_{2N}\lambda + c_{3N}$

Его корни $\lambda_{1N} \lambda_{2N} \lambda_{3N}$

т.М коэффициенты $c_{1M}; c_{2M}; c_{3M}$ полинома $D_M(\lambda) = \lambda^3 + c_{1M}\lambda^2 + c_{2M}\lambda + c_{3M}$

Его корни $\lambda_{1M} \lambda_{2M} \lambda_{3M}$

т.Л коэффициенты $c_{1L}; c_{2L}; c_{3L}$ полинома $D_L(\lambda) = \lambda^3 + c_{1L}\lambda^2 + c_{2L}\lambda + c_{3L}$

Его корни $\lambda_{1L} \lambda_{2L} \lambda_{3L}$

При некоторых значениях коэффициентов уравнения (4.28) один из корней попадает в начало координат или пара корней попадает на мнимую ось, т. е. корни его будут иметь вид 0 или $\pm j\omega_k$, и, следовательно, соответствующая точка в пространстве коэффициентов будет удовлетворять уравнению:

$$D(j\omega_k) = (j\omega_k)^3 + c_1(j\omega_k)^2 + c_2(j\omega_k) + c_3 = 0, \quad (4.29)$$

т. к. условие нахождения САУ на границе устойчивости по Михайлову $D(j\omega) = 0$.

Уравнению (4.29) при $-\infty < \omega < +\infty$ соответствует некоторая поверхность S , часть которой показана на рис. 4.19.

При изменении коэффициентов c_i корни характеристического уравнения также изменяются и попадают на мнимую ось тогда, когда точка в пространстве коэффициентов попадает на поверхность S . При пересечении такой поверхности S корни переходят из одной полуплоскости корней в другую.

Следовательно, поверхность S разделяет пространство коэффициентов на области, каждой точке которых соответствует определенное одинаковое число правых и левых корней.

Эти области обозначают $D(l)$, где l – число правых корней характеристического уравнения замкнутой системы.

Разбиение пространства коэффициентов на области с одинаковым числом правых корней внутри каждой области и выделение среди полученных областей области устойчивости называют методом D -разбиения.

Для характеристического уравнения третьего порядка в пространстве коэффициентов можно наметить четыре области: $D(3)$; $D(2)$; $D(1)$; $D(0)$. Последняя область $D(0)$ и будет областью устойчивости.

Если изменяются не все коэффициенты, а часть из них, например, два: c_1 и c_2 при $c_3 = \text{const}$, то вместо поверхности получим линию, которая является сечением поверхности S плоскостью $c_3 = \text{const}$.

Эта линия разделяет плоскость коэффициентов $c_1 \div c_2$ на области с одинаковым числом правых корней (рис. 4.21).

Для уравнений более высокого порядка ($n > 3$) вместо обычного трехмерного пространства получается многомерное пространство и гиперповерхности, разбивающие это пространство на области, что сильно усложняет задачу и рассмотрение теряет наглядность.

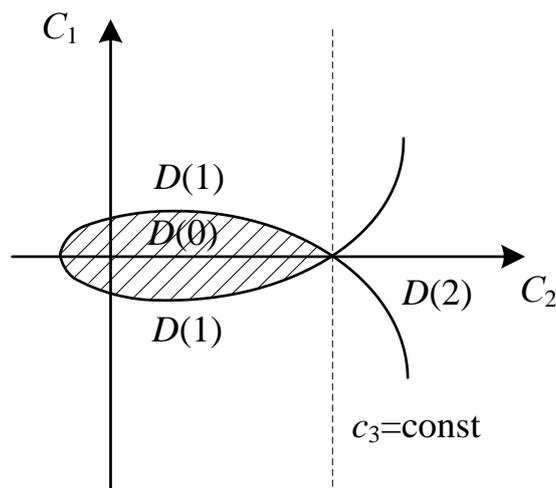


Рис. 4.21. Линия D -разбиения в плоскости коэффициентов c_1, c_2

Поскольку переход через границу D -разбиения в пространстве коэффициентов соответствует переходу корней характеристического уравнения через мнимую ось, то уравнение границы D -разбиения в общем случае имеет вид:

$$D(j\omega) = (j\omega)^n + c_1(j\omega)^{n-1} + \dots + c_n = 0. \quad (4.30)$$

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (4.31)$$

Из (4.31) видно, что это полином Михайлова.

Границу D -разбиения можно строить не только в пространстве коэффициентов a_i характеристического уравнения, но и в пространстве параметров системы, от которых зависят коэффициенты.

4.4.2 Построение областей устойчивости в плоскости двух параметров системы автоматического управления с помощью критерия Михайлова (D -разбиение)

Итак, полином Михайлова:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

можно использовать для построения областей устойчивости системы на плоскости любых двух параметров A и B , выбираемых при проектировании системы (это могут быть, например, коэффициент передачи, постоянная времени и т. д.).

Условие нахождения САУ на границе устойчивости по Михайлову можно записать в виде:

$$D(j\omega; A; B) = U(\omega; A; B) + jV(\omega; A; B) = 0. \quad (4.32)$$

Здесь в качестве аргументов полинома Михайлова $D(j\omega)$ выступают, кроме частоты ω , еще и выбранные параметры, влияние которых на устойчивость предстоит исследовать.

Тогда уравнения границ устойчивости, изображаемых в виде некоторых кривых на плоскости параметров A, B , можно представить системой:

$$\begin{cases} U(\omega; A; B) = 0, \\ V(\omega; A; B) = 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Для построения линий D -разбиения бывает удобно разрешить систему (4.33) относительно параметров A и B , влияние которых на устойчивость исследуется:

$$\begin{aligned} A &= f_1(\omega); \\ B &= f_2(\omega). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Придавая ω значения от $-\infty$ до $+\infty$, по выражениям (4.34) строят семейство кривых, называемых кривыми D -разбиения (рис. 4.22). Внутри каждой из областей, ограниченных кривыми D -разбиения, каждой точке $(A; B)$ соответствует одинаковое количество правых корней l характеристического уравнения замкнутой САУ.

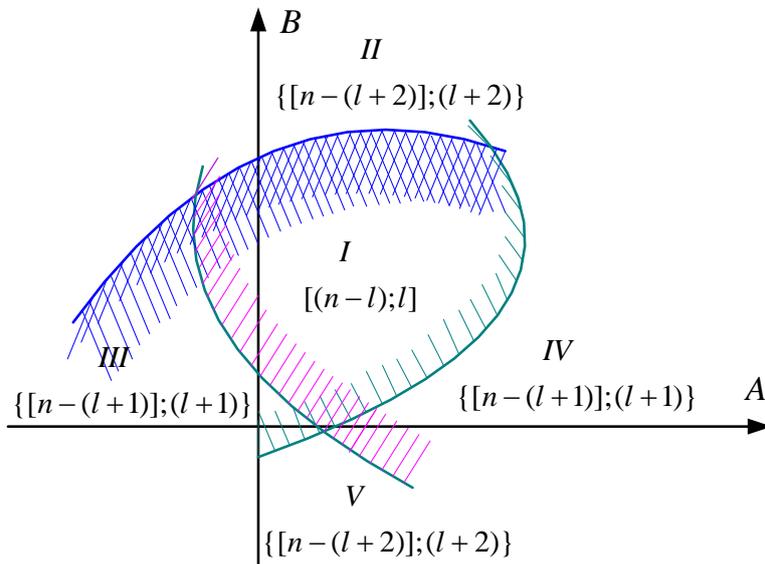


Рис. 4.22. Семейство кривых D -разбиения

На границе области один вещественный или вещественная часть пары мнимых корней обращается в нуль. Таким образом, по одну сторону кривой D -разбиения на один или два правых корня будет меньше, чем по другую сторону. Это отмечается штриховкой: однократной, если

при переходе через кривую меняет знак один вещественный корень, и двукратной, если меняется знак вещественной части пары комплексных корней.

Штриховка кладется внутрь той области, где число правых корней будет меньше, если число правых корней в I области равно l , то в других оно может быть определено по штриховке.

Очевидно, что меньше всего правых корней будет в области, со всех сторон окруженной штриховкой, т. е. в области I, поэтому эта область называется претендентом на область устойчивости.

Если для любой внутренней точки области-претендента характеристическое уравнение замкнутой системы имеет только левые корни, то претендент является областью устойчивости.

Итак, построение области устойчивости в плоскости двух параметров системы $(A; B)$ методом D -разбиения состоит из следующих этапов:

1. Составляют систему уравнений (4.33), исходя из условия нахождения САУ на границе устойчивости по критерию Михайлова.

2. Разрешают систему (4.33) относительно параметров A и B , влияние которых на устойчивость САУ исследуется (4.34). Придавая ω значения от $-\infty$ до $+\infty$ по выражениям (4.34) строят линии D -разбиения.

3. На линии D -разбиения наносят штриховку и определяют по ней претендента на область устойчивости.

При нанесении штриховки пользуются следующим правилом: если по оси абсцисс откладывать параметр A , а ординат $-B$ (рис. 4.22), то направление штриховки определяется знаком Якобиана:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial A}; & \frac{\partial U}{\partial B}; \\ \frac{\partial V}{\partial A}; & \frac{\partial V}{\partial B} \end{vmatrix} = \frac{\partial U}{\partial A} \frac{\partial V}{\partial B} - \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial U}{\partial B}. \quad (4.35)$$

Если при движении вдоль кривой D -разбиения в направлении возрастания частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ Якобиан Δ положителен, то кривая штрихуется слева, при отрицательном Δ – справа.

Если при изменении ω на некотором участке мы проходим по кривой один раз – штриховка однократная, если два раза – двукратная.

4. Определяют равенство (неравенство) нулю числа l правых корней внутри претендента на область устойчивости с помощью любого критерия устойчивости. Если $l = 0$ для произвольной внутренней точки претендента, то претендент является областью устойчивости.

4.4.3 Построение областей устойчивости методом D -разбиения, если параметры A и B входят в систему линейно

На практике часто требуется выяснить влияние на устойчивость двух параметров, которые линейно входят в характеристическое уравнение замкнутой системы так, что ее полином Михайлова (4.32) можно привести к виду:

$$D(j\omega; A; B) = AP(j\omega) + BQ(j\omega) + R(j\omega) = 0. \quad (4.36)$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} P(j\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega), \\ Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega), \\ R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega). \end{cases} \quad (4.37)$$

и разобьем (4.36) на два уравнения, приравняв отдельно вещественную и мнимую части нулю:

$$\begin{cases} U(\omega) = AP_1(\omega) + BQ_1(\omega) + R_1(\omega) = 0, \\ V(\omega) = AP_2(\omega) + BQ_2(\omega) + R_2(\omega) = 0. \end{cases} \quad (4.38)$$

Члены системы (4.38) должны быть упорядочены:

- в первой строке записывается уравнение, полученное из приравнивания нулю вещественной части ($U(\omega) = 0$);
- во второй строке записывается уравнение, полученное из приравнивания нулю мнимой части ($V(\omega) = 0$);
- в первом столбце пишутся члены, содержащие параметр, откладываемый по оси абсцисс (на координатной плоскости параметров A, B);
- во втором столбце – члены, содержащие параметр, откладываемый по оси ординат.

Тогда решение системы уравнений (4.38) относительно A и B принимает вид:

$$A(\omega) = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}}; \quad B(\omega) = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}}; \quad (4.39)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}.$$

По выражениям $A = f_1(\omega)$ и $B = f_2(\omega)$, полученным из (4.39), строятся в плоскости параметров A и B линии D -разбиения.

В линейном случае необходимый для определения штриховки якобиан есть главный определитель системы (4.38):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial A}; \frac{\partial U}{\partial B} \\ \frac{\partial V}{\partial A}; \frac{\partial V}{\partial B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}.$$

Если Δ при возрастании частоты положителен, то штриховка идет слева; если отрицателен – справа.

Для определения претендента на область устойчивости иногда необходимо использовать дополнительные условия нахождения САУ на границе устойчивости. К ним относятся так называемые особые прямые:

1. $a_n = 0$ – соответствует переходу через начало координат из одной полуплоскости в другую одного корня и поэтому штрихуется однократно;
2. $a_0 = 0$ – соответствует переходу в ∞ одного корня и штрихуется однократно;
3. $a_i = 0$ (промежуточный коэффициент) – соответствует переходу через мнимую ось пары комплексных корней и штрихуется дважды.

Для особых прямых правило штриховки следующее: особая прямая штрихуется лишь в том случае, если она пересекается, имеет общую точку с кривой D -разбиения или приближается к ней асимптотически; и при этом в общей точке или бесконечной точке сближения определитель Δ меняет знак.

Вблизи точки пересечения кривой D -разбиения и особой прямой заштрихованные области обращены одна к другой. Если же в точке пересечения Δ не меняет знака, то особая прямая не штрихуется.

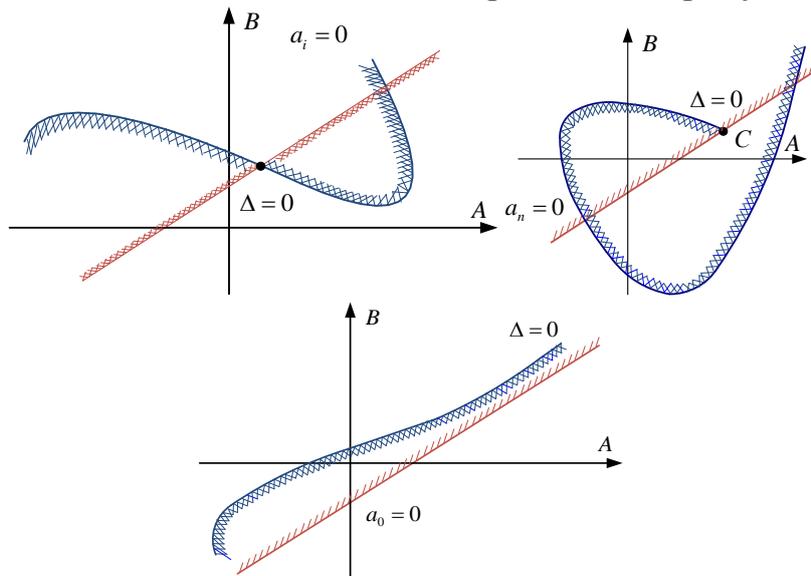


Рис. 4.23. Иллюстрация правил штриховки особых прямых

5 МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

Качество автоматической системы управления определяется совокупностью свойств, обеспечивающих эффективное функционирование как самого объекта управления, так и управляющего устройства, т. е. всей системы управления в целом. Свойства, составляющие эту совокупность и имеющие количественные измерители, называют показателями качества системы управления.

Качество автоматической системы, как и любого технического устройства, может быть оценено такими общепринятыми показателями, как вес системы, ее габариты, стоимость, надежность, долговечность и т. п. Совокупность этих общетехнических показателей характеризуют качество автоматической системы в широком смысле.

В теории автоматического управления и в практике автоматизации термины «качество системы», «качество управления» используют, как правило, в более узком смысле: рассматривают только статические и динамические свойства системы. Эти свойства определяют точность поддержания управляемой величины (выходной величины объекта) на заданном уровне в установившихся и переходных режимах, т. е. обеспечивают эффективность процесса управления. Для такого, более узкого понятия качества автоматической системы, охватывающего только ее статические и динамические свойства, применяют термин «качество управления», а сами свойства системы, выраженные в количественной форме, называют показателями качества управления.

Точность системы в установившихся режимах как одна из важнейших характеристик качества управления будет рассмотрена в разделе 6. В настоящей главе рассмотрены показатели качества, характеризующие точность системы в переходных режимах. Точность системы в переходных режимах оценивают при помощи прямых и косвенных показателей. Прямые показатели качества определяют по графику переходного процесса, возникающего в системе при ступенчатом внешнем воздействии.

График переходного процесса может быть получен теоретически: путем решения дифференциального уравнения замкнутой САУ, обратного преобразования Лапласа от изображения выходной координаты замкнутой САУ, обратного преобразования Фурье от частотного изображения выходной координаты и т. д. либо экспериментально.

Часто для определения прямых показателей качества используют переходную функцию системы.

Косвенные оценки качества переходных процессов САУ получают без использования переходных процессов. При этом различают корневые, частотные и интегральные косвенные оценки качества.

5.1 Прямые показатели качества переходных процессов системы автоматического управления

Точность системы в переходных режимах определяется величинами отклонений управляемой переменной $x(t)$ от заданного значения $g(t)$ и длительностью существования этих отклонений. Величина и длительность отклонений зависят от характера переходного процесса в системе. Характер переходного процесса в свою очередь зависит как от свойств системы, так и от места приложения внешнего воздействия.

Прямые показатели определяются по переходным процессам: как по задающему, так и по возмущающему воздействиям.

5.1.1 Прямые показатели качества переходных процессов САУ по задающему воздействию

Если переходные процессы рассчитываются, то в качестве решения получают переходную функцию САУ – реакцию на единичное ступенчатое воздействие (рис.5.1).

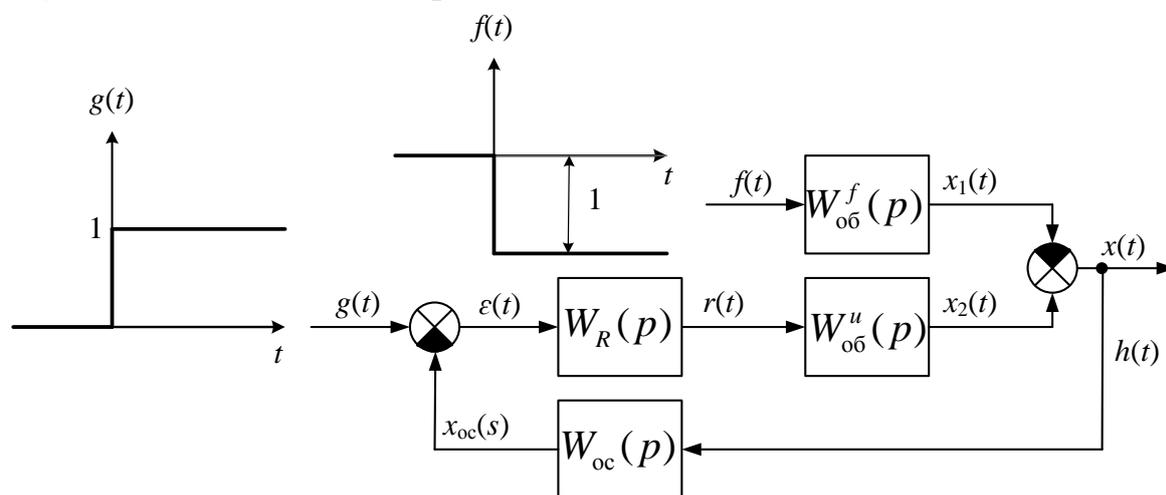


Рис. 5.1. Структурная схема САУ

При экспериментальном снятии переходного процесса получают кривую разгона – реакцию звена на скачкообразное входное воздействие конечной величины (рис. 5.2).

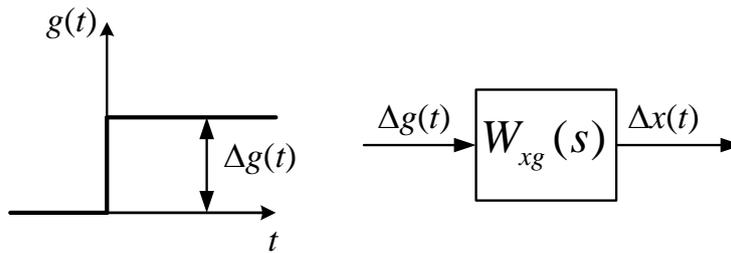
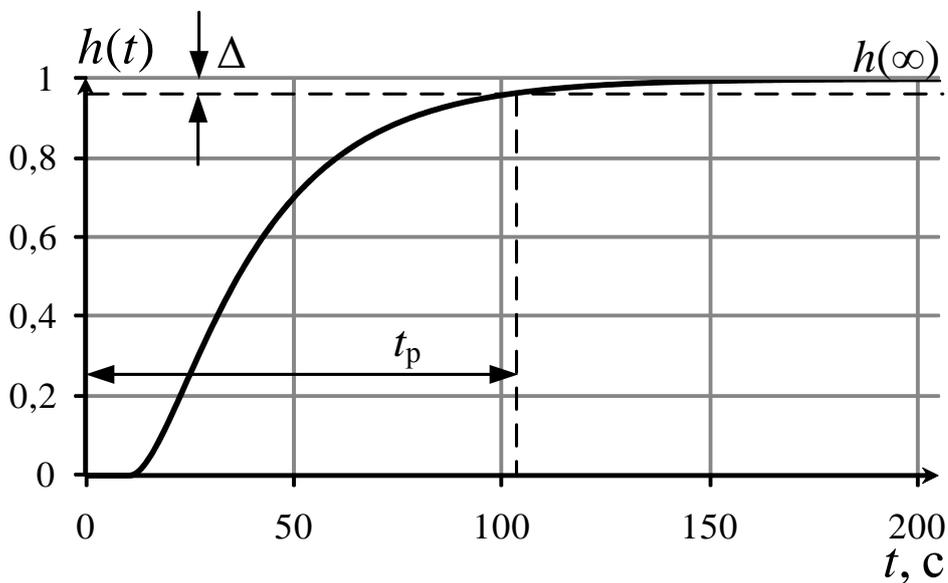


Рис. 5.2. Реакция замкнутой САУ на ступенчатое задающее воздействие – $\Delta g(t)$

При самой общей оценке качества обращают внимание прежде всего на форму переходного процесса. Различают следующие типовые переходные процессы:

- монотонный переходный процесс, когда dh/dt не меняет знак (рис. 5.3, а);
- апериодический переходный процесс, когда dh/dt меняет знак один раз (рис. 5.3, б);
- колебательный переходный процесс, когда dh/dt меняет знак много раз (рис. 5.3, в).

Каждый из трех типовых процессов имеет свои преимущества и недостатки, и предпочтение той или иной форме процесса делают с учетом особенностей управляемого объекта.



а

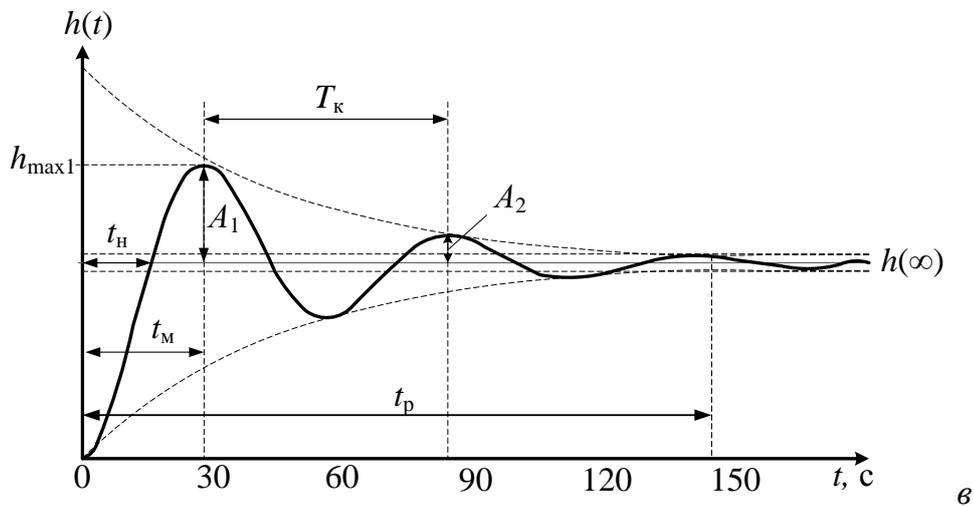
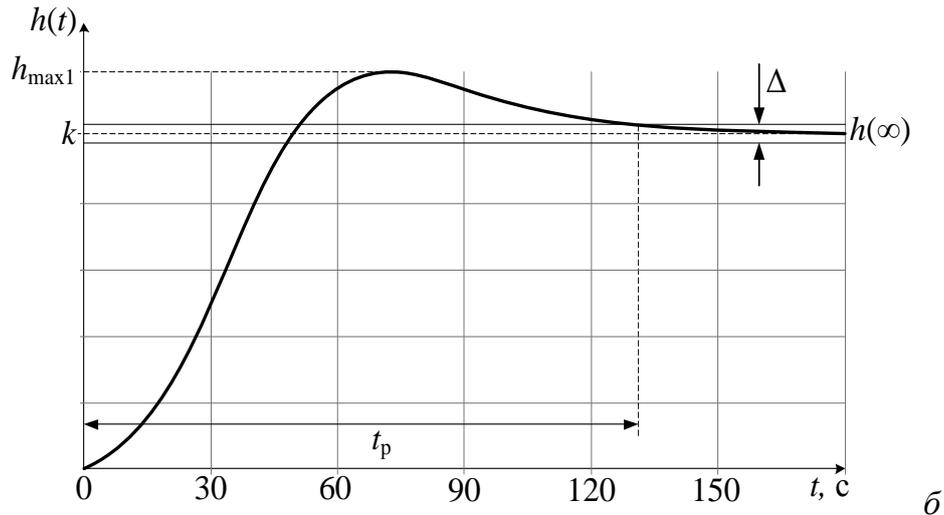


Рис. 5.3 Графики переходных процессов по задающему воздействию:
 а – монотонного; б – апериодического; в – колебательного

На графиках переходных процессов (рис. 5.3, 5.5), вызванных ступенчатым изменением задающего воздействия g и возмущения f , за начало отсчета для выходной величины $x(t)$ принято значение $x(-0)$, которое было до подачи ступенчатого воздействия.

Важной оценкой качества управления является время регулирования или время переходного процесса. Оно характеризует быстродействие САУ и определяется как интервал времени от начала (момента подачи скачкообразного входного воздействия) до момента, когда отклонение от установившегося значения станет меньше определенной величины – Δ (обычно Δ принимается равным 5% от $h(\infty)$; $\Delta = 0,05h(\infty)$):

$$|h(t) - h(\infty)| \leq \Delta \text{ при } t \geq t_p. \quad (5.1)$$

Одним из главных прямых показателей качества является перерегулирование σ (для апериодических и колебательных переходных процессов), которое равно отношению разницы первого максимального отклонения управляемой переменной от ее установившегося значения к этому установившемуся значению, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\sigma = \frac{h_{\max 1} - h(\infty)}{h(\infty)} 100[\%]. \quad (5.2)$$

Для нормально функционирующих САУ $\sigma = (10 \div 30) \%$.

Прямым показателем качества служит также степень затухания (для колебательных переходных процессов), которая равна отношению разности двух соседних амплитуд колебаний, направленных в одну сторону к первой из них:

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}. \quad (5.3)$$

Интенсивность затухания колебаний в системе считается удовлетворительной, если $\psi = 0,75 \div 0,95$.

Дополнительными временными показателями качества для колебательных переходных процессов являются время нарастания t_n , время достижения первого максимума t_m и период затухающих колебаний T_k .

Колебательность системы можно оценивать числом переходов управляемой координатой через ее установившееся значение на интервале t_p – это число колебаний равно $n = (t_p / T_k)$. Обычно приемлемым числом колебаний считается $n = 1, 2$ (допускается до 3, 4 колебания).

5.1.2 Прямые показатели качества переходных процессов САУ по возмущающему воздействию

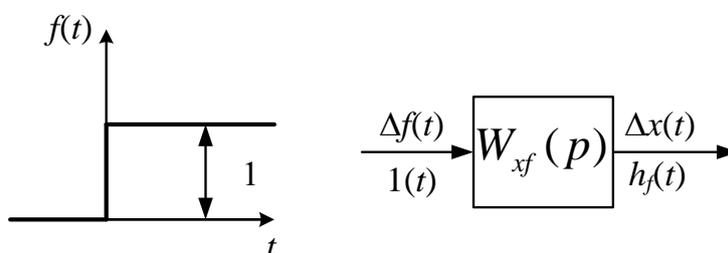


Рис. 5.4. Реакция замкнутой САУ на единичное ступенчатое возмущающее воздействие

1. Прямые показатели качества переходных процессов САУ по возмущающему воздействию для астатических систем.

Различают три типа переходных процессов по возмущающему воздействию:

- монотонный (рис. 5.5, а);
- апериодический (рис. 5.5, б);
- колебательный (рис. 5.5, в).

В этом случае тоже важным критерием качества является время регулирования:

$$|h_f(t) - h(\infty)| \leq \Delta \text{ при } t > t_p, \Delta = 0,05g, \text{ либо } \Delta = 0,05k_{o\sigma}^f \cdot \Delta f.$$

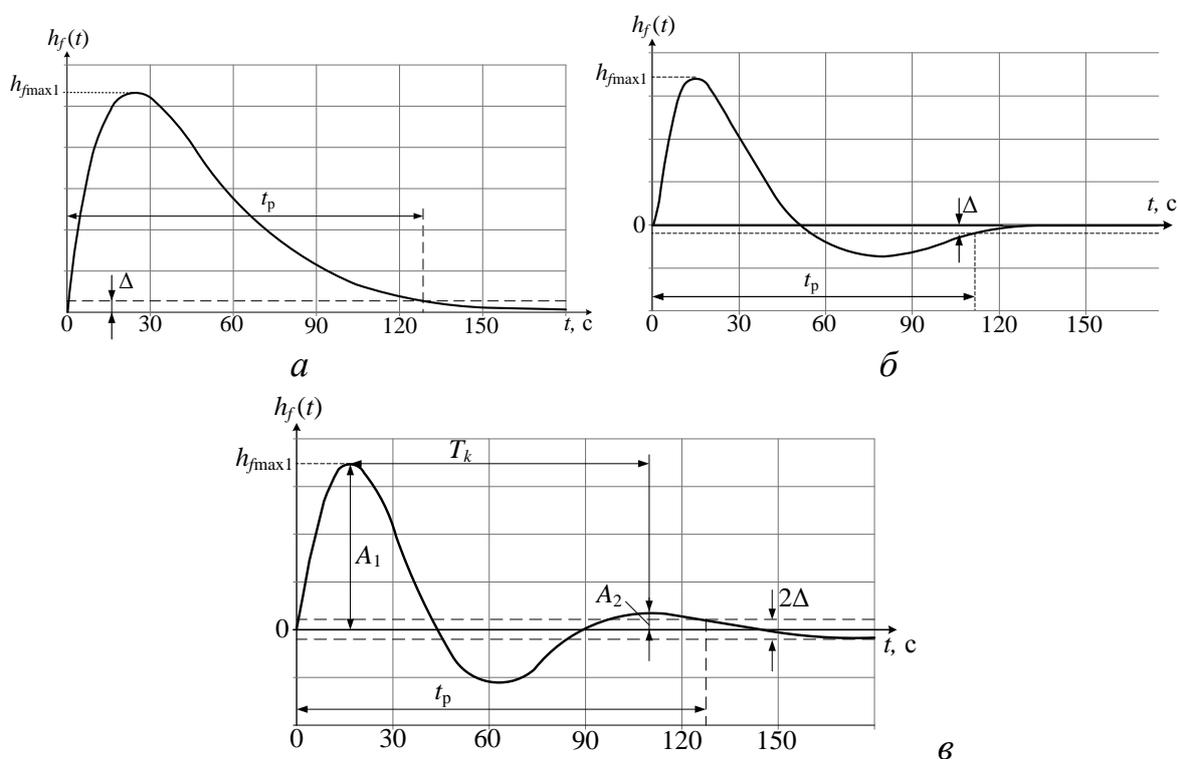


Рис. 5.5. Графики переходных процессов САУ по возмущающему воздействию: а – монотонного; б – апериодического; в – колебательного

Для переходных процессов астатических систем по возмущающему воздействию характерно равенство начального и конечного значений управляемой координаты. Вместо перерегулирования в этом случае для оценки максимального отклонения управляемой величины от установившегося значения применяют относительное максимальное отклонение, равное отношению первого максимального отклонения к заданному значению регулируемой величины:

$$\sigma = \frac{h_{f \max 1}}{g} 100[\%]. \quad (5.4)$$

Кроме того, для оценки качества колебательных переходных процессов по возмущающему воздействию также используют степень затухания

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1} \quad \text{и число колебаний } n = \frac{t_p}{T_k}.$$

2. Прямые показатели качества переходных процессов САУ по возмущающему воздействию для статических систем (рис. 5.6).

Для переходных процессов статических систем по возмущающим воздействиям характерно различие начального и конечного значений управляемой координаты.

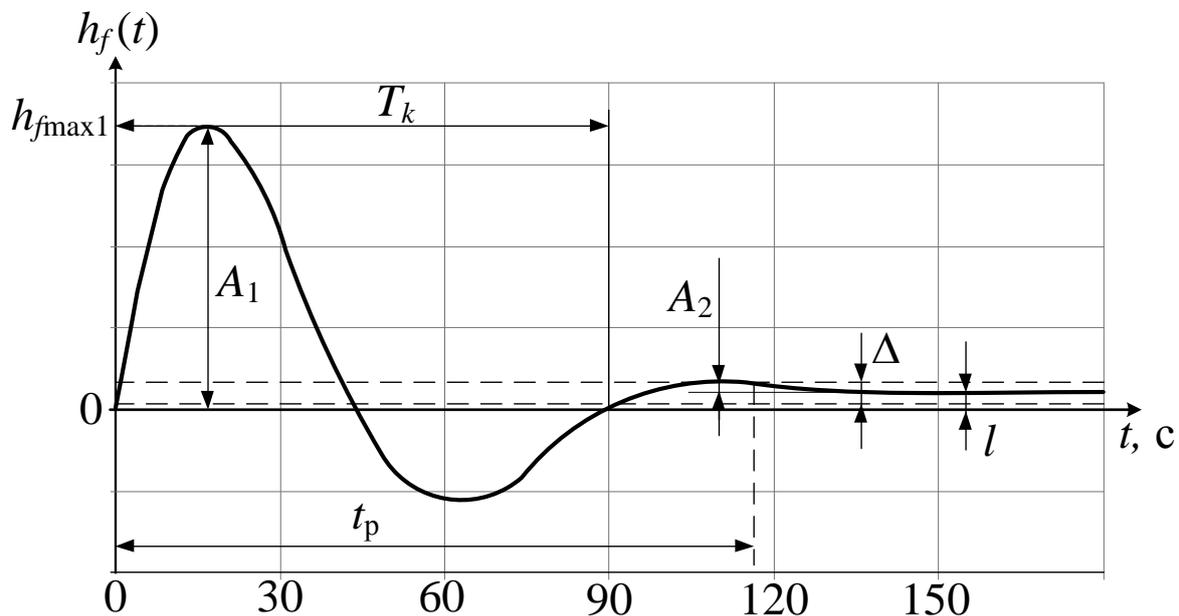


Рис. 5.6. Переходный процесс статической САУ по возмущающему воздействию

Наряду с прежними прямыми показателями качества: временем регулирования, относительным максимальным отклонением, степенью затухания, числом колебаний — для статических систем важным показателем качества является также статическая ошибка: абсолютная $l = g - x(\infty)$ и относительная $\delta = \frac{l}{g}$, (где g — заданное значение регулируемой величины).

3. Динамический коэффициент регулирования.

Для характеристики качества промышленных систем автоматического управления широко используется дополнительный критерий – динамический коэффициент регулирования R_d .

Динамический коэффициент регулирования характеризует управляющие способности регулятора, работающего совместно с объектом управления при скачкообразном возмущении системы. Определяется как отношение максимального отклонения переходного процесса замкнутой системы A_{\max}^R (рис. 5.7), вызванное возмущающим воздействием Δf , к максимальному отклонению $\Delta x_{об}(\infty)$ от уставки $g(t)$, вызванного тем же возмущением, действующим на объект в разомкнутой системе без регулятора (рис. 5.7):

$$R_d = \frac{A_{\max}^R}{\Delta x_{об}(\infty)} = \frac{A_{\max}^R}{k_{об}^f \Delta f}. \quad (5.5)$$

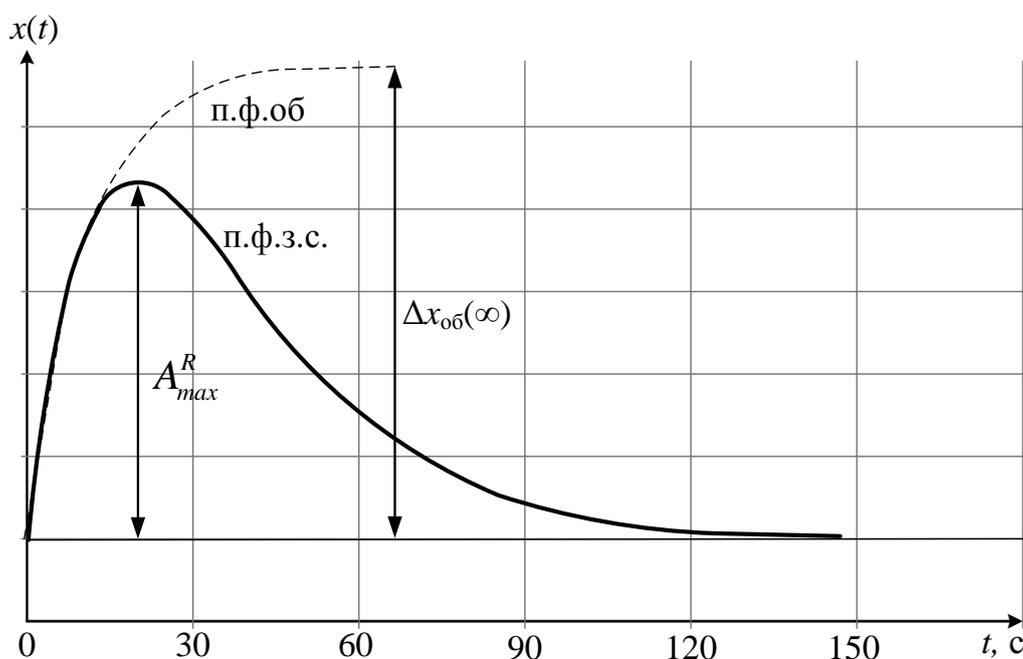


Рис. 5.7. Переходные процессы замкнутой системы и технологического объекта управления при ступенчатом возмущающем воздействии

5.2 Корневые методы оценки качества управления

Для косвенной оценки качества управления используют корневые показатели, определяемые по расположению корней характеристического уравнения замкнутой системы на комплексной плоскости.

При известной передаточной функции замкнутой САУ $W_g(s) = \frac{K(s)}{D(s)}$ переходная характеристика $h(t)$ системы может быть вычислена при помощи обратного преобразования Лапласа (Карсона) по формулам разложения Хевисайда:

$$h(t) = \frac{K(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{K(s_i)}{s_i D'(s_i)} \cdot e^{s_i t}, \quad (5.6)$$

где s_i – корни характеристического уравнения $D(s) = 0$ замкнутой системы, $D'(s_i) = \left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_i}$ – первая производная характеристического полинома $D(s)$ по s при $s = s_i$.

Из формулы (5.6) видно, что на характер переходного процесса влияют и числитель и знаменатель передаточной функции замкнутой системы. Если числитель $W_g(s)$ не имеет нулей (т. е. представляет собой постоянную величину), то характер переходных процессов можно оценивать по ее полюсам, т. е. корням характеристического уравнения замкнутой системы $D(s) = 0$.

Устойчивость и качество переходного процесса определяется графиком переходной составляющей, которая представляет собой решение однородного уравнения

$$D(p)x(t) = 0;$$

$$h(t) = x_{\text{перех}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t},$$

где λ_i – корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (5.7)$$

Тогда переходная характеристика и ее показатели качества полностью определяются распределением полюсов $W_g(s)$, т. е. корнями характеристического уравнения (рис. 5.8).

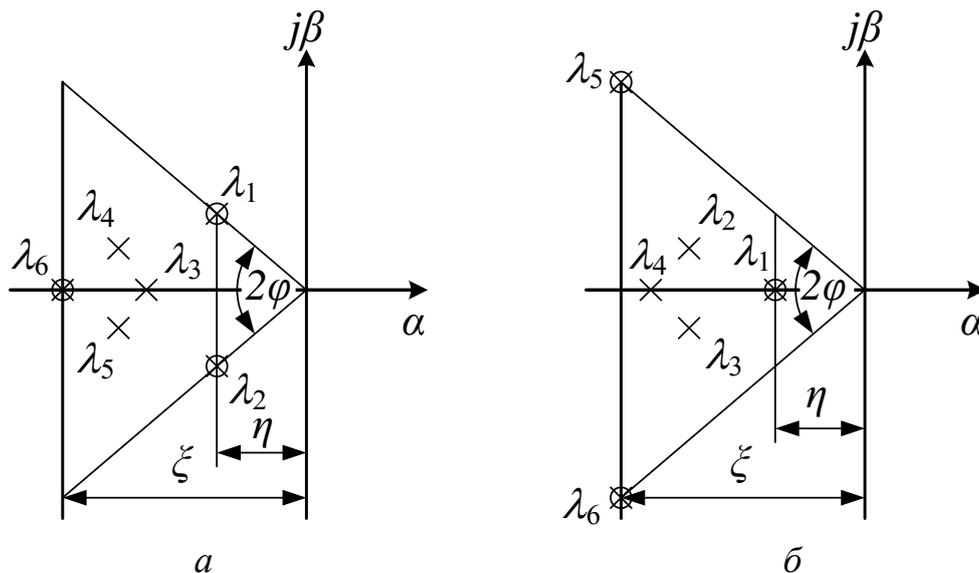


Рис. 5.8. Распределение корней характеристического уравнения, ближайших к мнимой оси: а – комплексно-сопряженных; б – вещественных

При оценке качества переходных процессов САУ рассматривают устойчивую систему: все коэффициенты уравнения (5.7) положительные и его корни $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n$ располагаются слева от мнимой оси комплексной плоскости.

Некоторой обобщенной оценкой числового значения коэффициентов уравнения (5.7) и его корней может служить параметр

$$\Omega = \sqrt[n]{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}, \quad (5.8)$$

называемый среднегеометрическим корнем.

Параметр Ω косвенно характеризует быстродействие системы. Увеличение Ω в C раз ведет к тому, что форма переходной функции не изменяется, а время регулирования уменьшается в C раз. Для увеличения Ω следует увеличивать передаточный коэффициент разомкнутой системы $K_{\text{раз}}$.

Если все отношения последующего коэффициента к предыдущему заключены между положительными числами m и M , т. е.:

$$0 < m \leq \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq M,$$

то модули всех корней заключены между теми же числами m и M :

$$m \leq |\lambda_i| \leq M.$$

Точнее область расположения корней характеристического уравнения принято определять параметрами $\eta, \xi, \mu = \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 5.8).

Параметр η , называемый степенью устойчивости, есть расстояние от мнимой оси до ближайшего корня, т. е. минимальная величина его вещественной части $\eta = |\alpha|_{\min}$. Приближенная связь между параметрами η , ξ , μ и прямыми показателями качества переходной характеристики заключается в следующем.

Корни характеристического уравнения, расположенные ближе к мнимой оси, т. е. имеющие наименьшую по абсолютной величине вещественную часть, дают составляющие переходной функции, которые затухают наиболее медленно.

Если ближайший к мнимой оси корень – вещественный (рис. 5.8, б), то наибольший вклад в величину времени регулирования t_p вносит наиболее инерционная составляющая переходного процесса $e^{-\eta t} = e^{-\frac{t}{T_{\max}}}$, тогда $t_p \cong 3T_{\max}$ (рис. 5.9):

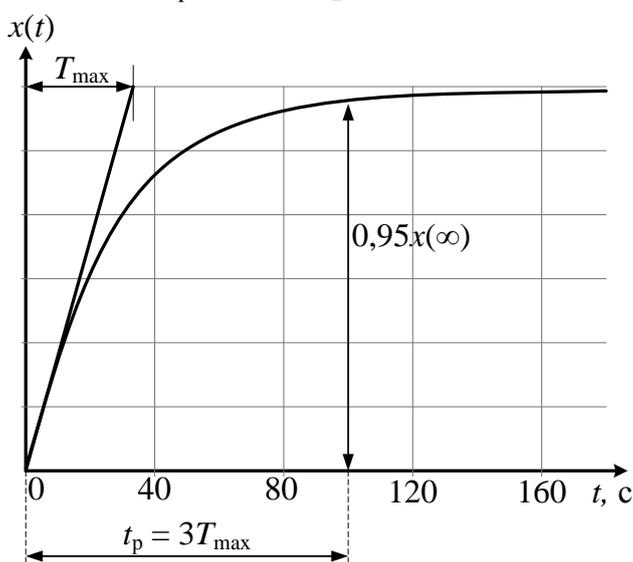


Рис. 5.9. График, иллюстрирующий зависимость времени регулирования от наиболее инерционной составляющей

Если же ближайшими к мнимой оси являются два сопряженных комплексных корня (рис. 5.8, а), то доминирующей будет одна колебательная составляющая, которая затухает также по экспоненциальной составляющей $e^{-\eta t}$.

Поэтому по степени устойчивости можно приближенно определить время регулирования:

$$t_p \approx \frac{3}{\eta}. \quad (5.9)$$

Колебательные свойства системы управления предопределяет та k -ая пара комплексных корней $\lambda_k = \alpha_k \pm j\beta_k$, для которой наибольшее от-

ношение $\mu = \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|}$ или наибольший угол φ между двумя симметричными лучами (рис. 5.8). Отношение μ мнимой части β к действительной части α доминирующей пары комплексных корней называют степенью колебательности.

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|_{\max} = \operatorname{tg} \varphi_{\max}. \quad (5.10)$$

Значение степени колебательности позволяет определить приближенное значение перерегулирования переходной характеристики:

$$\sigma < e^{-\frac{\pi}{\mu}}. \quad (5.11)$$

Колебательность μ связана с еще одним показателем качества переходной характеристики – со степенью затухания:

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}.$$

Взаимозависимость μ и ψ определяется следующими формулами:

$$\psi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}; \mu = \frac{2\pi}{\ln \frac{1}{1-\psi}}. \quad (5.12)$$

В САУ допускают $\psi \geq (90 \div 98) \%$. При $\psi = 98\%$ допустимая колебательность $\mu \approx 1,57$, при $\psi = 90\%$ – $\mu = 2,72$.

В практических расчетах используют также корневой показатель колебательности

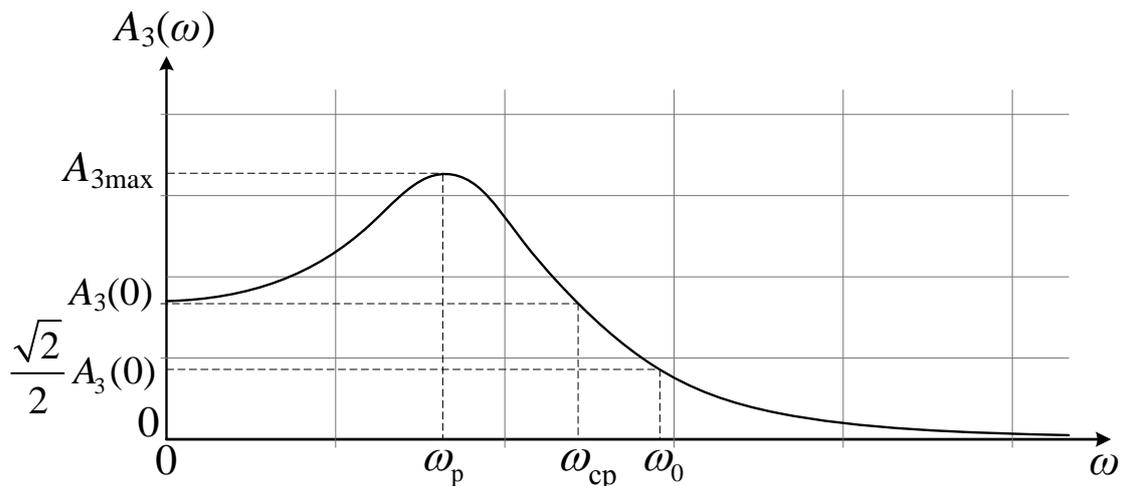
$$m = \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{1}{\mu},$$

также определяемый через доминирующую пару комплексных корней. При выборе настроек регуляторов стремятся получить значения $m = 0,2 \div 0,5$.

5.3 Частотные показатели качества САУ

Частотные показатели (критерии) качества САУ оценивают по графикам ее частотных характеристик (АФЧХ; АЧХ; ФЧХ; ЛАЧХ; ЛФЧХ).

5.3.1 Оценка качества управления по амплитудно-частотной характеристике замкнутой САУ



ω_p – резонансная частота ; ω_0 – полоса пропускания системы;
 ω_{cp} – частота среза.

Рис. 5.10. Амплитудно-частотная характеристика САУ

Для оценки качества управления по АЧХ замкнутой САУ используются следующие показатели:

1. Показатель колебательности M – это отношение максимального значения амплитудно-частотной характеристики A_{3max} замкнутой системы к ее значению при $\omega = 0$ [$A_3(0)$]:

$$M = \frac{A_{3max}}{A_3(0)}. \quad (5.13)$$

Часто используют относительную (приведенную) АЧХ:

$$\bar{A}_3(\omega) = \frac{A_3(\omega)}{A_3(0)}.$$

При $\bar{A}_3(0) = 1$ показатель колебательности равен $M = \bar{A}_{3max}$.

Показатель колебательности характеризует склонность системы к колебаниям: чем выше M , тем менее качественна система при прочих равных условиях. Считается допустимым, если $1,1 \leq M \leq 1,5$.

2. Частота среза ω_{cp} – частота, при которой амплитудно-частотная характеристика системы принимает значение, равное $A_3(0)$, т. е. $A_3(\omega_{cp}) = A_3(0)$. Эта частота косвенно характеризует длительность переходного процесса. Время регулирования обратно пропорционально частоте среза:

$$t_p \cong (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}}. \quad (5.14)$$

5.3.2 Оценка качества управления по амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой САУ

1. Склонность системы к колебаниям характеризуется также величинами ее запасов устойчивости по модулю и фазе, вводимые из графика АФЧХ разомкнутой системы (рис. 5.11).

Запас устойчивости по фазе определяют как величину угла $\gamma = \pi - |\varphi(\omega_{cp})|$ для частоты ω_{cp} , при которой $|W_{раз}(j\omega_{cp})| = 1$.

Запас устойчивости по амплитуде (модулю) – величина отрезка оси абсцисс h , заключенного между критической точкой $(-1; j0)$ и амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой САУ.

В хорошо демпфированных системах запас устойчивости по амплитуде колеблется в пределах от 6 до 20 дБ, а запас по фазе от 30 до 60°.

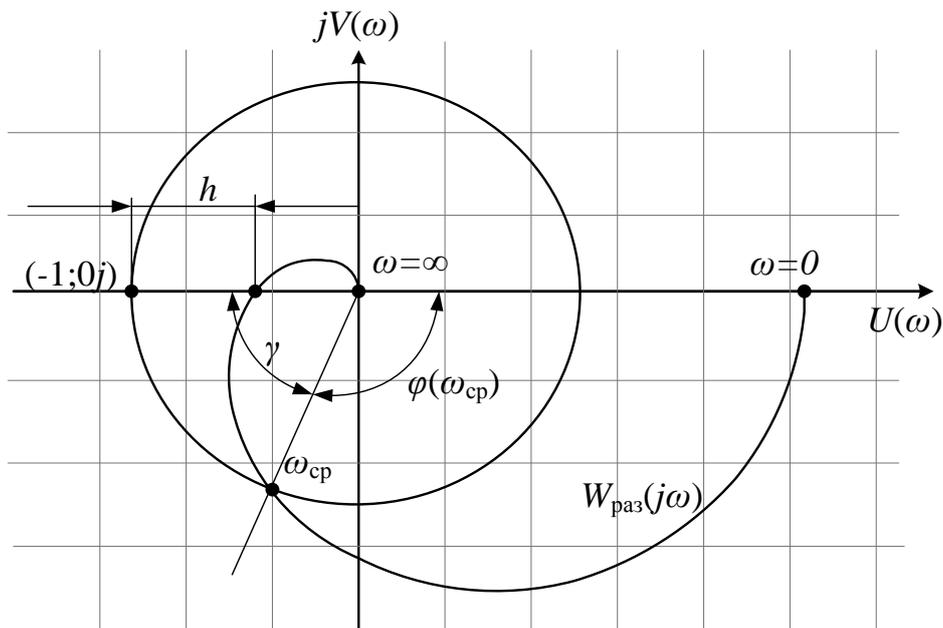


Рис. 5.11. Иллюстрация запасов устойчивости САУ по фазе и по модулю

Чтобы система обладала требуемым запасом устойчивости при заданных величинах h и γ , около критической точки $(-1; j0)$ вычерчивается некоторая запретная область в виде сектора, ограниченного величинами $\pm h$ и $\pm \gamma$, в которую амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega)$ не должна входить (5.12).

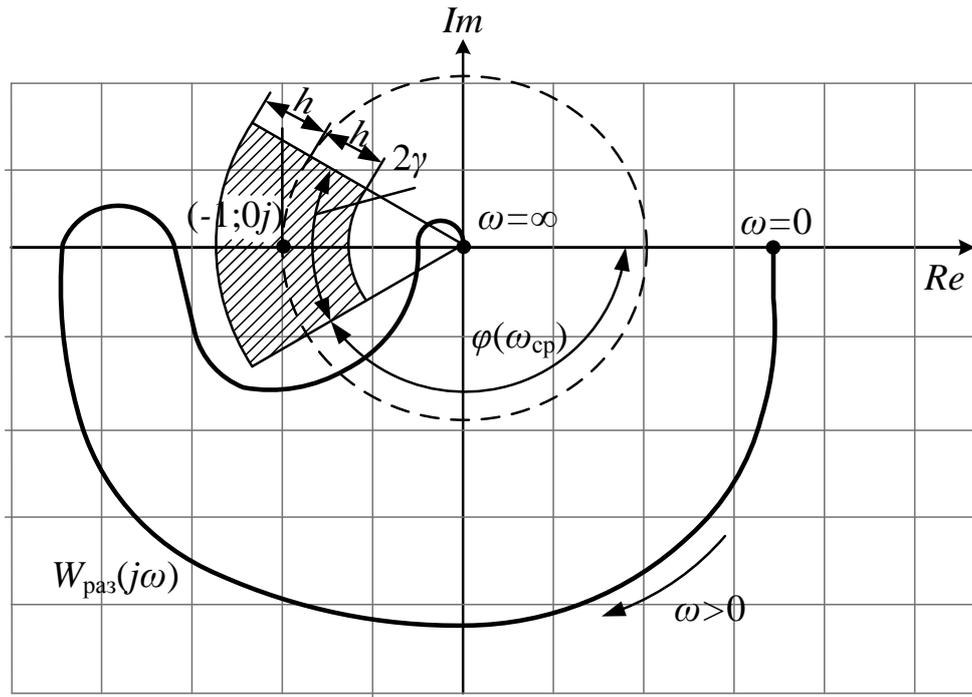


Рис. 5.12. Условие обеспечения требуемого запаса устойчивости САУ по фазе и по модулю

5.3.3 Оценка качества управления по вещественной частотной характеристике замкнутой САУ

Амплитудно-фазовая частотная характеристика замкнутой системы в декартовой системе координат представляет сумму вещественной и мнимой частей:

$$W_{\text{зам}}(j\omega) = P(j\omega) + jQ(\omega).$$

При воздействии на систему единичной ступенчатой функции $g(t) = 1(t)$ выходная величина, являющаяся переходной характеристикой системы $h(t)$, определяется через вещественную частотную характеристику замкнутой системы по следующей формуле:

$$x(t) = h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega,$$

где $P(\omega)$ – вещественная часть амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы.

1. Установившееся значение $h_y = h(\infty)$ переходной характеристики равно начальному значению вещественной частотной характеристики:

$$h(\infty) = h_{\text{уст}} = P(0); \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} P(\omega).$$

2. Начальное значение $h_0 = h(0)$ переходной характеристики определяют по конечному значению частотной характеристики $h_0 = P(\infty)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega).$$

3. Если вещественная частотная характеристика непрерывна и положительна и имеет вид вогнутой кривой, т. е. $(dP/d\omega) < 0$ и монотонно уменьшается по абсолютной величине, то переходная характеристика $h(t)$ монотонна (рис. 5.13).

Если при какой-либо частоте ордината вещественной частотной характеристики больше начальной, т. е. $P(\omega) > P(0)$, то и переходная характеристика не монотонна.

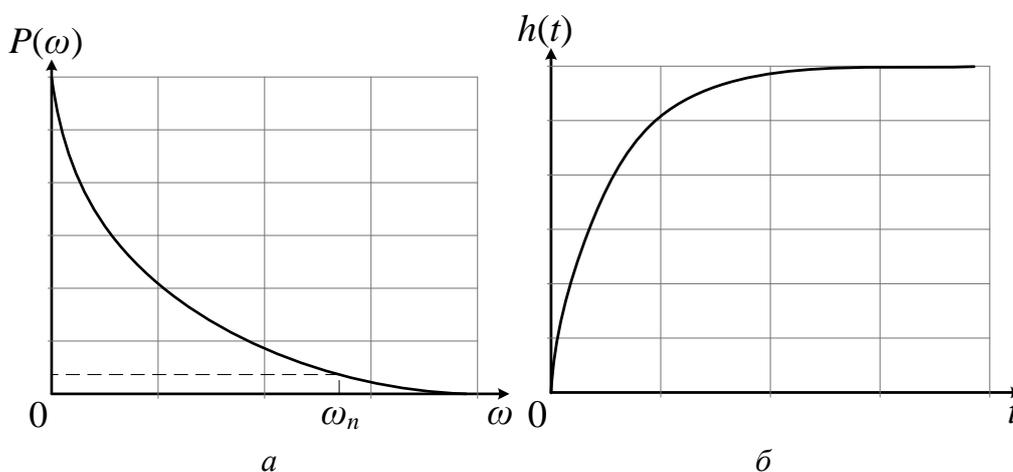


Рис. 5.13. Условие монотонности переходной функции САУ

4. При положительной не возрастающей вещественной частотной характеристике перерегулирование переходной характеристики не может превышать 18 %.

Если вещественная частотная характеристика приближается по форме к трапецеидальной (рис. 5.14) с диапазоном частот ω_2 и коэффициентом наклона $\chi = \omega_1/\omega_2$, то:

$$\frac{\pi}{\omega_2} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_2}.$$

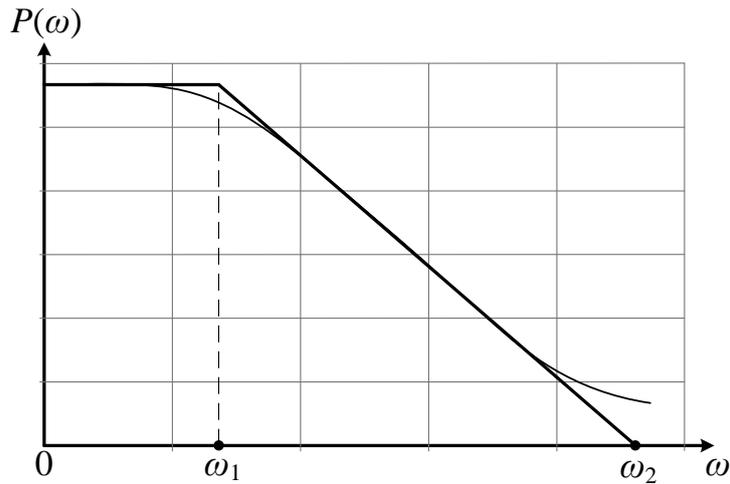


Рис. 5.14. Пример трапецидальной вещественной частотной характеристики САУ

5. Если вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ имеет максимум $P_{\max}(\omega)$ (рис. 5.15), то перерегулирование σ и время регулирования t_p оценивают по специальным графикам (рис. 5.16) в зависимости от отношения $\frac{P_{\max}(\omega)}{P(0)}$.

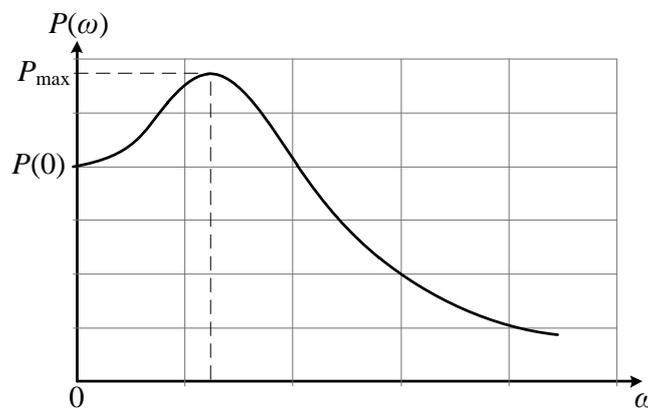


Рис. 5.15. Пример вещественной частотной характеристики САУ с максимумом

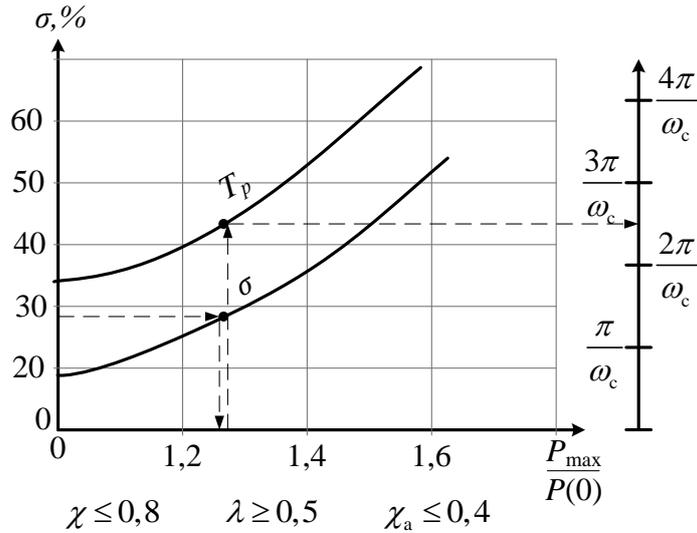


Рис. 5.16. Номограммы зависимости σ и t_p от $\frac{P_{\max}}{P(0)}$

5.4 Интегральные критерии качества систем автоматического управления

Для оценки качества применяются определенные интегралы от координат САУ, их производных и комбинаций из них.

Эти интегралы выбирают так, чтобы с одной стороны они характеризовали качество процесса, а с другой стороны просто выражались через параметры САУ.

Интегральные оценки не дают возможности непосредственно оценить прямые показатели качества: t_p , σ и т. д.

Однако, исходя из опыта, их можно рекомендовать как косвенные оценки, дающие возможность сравнивать САУ друг с другом, выбирать ту САУ, у которой соответствующая интегральная оценка меньше.

Пусть уравнение следящей системы (рис. 5.17) имеет вид:

$$D(p)x(t) = Q(p)g(t). \quad (5.15)$$

Цель использования интегральных критериев состоит в том, чтобы получить общую оценку быстродействия и отклонения регулируемой величины от установившегося значения.

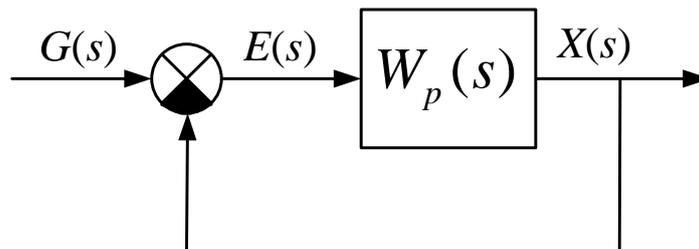


Рис. 5.17. Структурная схема следящей САУ

Если переходный процесс системы является монотонным (рис. 5.18), то для оценки его качества можно использовать интеграл

$$J_1 = S = \int_0^{\infty} [x(\infty) - x(t)] dt = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt, \quad (5.16)$$

где $\varepsilon(t) = g(t) - x(t) = x(\infty) - x(t)$.

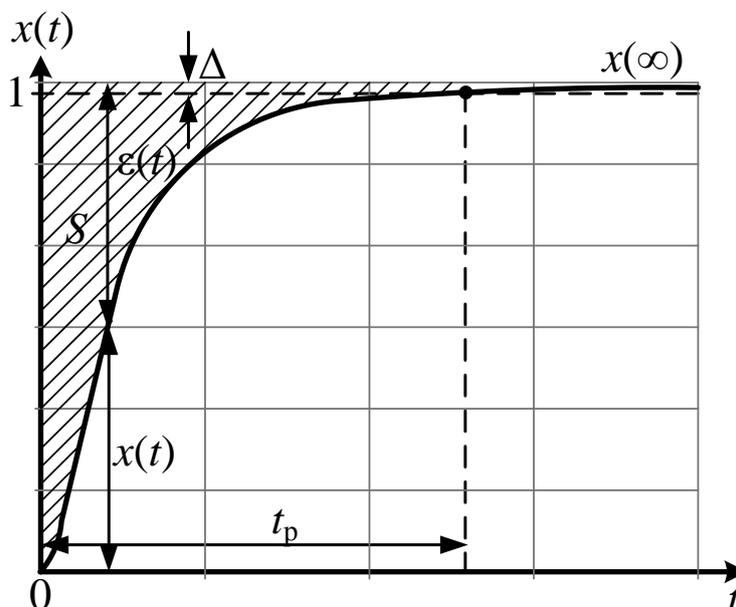


Рис. 5.18. График монотонного переходного процесса САУ

Уравнение (5.16) выражает качество переходных процессов для монотонных переходных процессов.

J_1 можно выразить через параметры САУ, в частности через коэффициенты дифференциального уравнения (5.15), либо передаточной функции замкнутой системы.

Изображение дифференциального уравнения (5.15) имеет вид:

$$D(s)X(s) = Q(s)G(s). \quad (5.17)$$

$$X(s) = \frac{Q(s)}{D(s)}G(s). \quad (5.18)$$

$$X(0) = x(\infty) = \frac{Q(0)}{D(0)}G(0). \quad (5.19)$$

$$E(s) = X(0) - X(s).$$

Если $g(t) = 1(t)$, то изображение по Карсону $G(s) = 1$.

$$\begin{aligned}
E(s) &= X(0) - X(s) = \frac{Q(0)}{D(0)} \cdot 1 - \frac{Q(s)}{D(s)} \cdot 1 = \\
&= \frac{Q(0)D(s) - D(0)Q(s)}{D(0)D(s)} = \frac{b_m D(s) - a_n Q(s)}{a_n D(s)}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Изображение Карсона ошибки равно:

$$E(s) = s \int_0^{\infty} \varepsilon(t) \cdot e^{-st} dt. \tag{5.21}$$

С другой стороны

$$J_1 = S = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) \cdot dt = \lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{E(s)}{s} \right|. \tag{5.22}$$

Тогда из (5.22) с учетом (5.20) имеем:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[b_m (a_0 s^n + \dots + a_{n-1} s + a_n) - a_n (b_0 s^m + \dots + b_{m-1} s + b_m)]}{s a_n D(s)} = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s [b_m (a_0 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}) - a_n (b_0 s^m + \dots + b_{m-1})]}{s a_n D(s)}. \\
J_1 &= \frac{b_m a_{n-1} - a_n b_{m-1}}{a_n^2}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Это выражение для J_1 справедливо при единичном входном воздействии $g(t) = 1(t)$ (рис. 5.19). При произвольном входном воздействии g_0 :

$$J_1 = \frac{b_m a_{n-1} - a_n b_{m-1}}{a_n^2} g_0. \tag{5.24}$$

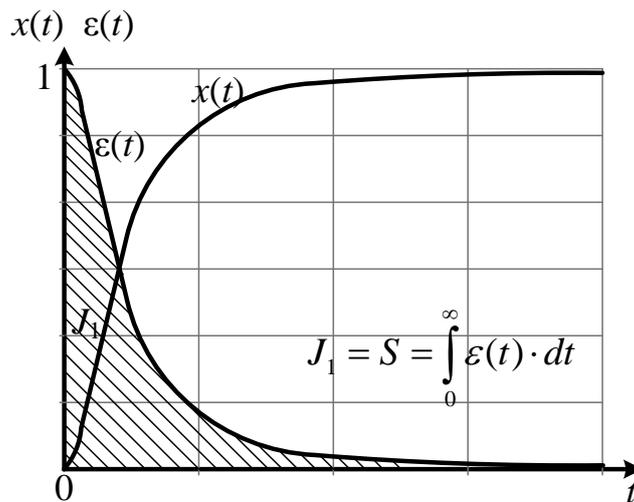


Рис. 5.19. Графическая иллюстрация критерия J_1

Неудобством интегральной оценки вида (5.16) является то, что ее можно использовать только для монотонных переходных процессов, когда не меняется знак отклонения x . Если же имеет место колебательный процесс, то при вычислении интеграла J_1 площади будут складываться алгебраически (рис. 5.20) и минимум этого интеграла может соответствовать колебаниям с малым затуханием или вообще без затухания. Так как форма переходного процесса при расчете систем регулирования может быть неизвестна, то применение интегральной оценки J_1 оказывается ограниченным.

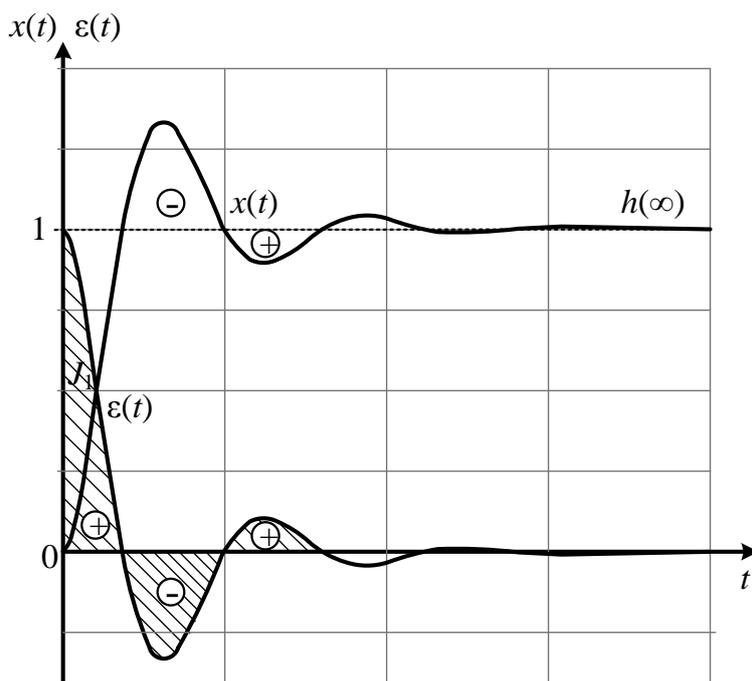


Рис. 5.20. Графическая иллюстрация недостатка критерия J_1

В свете вышесказанного целесообразно перейти к квадратичной интегральной оценке, называемой иногда «квадратичной площадью регулирования»:

$$J_2 = \int_0^{\infty} [x(\infty) - x(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t)] dt. \quad (5.25)$$

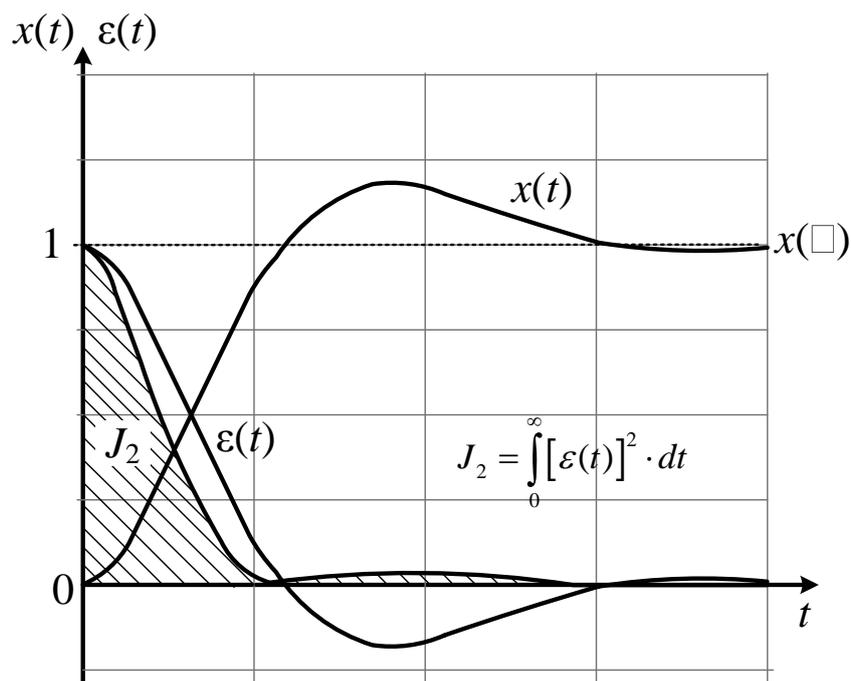


Рис. 5.21. Графическая иллюстрация критерия J_2

Величина интеграла (5.25) будет тем меньше, чем меньше сумма заштрихованных на рис. 5.21 площадей (взятых как квадратов ординат), т. е. чем лучше переходный процесс приближается к идеальному скачку регулируемой величины вслед за скачком задающего или возмущающего воздействия. При условии $m < n$ квадратичную интегральную оценку для САУ с передаточной функцией:

$$W_3(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

можно вычислить по выражению:

$$J_2 = \int_0^{\infty} [\varepsilon_{\text{св}}^2(t)] dt = \frac{1}{2a_n^2 \Delta} (B_0 \Delta_0 + \dots + B_m \Delta_m) - \frac{b_m b_{m-1}}{a_n^2}, \quad (5.26)$$

где Δ – определитель, составленный из коэффициентов полинома знаменателя передаточной функции замкнутой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-2} & a_{n-4} & -a_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & -a_n & a_{n-2} & -a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}. \quad (5.27)$$

Определители Δ_k ($k = 0, 1, \dots, m$) получают из (5.27) заменой $(k + 1)$ столбца столбцом:

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты B_0, B_1, \dots, B_m определяют следующим образом:

$$\begin{cases} B_0 = b_m^2, \\ B_1 = b_{m-1}^2 - 2b_m b_{m-2}, \\ B_\nu = b_{m-\nu}^2 - 2b_{m-\nu+1} b_{m-\nu-1} + \dots + 2(-1)^\nu b_m b_{m-2\nu}, \\ \dots \\ B_m = b_0^2. \end{cases} \quad (5.28)$$

В определителе (5.27) заменяются нулями все коэффициенты с индексами меньше нуля и больше n , а в формулах (5.28) – все коэффициенты с индексами меньше нуля и больше m .

Недостатком интегральных оценок является то, что здесь ничем не ограничивается форма кривой переходного процесса. Возможно, например, что совершенно различные по форме процессы имеют одно и тоже значение квадратичной интегральной оценки. Часто оказывается, что выбранные по минимуму оценки J_2 параметры системы соответствуют сильно колебательному процессу, ибо отмечавшееся уже при этом стремление приблизить процесс к идеальному скачку вызывает большую скорость процесса при подходе к установившемуся значению $\varepsilon = 0$, $x = x(\infty)$. Это получается вследствие того, что оценка (5.25) учитывает только величину отклонения и быстроту затухания и никак не учитывает близость системы к колебательной границе устойчивости.

Если, например, подать на вход системы единичный скачок, то ошибка в переходном процессе определится заштрихованной частью на рис. 5.22. Очевидно, что величина интегральной оценки (5.25) будет тем меньше, чем ближе будет кривая переходного процесса к линии АВДС, т. е. к идеальному скачку регулируемой величины. Но приближение процесса к этой линии требует увеличения угла наклона кривой к начальной стадии процесса (приближение части кривой АД к отрезку АВ).

Увеличение же начальной скорости может вызвать значительное перерегулирование и, следовательно, малый запас устойчивости. Поэтому на практике применяется также интегральная оценка, в которой ограничение накладывается не только на величину отклонения ε , но также и на скорость отклонения $d\varepsilon/dt$.

Эта улучшенная квадратичная интегральная оценка имеет вид:

$$J_3 = \int_0^{\infty} \left\{ [\varepsilon(t)]^2 + T^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 \right\} dt. \quad (5.29)$$

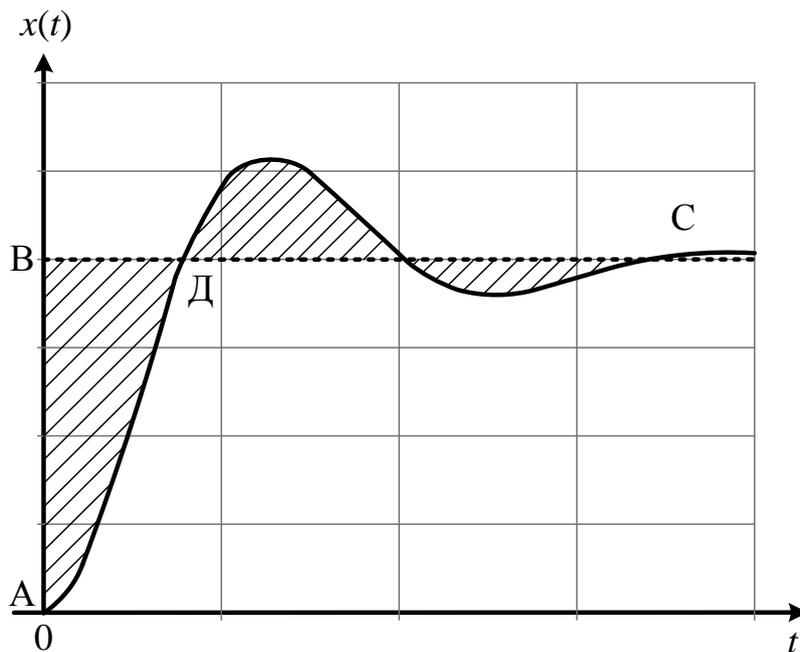


Рис.5.22. Колебательный переходный процесс САУ

Выбирая параметры системы по минимуму улучшенной интегральной оценки (5.29), можно приблизить переходный процесс к заданной экспоненте (рис. 5.23) с постоянной времени T , которая носит в этом случае название экстремали. Из этих соображений можно заранее задаться определенной величиной T .

Выбор параметров системы по улучшенной квадратичной интегральной оценке приводит к менее колебательным процессам по сравнению с использованием обычной квадратичной интегральной оценки (5.25).

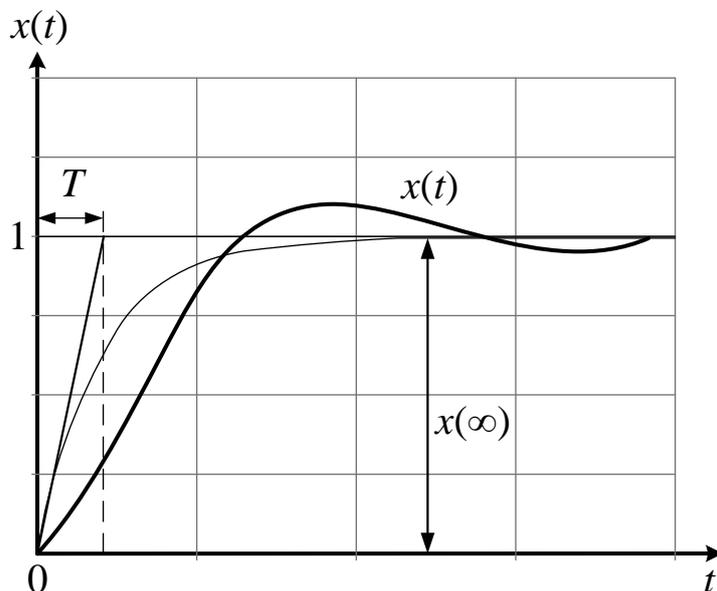


Рис. 5.23. Переходный процесс САУ, спроектированный по $\min J_3$

Методика вычисления интеграла (5.29) сводится к тому, что правая его часть разбивается на два слагаемых:

$$J_3 = \int_0^{\infty} \left\{ [\varepsilon(t)]^2 + T^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 \right\} dt = J_2 + T^2 \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 \right\} dt. \quad (5.30)$$

Удобство интегральных оценок состоит в том, что они дают единый числовой критерий качества. Недостатком является то, что одному и тому же значению интегральной оценки могут отвечать разные формы переходного процесса, что создает недостаточную определенность решения. В принципе возможно использование более сложных выражений, чем (5.29), в которые кроме первой производной от отклонения будут входить вторая, третья и т. д. производные. Так, например:

$$J_4 = \int_0^{\infty} \left\{ [\varepsilon(t)]^2 + T_1^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 + T_2^4 \left(\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \right)^2 \right\} dt. \quad (5.31)$$

Но такие интегралы сложно выражаются через параметры системы и редко применяются для оценки качества переходных процессов систем автоматического управления.

Существуют и другие показатели процесса управления, например, чувствительность, наблюдаемость и управляемость.

6 АНАЛИЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ.

6.1 Статическое и астатическое регулирование

Рассмотрим простейшую схему автоматического прямого регулирования (рис. 6.1).

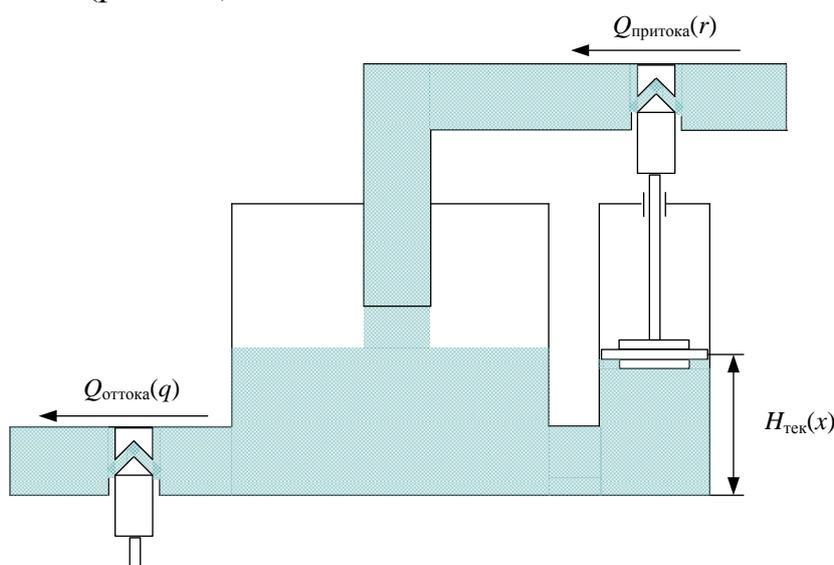


Рис. 6.1. Схема прямого автоматического регулирования

Чем больше нагрузка, т. е. расход $Q_{\text{оттока}}$, тем больше будет открыта задвижка на притоке и, следовательно, тем ниже будет находиться поплавки в состоянии равновесия. А это значит, что с возрастанием нагрузки в данной схеме значение уровня воды, т. е. регулируемой величины, будет уменьшаться.

Регулирование называется статическим, если установившееся после окончания переходного процесса значение регулируемой величины при различных постоянных значениях нагрузки будет принимать также различные постоянные значения, зависящие от нагрузки.

Регулятор, осуществляющий статическое регулирование, называется статическим регулятором.

Для характеристики степени зависимости отклонения регулируемой величины от нагрузки в теории регулирования пользуются понятием неравномерности или статизма регулирования.

Пусть график зависимости установившихся значений регулируемой величины x от нагрузки q , который будем называть характеристикой регулирования, имеет вид, представленный на рис. 6.2.

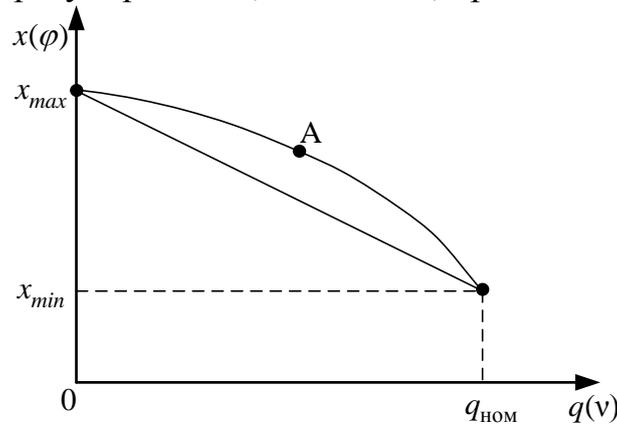


Рис. 6.2. График зависимости установившихся значений регулируемой величины x от нагрузки q (характеристика регулирования)

Для определения неравномерности (статизма) регулирования воспользуемся относительными координатами:

$$\varphi = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\min}}; \nu = \frac{q - q_{xx}}{q_{\text{НОМ}}} = \frac{q - 0}{q_{\text{НОМ}}}.$$

Неравномерностью (статизмом) регулирования δ в данной точке А называют относительную крутизну характеристики регулирования в этой точке:

$$\delta = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}.$$

Если характеристика регулирования прямолинейная, то статизм будет постоянной величиной для всех значений нагрузки. Характеристика регулирования при этом имеет вид, представленный на рис. 6.3.

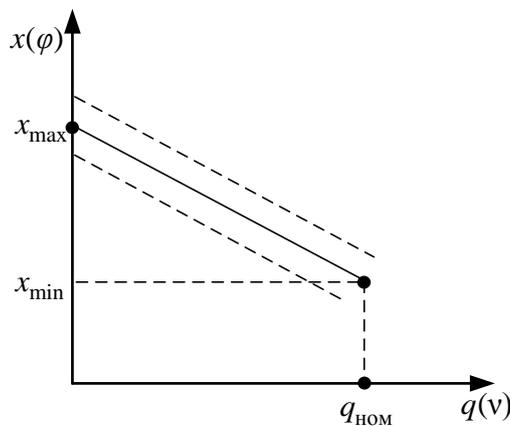


Рис. 6.3. Характеристика регулирования с постоянным статизмом

$$\delta = -\frac{\Delta \varphi_{\max}}{\Delta v_{\max}} = -\frac{\frac{x_{\max} - x_{\min}}{q_{\text{ном}} - 0}}{x_{\min}} = -\frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\min} q_{\text{ном}}}.$$

Иногда за базовое значение регулируемой величины принимают не x_{\min} , а $x_{\text{ср}} = (x_{\max} + x_{\min})/2$, тогда:

$$\delta = -\frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\text{ср}}}.$$

Прерывистыми линиями на рис. 6.3, параллельными основной характеристике, показаны характеристики, соответствующие различным уставкам регулятора.

В статической системе регулирования поддерживается не строго постоянное значение регулируемой величины, а с ошибкой, которая называется статической ошибкой системы.

Статизм регулирования – это относительная статическая ошибка при изменении нагрузки от холостого хода до номинальной.

Когда наличие статической ошибки недопустимо, то переходят к регулированию, в котором она равна нулю, т. е. к астатическому регулированию.

Астатическим регулированием называют такое регулирование, при котором в установившихся режимах поддерживается постоянное значение регулируемой величины x , равное заданному значению $x_{\text{зад}}$, независимо от величины нагрузки q .

Характеристика астатического регулирования представляет собою прямую линию, параллельную оси нагрузки (рис 6.4).

Статическая ошибка при астатическом регулировании равна нулю (теоретически); практически вследствие неточности регулятора она возможна, но не будет зависеть от нагрузки.

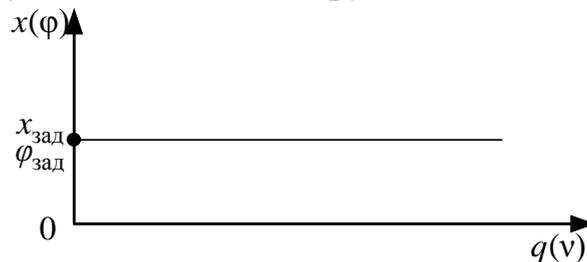


Рис. 6.4. Характеристика астатического регулирования

Для получения астатического регулирования нужно устранить в регуляторе жесткую зависимость между положением регулирующего органа r и значением регулируемой величины x . Тогда заданное

6.2.1 Статические характеристики звеньев САУ

Будем рассматривать простейшие звенья САУ, имеющие одну входную и одну выходную величины.

В автоматике различают два типа звеньев, имеющих принципиально различные свойства в статическом режиме.

Первый тип – это статические звенья, у которых зависимость выхода от входа для любого установившегося состояния может быть выражена как некоторая функция:

$$x_{\text{вых}} = \varphi(x_{\text{вх}}). \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) называется уравнением статики, а сама функция $\varphi(x_{\text{вх}})$ называется статической характеристикой звена.

Если в динамике уравнения движения звеньев не отличаются от уравнений статики, то такие звенья называют статическими или безынерционными звеньями (пропорциональными звеньями).

Статическая характеристика может быть аналитической, если функция φ непрерывна и имеет во всех точках непрерывные производные, в противном случае она называется не аналитической.

Частный случай аналитической статической характеристики представляют линейные статические характеристики, уравнения которых имеют вид: $x_{\text{вых}} = a_0 + kx_{\text{вх}}$ или $x_{\text{вых}} = kx_{\text{вх}}$.

Здесь величину $k = \text{const}$ называют передаточным коэффициентом или коэффициентом передачи звена.

Примерами звеньев с аналитической статической характеристикой могут служить:

- электронный усилитель постоянного тока (рис. 6.6, а).
- электрический генератор, основная кривая намагничивания которого имеет вид (рис. 6.6, б).

Примерами звеньев с неаналитической статической характеристикой могут служить:

- трехпозиционное реле с петлей гистерезиса: характеристика имеет разрыв по координате (рис. 6.7, а).
- функциональные преобразователи различного типа: первая производная от координаты имеет разрыв (рис. 6.7, б).

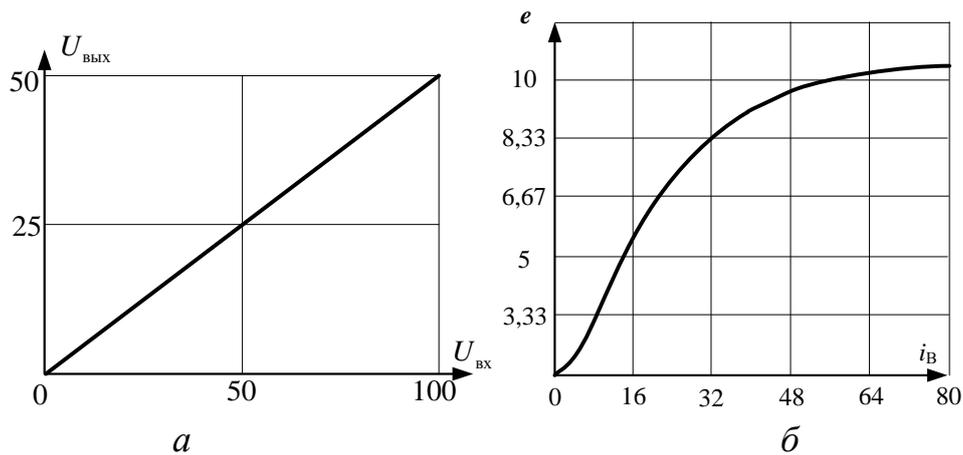


Рис. 6.6. Аналитические статические характеристики:
 а – электронного усилителя постоянного тока; б – электрического генератора

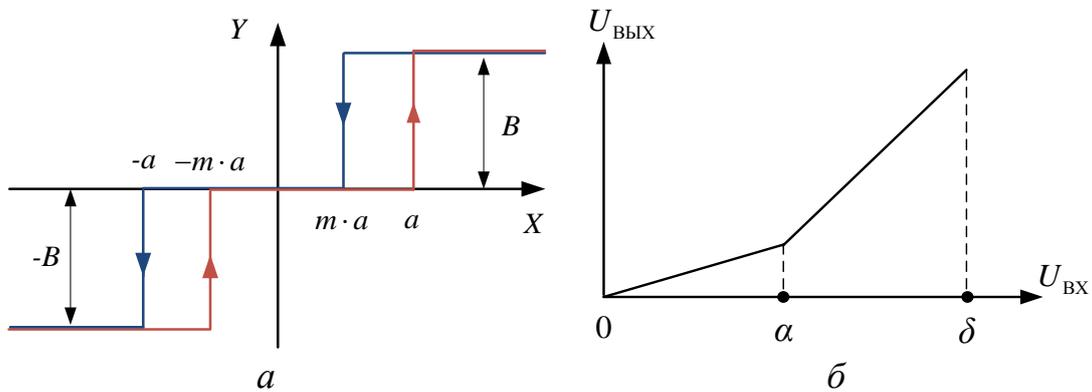


Рис. 6.7. Неаналитические статические характеристики:
 а – трехпозиционного реле с петлей гистерезиса; б – функционального преобразователя

Статические характеристики звеньев САУ первого типа могут быть однозначными и неоднозначными. Например, статическая характеристика электронного усилителя является однозначной, а статическая характеристика трехпозиционного реле является примером неоднозначной характеристики.

Статическая характеристика звена может быть задана аналитически, графически либо таблично.

Второй тип – это астатические звенья САУ, имеющие произвольное положение равновесия, когда входная величина равна нулю, и не имеющие положения равновесия, когда на входе звена имеется воздействие.

В этом случае функциональной зависимости между входом и выходом не существует и статической характеристики звена указать

нельзя. Звенья этого типа называются астатическими.

В качестве примера рассмотрим электродвигатель, выходной величиной которого является угол поворота. Когда приложенное к обмотке якоря напряжение равно нулю, угол поворота вала двигателя может быть любым, а при подаче напряжения вал двигателя вращается, и состояния равновесия нет.

Для таких звеньев можно указать лишь условно область установившихся состояний. Очевидно, она будет совпадать с осью ординат, а если звено имеет зону нечувствительности, то область устойчивых состояний займет узкую полосу вдоль оси ординат.

Отметим, что если выходной величиной того же электродвигателя считать не угол поворота вала, а его угловую скорость, то статическая характеристика звена будет существовать.

6.2.2 Статические характеристики соединений звеньев

В САУ применяют три основных типовых соединений звеньев: параллельное, последовательное и встречно-параллельное (звено с обратной связью).

6.2.2.1 Статическая характеристика параллельного соединения звеньев

При параллельном соединении звенья имеют общий вход, а их выходные величины суммируются (рис. 6.8, а). Если заданы уравнения статики для всех звеньев, то для их параллельного соединения очевидно:

$$x_{i\text{ВЫХ}} = \varphi_i(x_{\text{ВХ}}); i = 1, 2, \dots, n; \quad x_{\text{ВЫХ}} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_{\text{ВХ}}). \quad (6.2)$$

Из (6.2) вытекает вполне очевидный способ построения статической характеристики параллельного соединения 2^x звеньев (рис. 6.8, б). При заданном значении входной переменной $x_{\text{ВХ}} = a$ ордината искомой статической характеристики двух параллельно соединенных звеньев равна $x_{\text{ВЫХ}} = ad = ab + ac$.

При параллельном соединении линейных звеньев коэффициент передачи эквивалентного звена k равен сумме коэффициентов передачи линейных звеньев:

$$x_{i\text{ВЫХ}} = k_i x_{\text{ВХ}}; \quad x_{\text{ВЫХ}} = x_{\text{ВХ}} \sum_{i=1}^n k_i;$$

$$K = \sum_{i=1}^n k_i; \quad x_{\text{ВЫХ}} = K x_{\text{ВХ}}.$$

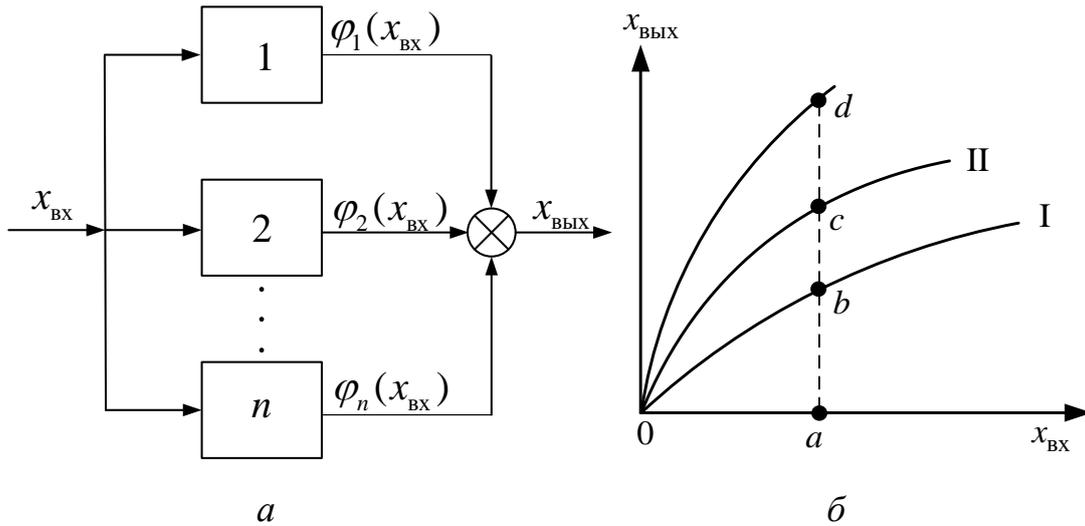


Рис. 6.8. Параллельное соединение звеньев:
a – структурная схема; *б* – способ построения статической характеристики

6.2.2.2 Статическая характеристика последовательного соединения звеньев

При последовательном соединении звеньев (рис. 6.9), согласно выражению (6.3), статическая характеристика соединения звеньев находится графическим построением, отраженным на рис. 6.10.

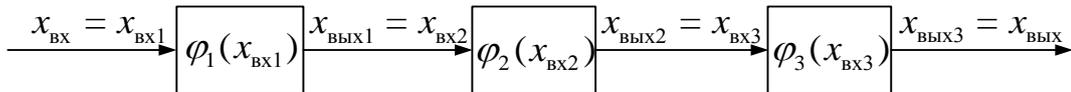


Рис. 6.9. Последовательное соединение звеньев

$$x_{\text{ВЫХ}} = \varphi_3 \{ x_{\text{ВЫХ2}} = \varphi_2 [x_{\text{ВЫХ1}} = \varphi_1 (x_{\text{ВХ}})] \} = \varphi (x_{\text{ВХ}}). \quad (6.3)$$

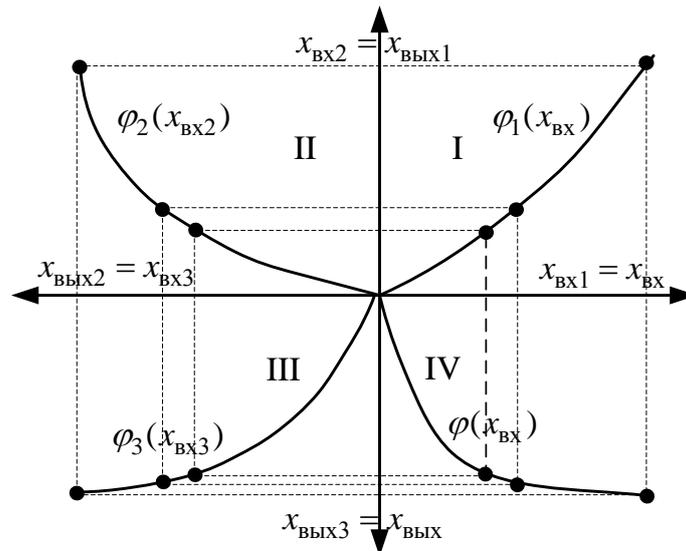


Рис. 6.10. Графический метод построения статической характеристики последовательного соединения звеньев

В первом квадранте строится характеристика первого звена, во втором – второго звена, в третьем – третьего звена. Так как $x_{\text{ВХ1}}$ является одновременно $x_{\text{ВХ}}$ всего соединения звеньев, а $x_{\text{ВЫХ3}} = x_{\text{ВЫХ}}$, то в 4-м квадранте можно построить статическую характеристику всей системы последовательного соединения трех звеньев. Для этого последовательно задаются величиной $x_{\text{ВХ1}}$ и переносом ее против часовой стрелки находят соответствующие значения $x_{\text{ВЫХ3}}$. Если число звеньев в соединении больше трех, то их разбивают в группы по три. Если число звеньев в соединении меньше трех, то недостающее звено заменяют звеном с единичным передаточным коэффициентом. Статическая характеристика такого звена изображается биссектрисой квадрантного угла.

Для последовательного соединения линейных звеньев коэффициент передачи соединения равен произведению коэффициентов передачи звеньев, образующих это соединение:

$$x_{\text{ВЫХ}} = Kx_{\text{ВХ}}, \text{ где } K = \prod_{i=1}^n k_i. \quad (6.4)$$

6.2.2.3 Статическая характеристика звена с обратной связью (встречно-параллельного соединения звеньев)

В системах с обратной связью (рис. 6.11) статическая характеристика также может быть построена графическим методом. Пусть статическая характеристика звена без обратной связи определяется уравнением $x_{\text{ВЫХ}} = \sigma(\varepsilon)$, а статическая характеристика звена обратной связи имеет вид:

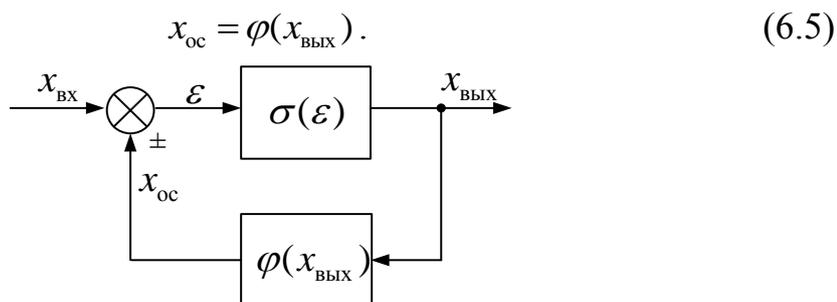


Рис. 6.11. Встречно-параллельное соединение звеньев

Удобнее вести расчет, используя обратную статическую характеристику системы:

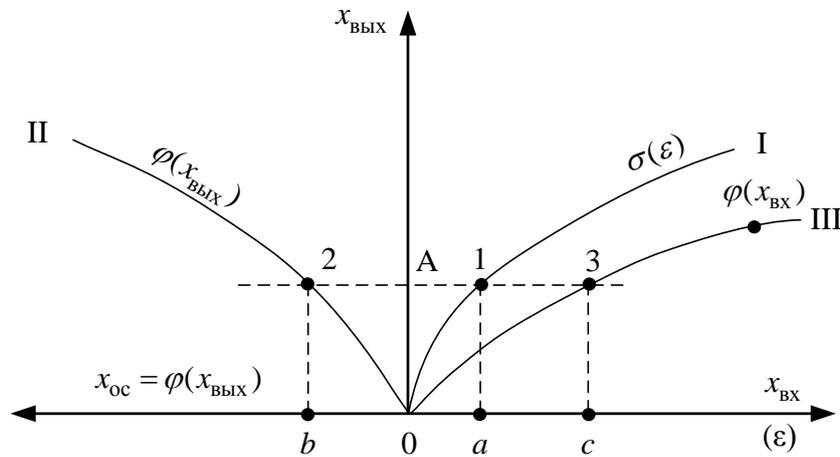
$$\begin{aligned} \varepsilon &= \psi(x_{\text{ВЫХ}}). \\ \varepsilon &= [x_{\text{ВХ}} \pm x_{\text{ОС}}]. \end{aligned}$$

$$x_{\text{вх}} = \psi(x_{\text{вых}}) \mp \varphi(x_{\text{вых}}). \quad (6.6)$$

Из выражения (6.6) вытекает способ графического построения статической характеристики системы. Для случая отрицательной обратной связи построение ведется в двух квадрантах (рис. 6.12). В первом квадранте строим статическую характеристику звена без обратной связи $\sigma(\varepsilon)$ – I, а во втором – характеристику звена обратной связи $\varphi(x_{\text{вых}})$ – II.

Зададимся некоторым значением $x_{\text{вых}(m.A)}$ и определим $\varepsilon = \psi(x_{\text{вых}})$. (отрезок oa), при этом $x_{\text{ос}} = \varphi(x_{\text{вых}})$ равен отрезку ob .

Так как при отрицательной обратной связи $x_{\text{вх}} = \varepsilon + x_{\text{ос}}$, то перенесем отрезок bo вправо так, чтобы его конец b совпал с точкой a . Найденная точка 3 и будет точкой искомой характеристики. Остальные точки находятся аналогично.



I – статическая характеристика основного звена, II – статическая характеристика звена обратной связи, III – результирующая характеристика эквивалентного звена

Рис. 6.12. Графический метод построения статической характеристики звена, охваченного отрицательной обратной связью:

Для случая линейных статических характеристик звена с обратной связью:

- уравнение статики основного звена $x_{\text{вых}} = k_0 \varepsilon$;
- уравнение статики звена обратной связи $x_{\text{ос}} = k_{\text{ос}} x_{\text{вых}}$;
- уравнение статики звена с обратной связью (встречно-параллельного соединения звеньев):

$$x_{\text{ВЫХ}} = k_0(x_{\text{ВХ}} \pm k_{\text{ОС}}x_{\text{ВЫХ}}) = \frac{k_0}{1 \mp k_0k_{\text{ОС}}} x_{\text{ВХ}}. \quad (6.7)$$

Для звена, охваченного отрицательной обратной связью:

$$x_{\text{ВЫХ}} = kx_{\text{ВХ}}; k = \frac{k_0}{1 + k_0k_{\text{ОС}}}.$$

6.3 Статическая характеристика линейной замкнутой системы управления (системы стабилизации)

Рассмотрим линейную систему комбинированного управления (рис. 6.13). На объект действует возмущающее воздействие v (нагрузка) и управляющее воздействие μ . Регулятор представлен в виде двух частей: k_{RO} , реагирующий на отклонение φ и k_{Rf} , реагирующий на возмущение v .

Статические характеристики объекта и регулятора представлены соответствующими коэффициентами передачи: $k_{об}^f, k_{об}^u, k_{RO}, k_{Rf}$.

Ставится задача нахождения статической характеристики (характеристики регулирования) САУ, изображенной на рис. 6.13.

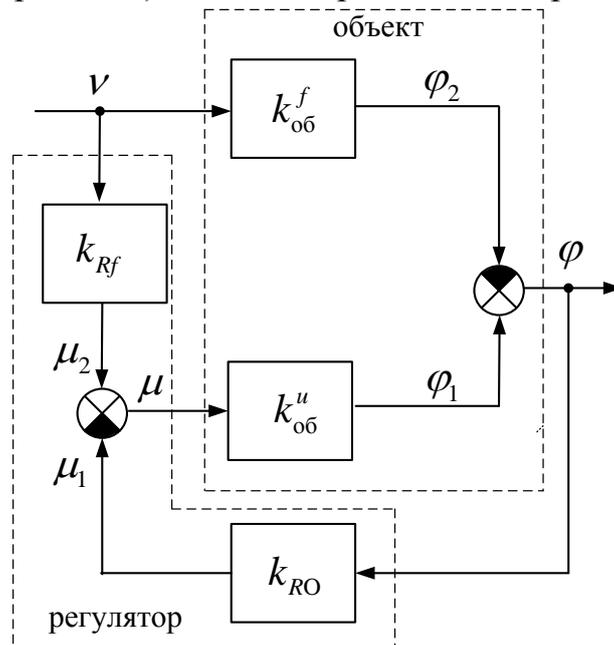


Рис. 6.13. Структурная схема линейной комбинированной САУ

- Уравнение статики объекта:

$$\varphi = k_{об}^u \mu - k_{об}^f v. \quad (6.8)$$

- Уравнение статики регулятора по отклонению:

$$\mu_1 = k_{RO} \varphi. \quad (6.9)$$

- Уравнение статики регулятора по нагрузке:

$$\mu_2 = k_{Rf} \nu. \quad (6.10)$$

- Уравнение комбинированного регулятора:

$$\begin{aligned} \mu &= -\mu_1 + \mu_2; \\ \mu &= -k_{RO} \varphi + k_{Rf} \nu. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Знак минус при воздействии по отклонению указывает на отрицательную обратную связь по отклонению: с возрастанием φ открытие μ должно уменьшаться. Знак плюс при воздействии по нагрузке указывает на положительную обратную связь по нагрузке: с возрастанием нагрузки ν открытие μ должно увеличиваться.

Решая совместно (6.8), (6.9), (6.10) и (6.11), получим уравнение статики САУ:

$$\varphi = \frac{(k_{об}^u k_{Rf} - k_{об}^f)}{1 + k_{об}^u k_{RO}} \nu. \quad (6.12)$$

$$\varphi = K_{САУ} \nu \quad (6.13)$$

т. е. коэффициент передачи замкнутой линейной комбинированной САУ определяется выражением

$$K_{САУ} = \frac{k_{об}^u k_{Rf} - k_{об}^f}{1 + k_{об}^u k_{RO}}. \quad (6.14)$$

Если компенсирующая цепь отсутствует ($k_{Rf} = 0$), то для САУ по отклонению уравнение статики принимает вид:

$$\varphi = -\frac{k_{об}^f}{1 + k_{об}^u k_{RO}} \nu. \quad (6.15)$$

При $\nu = 1$ (номинальная нагрузка) φ изменяется на:

$$\varphi_{ном} = -\frac{k_{об}^f}{1 + k_{об}^u k_{RO}} \cdot 1.$$

Таким образом, для статического объекта и статического регулятора коэффициент передачи замкнутой системы по отклонению равен статизму регулирования.

Статизм регулирования – это относительная статическая ошибка при изменении нагрузки от холостого хода до номинальной.

Статическая ошибка системы равна статизму при номинальной нагрузке, в общем случае статическая ошибка пропорциональна статизму и относительной нагрузке $\varphi_{ст} = \delta \nu$.

Объект может быть:

- статический ($k_{об}$ – конечное число);
- астатический ($k_{об} = \infty$).

Регулятор может быть:

- статический (k_{RO} – конечное число);
- астатический ($k_{RO} = \infty$).

Когда объект – статический, регулятор – астатический ($k_{RO} = \infty$), то:

$$K_{\text{отк}} = \frac{k_{\text{об}}^f}{1 + k_{\text{об}}^u \infty} = 0.$$

$\delta = 0$, т. е. статизм САУ по отклонению равен нулю, а значит и статическая ошибка равна нулю.

Если объект – астатический ($k_{\text{об}} = \infty$), регулятор – статический, тогда, раскрыв неопределенность, получаем:

$$K_{\text{отк}} = \frac{\infty}{1 + \infty \cdot k_{RO}} \approx \frac{1}{k_{RO}} = \delta_R.$$

При регулировании по отклонению астатического объекта статизм системы равен статизму регулятора.

Для комбинированного регулятора.

При наличии регулятора по нагрузке возможен случай полной компенсации, если числитель выражения (6.12) равен нулю:

$$\varphi = \frac{k_{\text{об}}^u k_{Rf} - k_{\text{об}}^f}{1 + k_{\text{об}}^u k_{RO}} v; \quad k_{\text{об}}^u k_{Rf} - k_{\text{об}}^f = 0.$$

При $k_{Rf} = \frac{k_{\text{об}}^f}{k_{\text{об}}^u}$ статизм системы будет равен $\delta = \frac{k_{\text{об}}^u \frac{k_{\text{об}}^f}{k_{\text{об}}^u} - k_{\text{об}}^f}{1 + k_{\text{об}}^u k_{RO}} = 0.$

Система с полной (идеальной) компенсацией ведет себя как астатическая система.

6.4 Погрешность систем автоматического управления при медленно изменяющихся воздействиях. Ряд ошибок

Система регулирования по отклонению (рис. 6.14) описывается уравнением:

$$D(p)\varepsilon(t) = Q(p)g(t) + N(p)f(t). \quad (6.16)$$

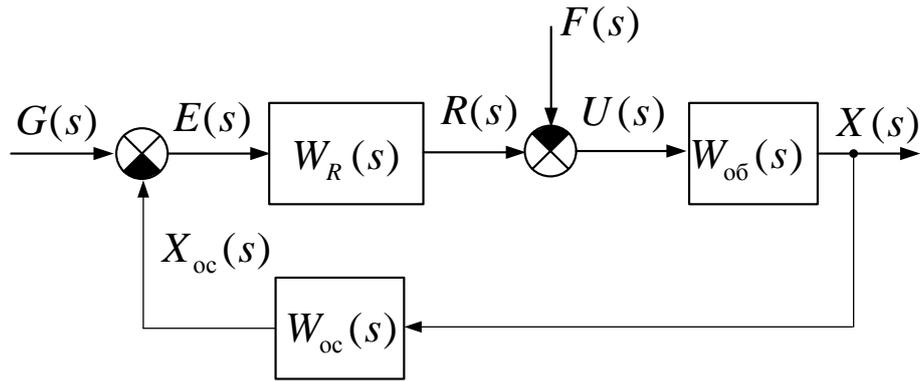


Рис. 6.14. Структурная схема САУ по отклонению

Как следует из (6.16), установившаяся ошибка $\varepsilon_{уст}$ имеет две составляющие:

$$\varepsilon_{уст} = \varepsilon_g + \varepsilon_f,$$

где ε_g – ошибка воспроизведения задающего воздействия; ε_f – ошибка, создаваемая возмущением (при нескольких возмущениях составляющая ε_f имеет несколько слагаемых). Каждая из составляющих ε_g и ε_f определяется отдельно.

Рассмотрим методику определения ошибки воспроизведения задающего воздействия.

Передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки по задающему воздействию имеет вид:

$$W_{ег}(s) = \frac{1}{1 + W_{раз}(s)},$$

где $W_{раз}(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_{раз}(s) = W_R(s)W_{об}(s)W_{ос}(s).$$

Изображение ошибки воспроизведения задающего воздействия записывается:

$$E_g(s) = W_{ег}(s)G(s) = \frac{1}{1 + W_{раз}(s)}G(s).$$

Разложим передаточную функцию замкнутой системы относительно ошибки по задающему воздействию $W_{ег}(s)$ в ряд по возрастающим степеням s в окрестности точки $s = 0$, что соответствует большим значениям времени ($t \rightarrow \infty$), т. е. установившемуся значению ошибки при заданном задающем воздействии

$$E_g(s) = \overbrace{[C_{0g} + C_{1g}s + \frac{1}{2!}C_{2g}s^2 + \dots + \frac{1}{k!}C_{kg}s^k]}^{W_{\varepsilon g}(s)} \Big|_{s=0} G(s). \quad (6.17)$$

Оригинал ряда (6.17) принимает вид

$$\varepsilon_g(t) = C_{0g}g(t) + C_{1g} \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2!}C_{2g} \frac{d^2g(t)}{dt^2} + \dots + \frac{1}{k!}C_{kg} \frac{d^k g(t)}{dt^k} \quad (6.18)$$

Коэффициенты ряда ошибок $C_{0g}; C_{1g}; C_{2g} \dots$ определяют по формулам разложения передаточной функции относительно ошибки по задающему воздействию $W_{\varepsilon g}(s)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} C_{0g} = [W_{\varepsilon g}(s)]_{s=0}; & C_{1g} = \left[\frac{dW_{\varepsilon g}(s)}{ds} \right]_{s=0}; \\ C_{2g} = \left[\frac{d^2W_{\varepsilon g}(s)}{ds^2} \right]_{s=0}; \dots; & C_{kg} = \left[\frac{d^k W_{\varepsilon g}(s)}{ds^k} \right]_{s=0}. \end{cases} \quad (6.19)$$

Коэффициенты ряда ошибок (6.18) могут быть выражены также через коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции замкнутой системы относительно ошибки по задающему воздействию $W_{\varepsilon g}(s)$.

Разложим передаточную функцию замкнутой системы относительно ошибки по задающему воздействию $W_{\varepsilon g}(s)$ в ряд по возрастающим степеням s (в окрестности точки $s = 0$).

$$W_{\varepsilon g}(s) = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = \frac{D_{\text{раз}}(s)}{K_{\text{раз}}(s) + D_{\text{раз}}(s)} = \frac{K_{\varepsilon g}(s)}{D_{\varepsilon g}(s)} = \quad (6.20)$$

$$= \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_n}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} = C_{0g}^* + C_{1g}^*s + C_{2g}^*s^2 + \dots + C_{kg}^*s^k.$$

$$\begin{aligned} b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_n &= (C_{0g}^* + C_{1g}^*s + C_{2g}^*s^2 + \dots + C_{kg}^*s^k) \times \\ &\times (a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Приравнявая члены при равных степенях s уравнения (6.21), получим:

$$\begin{aligned} b_n &= C_{0g}^* a_n; \\ b_{n-1} &= C_{0g}^* a_{n-1} + a_n C_{1g}^*; \\ b_{n-2} &= C_{0g}^* a_{n-2} + C_{1g}^* a_{n-1} + C_{2g}^* a_n. \\ &\dots \end{aligned} \quad (6.22)$$

Из выражений (6.22) следует:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{0g}^* = \frac{b_n}{a_n}; C_{1g}^* = \frac{1}{a_n}(b_{n-1} - C_{0g}^* a_{n-1}) = \frac{1}{a_n}(b_{n-1} - a_{n-1} \frac{b_n}{a_n}); \\ C_{2g}^* = \frac{1}{a_n}(b_{n-2} - C_{0g}^* a_{n-2} - C_{1g}^* a_{n-1}); \\ C_{kg}^* = \frac{1}{a_n} \left\{ b_{n-k} - \sum_{r=1}^k C_{(k-r)g}^* a_{n-r} \right\} \left| \begin{array}{l} b_{n-k} \equiv 0, \text{ при } k > n; \\ a_{n-r} \equiv 0, \text{ при } r > n. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.23)$$

Индекс последнего коэффициента равен порядку системы $k = n$ (вычисляется $(n + 1)$ коэффициент, начиная с C_{0g}).

С учетом этого ряд (6.18) имеет вид:

$$\varepsilon_g(t) = C_{0g}^* g(t) + C_{1g}^* \frac{dg(t)}{dt} + C_{2g}^* \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots + C_{kg}^* \frac{d^k g(t)}{dt^k}. \quad (6.24)$$

Из сопоставления ряда (6.18) с рядом (6.24) следует, что:

$$\begin{aligned} C_{0g}^* &= C_{0g}; \quad C_{1g}^* = C_{1g}; \\ C_{2g}^* &= \frac{1}{2} C_{2g}; \quad C_{kg}^* = \frac{1}{k!} C_{kg}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Из (6.20) следует также, что коэффициенты ряда ошибок можно получить путем деления полинома числителя на полином знаменателя передаточной функции замкнутой системы относительно ошибки по задающему воздействию.

Аналогично рассчитываются коэффициенты ряда ошибок по возмущающему воздействию.

Ошибка, создаваемая возмущением, имеет вид:

$$\varepsilon_f(t) = C_{0f} f(t) + C_{1f} \frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{2!} C_{2f} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \dots + \frac{1}{k!} C_{kf} \frac{d^k f(t)}{dt^k}. \quad (6.26)$$

При этом для вычисления коэффициентов ряда (6.26) используется передаточная функция замкнутой системы относительно ошибки по возмущающему воздействию:

$$\begin{aligned} W_{ef} &= \frac{W_{\text{пп}}^{fe}(s)}{1 + W_{\text{паз}}(s)}. \\ \left\{ \begin{array}{l} C_{0f} = [W_{ef}(s)]_{s=0}; \quad C_{1f} = \left[\frac{dW_{ef}(s)}{ds} \right]_{s=0}; \\ C_{2f} = \left[\frac{d^2 W_{ef}(s)}{ds^2} \right]_{s=0}; \dots; \quad C_{kf} = \left[\frac{d^k W_{ef}(s)}{ds^k} \right]_{s=0}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$C_{0g} = [W_{\varepsilon g}(s)]_{s=0} = \left[\frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(s)} \right]_{s=0} = \frac{1}{1 + \frac{b_n}{a_n}} = \frac{1}{1 + K_{\text{раз}}}. \quad (6.33)$$

$$K_{\text{раз}} = K_R K_{\text{об}} K_{\text{ос}}. \quad (6.34)$$

$$C_{0f} = \frac{K_{\text{пр}}^f}{1 + K_{\text{раз}}} = K_{\text{САУ}} = \delta_c. \quad (6.35)$$

Коэффициент C_{0f} равен статизму регулирования.

Следовательно, уменьшение установившейся ошибки при постоянных значениях задающего и возмущающего воздействий достигается увеличением коэффициента передачи разомкнутой системы.

Однако при этом одновременно с увеличением статической точности уменьшается запас устойчивости и при значительном увеличении $K_{\text{раз}}$ система становится неустойчивой.

Распространенный путь повышения статической точности – обеспечение астатизма. В астатической системе $b_n = 0$, а значит:

$$C_{0g} = \frac{b_n}{a_n} = 0; C_{0f} = \frac{b_n}{a_n} = 0. \quad (6.36)$$

Т. е. в астатической системе ($\nu = 1$) отсутствует установившаяся ошибка от постоянного задающего воздействия и от постоянных возмущений.

Астатизм достигается введением интегрирующего звена в прямую цепь системы. Для обеспечения астатизма относительно возмущения астатическое звено должно быть введено до точки, в которой приложено возмущение.

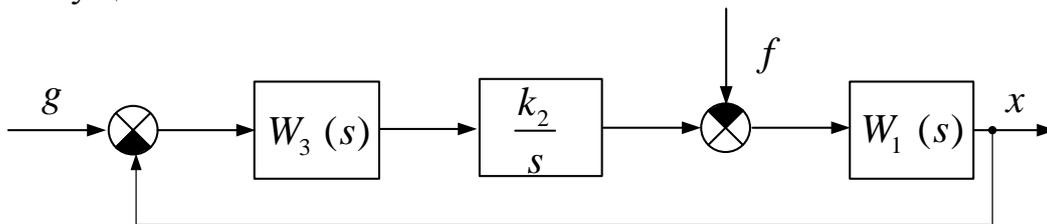


Рис. 6.15. Пример введения астатического звена в прямую цепь системы

Значительно лучшие результаты получают при обеспечении астатизма с помощью изодромного звена, т. е. звена с передаточной функцией:

$$W_{\text{из}}(s) = K_{\text{из}} \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}} s} \right),$$

где $T_{\text{и}}$ – время изодрома.

Астатизм системы только лишь относительно задающего воздействия может быть обеспечен значительно более простыми способами:

1) Не единичной обратной связью (рис. 6.16, а)
$$x = \frac{K_{\text{раз}}}{1 + K_{\text{раз}}k_{\text{ос}}} g_0.$$

Если $k_{\text{ос}} = 1 - \frac{1}{K_{\text{раз}}}$, то $x = g$ – система астатична относительно задающего воздействия.

2) Масштабированием (рис. 6.16, б)
$$x = m \frac{K_{\text{раз}}}{1 + K_{\text{раз}}} g_0,$$
 при

$m = 1 + \frac{1}{K_{\text{раз}}}$ получаем $x = g_0$. Система астатична относительно задающего воздействия.

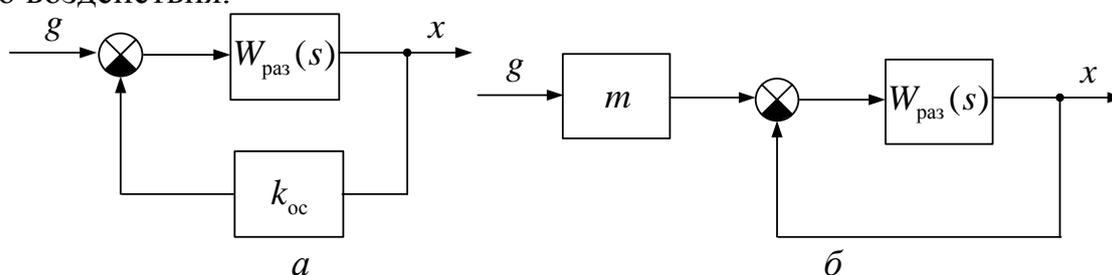


Рис. 6.16. Способы обеспечения астатизма системы: а – не единичной обратной связью; б – масштабированием

Недостаток этих способов в том, что астатизм обеспечивается только при сохранении указанных соотношений между коэффициентами передачи.

Введение в систему двух интегрирующих или изодромных звеньев дает астатизм второго порядка. В этом случае:

$$C_{0g} = C_{1g} = 0; C_{0f} = C_{1f} = 0.$$

В системе с астатизмом второго порядка отсутствуют установившиеся ошибки от задающего и возмущающего воздействий, как постоянных по величине, так и изменяющихся с постоянной скоростью.

Возможно обеспечение астатизма и более высокого порядка.

7 СИНТЕЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

7.1 Синтез одноконтурных систем автоматического управления по отклонению

Этапы синтеза:

1. составление функциональной схемы САУ из функционально-необходимых элементов;
2. составление структурной схемы проектируемой САУ;
3. математическое описание функциональных элементов схемы – представление их соответствующими динамическими звеньями;
4. представление САУ как совокупности обобщенного объекта и регулятора;
5. выбор закона регулирования;
6. расчет параметров настройки типовых регуляторов;
7. математическое описание замкнутой САУ;
8. расчет переходных процессов замкнутой САУ;
9. сравнение численных значений показателей качества спроектированной САУ с требуемыми по техническому заданию показателями качества; вывод о соответствии спроектированной САУ техническому заданию.

7.1.1 Составление функциональной схемы САУ из функционально-необходимых элементов

Функциональная схема типовой промышленной системы автоматического управления теплообменником, составленная из функционально необходимых элементов, приведена на рис. 7.1.

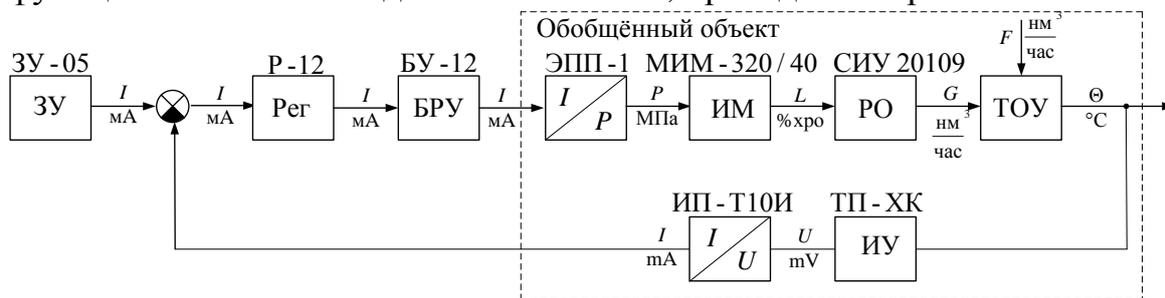


Рис. 7.1. Функциональная схема типовой промышленной САУ

ТОУ (технологический объект управления) – теплообменник:

- выходная координата – температура нагреваемой смеси Θ [°C] – управляемая (регулируемая) величина;
- входное управляющее (регулирующее) воздействие – расход теплоносителя G [м³/час];
- входное возмущающее воздействие – расход нагреваемой смеси F [м³/час].

Для реализации проектируемой САУ будем использовать функциональные блоки агрегатированного комплекса электрических регулирующих устройств «КАСКАД». Выбираем из этого комплекса регулирующий блок Р12, на входе и выходе которого используется унифицированный сигнал ГСП – ток диапазона 0÷5 мА (ГСП – государственная система промышленных приборов и средств автоматизации); блок ручного управления аналогового регулятора БУ12; токовое задающее устройство ЗУ05.

Для изменения расхода теплоносителя необходим регулирующий орган, в качестве которого используем двухседельный регулирующий клапан СИУ 20109.

Для перемещения штока регулирующего органа выберем мембранный исполнительный механизм МИМ-320/40 с параметрами: $D = 320$ мм; $S = 630$ см².

Для согласования выходного токового сигнала регулятора с пневматическим входным сигналом МИМа применяется электропневматический преобразователь ЭПП-1, предназначенный для преобразования унифицированного аналогового электрического сигнала постоянного тока в унифицированный пневматический аналоговый сигнал:

- входной электрический аналоговый сигнал постоянного тока 0÷5 мА;
- выходной пневматический аналоговый сигнал (0,02÷0,10)МПа, (0,2÷1,0)кГс/см².

Для измерения регулируемой (управляемой) величины выбираем термоэлектрический преобразователь – хромель-копелевую термопару (диапазон измеряемых температур – 0÷600 °C; диапазон выходного сигнала 0÷49,094мВ).

Для согласования сигналов измерителя выходной координаты и регулирующего блока Р-12 необходим нормирующий преобразователь сигналов, в качестве которого можно использовать измерительный преобразователь ИП-Т10И, предназначенный для преобразования сигналов термопар в унифицированный аналоговый сигнал постоянного тока [0–5мА; 0–20 мА; 4–20мА; 0–10В].

7.1.2 Составление структурной схемы проектируемой САУ

Структурная схема проектируемой системы приведена на рис. 7.2.

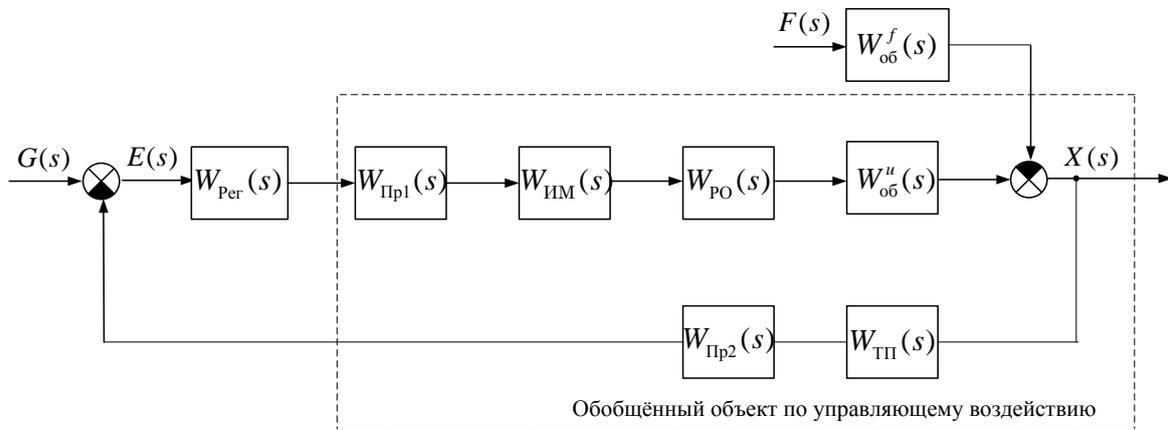


Рис. 7.2. Структурная схема проектируемой системы

7.1.3 Математическое описание функциональных элементов схемы

Математическим описанием функциональных элементов схемы является представление их соответствующими динамическими звеньями.

7.1.3.1 Математическое описание технологического объекта управления

Этапу синтеза алгоритма управления технологическим объектом предшествует процедура его идентификации, т. е. математического описания закономерностей, присущих объекту.

Динамические модели ТОУ часто строятся на основании экспериментальных исследований реакции объекта на ступенчатое входное воздействие.

Этот экспериментальный метод определения динамических характеристик промышленного объекта заключается в снятии кривой разгона (экспериментальной переходной функции) – рис. 7.3 и аппроксимации ее решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Для расчета параметров настройки регулятора проектируемой САУ необходима передаточная функция технологического объекта по управляющему воздействию.

Существует большое количество методик определения параметров искомой модели – коэффициентов дифференциального уравнения или передаточной функции исследуемого технологического объекта управления.

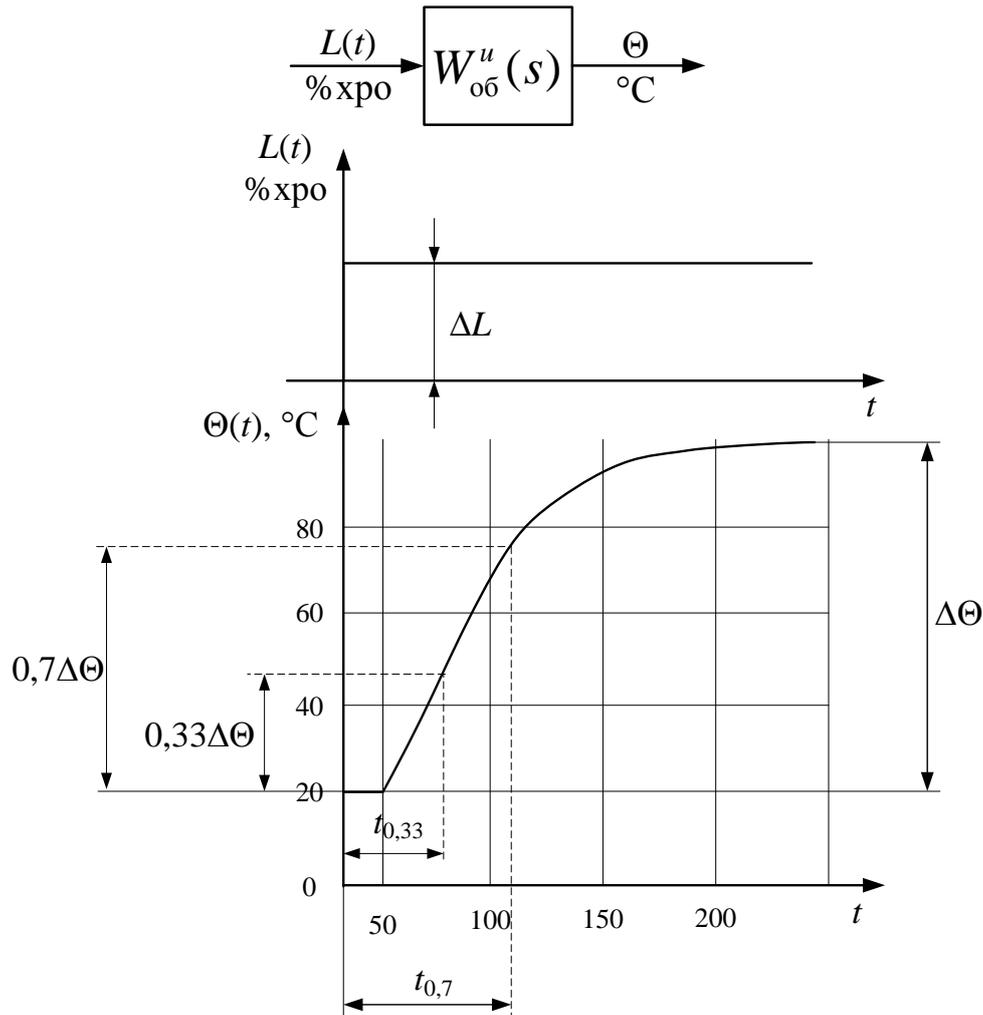


Рис. 7.3. Экспериментальная переходная функция (кривая разгона) технологического объекта управления

Рассмотрим процедуру вычисления параметров модели ТОУ по методу Орманса для объекта, динамические свойства которого описываются инерционным звеном 1 порядка с запаздыванием:

$$T_{об} \frac{d\theta}{dt} + \theta(t) = K_{об} L(t - \tau). \quad (7.1)$$

$$W_{об} = \frac{k_{об}}{T_{об}s + 1} e^{-\tau_{об}s}. \quad (7.2)$$

1. Находят коэффициент передачи объекта

$$k_{об} = \frac{\Delta\theta}{\Delta L}. \quad (7.3)$$

2. Находят по кривой разгона два временных отрезка

$$\begin{aligned} t_{0,33} & \text{ при } \Theta = 0,33\Delta\theta; \\ t_{0,7} & \text{ при } \Theta = 0,7\Delta\theta. \end{aligned} \quad (7.4)$$

3. Вычисляют величину запаздывания ГОУ по формуле

$$\tau_{об} = 0,5(3t_{0,33} - t_{0,7}). \quad (7.5)$$

4. Вычисляют величину постоянной времени ГОУ по формуле

$$T_{об} = \frac{t_{0,7} - \tau_{об}}{1,2} = 1,25(t_{0,7} - t_{0,33}). \quad (7.6)$$

Полученное таким образом дифференциальное уравнение, описывает основное свойство динамической системы – ее инерционность. Целью управления динамическими системами является именно преодоление их инерции.

Динамические свойства промышленных объектов во многих случаях с достаточной точностью могут быть представлены в виде следующих моделей (таблица 7.1).

Таблица 7.1

Типовые математические модели технологических объектов управления с самовыравниванием

Дифференциальные уравнения объекта	Передаточные функции модели объекта
1. одноемкостный объект	
$T_{об} \frac{dy}{dt} + y(t) = k_{об} \cdot x(t)$	$W_{об}(s) = \frac{k_{об}}{T_{об}s + 1};$
2. одноемкостный объект с запаздыванием	
$T_{об} \frac{dy}{dt} + y(t) = k_{об}x(t - \tau_{об})$	$W_{об}(s) = \frac{k_{об}}{T_{об}s + 1} \cdot e^{-\tau_{об}s}$
3. двухемкостный объект	
$T_{o_1}T_{o_2} \frac{d^2y}{dt^2} + (T_{o_1} + T_{o_2}) \frac{dy}{dt} + y(t) = k_{об} \cdot x(t)$	$W_{об}(s) = \frac{k_{об}}{(T_{o_1}s + 1)(T_{o_2}s + 1)};$
4. двухемкостный объект с запаздыванием	
$T_{o_1}T_{o_2} \frac{d^2y}{dt^2} + (T_{o_1} + T_{o_2}) \frac{dy}{dt} + y(t) = k_{об}x(t - \tau_{об})$	$W_{об}(s) = \frac{k_{об}}{(T_{o_1}s + 1)(T_{o_2}s + 1)} e^{-\tau_{об}s};$
5. многоемкостный объект	
$T_{об}^n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + nT_{об} \frac{dy}{dt} + y(t) = k_{об} \cdot x(t)$	$W_{об}(s) = \frac{k_{об}}{(T_{об}s + 1)^n};$
6. много емкостный объект с запаздыванием	
$T_{об}^n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + nT_{об} \frac{dy}{dt} + y(t) = k_{об} \cdot x(t - \tau_{об})$	$W_{об}(s) = \frac{k_{об}}{(T_{об}s + 1)^n} \cdot e^{-\tau_{об}s}$

7.1.3.2 Математическое описание функциональных элементов САУ

Функциональные элементы САУ описываются в соответствии с общими правилами математического описания динамических звеньев и представляются определенными типовыми звеньями.

Коэффициенты уравнения (либо передаточной функции) звена рассчитываются на основании технических характеристик конкретного функционального элемента, в соответствии с паспортными данными описываемого устройства.

Например, термопара ХК:

- диапазон измерения – $0 \div 600$ °С;
- выходной сигнал при 600 °С (согласно градуировочной характеристики) – $49,094$ мВ;
- время установления выходного сигнала на уровне $0,95\Theta_{\text{вх}}$ – не более 4 с; 10 с; 20 с; 60 с и т. д.

Из этого следует, что динамические свойства данной термопары могут быть описаны инерционным звеном 1 порядка:

$$W_{T_n}(s) = \frac{k_{T_n}}{T_n s + 1}, \quad (7.7)$$

где $k_{T_n}(s) = \frac{49,094[\text{мВ}]}{600[^\circ\text{С}]} = 0,082$; $T_n = \frac{t_{yc}}{3} = \frac{4}{3} \cong 1,3$ с.

$$T_n \frac{dU}{dt} + U(t) = k_{T_n} \theta(t). \quad (7.8)$$

$$1,3 \frac{dU}{dt} + U(t) = 0,082 \theta(t). \quad (7.9)$$

Аналогично составляются математические описания всех динамических звеньев структурной схемы проектируемой САУ: регулирующего органа, исполнительного механизма, промежуточных преобразователей и т. п.

При проектировании промышленных САУ есть одна важная особенность: современные высокопроизводительные технологические агрегаты (ТОУ) обладают значительной инерционностью, вызванной их большими объемами и большими расходами сырьевых компонентов.

В связи с этим, как правило, инерционность технологических объектов значительно превышает инерционность остальных функционально-необходимых элементов (измерительных устройств, исполнительных механизмов и регулирующих органов, промежуточных преобразователей и т. п.)

Наличие преобладающей постоянной времени одного из элементов схемы позволяет пренебречь инерционностью остальных функционально-необходимых элементов, т. к. $T_{об} \gg T_{фэл}$ и тогда большинство (либо все) функциональные элементы (кроме ТОУ) системы автоматического управления могут быть представлены безынерционными (пропорциональными) звеньями и их описание сводится к определению коэффициента передачи каждого функционального элемента.

7.1.4 Представление САУ как совокупности обобщенного объекта и регулятора

По определению системой автоматического управления называется совокупность объекта управления и управляющего устройства (рис. 7.4).

Поэтому при синтезе САУ вводится понятие обобщенного объекта управления (в отличие от технологического объекта управления), который включает в себя технологический объект управления и все остальные функционально-необходимые элементы (исполнительные, измерительные устройства, промежуточные преобразователи и т. д.), кроме управляющего устройства – регулятора (рис. 7.1, 7.2).

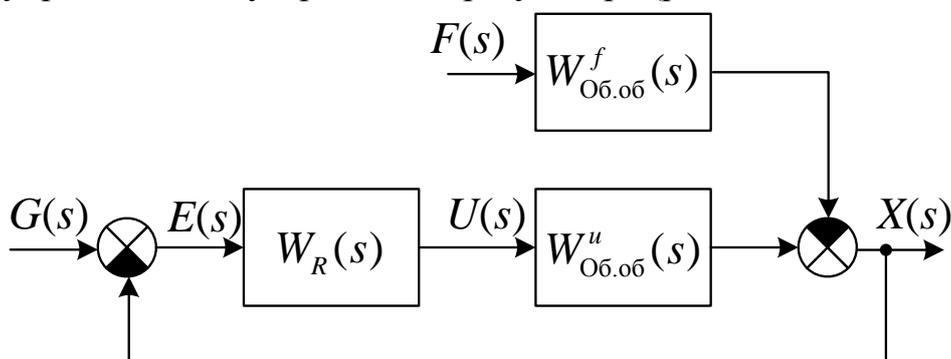


Рис. 7.4. Обобщенная структурная схема системы автоматического регулирования

7.1.5 Выбор закона регулирования

Таким образом, обобщенная структура проектируемой САУ определена (рис. 7.4), и дальнейшая задача сводится к выбору закона регулирования и расчету его коэффициентов (настроек). В качестве регулятора выбирается один из типовых регуляторов: И; П; ПИ; ПИД, приведенных в таблице 7.2.

Таблица 7.2

Математическое описание идеальных регуляторов

Тип регулятора	Уравнение идеального регулятора	Передаточная функция идеального регулятора
И	$r(t) = \frac{k_R}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt$	$W_{\text{И}}(s) = \frac{k_R}{T_i s}$
П	$r(t) = k_R \cdot \varepsilon(t)$	$W_{\text{П}}(s) = k_R$
ПИ	$r(t) = k_R [\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt]$	$W_{\text{ПИ}}(s) = k_R \frac{T_i s + 1}{T_i s}$
ПИД	$r(t) = k_R [\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}]$	$W_{\text{ПИД}}(s) = k_R \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$

Существуют различные подходы к выбору закона регулирования, приведем один из них.

Исходя из минимизации интегрального критерия $I_3 = \int_0^{\infty} \left\{ [\varepsilon(t)]^2 + T^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 \right\} dt$ Орлов В.А. показал, что для различных объ-

ектов оптимальными будут различные регуляторы:

- для безынерционного объекта – регулятор И;
- для одноемкостного объекта – регулятор ПИ;
- для двухемкостного объекта и одноемкостного объекта с запаздыванием – регулятор ПИД;
- для трехемкостного объекта и двухемкостного объекта с запаздыванием – регулятор ПИДД.

При дальнейшем увеличении порядка дифференциального уравнения объекта управления число дифференцирующих составляющих в законе управления возрастает.

Существуют и другие подходы к выбору закона регулирования. Главным критерием этого выбора является обеспечение наилучших показателей качества проектируемой САУ.

7.1.6 Расчет параметров настройки типовых регуляторов

Аналитические методы расчета настройки промышленных систем регулирования приведены в работах [15–22].

Существует большое количество методов расчета настройки типовых регуляторов, ниже приведены некоторые из них.

- 1) метод, основанный на критерии оптимального модуля [17];
- 2) метод, основанный на критерии апериодической устойчивости [17];
- 3) метод полной компенсации большой постоянной времени объекта регулирования [19];
- 4) метод частичной компенсации большой постоянной времени объекта регулирования [19];
- 5) метод Копеловича-Шаркова [20,21];
- 6) метод Копеловича [22];
- 7) метод Куна [18];
- 8) метод расширенных амплитудно-фазовых частотных характеристик [15, 16, 19].

Таким образом, для заданного объекта регулирования и выбранного закона регулирования обеспечить требуемое качество регулирования можно, рассчитав оптимальные параметры настроек регулятора (т. е. коэффициенты выбранного закона регулирования).

Решение этой задачи неоднозначно и зависит от выбора критерия для оценки качества регулирования [15–22]. Рассмотрим один из подходов к определению параметров настройки регуляторов. На рис. 7.5 замкнутая САУ представлена двумя динамическими звеньями.

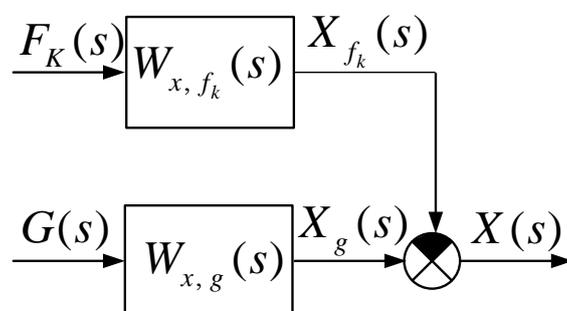


Рис. 7.5. Эквивалентная структурная схема замкнутой САУ

В терминах передаточных функций замкнутой системы (рис. 7.5) сформулируем:

- условие абсолютной управляемости САУ: передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию равна единице $W_{xg}(s) = 1$;
- условие абсолютной инвариантности САУ по k -му возмущению: передаточная функция замкнутой системы по k -му возмущающему воздействию равна нулю $W_{xf_k}(s) = 0$.

Исходя из этого, условия абсолютной управляемости и абсолютной инвариантности в терминах частотных характеристик можно выразить следующим образом:

- амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы относительно задающего воздействия должна быть равна единице во всем диапазоне частот от 0 до ∞ ;
- амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы относительно возмущающих воздействий должна быть равна нулю во всем диапазоне частот от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$.

$$\begin{aligned} |W_{xg}(j\omega)| &= \left| \frac{X(j\omega)}{G(j\omega)} \right| = 1; \\ |W_{xf_k}(j\omega)| &= \left| \frac{X(j\omega)}{F_k(j\omega)} \right| = 0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Естественно, что в реальных системах регулирования указанные условия точно выполняться не могут.

Задачу выбора параметров настройки регулятора можно поставить так, чтобы их подбором в наибольшей степени приблизить амплитудно-частотные характеристики реальной системы к характеристикам идеальной системы, определяемым формулами (7.10).

Эта задача является типичной задачей теории приближения функций, которая может быть сформулирована следующим образом: заданы некоторые функции: $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega, a, b, \dots)$, зависящие кроме ω еще от нескольких варьируемых параметров: a, b, \dots , (параметры настроек регулятора K_r, T_n, T_d). Требуется так подобрать числовые значения этих параметров, чтобы разность $f_1(\omega) - f_2(\omega, a, b, \dots)$ в определенном смысле была наименьшей.

Существует ряд методов, с помощью которых производится решение указанной задачи. Так как в реальных системах практически невозможно добиться равенства единице либо нулю их амплитудно-частотных характеристик во всем диапазоне частот, то параметры настройки должны выбираться таким образом, чтобы система наиболее интенсивно фильтровала наиболее «опасные» гармоники, т. е. гармоники с частотами, для которых вероятностный спектр имеет наибольшее значение.

Примем предположение, что возмущающие воздействия имеют наибольшую интенсивность в области низких частот (промышленные технологические объекты управления обладают большой инерционностью). Поэтому в качестве метода приближения целесообразно выбрать

такой, который гарантировал бы наилучшее приближение частотных характеристик идеальной и реальной систем в окрестности точки с нулевой частотой.

Поставленным требованиям достаточно хорошо удовлетворяет метод приближения путем разложения АЧХ замкнутой САУ в ряд Тейлора в окрестности точки $\omega = 0$.

$$|W(j\omega)| = \overbrace{|W(j\omega)|_{\omega=0}}^{=1 \text{ либо } 0} + \overbrace{\frac{d}{d\omega}|W(j\omega)|_{\omega=0}}^{=0} \Delta\omega + \overbrace{\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\omega^2}|W(j\omega)|_{\omega=0}}^{=0} \Delta\omega^2 + \dots \quad (7.11)$$

После этого отклонение частотной характеристикой от единицы либо нуля считается тем меньшим, чем больше число коэффициентов разложения обращается в нуль.

Тогда уравнения, позволяющие найти искомые параметры настройки регулятора (управляющего устройства), запишутся:

$$\left\{ \begin{array}{l} |W_{xg}(j\omega)|_{\omega=0} = 1; \\ \frac{d}{d\omega}|W_{xg}(j\omega)|_{\omega=0} = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^k}{d\omega^k}|W_{xg}(j\omega)|_{\omega=0} = 0 \end{array} \right. \quad (7.12)$$

из условия абсолютной управляемости САУ.

$$\left\{ \begin{array}{l} |W_{xf_k}(j\omega)|_{\omega=0} = 0; \\ \frac{d}{d\omega}|W_{xf_k}(j\omega)|_{\omega=0} = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^k}{d\omega^k}|W_{xf_k}(j\omega)|_{\omega=0} = 0 \end{array} \right. \quad (7.13)$$

из условия абсолютной инвариантности САУ.

Из полученных уравнений (7.12) либо (7.13) определяются параметры настройки регуляторов. При синтезе САУ по отклонению для расчета параметров настройки регулятора, как правило, используют систему уравнений (7.12), полученную из условия абсолютной управляемости САУ.

В случае, если точного равенства нулю коэффициентов разложения добиться невозможно, оптимальным параметрам настройки соответствуют минимальные их значения.

В [17] эта идея доведена до расчетных формул, позволяющих рассчитывать параметры настройки регуляторов на основе критерия оптимального модуля.

Этот критерий обеспечивает выбор параметров регулятора на основании следующих требований:

- 1) полоса пропускания системы для полезного сигнала должна быть возможно широкой;
- 2) АЧХ не должна иметь резонансного пика и быть по возможности монотонной, убывающей, следовательно, вид АЧХ замкнутой САУ по задающему воздействию должен быть как на рис. 7.6.

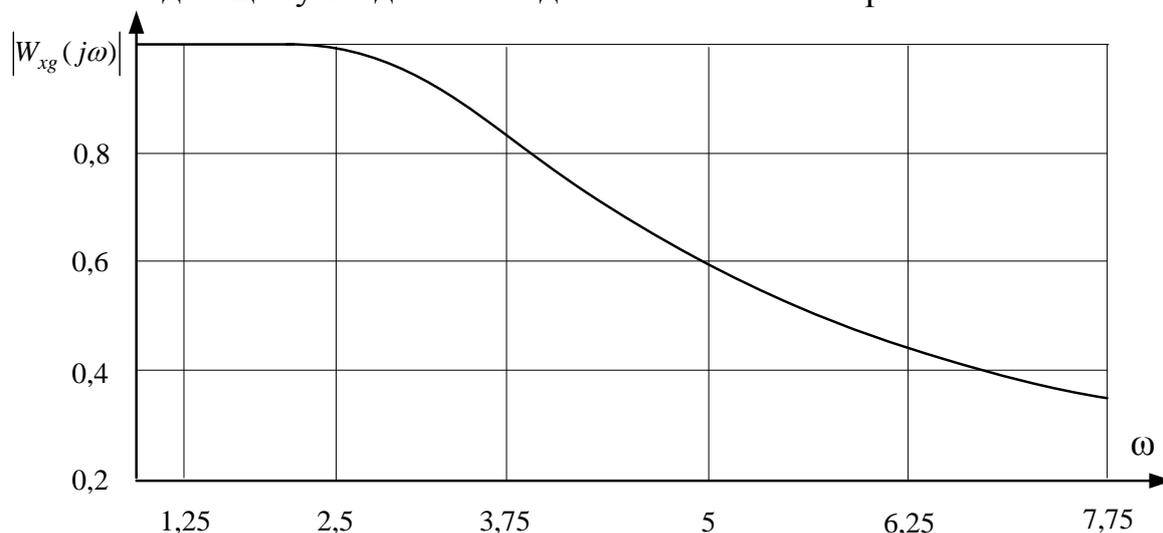


Рис. 7.6. Амплитудно-частотная характеристика замкнутой САУ по задающему воздействию

Условия, обеспечивающие такой вид характеристики, есть условия формализованные системой уравнений (7.12).

Переходные процессы систем автоматического регулирования, спроектированные с использованием критерия оптимального модуля, отличаются малым временем регулирования и малым перерегулированием.

Ниже приведены формулы расчета по методу оптимального модуля параметров настройки типовых линейных регуляторов для одноемкостного объекта с запаздыванием:

$$W_{об.об}^u(s) = \frac{K_{об.об}^u e^{-\tau_{об.об}s}}{T_{об.об}s + 1}. \quad (7.14)$$

Введем обозначения:

$$T = \frac{T_{об.об}}{\tau_{об.об}}; D = \frac{T_d}{\tau_{об.об}}; I = \frac{T_i}{\tau_{об.об}}; K_{раз} = k_R K_{об.об}^u.$$

Тогда для объекта с передаточной функцией (7.14) оптимальные, в смысле критерия модуля передаточной функции, значения параметров настройки типовых регуляторов принимают вид:

1. П

$$W_{\text{П}}(s) = k_R; K_{раз} = \frac{T^2}{2T+1}; k_R = \frac{K_{раз}}{K_{об.об}^u}$$

2. ПИ

$$W_{\text{ПИ}}(s) = k_R \frac{T_i s + 1}{T_i s}; K_{раз} = \frac{6T^3 + 6T^2 + 3T + 1}{4(3T^2 + 3T + 1)}; I = \frac{6T^3 + 6T^2 + 3T + 1}{3(2T^2 + 2T + 1)};$$

$$k_R = \frac{K_{раз}}{K_{об.об}^u}; T_i = I \tau_{об.об}.$$

3. ПИД

$$W_{\text{ПИД}}(s) = k_R \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s}; K_{раз} = \frac{1}{\frac{2}{I}(T+1) - 2};$$

$$I = \frac{180T^4 + 240T^3 + 135T^2 + 42T + 7}{15(2T+1)(6T^2 + 3T + 1)};$$

$$D = \frac{60T^4 + 60T^3 + 27T^2 + 7T + 1}{180T^4 + 240T^3 + 135T^2 + 42T + 7};$$

$$k_R = \frac{K_{раз}}{K_{об.об}^u}; T_i = I \tau_{об.об}; T_d = D \tau_{об.об}$$

Приведем численный пример.

Заданы параметры обобщенного объекта управления (7.14):

$$K_{об.об}^u = 1,1; T_{об.об} = 56 \text{ с}; \tau_{об.об} = 112 \text{ с}.$$

Тогда параметры настройки ПИД регулятора, рассчитанные по критерию оптимального модуля принимают значения:

$$k_R = 0,61; T_i = 96 \text{ с}; T_d = 24,5 \text{ с}.$$

7.2 Синтез комбинированных систем автоматического управления

При синтезе комбинированной системы ее две составляющие части: канал по отклонению и компенсирующая цепь по возмущению – рассчитывают независимо.

Первая часть синтеза рассмотрена выше. Компенсирующая цепь создается, как правило, по основному возмущению. Этапы синтеза:

- 1) выбор элемента для измерения возмущения;
- 2) выбор точки включения компенсирующей цепи в замкнутый контур регулирования;
- 3) определение передаточной функции компенсирующего элемента;
- 4) физическая реализация компенсирующей цепи.

Проблема измерения возмущения является основной при создании системы комбинированного управления.

Выбором точки включения компенсирующей цепи в замкнутый контур управления стремятся при более простой компенсирующей цепи достичь наиболее полной компенсации влияния возмущения.

Чаще всего выход компенсирующей цепи подключают ко входу исполнительного элемента или к преобразовательно-усилительному элементу регулятора по отклонению. На рис. 7.7 показана типичная структура комбинированной САУ, где $W_1(s)$, $W_2(s)$, $W_3(s)$ и $W_4(s)$ – передаточные функции объекта управления, исполнительного устройства, усилителя мощности и регулятора по отклонению; $W_5(s)$, $W_6(s)$ – передаточные функции измерительного и преобразовательного элементов компенсирующей цепи. $W_5(s) W_6(s) = W_{кц}(s)$ – передаточная функция компенсирующей цепи.

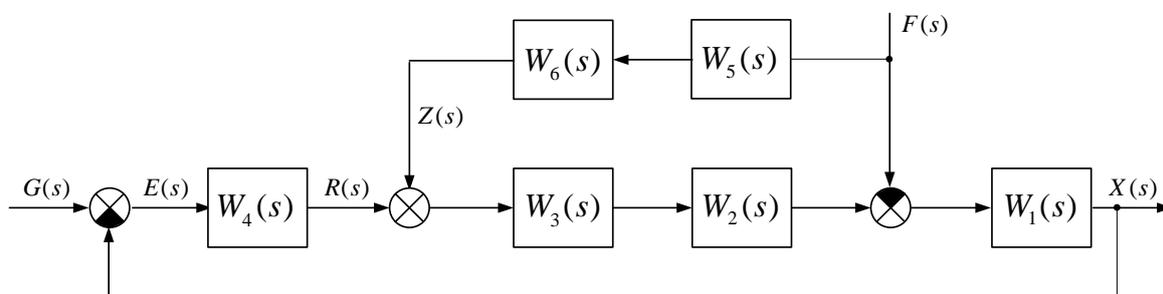


Рис. 7.7. Структурная схема комбинированной САУ

Контур по отклонению считается заданным.

В компенсирующей цепи необходим элемент, измеряющий возмущение – $W_5(s)$ и элемент, преобразующий полученный сигнал так, чтобы он создавал составляющую регулирующего воздействия z , компенсирующую естественное влияние f на регулируемую координату – $W_6(s)$. По структурной схеме комбинированной САУ (рис. 7.7) составляем ее передаточную функцию относительно возмущения.

Необходимо, чтобы проектируемая САУ была инвариантна относительно рассматриваемого возмущения. Это условие будет реализова-

но, если передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию будет равна нулю:

$$W_{\text{зам}}^{xf}(s) = 0;$$

$$W_{\text{зам}}^{xf}(s) = \frac{W_{\text{пр}}^{fx}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)}; \quad W_{\text{раз}}(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s);$$

$$W_{\text{кц}}(s) = W_5(s)W_6(s); \quad W_{\text{пр}}^{fx}(s) = W_{\text{кц}}(s)W_3(s)W_2(s)W_1(s) - W_1(s);$$

$$W_{\text{зам}}^{xf}(s) = \frac{W_{\text{кц}}(s)W_3(s)W_2(s)W_1(s) - W_1(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)}.$$

Итак, условие инвариантности САУ к возмущающему воздействию запишется

$$W_{\text{зам}}^{xf}(s) = \frac{W_1(s)[W_{\text{кц}}(s)W_3(s)W_2(s) - 1]}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = 0. \quad (7.15)$$

Требуемое условие инвариантности достигается приравниванием числителя передаточной функции (7.15) к нулю

$$W_{\text{кц}}(s)W_3(s)W_2(s) - 1 = 0.$$

Если $W_{\text{кц}}(s)W_3(s)W_2(s) = 1$, то передаточная функция системы относительно возмущения f равна нулю и возмущение f не влияет на регулируемую координату x .

Таким образом, регулируемая координата x будет инвариантна (независима) от возмущения f , если

$$W_{\text{кц}}(s) = \frac{1}{W_2(s)W_3(s)}. \quad (7.16)$$

Передаточная функция $W_5(s)$ определяется техническими характеристиками выбранного измерительного устройства.

Тогда передаточная функция преобразовательного элемента компенсирующей цепи (регулятора по возмущению) будет найдена из выражения

$$W_6(s) = \frac{W_{\text{кц}}(s)}{W_5(s)}. \quad (7.17)$$

Рассмотрим случай, который легко реализуется в цифровых системах автоматического управления (рис. 7.8).

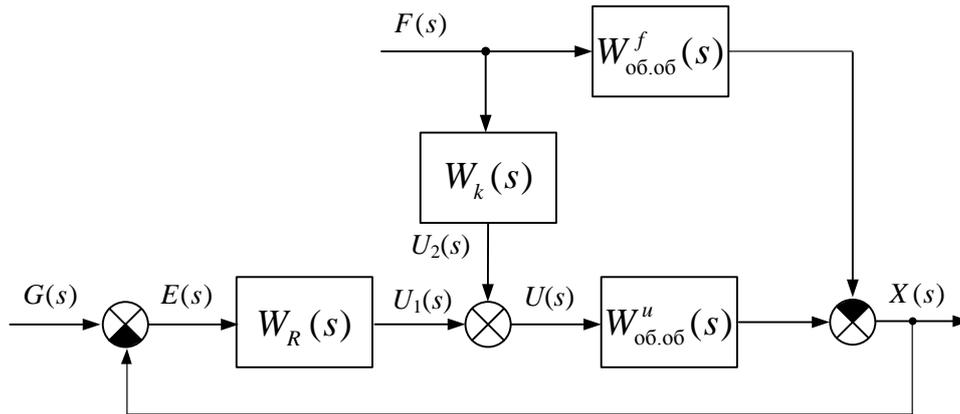


Рис. 7.8. Структурная схема комбинированной САУ

Запишем условие инвариантности данной САУ относительно возмущающего воздействия $f(t)$

$$W_{\text{зам}}^{xf} = \frac{W_{\text{пр}}^{fx}(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = \frac{W_k(s)W_{\text{об.об}}^u(s) - W_{\text{об.об}}^f(s)}{1 + W_{\text{раз}}(s)} = 0. \quad (7.18)$$

Это условие выполняется, если $W_k(s)W_{\text{об.об}}^u(s) - W_{\text{об.об}}^f(s) = 0$.

Тогда передаточная функция компенсирующего звена (регулятора по возмущению) принимает вид:

$$W_k(s) = \frac{W_{\text{об.об}}^f(s)}{W_{\text{об.об}}^u(s)}. \quad (7.19)$$

Если динамические свойства объекта управления по каналам управления и возмущения одинаковы, т. е. $T_{\text{об}}^u = T_{\text{об}}^f$; $\tau_{\text{об}}^u = \tau_{\text{об}}^f$, т. о. передаточная функция компенсатора определяется выражением

$$W_k(s) = \frac{K_{\text{об.об}}^f}{K_{\text{об.об}}^u} = K_k. \quad (7.20)$$

Роль компенсатора (регулятора по возмущению) в этом случае выполняет пропорциональное звено, коэффициент передачи которого равен отношению коэффициентов передачи объекта по возмущающему и управляющему воздействиям.

7.3 Синтез корректирующих звеньев

Устройства, вводимые в систему с целью обеспечения оптимального или желаемого качества управления, называют корректирующими.

Различают:

- последовательные корректирующие устройства, включаемые в прямую цепь системы последовательно (чаще всего последовательное корректирующее устройство включают после регулятора);

- параллельные корректирующие устройства, включаемые в цепь главной отрицательной обратной связи, либо в цепь местной обратной связи, которая охватывает один из элементов прямой цепи системы. Этим элементом обычно является исполнительный механизм или усилитель мощности (встречно-параллельное включение звеньев).

Иногда применяются также т. н. прямые параллельные корректирующие устройства, когда корректирующее звено включено параллельно одному из элементов прямой цепи.

7.3.1 Синтез последовательного корректирующего звена методом логарифмических амплитудно-частотных характеристик

Рассмотрим систему автоматического управления, структурная схема которой изображена на рис. 7.9.

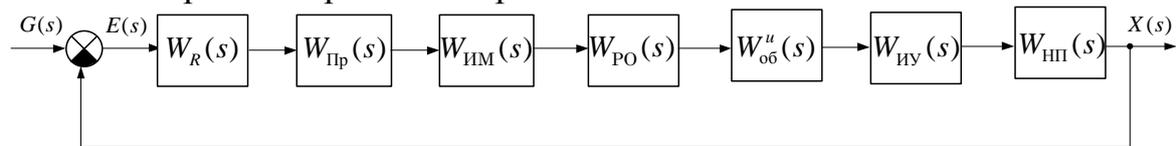


Рис. 7.9. Структурная схема системы автоматического управления

Реальная САУ состоит из функционально-необходимых элементов (рис. 7.9). Все эти элементы в совокупности образуют неизменяемую часть САУ.

Рассмотрим разомкнутую систему. Предполагается, что САУ, удовлетворяющая требуемым показателям качества переходного процесса, имеет передаточную функцию $W_{ж}(s)$.

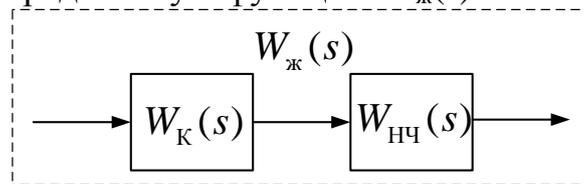


Рис. 7.10. Эквивалентная структурная схема скорректированной разомкнутой САУ

Согласно рис. 7.10 передаточная функция разомкнутой САУ, удовлетворяющей требуемым показателям качества, принимает вид

$$W_{ж}(s) = W_{НЧ}(s)W_{К}(s). \quad (7.21)$$

При этом передаточная функция неизменяемой части системы (рис. 7.9) определяется выражением:

$$W_{\text{нч}}(s) = W_{\text{R}}(s)W_{\text{Пр}}(s)W_{\text{ИМ}}(s)W_{\text{РО}}(s)W_{\text{Об}}^U(s)W_{\text{Иу}}(s)W_{\text{НП}}(s). \quad (7.22)$$

Из выражения (7.21) находится передаточная функция искомого последовательного корректирующего звена:

$$W_k(s) = \frac{W_{\text{ж}}(s)}{W_{\text{нч}}(s)}. \quad (7.23)$$

В инженерной практике наиболее распространен частотный метод синтеза корректирующих устройств с помощью логарифмических частотных характеристик.

Тогда из (7.23) ЛАЧХ для последовательного корректирующего звена принимает вид:

$$L_k(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{нч}}(\omega). \quad (7.24)$$

Этапы синтеза последовательного корректирующего звена

1. Построение ЛАЧХ неизменяемой части.
2. Построение желаемой ЛАЧХ, обеспечивающей требуемые показатели качества: время регулирования – t_p , перерегулирование – σ .
3. Построение ЛАЧХ корректирующего звена на основании выражения (7.24).
4. Определение математического описания, параметров корректирующего звена и его схемного решения по справочникам и таблицам синтеза цепей.
5. Построение переходных процессов спроектированной системы, определение прямых показателей качества и сравнение их с аналогичными показателями качества технического задания.

7.3.2 Синтез параллельных корректирующих устройств по логарифмическим амплитудно-частотным характеристикам

Параллельное корректирующее звено может быть включено либо в цепь главной отрицательной обратной связи, либо в цепь местной обратной связи.

При включении параллельного корректирующего звена в цепь главной отрицательной обратной связи параллельным корректирующим звеном охвачена вся неизменяемая часть.

Согласно рис. 7.11 частотная передаточная функция системы автоматического управления, удовлетворяющей заданным требованиям качества управления, запишется:

$$W_{\text{ж}}(j\omega) = \frac{W_{\text{нч}}(j\omega)}{1 + W_{\text{нч}}(j\omega)W_{\text{кз}}(j\omega)}. \quad (7.25)$$

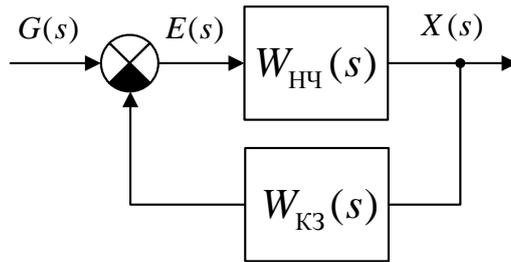


Рис. 7.11. Включение параллельного корректирующего звена в цепь главной отрицательной обратной связи

Параллельную коррекцию удобно применять в том диапазоне частот, где выполняется неравенство

$$|W_{\text{нч}}(j\omega)W_{\text{кз}}(j\omega)| \gg 1. \quad (7.26)$$

Условие (7.26) достигается выбором соответствующего коэффициента передачи корректирующего звена.

В этом интервале частот, пренебрегая единицей в знаменателе выражения (7.25), получаем:

$$W_{\text{ж}}(j\omega) \approx \frac{1}{W_{\text{кз}}(j\omega)}; |W_{\text{кз}}(j\omega)| \approx \frac{1}{|W_{\text{ж}}(j\omega)|} \quad (7.27)$$

или для логарифмической характеристики

$$L_{\text{кз}}(\omega) \cong -L_{\text{ж}}(\omega). \quad (7.28)$$

Отсюда вытекает следующее правило для приближенного синтеза параллельного корректирующего звена (рис. 7.11) в том интервале частот, в котором удовлетворяется неравенство (7.26).

1. Строим ЛАЧХ неизменяемой части.
2. Строим желаемую ЛАЧХ, обеспечивающую заданное качество регулирования.
3. Находим интервал частот, существенный для определения качества, и строим ЛАЧХ корректирующего звена, пользуясь выражением (7.28). Чтобы выполнялось условие (7.26), выбираем достаточно большой коэффициент передачи корректирующего звена $k_{\text{кз}}$.
4. Проверяем, совместимо ли выбранное значение $k_{\text{кз}}$ с требованием устойчивости САУ с частотной передаточной функцией (7.25) и с выполнением условий заданного запаса устойчивости скорректированной САУ.
5. Находим по справочнику схему корректирующего звена и рассчитываем его параметры.

Чаще всего на практике корректирующим звеном охватывается только часть неизменяемой системы.

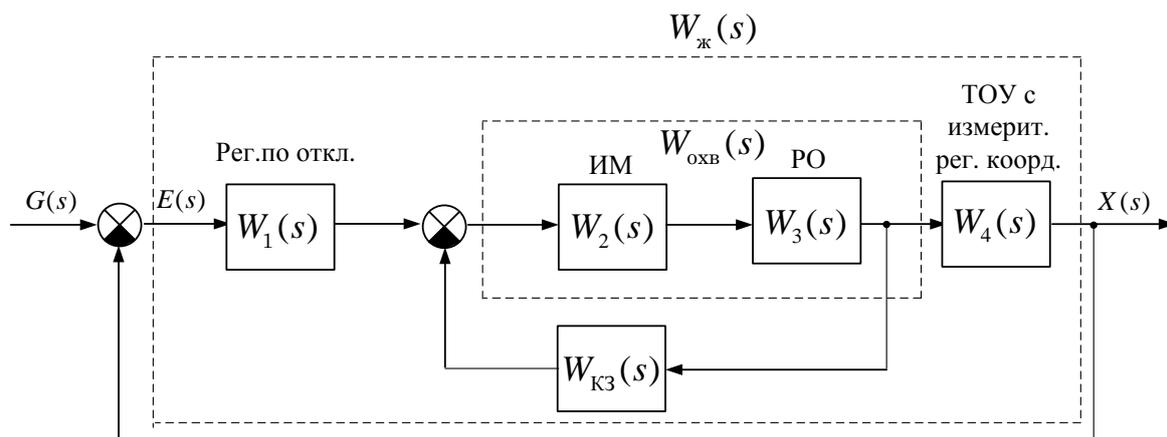


Рис. 7.12. Включение параллельного корректирующего звена в цепь местной обратной связи

Согласно рис. 7.12 передаточная функция разомкнутой системы, удовлетворяющей требуемым показателям качества управления, принимает вид:

$$W_{\text{ж}}(s) = W_1(s) \frac{W_2(s)W_3(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)W_{\text{кз}}(s)} W_4(s). \quad (7.29)$$

$$W_{\text{нч}}(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s). \quad (7.30)$$

$$W_{\text{оXB}}(s) = W_2(s)W_3(s). \quad (7.31)$$

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{W_{\text{нч}}(s)}{1 + W_{\text{оXB}}(s)W_{\text{кз}}(s)}. \quad (7.32)$$

Согласно (7.32) выражение для желаемой амплитудно-фазовой частотной характеристики системы запишется в виде

$$W_{\text{ж}}(j\omega) = \frac{W_{\text{нч}}(j\omega)}{1 + W_{\text{оXB}}(j\omega)W_{\text{кз}}(j\omega)}. \quad (7.33)$$

В интервале частот, для которого справедливо неравенство

$$|W_{\text{оXB}}(j\omega)W_{\text{кз}}(j\omega)| \gg 1 \quad (7.34)$$

вместо (7.33) можно приближенно записать (пренебрегая единицей):

$$W_{\text{ж}}(j\omega) \approx \frac{W_{\text{нч}}(j\omega)}{W_{\text{оXB}}(j\omega)W_{\text{кз}}(j\omega)}. \quad (7.35)$$

Тогда

$$W_{\text{кз}}(j\omega) \approx \frac{W_{\text{нч}}(j\omega)}{W_{\text{оXB}}(j\omega)W_{\text{ж}}(j\omega)}. \quad (7.36)$$

Прологарифмировав (7.36), получим:

$$L_{\text{кз}}(\omega) \cong L_{\text{нч}}(\omega) - L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{оXB}}(\omega). \quad (7.37)$$

Этим выражением и определяется ЛАЧХ корректирующего звена.

Этапы синтеза искомого корректирующего звена:

1. Строим ЛАЧХ неизменяемой части.
2. Строим ЛАЧХ звеньев охваченных корректирующим звеном.
3. Строим желаемую ЛАЧХ, обеспечивающую заданное качество регулирования.
4. Согласно выражению (7.37) строим ЛАЧХ искомого корректирующего звена.
5. Проверяем, совместимо ли выбранное значение $k_{кз}$ с требованием устойчивости САУ с передаточной функцией (7.29) и с выполнением условий, заданного запаса устойчивости скорректированной САУ.
6. Находим по справочнику схему корректирующего звена и рассчитываем его параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем / Воронов А.А. – 2-е изд., перераб. – М.: Энергия, 1980. – 309 с.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы / Воронов А.А. – 2-е изд., перераб. – М.: Энергоиздат, 1981. – 303 с.
3. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления / Бесекерский В.А., Попов Е.П. – 4-е изд., перераб. и доп. – СПб: Профессия, 2003. – 752 с.
4. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы / Ким Д.П. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
5. Лукас В.А. Теория управления техническими системами / Лукас В.А. – 3-е изд., перераб. и доп. – Екатеринбург: УГГГА, 2002. – 675 с.
6. Бабаков Н.А. Теория автоматического управления. Ч.1 Теория линейных систем автоматического управления / Бабаков Н.А., Воронов А.А., Воронова А.А. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 367 с.
7. Юрьевич Е.И. Теория автоматического управления / Юрьевич Е.И. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергия, 1975. – 416 с.
8. Дорф Р.К. Современные системы управления / Дорф Р.К., Бишоп Р.Х. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. – 831 с.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.1 Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / под ред. Пупкова К. А., Егупова Н. Д. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ, 2004. – 655 с.
10. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / под ред. В.А. Бесекерского. – 5-е изд., перераб. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
11. Стефани Е.П. Сборник задач по основам автоматического регулирования теплоэнергетических процессов / Стефани Е.П., Панько М.А., Пакина Г.А. – М.: Энергия, 1973. – 336 с.
12. Макаров И.М. Линейные автоматические системы: элементы теории, методы расчета и справочный материал / Макаров И.М., Менский Б.М. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с.

13. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
14. Топчиев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования / Топчиев Ю.И. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.
15. Ротач В.Я. Расчет динамических промышленных автоматических систем регулирования / Ротач В.Я. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
16. Стефани Е.П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических объектов / Стефани Е.П. – М.: Энергия, 1972. – 376 с.
17. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Гурецкий Х. – М.: Машиностроение, 1974. – 328 с.
18. Штейнберг Ш.Е. Промышленные автоматические регуляторы / Штейнберг Ш.Е., Хвилевичкий Л.О., Ястребенецкий М.А. / под ред. Е.П. Стефани. – М.: Энергия, 1973. – 568 с.
19. Кулаков Г.Т. Инженерные экспресс-методы расчета промышленных систем регулирования / Кулаков Г.Т. – Минск: Высшая школа, 1984. – 192 с.
20. Гинзбург И.Б. Автоматическое регулирование и регуляторы в промышленности строительных материалов / Гинзбург И.Б. – Л.: Стройиздат, 1985. – 255 с.
21. Шарков А.А. Автоматическое регулирование и регуляторы в химической промышленности / Шарков А.А., Притыко Г.М., Палюх Б.В. – М.: Химия, 1990. – 228 с.
22. Дубровный В.А. Справочник по наладке автоматических устройств контроля и регулирования: в 2 частях. Ч.2 / Дубровный В.А., Забокрицкий Е.И., Трегуб В.Г., Холодовский Б.А. – Киев: Наука думка, 1981. – 940 с.

УКАЗАТЕЛЬ СОКРАЩЕНИЙ

- АФЧХ – амплитудно-фазовая частотная характеристика;
- АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;
- ФЧХ – фазо-частотная характеристика;
- ГООС – главная отрицательная обратная связь;
- ЛАЧХ – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика;
- ЛФЧХ – логарифмическая фазо-частотная характеристика;
- ОУ – объект управления;
- САР – система автоматического регулирования;
- САУ – система автоматического управления;
- ТАУ – теория автоматического управления;
- ТДЗ – типовое динамическое звено;
- ТОУ – технологический объект управления.

Учебное издание

ДЯДИК Валерий Феодосиевич
БАЙДАЛИ Сергей Анатольевич
КРИНИЦЫН Николай Станиславович

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Научный редактор *доктор технических наук,*
профессор С.Н. Ливенцов
Редактор *В.Ф. Дядик*
Компьютерная верстка *М.А. Байдали*

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством представленного оригинал-макета**

Подписано к печати 17.01.2011. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 11,38. Уч.-изд.л. 10,29.
Заказ . Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  **ТПУ**. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru