

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

В.Ф. Дядик, С.А. Байдали, Т.А. Байдали

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 658.513:519.22(075.8)

ББК У9(2)29-2я73

Д99

Дядик В.Ф.

Д99 Статистические методы контроля и управления: учебное пособие / В.Ф. Дядик, С.А. Байдали, Т.А. Байдали; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 144 с.

В пособии приведены необходимые для решения практических инженерных задач теоретические сведения о случайных величинах, системах случайных величин и случайных процессах. Изложены методы статистического оценивания их основных характеристик.

Рассмотрены статистические методы планирования экспериментальных исследований и обработки их результатов с целью построения регрессионных моделей многомерных промышленных объектов.

Описаны статистические методы процедуры сглаживания измеряемых технологических переменных, построения динамических моделей промышленных объектов управления, оценки показателей качества действующих систем автоматического управления.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 140801 «Электроника и автоматика физических установок».

УДК 658.513:519.22(075.8)

ББК У9(2)29-2я73

Рецензенты

Доктор химических наук, ведущий научный сотрудник
института химии нефти СО РАН

Т.А. Сагаченко

Кандидат технических наук,
доцент СТИ НИЯУ МИФИ

В.Я. Дурновцев

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2011

© Дядик В.Ф., Байдали С.А., Байдали Т.А., 2011

© Обложка. Издательство Томского
политехнического университета, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление	3
Предисловие.....	5
1 Основные характеристики случайных величин, систем случайных величин, случайных процессов.....	7
1.1 Основные характеристики случайных величин	8
1.2 Основные характеристики систем случайных величин.....	15
1.3 Основные характеристики случайных процессов	28
1.3.1 Понятие о стационарном случайном процессе.....	35
1.3.2 Спектральные плотности случайных процессов.....	38
1.3.3 Эргодическое свойство стационарных случайных функций	40
2 Статистическое оценивание основных характеристик случайных величин, систем случайных величин, случайных процессов.....	42
2.1 Оценки характеристик случайных величин.....	42
2.1.1 Точечные оценки параметров случайных величин.....	44
2.1.2 Интервальные оценки параметров случайных величин	46
2.1.3 Оценка объема выборки	49
2.2 Оценки характеристик системы двух случайных величин ($X; Y$)	51
2.2.1 Оценивание линейной регрессии.....	53
2.3 Оценки характеристик случайных процессов	58
3 Статистические методы планирования экстремальных экспериментов.....	66
3.1.1 Параметры оптимизации (целевые функции).....	68
3.1.2 Факторы.....	69
3.1.3 Модель.....	69
3.2 Планирование эксперимента.....	70
3.2.1 Построение матрицы планирования.....	74
3.2.2 Реализация эксперимента	77
3.2.3 Расчет ошибки опыта (дисперсии воспроизводимости).....	78
3.2.4 Проверка значимости различия средних максимального и минимального значений параметра оптимизации.....	80
3.2.5 Расчет коэффициентов уравнения регрессии	81
3.2.6 Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии.....	91
3.2.7 Проверка адекватности модели (уравнения регрессии)	92
3.2.8 Расчет коэффициентов взаимодействия факторов по планам ПФЭ.....	93
3.2.9 Полный факторный эксперимент при разном числе параллельных опытов	94

3.2.10 Полный факторный эксперимент с параллельными опытами в одной точке факторного пространства.....	96
3.3 Дробный факторный эксперимент.....	96
3.4 Алгоритм построения статической модели исследуемого объекта управления с использованием планов полного и дробного факторных экспериментов.....	103
3.5 Планы второго порядка.....	104
3.6 Задачи и методы статической оптимизации технологических процессов	111
4 Применение статистических методов при контроле и управлении технологическими процессами	117
4.1 Сглаживание измеряемых сигналов	117
4.2 Статистические методы построения динамических моделей промышленных объектов управления.....	123
4.3 Статистические оценки показателей качества работы систем автоматического управления.....	130
Список литературы	133
Указатель сокращений	135
Приложение А	136

ПРЕДИСЛОВИЕ

С отсутствием строгой детерминированности измерений исследователь сталкивается повсюду в своей работе.

В результате повторных измерений в большинстве реальных экспериментов обычно получаются отличающиеся друг от друга значения измеряемых величин. Такой исход эксперимента называется *случайным*, *стохастическим*, возможным, *статистическим* или вероятностным в зависимости от вкуса автора; соответствующие величины называются *случайными* или *стохастическими*.

Существует много причин, приводящих к тому, что наблюдения и измерения, сделанные в экспериментах, оказываются скорее случайными, чем детерминированными. В реальных заводских условиях производственные шумы, периодические сигналы и другие помехи влияют на измерения.

В нормальных условиях эксплуатации записи контролируемых величин, характеризующих режимы работы технологических процессов обычно носят характер случайных колебаний, т. е. колебаний, амплитуда и частота которых изменяются во времени случайным образом. Такие изменения величин вызываются действием на них большого числа разнообразных возмущающих факторов. В службах АСУ ТП современных промышленных предприятий хранятся большие объемы цифровой информации об изменениях показателей технологических процессов. Применение статистических методов обработки позволяет использовать эти записи для определения целого ряда практически важных оценок, критериев и характеристик, используемых при разработке систем автоматического контроля и управления и анализе их работы в реальных производственных условиях.

Учебное пособие содержит четыре раздела. В первом разделе приведены необходимые для решения практических инженерных задач теоретические сведения о случайных величинах, системах случайных величин и случайных процессах. Статистическому оцениванию основных характеристик случайных величин, систем случайных величин и случайных процессов посвящен второй раздел. Описаны методы точечных и интервальных оценок математического ожидания, дисперсии случайных величин, коэффициента корреляции и коэффициентов линейного уравнения регрессии системы 2-х случайных величин, корреляционных функций и спектральных плотностей случайных процессов. В третьем разделе рассмотрены статистические методы планирования экспериментальных исследований и обработки их результатов с целью построения регрессионных моделей многомерных промышленных объектов.

Здесь представлены описания полного и дробного факторных экспериментов, а также планов второго порядка. Сформулирован алгоритм построения статической модели исследуемого технологического объекта управления с использованием планов факторных экспериментов. В четвертом разделе излагаются статистические методы построения динамических моделей промышленных объектов, сглаживания измеряемых сигналов, оценки показателей качества работы систем автоматического управления.

Задача пособия – способствовать формированию у обучающихся знаний и умений применения статистических методов (теории вероятностей, элементов математической статистики, статистических методов планирования экспериментов) при анализе и синтезе систем автоматического контроля и управления технологическими процессами.

Авторы выражают глубокую благодарность инженеру кафедры ЭАФУ ТПУ Байдали М.А. за подготовку учебного пособия к изданию.

1 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В результате повторных измерений в большинстве реальных экспериментов обычно получаются отличающиеся друг от друга значения измеряемых величин. Такой исход эксперимента называется *случайным*, *стохастическим*, возможным, *статистическим* или вероятностным в зависимости от вкуса автора; соответствующие величины называются *случайными* или *стохастическими*.

Существует много причин, приводящих к тому, что наблюдения и измерения, сделанные в экспериментах, оказываются скорее случайными, чем детерминированными. Иногда случайность предопределена самой физической сущностью явлений, как, например, при радиоактивном распаде веществ или эмиссии электронов из катода – процессах, которые протекают на молекулярном и атомном уровнях, а измеряются макроскопическими приборами. В других случаях сказывается неполнота информации о данной величине или применяемая аппаратура не позволяет получить всю требуемую информацию, так что наблюдаются лишь некоторые стороны явления. В реальных заводских условиях производственные шумы, периодические сигналы и другие помехи влияют на измерения.

В общем, с отсутствием строгой детерминированности измерений исследователь сталкивается повсюду в своей работе.

Истинное значение переменной – это такое её значение, которое получилось бы при некотором измерении, если бы отсутствовали элементы случайности, связанные с измерением. В этом смысле оно является гипотетическим значением. С понятием истинного значения связано понятие *ошибки*, ибо ошибка представляет собой разность между измеренным и истинным значениями. *Случайной ошибкой* называется разность между случайной величиной и её истинным значением.

Итак, случайные результаты, полученные в эксперименте, содержат ошибку или неопределённость.

Статистическая модель – это математическое описание случайного процесса. Разновидности статистических моделей приведены на рис. 1.1.

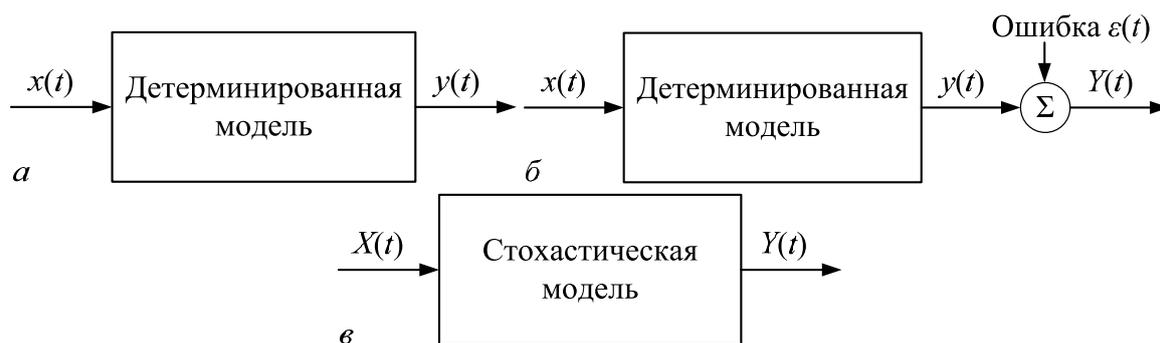


Рис. 1.1. Виды математических моделей технологических объектов управления: а – детерминированная; б и в – статистические модели

На рис. 1.1, б случайная ошибка добавляется к выходу детерминированной модели, что приводит к случайной выходной переменной.

На рис. 1.1, в случайная выходная переменная возникает вследствие случайного характера входной переменной и стохастичности модели.

1.1 Основные характеристики случайных величин

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное заранее неизвестное значение.

Поскольку в технике результаты исследований и наблюдений обычно оцениваются числами, случайные величины могут принимать те или иные числовые значения. В ряде наблюдений случайные величины принимают отдельные, изолированные друг от друга значения, которые заранее возможно перечислить. Такие случайные величины называются *дискретными*. Случайные величины, значения которых не могут быть заранее перечислены и непрерывно заполняют некоторый промежуток, называются *непрерывными*.

Случайными величинами являются, например, значения каких-либо технологических величин у ряда однотипных агрегатов, измеренные в один и тот же момент времени. К примеру, тонина помола на выходе нескольких трубных шаровых мельниц, измеренная в какой-то момент времени, является непрерывной случайной величиной, поскольку она может принимать любое значение из диапазона ее изменения. Другие величины: число однотипных механизмов, ремонтируемых в данный момент в ряде цехов, значения любых контролируемых характеристик процессов на выходе измеряющих их контактных датчиков – примеры дискретных случайных величин, которые могут принимать определенный конечный ряд значений.

Пусть дискретная случайная величина X может принимать в результате опыта значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Каждое из них возможно, поэтому существует некоторая вероятность того, что в результате опыта X примет данное значение. Отношение числа опытов m_i , в результате которых случайная величина X приняла значение x_i , к общему числу произведённых опытов N называется *частотой появления события* $X = x_i$. Частота m_i/N сама является случайной величиной и меняется в зависимости от количества произведённых опытов. Но при большом числе опытов она имеет тенденцию стабилизироваться около некоторого значения p_i , называемого вероятностью события $X = x_i$. Поэтому последнюю на практике вычисляют по формуле:

$$P_i = P(X = x_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_i}{N}. \quad (1.1)$$

Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице:

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1. \quad (1.2)$$

Эта суммарная вероятность распределена определенным образом между отдельными значениями. С вероятностной точки зрения случайная величина полностью описывается заданием этого распределения, т. е. точным указанием, какой вероятностью обладает каждое из событий $X = x_i$ при любом i от 1 до N . Ряд распределения случайной величины X приведен в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Ряд распределения случайной величины X

x_i	x_1	x_2	...	x_N
p_i	p_1	p_2	...	p_N

Всякое отношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется *законом распределения*. Закон распределения количественно выражается в двух формах:

1. Как для непрерывной, так и для дискретной случайной величины удобно пользоваться вероятностью события $P(X < x)$, где x – текущая переменная. Вероятность P такого события, зависящая от значения x , называется *функцией распределения случайной величины X* :

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.3)$$

Как ясно из определения, $F(x)$ есть неубывающая функция (рис. 1.2), а значения её при предельных значениях аргумента соответственно равны: $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$.

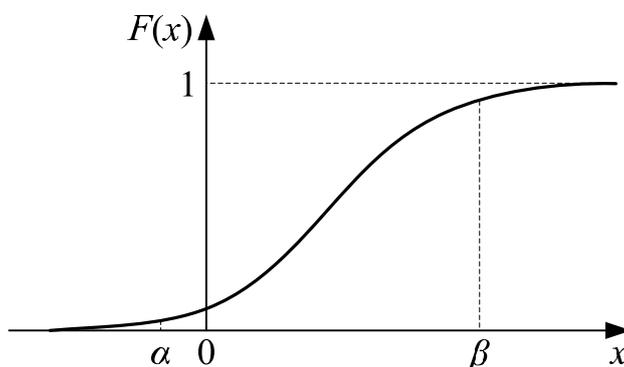


Рис. 1.2. Функция распределения случайной величины X

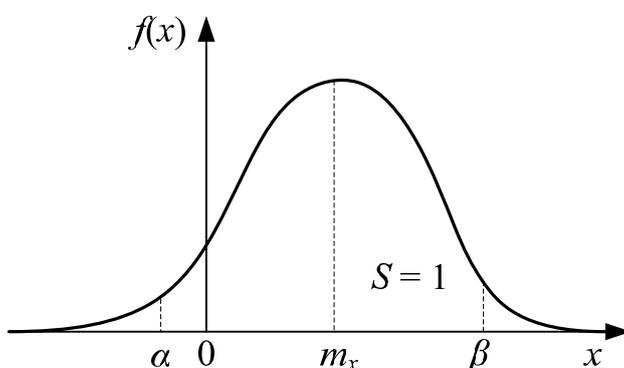


Рис. 1.3. Плотность распределения случайной величины X

Функцию распределения $F(x)$ иногда называют также *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*.

2. Для непрерывной случайной величины наиболее часто употребляется производная функции распределения – *плотность распределения* случайной величины X (рис. 1.3):

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x \leq X < x + \Delta x]}{\Delta x} \quad (1.4)$$

– *дифференциальная функция распределения* (дифференциальный закон распределения).

Плотность распределения является неотрицательной функцией (рис. 1.3); площадь под очерчивающей её кривой (кривой распределения) и осью абсцисс равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (1.5)$$

Функция распределения согласно определению выражается через плотность распределения следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx. \quad (1.6)$$

Геометрически $F(x)$ есть площадь под кривой дифференциальной функции распределения и осью абсцисс, лежащая левее точки x .

Вероятности событий, что величина X принимает значения менее α , либо более β , определяются выражениями:

$$P[X \leq \alpha] = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx;$$

$$P[x > \beta] = \int_{\beta}^{\infty} f(x)dx.$$

Вероятность нахождения величины X в интервале от α до β выражается через плотность распределения и функцию распределения:

$$P(\alpha \leq x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha). \quad (1.7)$$

Закон распределения, выраженный в форме функции распределения или плотности распределения, даёт исчерпывающую характеристику случайной величины с вероятностной точки зрения.

Однако, для решения большого числа практических задач знание полной характеристики случайной величины является недостижимым, порою излишним и неудобным для использования. В этих случаях для приближенного описания случайных величин указывают отдельные числовые характеристики случайной величины, определяющие основные черты закона распределения.

Наиболее распространёнными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия (или среднее квадратичное отклонение).

Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины – сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^N x_i p_i. \quad (1.8)$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины на числовой оси, около которого группируются все

возможные значения случайной величины, с учётом различных вероятностей этих значений (рис. 1.3).

Формула (1.8) справедлива для дискретных случайных величин; для непрерывных случайных величин математическое ожидание выражается интегралом:

$$M[X] = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (1.9)$$

Кроме важнейшей из характеристик положения – математического ожидания – на практике иногда применяются и другие характеристики положения, в частности, мода и медиана случайной величины.

Модой случайной величины X называется её наиболее вероятное значение; для непрерывной величины модой является то значение, в котором плотность вероятности максимальна.

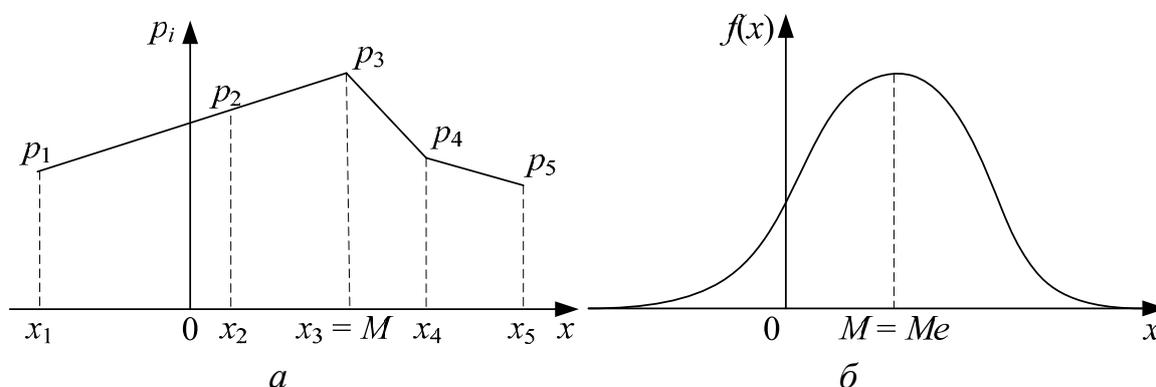


Рис. 1.4. Характеристики положения случайной величины X :
 а – многоугольник распределения; б – плотность распределения

Медианой случайной величины X называется такое её значение, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше Me :

$$P(X < Me) = P(X > Me).$$

В случае симметричного модального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.

Кроме характеристик положения – средних, типичных значений случайной величины, – употребляется ещё ряд характеристик, каждая из которых описывает то или иное свойство распределения. В качестве таких характеристик применяются так называемые *моменты*.

Используются на практике начальные и центральные моменты.

Начальным моментом s -го порядка дискретной случайной величины X называется сумма вида:

$$\alpha_s[X] = \sum_{i=1}^N x_i^s p_i. \quad (1.10)$$

Для непрерывной случайной величины X начальным моментом s -го порядка называется интеграл:

$$\alpha_s[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx. \quad (1.11)$$

Начальным моментом s -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание s -й степени этой случайной величины.

Математическое ожидание – первый начальный момент случайной величины X (1.10, 1.11).

Для определения дальнейших числовых характеристик удобно ввести понятие *центрированной случайной величины* – отклонения случайной величины X от её математического ожидания:

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x. \quad (1.12)$$

Центрирование случайной величины равносильно переносу начала координат в точку, абсцисса которой равна математическому ожиданию, поэтому:

$$M[\overset{\circ}{X}] = 0. \quad (1.13)$$

Моменты центрированной случайной величины носят название центральных моментов. *Центральным моментом* порядка s случайной величины X называется математическое ожидание s -й степени соответствующей центрированной случайной величины:

$$\mu_s[X] = M[\overset{\circ}{X}^s] = M[(X - m_x)^s]. \quad (1.14)$$

Для дискретной случайной величины s -й центральный момент выражается суммой:

$$\mu_s = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^s p_i, \quad (1.15)$$

а для непрерывной – интегралом:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x) dx. \quad (1.16)$$

Для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю, так как математическое ожидание центрированной случайной величины всегда равно нулю (1.13). Вторым центральным моментом называется *дисперсией* случайной величины. Ввиду крайней важности этой характеристики среди других моментов для нее введено специальное обозначение $D[X]$:

$$\mu_2 = D[X].$$

Согласно определению центрального момента:

$$D[X] = M\left[X^2\right], \quad (1.17)$$

т. е. дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины

$$D[X] = M\left[(X - m_x)^2\right]. \quad (1.18)$$

Дисперсия определяет рассеяние значений случайной величины около её математического ожидания. Она вычисляется для дискретной случайной величины по формуле:

$$D[X] = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (1.19)$$

а для непрерывной случайной величины:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (1.20)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, в то же время практически удобнее пользоваться характеристикой рассеивания, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Для этого определяют среднее квадратичное отклонение случайной величины:

$$\sigma[X] = \sigma_x = \sqrt{D[X]}. \quad (1.21)$$

Таким образом, если закон распределения полностью описывает случайную величину, то полученные числовые характеристики – математическое ожидание и дисперсия (среднее квадратичное отклонение) дают приближённое её описание, определяя её среднее значение и характер разброса значений случайной величины.

Закон распределения может иметь теоретически любой вид (закон равномерной плотности, Пуассона), однако наиболее часто в практических приложениях встречается так называемый нормальный закон распределения (часто называется законом Гаусса).

При некоторых условиях он является предельным законом для суммы (независимых и малых) случайных величин, каждая из которых подчинена какому угодно закону распределения. Основное ограничение состоит в том, чтобы все слагаемые равномерно играли в общей сумме относительно малую роль. Если учесть, что множество событий происходит случайно вследствие воздействия на них большого числа независимых (или слабо зависимых) возмущений, то станет ясно, что у таких явлений закон распределения будет близок к нормальному.

В частности этому закону, по указанным причинам, подчинены ошибки измерения.

Плотность распределения для нормального закона определяется следующей формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \right). \quad (1.22)$$

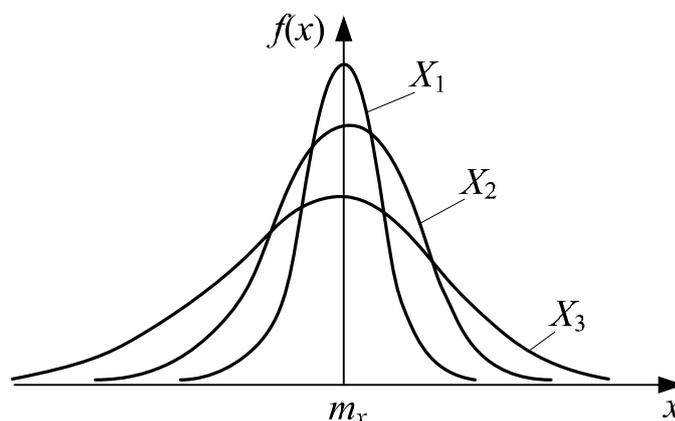


Рис. 1.5. Плотность распределения трех случайных величин, имеющих нормальный закон распределения

На рис. 1.5 показаны плотности распределения для трех случайных величин, имеющих нормальный закон распределения. Кривые распределения симметричны относительно математического ожидания m_x . Ввиду того, что площадь под кривой распределения всегда равна единице, при увеличении среднего квадратичного отклонения σ_x , кривая растягивается вдоль оси абсцисс $\sigma_{x_1} < \sigma_{x_2} < \sigma_{x_3}$.

1.2 Основные характеристики систем случайных величин

Часто результаты опыта оцениваются не одной, а несколькими случайными величинами, образующими комплекс или систему.

Так, результаты плавки ряда мартеновских печей описываются следующими величинами: производительностью печи, содержанием углерода в стали, температурой стали и т. д.

Свойства системы нескольких случайных величин не исчерпываются свойствами отдельных величин, входящих в систему; помимо этого они включают также форму и величину взаимных связей между случайными величинами, образующими систему.

Аналогично методам описания отдельных случайных величин для систем случайных величин также можно рассматривать как полные ве-

роятностные характеристики – законы распределения, так и отдельные числовые характеристики.

В простейшем случае наличия системы из двух случайных величин X и Y их функцией распределения называется вероятность совместного выполнения двух событий $X < x$ и $Y < y$:

$$F(x, y) = P[(X < x)(Y < y)]. \quad (1.23)$$

Свойства функции распределения системы случайных величин аналогичны описанным выше свойствам функции распределения одной случайной величины. Так, функция распределения $F(x, y)$ – неубывающая функция своих аргументов. Если оба аргумента равны $-\infty$, то функция распределения равна нулю; если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице. Существенно отметить, что при значении одного из аргументов, равного $+\infty$, функция распределения системы из двух величин превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$\begin{cases} F(x, +\infty) = F_1(x), \\ F(+\infty, y) = F_2(y). \end{cases} \quad (1.24)$$

Вводя в рассмотрение плотность распределения системы случайных величин аналогично плотности распределения одной величины (1.4), имеем:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (1.25)$$

Плотность распределения системы есть неотрицательная функция, обладающая следующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (1.26)$$

Плотность распределения одной из величин X и Y выражается через плотность распределения системы X и Y по формуле:

$$\begin{cases} f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \\ f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx. \end{cases} \quad (1.27)$$

Формула (1.27) позволяет определить закон распределения любой из величин, входящих в систему.

Обратная задача определения закона распределения системы по законам распределения отдельных величин в общем случае не может быть

решена. Для решения этой задачи необходимо еще знать зависимость между входящими в систему величинами.

В общем случае, зависимость между величинами системы X и Y носит вероятностный (стохастический) характер, при которой, зная значение X , нельзя указать точно значение Y , а можно указать только ее закон распределения, зависящий от того, какое значение приняла величина X . Так, например, знание температуры гранулированного материала, выходящего из сушильного барабана, в какой-то степени в среднем характеризует его влажность. Это значит, что изменение температуры материала сказывается на законе распределения его влажности, но не позволяет судить о ее точном значении.

Стохастическая зависимость может быть более или менее тесной. В предельном случае наиболее тесной связи между величинами стохастическая зависимость обращается в функциональную. Две величины называются *функционально зависимыми*, если, зная значение одной из них, можно точно указать значение другой.

В другом предельном случае стохастической связи наблюдается полная независимость случайных величин друг от друга.

При стохастической зависимости между случайными величинами изменение одной величины приводит к тому, что наблюдается тенденция к изменению в среднем значений другой величины. Эта тенденция проявляется как средняя закономерность, но в каждом отдельном опыте может иметь те или иные отступления.

Стохастическая зависимость между случайными величинами, входящими в систему, характеризуется условным законом распределения. *Условным законом распределения* величины Y , входящей в систему (X, Y) , называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина X приняла определенное значение x .

Условный закон распределения можно задать как функцией распределения, так и плотностью. Условная функция распределения обозначается $F(y|x)$, условная плотность распределения $f(y|x)$. Так как системы непрерывных величин имеют основное практическое значение, чаще применяется условная плотность распределения $f(y|x)$ – плотность распределения величины Y при условии фиксации значения величины X :

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \quad (1.28)$$

Для независимых случайных величин закон распределения одной величины не зависит от того, какое значение приняла другая величина.

Условие независимости величины Y от величины X может быть записано в виде:

$$f(y|x) = f_2(y). \quad (1.29)$$

Для системы независимых случайных величин плотность распределения определяется плотностями распределения отдельных случайных величин системы:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y). \quad (1.30)$$

Использование в практических случаях закона распределения системы случайных величин еще менее удобно, чем закона распределения отдельной случайной величины.

Поэтому на практике обычно используют числовые характеристики системы случайных величин, определяющие основные черты закона распределения системы:

- 1) математические ожидания и дисперсии всех величин, входящих в систему;
- 2) корреляционные отношения, либо коэффициенты корреляции, характеризующие корреляцию случайных величин системы;
- 3) кривую регрессии.

Математическое ожидание и дисперсия каждой величины определяются по формулам, указанным выше.

Корреляция двух величин X и Y характеризует степень (тесноту) связи между этими величинами. Она определяется корреляционным отношением. η_{yx} , являющимся безразмерной характеристикой связи.

На рис. 1.6 показаны различные виды корреляционных полей между величинами X и Y . Корреляционное поле представляет собой совокупность точек, полученных в результате измерений пар значений X и Y . Обычно при наличии системы из двух величин одну из них принимают за функцию и ее значения откладывают по оси ординат (Y), другую – за аргумент, откладывая ее значения по оси абсцисс (X).

На рис. 1.6, *a* не наблюдается никакой зависимости между величинами X и Y . В этом случае говорят об отсутствии корреляции между величинами X и Y , корреляционное отношение $\eta_{yx} = 0$.

На рис. 1.6, *б* все точки измеренных пар значений X и Y легли на одну кривую. Полученная зависимость считается функциональной, для нее $\eta_{yx} = 1$.

Наконец, на рис. 1.6, *в* показана стохастическая зависимость между величинами X и Y , при которой корреляционное отношение принимает промежуточное значение $0 < \eta_{yx} < 1$.

В практически важном случае линейной зависимости между величинами X и Y корреляционное отношение вырождается в коэффициент

корреляции r_{yx} , характеризующий степень линейной связи между величинами X и Y и, так же как η_{yx} , являющейся безразмерной величиной.

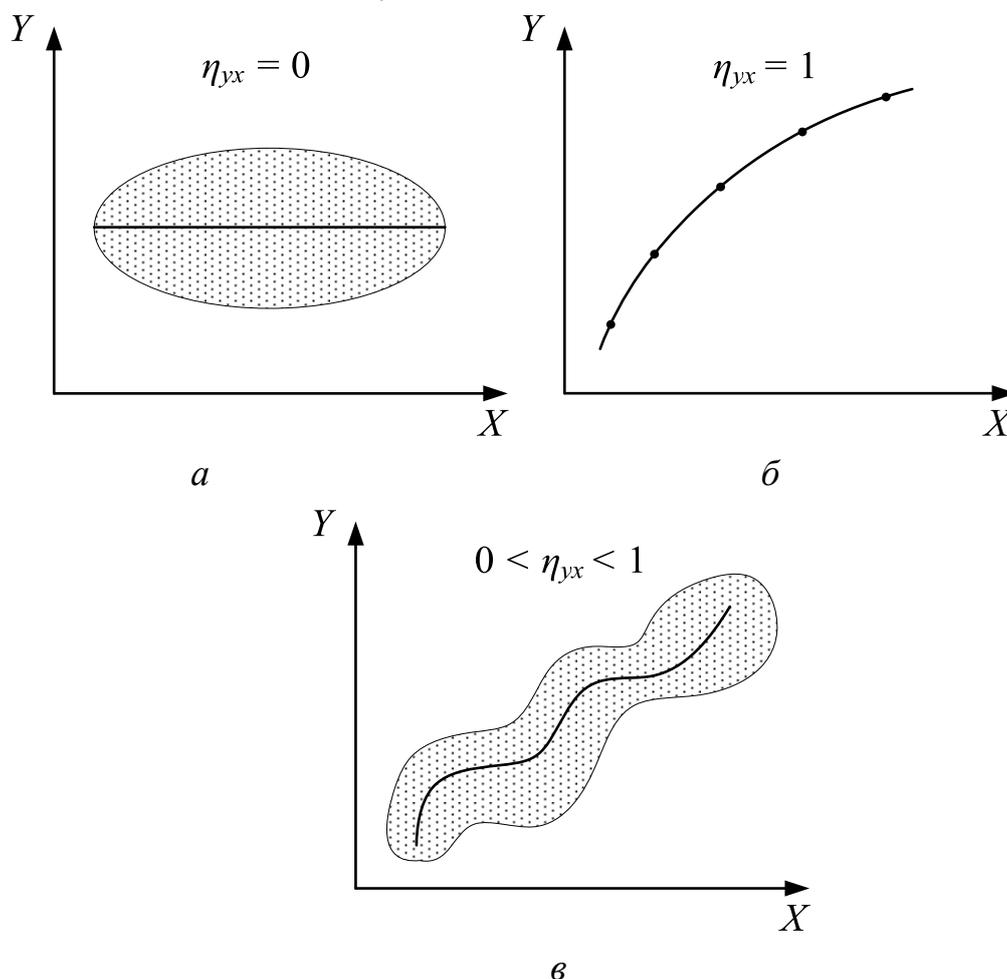


Рис. 1.6. Виды корреляционных полей между случайными величинами X и Y , образующими систему: *а* – корреляция между величинами X и Y отсутствует; *б* – функциональная зависимость; *в* – стохастическая зависимость

На рис. 1.7 показаны различные случаи линейной связи между величинами X и Y от полной функциональной зависимости (рис. 1.7, *а* и *е*), до линейной независимости величин (рис. 1.7, *б* и *в*).

В случае (рис. 1.7, *б*) существенно отметить, что равенство нулю коэффициента корреляции (в отличие от корреляционного отношения) обозначает лишь отсутствие линейной стохастической зависимости, а не стохастической зависимости вообще.

На рис. 1.7, *г* и *д* показаны корреляционные поля, имеющие место при линейной стохастической зависимости между величинами X и Y . В отличие от корреляционного отношения коэффициент корреляции может принимать значения, лежащие в диапазоне $-1 \leq r_{yx} \leq 1$.

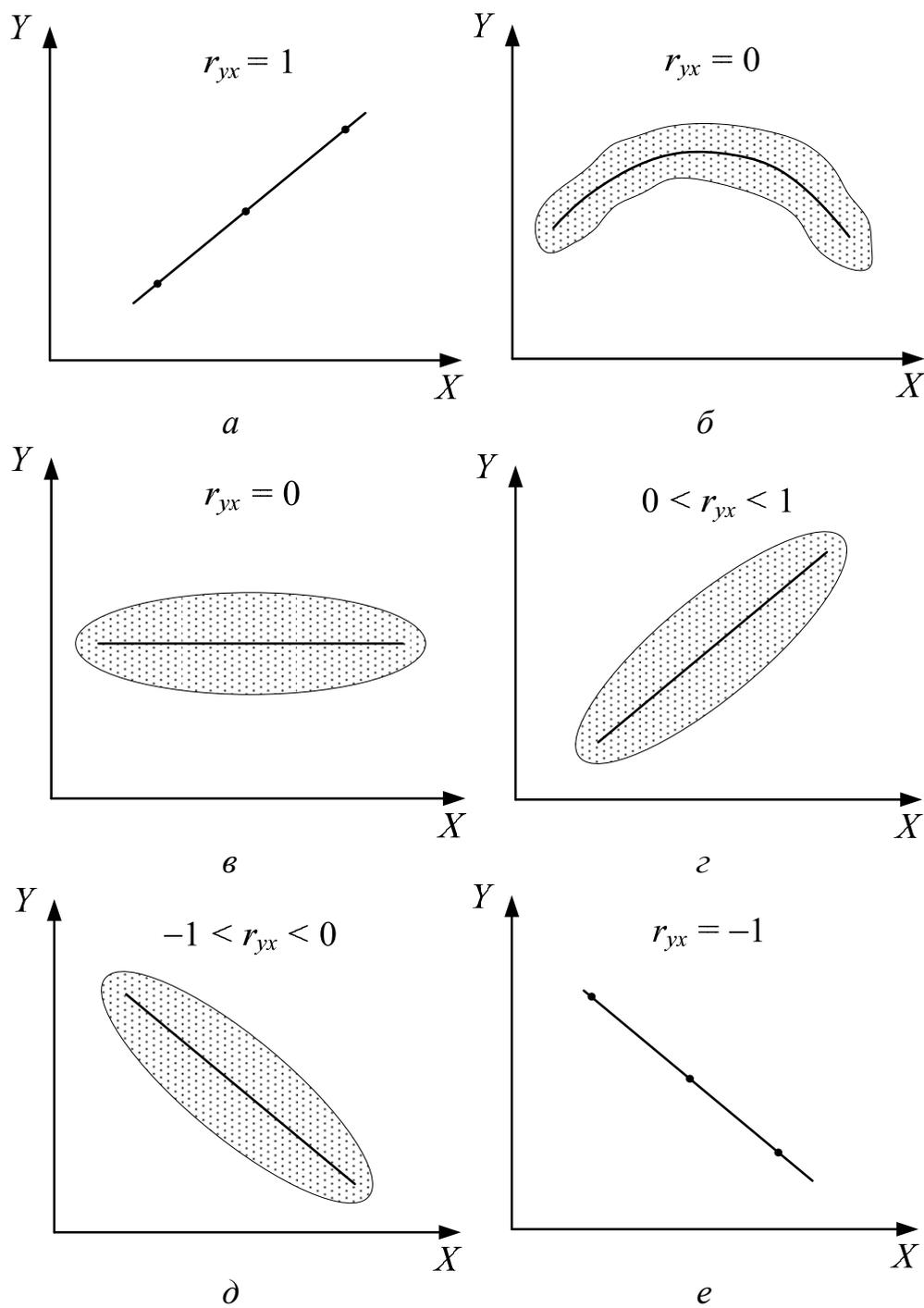


Рис. 1.7. Различные случаи линейной связи между величинами X и Y :
 а, е – функциональная зависимость; б, в – линейно независимые величины; г, д – линейная стохастическая зависимость

Знак коэффициента корреляции зависит от вида зависимости между X и Y : если при возрастании величины X происходит возрастание ве-

личины Y , то r_{yx} положителен, если же возрастание X влечет за собой уменьшение величины Y , то r_{yx} отрицателен.

Форма связи между случайными величинами определяется кривой регрессии, которая показывает, как в среднем изменяется величина Y при изменении величины X (рис. 1.8).

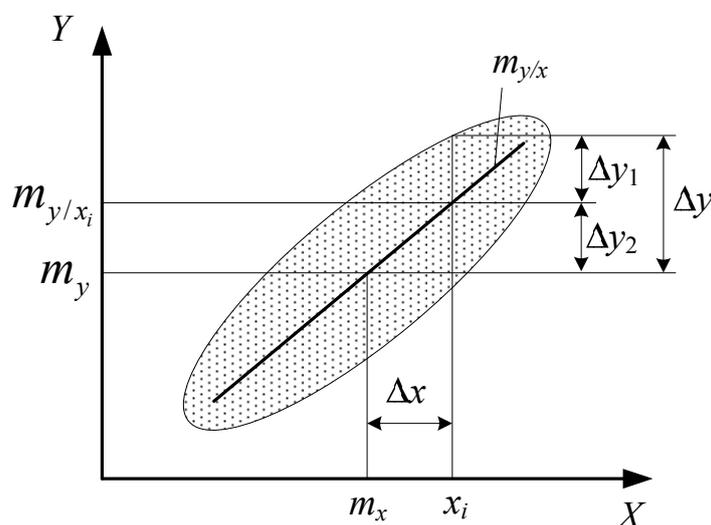


Рис. 1.8. Кривая регрессии $m_{y/x}$ и составляющие изменений величины Y

Изменение в среднем величины Y характеризуется изменением условного математического ожидания $m_{y/x}$ величины Y , которое определяется как математическое ожидание величины Y , вычисленное при условии, что другая величина X приняла определенное значение. Кривая регрессии Y на X есть зависимость условного математического ожидания величины Y от заданного значения X :

$$m_{y/x} = \varphi(x, a, b, c, \dots), \quad (1.31)$$

где a, b, c, \dots – параметры уравнения.

Аналитическое выражение кривой регрессии носит название *уравнения регрессии*.

Рассмотрим методы определения степени стохастической связи и уравнения регрессии. Все изменения Δy случайной величины Y обусловлены (рис. 1.8):

- 1) изменчивостью Δy_2 от стохастически связанной с ней величины X ;
- 2) изменчивостью Δy_1 от ряда других факторов, влияющих на Y и не зависящих от X .

Дисперсия переменной Y $D[Y] = D(\Delta y)$ складывается из случайной («шумовой») составляющей $D[y_1] = D(\Delta y_1)$ и детерминированной составляющей $D[y_2] = D(\Delta y_2)$, вызываемой изменением X :

$$D[Y] = D[y_1] + D[y_2], \quad (1.32)$$

где $D[Y]$ – общая дисперсия величины Y , т. е. дисперсия точек корреляционного поля относительно линии математического ожидания m_y :

$$D[Y] = M[(Y - m_y)^2], \quad (1.33)$$

$D[y_1]$ – дисперсия точек корреляционного поля относительно кривой регрессии $m_{y/x}$, (условного математического ожидания);

$D[y_1] = M[(Y - m_{y/x})^2]$ – шумовая составляющая, (1.34)

$D[y_2]$ – дисперсия кривой регрессии относительно математического ожидания величины Y ,

$D[y_2] = M[(m_{y/x} - m_y)^2]$ – детерминированная составляющая изменчивости случайной величины Y . (1.35)

Следует подчеркнуть важную физическую сущность выражения (1.32). Общая дисперсия случайной величины может быть разделена на части, каждая из которых определяет долю общей дисперсии, обусловленную изменением определенных факторов, стохастически связанных с данной величиной.

Корреляционное отношение η_{yx} между величинами Y и X определяется частью полной изменчивости величины Y , обусловленной изменением значений величины X :

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{D[y_2]}{D[Y]}}. \quad (1.36)$$

Чем больше детерминированная составляющая изменчивости, тем больше корреляционное отношение.

В случае линейной стохастической связи корреляционное отношение определяет модуль коэффициента корреляции

$$\eta_{yx} = |r_{yx}| = \frac{\sigma[y_2]}{\sigma[Y]}. \quad (1.37)$$

Из (1.37) следует, что модуль коэффициента корреляции выражает детерминированную часть изменчивости, т. е. долю изменений Y , связанную с изменением X .

Раскрывая значение $D[y_2]$ в формуле (1.35), для случая линейного уравнения регрессии получаем выражение для расчета коэффициента корреляции:

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (1.38)$$

где $p_{ij} = P[(X = x_i) \text{ и } (Y = y_j)]$ – вероятность того, что система X и Y примет значения x_i и y_j , а суммирование распространяется по всем возможным значениям случайных величин X и Y .

Числитель выражения (1.38) называется *корреляционным моментом* (иначе «моментом связи») случайных величин X, Y – это второй смешанный центральный момент: $\mu_{1,1} = M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}]$, т. е. математическое ожидание произведения центрированных величин.

Для дискретных случайных величин корреляционный момент выражается формулой:

$$\text{cov}(yx) = R_{yx} = K_{yx} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}, \quad (1.39)$$

а для непрерывных – формулой:

$$\text{cov}(yx) = R_{yx} = K_{yx} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy. \quad (1.40)$$

Если корреляционный момент двух случайных величин отличен от нуля, это есть признак наличия зависимости между ними, следовательно, для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Случайные величины, для которых корреляционный момент (а значит, и коэффициент корреляции) равен нулю, называются *некоррелированными* (иногда «несвязанными»).

Смысл выражения (1.38) легко пояснить, используя рис.1.9.

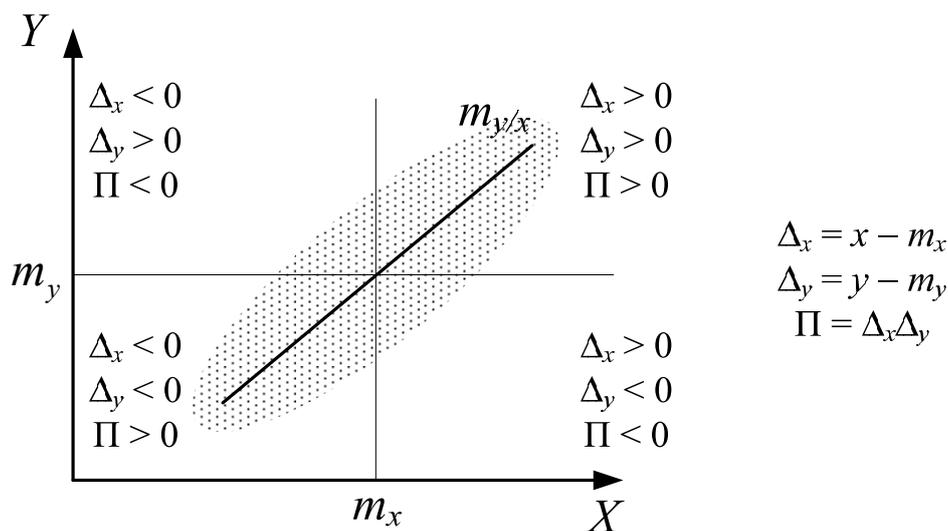


Рис. 1.9. Геометрическая интерпретация понятия коэффициента корреляции

Допустим, в результате некоторого эксперимента получены пары значений переменных X и Y , образующих в плоскости XOY совокупность экспериментальных точек; точки располагаются так, что можно говорить о зависимости в среднем между X и Y . Первое, что делает экс-

периментатор, анализирующий результаты эксперимента, – проводит линию $m_{y/x}$, выражающую эту зависимость. Линия $m_{y/x}$ соединяет условные математические ожидания $M[y/x]$ – средние значения Y при различных X – и называется *линией регрессии*.

Пусть в нашем случае линия регрессии – прямая линия. Тогда кроме линии регрессии можно провести еще линии, параллельные осям X и Y , из координат, соответствующих средним значениям переменных $m_x = M[x]$; $m_y = M[y]$. Все три линии пересекутся в одной точке.

Для каждой экспериментальной точки можно найти значения $\Delta_x = x - m_x$, $\Delta_y = y - m_y$ и их произведение $\Delta_x \cdot \Delta_y$. При этом, в первом квадранте, образованном линиями m_x и m_y , точкам соответствует положительное произведение $\Delta_x \cdot \Delta_y$, точкам, стоящим во втором квадранте – отрицательное ($\Delta_x < 0$, $\Delta_y > 0$), в третьем квадранте – положительное, в четвертом – отрицательное.

Если существует стохастическая связь между X и Y , то соотношение между числом точек I, III и II, IV и квадратов неодинаково (например, на рис. 1.9 точек с положительными произведениями $\Delta_x \cdot \Delta_y = (x - m_x)(y - m_y)$ много больше, чем точек с отрицательными значениями этого произведения). В результате, для этого случая среднее значение, стоящее в числителе выражения (1.38), будет положительным, существенно отличающимся от нуля, а это значит $r_{yx} > 0$.

Если Y не зависит от X , экспериментальные точки расположатся симметрично относительно линий m_x и m_y , причем, если плотности вероятности $f(x)$ и $f(y)$ выражаются нормальными законами, то границы расположения некоторой доли β экспериментальных точек, проведенные при условии $f(x,y) = \text{const}$, будут представлять собой эллипсы с осями, совпадающими с m_x и m_y . В результате, числитель выражения (1.38) станет равным нулю, т. е. $r_{yx} = 0$.

В другом предельном случае, когда X и Y связаны однозначной линейной зависимостью, т. е. $y = a + bx$, будем иметь:

$$m_y = a + bm_x; D_y = D[a + bx] = b^2 D_x;$$

$$\sigma_y = |b| \sigma_x;$$

$$r_{xy} = \frac{bM[(x - m_x)^2]}{|b|\sigma_x^2} = \begin{cases} +1, \text{ если } b > 0, \\ -1, \text{ если } b < 0. \end{cases}$$

Таким образом, коэффициент корреляции равен по модулю единице, если X и Y связаны линейной функциональной зависимостью, равен нулю при отсутствии связи X и Y в среднем и лежит в диапазоне

$-1 < r_{yx} < 1$, если X и Y являются стохастически связанными случайными величинами.

Определение уравнения регрессии распадается на две самостоятельные задачи: выбор типа уравнения регрессии и расчет параметров уравнения.

Расчет параметров уравнения регрессии производится (после выбора его типа) способом наименьших квадратов, если

$$m_{y/x} = a + bx, \text{ то } b = r_{yx} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \quad (1.41)$$

Связь между параметром линейного уравнения регрессии b и коэффициентом корреляции r_{yx} показывает, какой физический смысл можно приписать r_{yx} : коэффициент корреляции показывает, на сколько значений σ_y изменяется в среднем Y при увеличении величины X на одно значение σ_x .

На практике встречаются и системы, состоящие из большого числа случайных величин.

Аналогично системе из двух величин при изучении корреляции трех переменных одна из них рассматривается как функция, а две другие – как аргументы. При этом уравнение множественной регрессии для линейной зависимости переменных имеет вид:

$$m_{z/x,y} = a + bx + cy, \quad (1.42)$$

где $m_{z/x,y}$ – условное математическое ожидание величины Z от заданных значений величины X и Y .

Степень линейной связи величины Z с величинами X и Y в этом случае выражается коэффициентом множественной корреляции:

$$R_{z/x,y} = \sqrt{\frac{r_{zx}^2 + r_{zy}^2 - 2r_{zx}r_{zy}r_{yx}}{1 - r_{yx}^2}}. \quad (1.43)$$

Коэффициент множественной корреляции $R_{z/x,y}$ всегда положителен и заключается в пределах от 0 до 1. При $R_{z/x,y} = 1$ все определенные экспериментально точки зависимости лежат на плоскости регрессии (функциональная зависимость). При $R_{z/x,y} = 0$ плоскость регрессии параллельна координатной плоскости (X, Y) (отсутствие корреляции между Z и X, Y).

Между коэффициентом множественной корреляции $R_{z/x,y}$ и каждым из двух коэффициентов парной корреляции r_{zx} и r_{zy} существует следующее соотношение:

$$\begin{cases} R_{z/x,y} \geq |r_{zx}|, \\ R_{z/x,y} \geq |r_{zy}|. \end{cases} \quad (1.44)$$

Действительно, поскольку в уравнение множественной регрессии включен дополнительный аргумент, мы определяем функцию во всяком случае не менее полно, а следовательно, коэффициент $R_{z/x,y}$ не может быть меньше, чем абсолютные величины каждого из коэффициентов r_{zx} и r_{zy} .

Аналогично рассматриваются и случаи корреляции большего числа переменных.

Вместо законов распределения часто применяют неполное, приближенное описание системы случайных величин с помощью минимального количества числовых характеристик.

Минимальное число характеристик, с помощью которых может быть охарактеризована система n -случайных величин $[X_1, X_2, \dots, X_n]$, сводится к следующему:

- 1) n математических ожиданий m_1, m_2, \dots, m_n , характеризующих средние значения величин;
- 2) n дисперсий D_1, D_2, \dots, D_n , характеризующих их рассеивание;
- 3) $n(n-1)$ корреляционных моментов $K_{ij} = M \left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j \right] (i \neq j)$,

где $\overset{\circ}{X}_i = X_i - m_i$; $\overset{\circ}{X}_j = X_j - m_j$ (или $n(n-1)$ коэффициентов корреляции), характеризующих попарную корреляцию всех величин, входящих в систему;

- 4) уравнение регрессии, характеризующее форму связи между выделенной (выходной) случайной величиной системы и остальными (входными) случайными величинами.

Заметим, что дисперсия каждой из случайных величин X_i есть, по существу, не что иное, как частный случай корреляционного момента, а именно корреляционный момент величины X_i и той же величины X_i :

$$D_i = M \left[\overset{\circ}{X}_i^2 \right] = M \left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_i \right] = K_{ii}. \quad (1.45)$$

Все корреляционные моменты и дисперсии удобно расположить в виде прямоугольной таблицы (матрицы):

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix}.$$

Эта таблица называется *корреляционной матрицей системы* случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Очевидно, что не все члены корреляционной матрицы различны.

Из определения корреляционного момента ясно, что $K_{ij} = K_{ji}$, т. е. элементы корреляционной матрицы, расположенные симметрично по отношению к главной диагонали, равны. В связи с этим заполняется не вся корреляционная матрица, а лишь ее половина, считая от главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & K_{nn} \end{vmatrix}.$$

Корреляционную матрицу, составленную из элементов K_{ij} , часто сокращенно обозначают символом $\|K_{ij}\|$.

По главной диагонали корреляционной матрицы стоят дисперсии случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n .

В случае, когда случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n не коррелированы, все элементы корреляционной матрицы, кроме диагональных, равны нулю:

$$\|K_{ij}\| = \begin{vmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & D_3 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & D_n \end{vmatrix}.$$

В целях наглядности суждения именно о коррелированности случайных величин безотносительно к их рассеиванию часто вместо корреляционной матрицы $\|K_{ij}\|$ пользуются *нормированной корреляционной матрицей* $\|r_{ij}\|$, составленной из коэффициентов корреляции:

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}; \quad \sigma_i = \sqrt{D_i}; \quad \sigma_j = \sqrt{D_j}.$$

Все диагональные элементы этой матрицы, естественно, равны единице. Нормированная корреляционная матрица имеет вид:

$$\|r_{ij}\| = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ & & 1 & \dots & r_{3n} \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Введем понятие о некоррелированных системах случайных величин (иначе – о некоррелированных случайных векторах). Рассмотрим две системы случайных величин: (X_1, X_2, \dots, X_n) и (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) или два случайных вектора в n -мерном пространстве: \vec{X} с составляющими (X_1, X_2, \dots, X_n) и \vec{Y} с составляющими (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) .

Случайные векторы \vec{X} и \vec{Y} называются *некоррелированными*, если каждая из составляющих вектора \vec{X} не коррелирована с каждой из составляющих вектора \vec{Y} :

$$K_{x_i y_j} = M \left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}_j \right] = 0$$

при $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$.

1.3 Основные характеристики случайных процессов

При изучении случайных величин опыт проводится в определенный фиксированный момент времени и поведение случайных величин в другие моменты времени нас не интересует, либо сама случайная величина не изменяется во времени: приняв в результате опыта какое-то значение, она сохраняет его во времени постоянным.

Однако такой элементарный подход к изучению случайных явлений в ряде практических задач является явно недостаточным. На практике часто приходится иметь дело со случайными величинами, непрерывно изменяющимися в процессе опыта. Случайные величины, изменяющиеся в процессе опыта, в отличие от обычных случайных величин, называются *случайными функциями*.

Изучением случайных явлений, в которых случайность проявляется в форме процесса, занимается специальная отрасль теории вероятностей – теория случайных функций (если аргументом является время – теория случайных или стохастических процессов). Эту науку можно образно назвать «динамикой случайных явлений».

Большинство случайных величин, характеризующих протекание технологических процессов, непрерывно изменяется во времени в про-

цессе наблюдения. Такие случайные величины носят название *случайных процессов*.

Любые контролируемые величины технологических агрегатов: температуры, давления, расходы потоков – изменяются во времени протекания процесса случайным образом и, следовательно, являются случайными процессами. Встречаются случайные величины, непрерывно изменяющиеся не во времени, а по какому-либо другому аргументу. Например, изменение технологической величины (температуры, давления) происходит по длине объекта, имеющего значительную протяженность. *Случайной величиной* называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное заранее неизвестное значение. В общем случае, изменяющаяся по любому аргументу случайная величина называется случайной функцией.

Случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, неизвестно заранее какой именно.

Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется *реализацией случайной функции*, которая уже не является случайной. Если над случайной функцией произвести группу опытов, то мы получим группу или «семейство» реализаций этой функции.

Мы чаще будем иметь дело со случайным процессом, когда аргументом является время.

В течение наблюдений случайный процесс принимает тот или иной конкретный вид, заранее неизвестный, называемый *реализацией случайного процесса*. Если над случайным процессом произвести ряд наблюдений (например, измерять температуру горения в течение суток в семи однотипных печах), то получается группа (семейство) реализаций данного случайного процесса. Каждая реализация есть обычная неслучайная известная функция. Таким образом, в результате каждого наблюдения случайный процесс превращается в неслучайную функцию. При фиксации некоторого определенного момента времени случайный процесс превращается в случайную величину. Эта случайная величина является сечением случайного процесса в данный момент времени.

Случайный процесс можно рассматривать как систему, состоящую из бесконечного множества случайных величин. Действительно, фиксируя значения случайного процесса через определенные интервалы времени, получаем систему случайных величин $X(t_0), X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$ (рис. 1.10).

Уменьшая интервал времени, увеличивая число m , можно с определенным приближением заменить рассмотрение случайного процесса рассмотрением указанной системы величин.

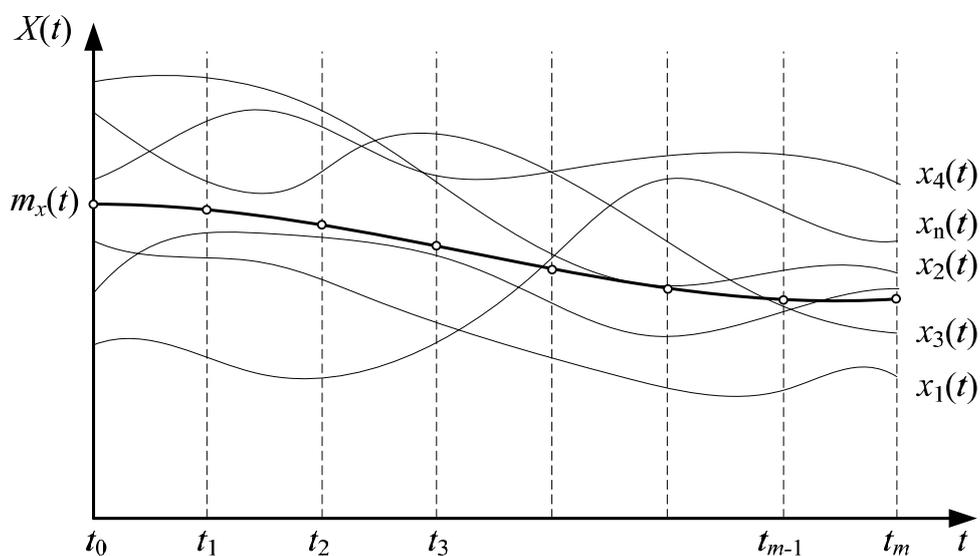


Рис.1.10. Семейство реализаций случайного процесса

Закон распределения случайного процесса также можно рассматривать как закон распределения системы бесконечного множества случайных величин. Формально такой закон может иметь место, однако практическое использование его, разумеется, исключено.

Для практических приложений аналогично числовым характеристикам случайных величин вводятся характеристики случайных процессов. В отличие от числовых характеристик случайных величин, которые являются числами, характеристики случайных процессов являются функциями времени. Определяются они по аналогии с числовыми характеристиками случайных величин.

Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ является неслучайной функцией $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции:

$$m_x(t) = M[X(t)]. \quad (1.46)$$

По смыслу математическое ожидание случайной функции есть некоторая средняя функция, около которой различным образом варьируются конкретные реализации случайной функции (рис. 1.10).

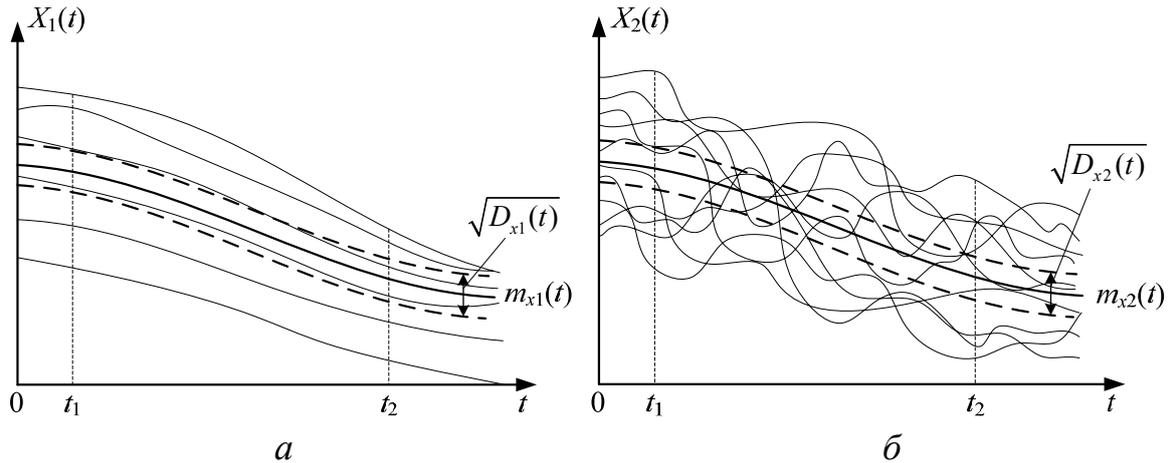


Рис. 1.11. Случайные процессы с различной степенью связи между его сечениями при различных моментах времени:
а – с высокой степенью связи между сечениями; *б* – с быстро затухающей степенью связи между сечениями

Дисперсия случайного процесса $X(t)$ есть неслучайная функция $D_x(t)$, значения которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции:

$$D_x(t) = D[X(t)] = M \{ [X(t) - m_x(t)]^2 \}. \quad (1.47)$$

Дисперсия случайного процесса характеризует разброс его реализаций относительно математического ожидания, иными словами, «степень случайности» случайной функции (рис. 1.11).

Вместо дисперсии в практических приложениях часто более удобно пользоваться средним квадратичным отклонением случайного процесса:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (1.48)$$

Описанные две характеристики – математическое ожидание и дисперсия существенны, но явно недостаточны для описания случайного процесса. Случайные процессы, обладающие одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями, могут иметь совершенно различный характер изменения. Так, процесс на рис. 1.11, *а* характеризуется плавным изменением своих значений во времени. Зная значение процесса в момент времени t_1 , можно со значительной вероятностью предсказать его значение в момент времени t_2 . Таким образом, в данном процессе наблюдается достаточно высокая степень связи между его значениями при различных моментах времени. Для процесса на рис. 1.11, *б* характерны резкие изменения значений процесса во времени. Известное значение процесса в момент времени t_1 практически не может со сколько-нибудь достоверной убедительностью характеризовать значение про-

цесса в момент времени t_2 , поэтому в данном случае степень связи между значениями процесса при различных t быстро затухает при увеличении рассматриваемого интервала времени.

Очевидно, внутренняя структура обоих случайных процессов совершенно различна, но это различие не улавливается ни математическим ожиданием, ни дисперсией.

Важное свойство случайного процесса – степень связи между его сечениями, относящимися к различным моментам времени, характеризуется корреляционной функцией случайного процесса. Автокорреляционная функция определяется как неслучайная функция двух аргументов t_1 и t_2 : $K_x(t_1, t_2)$, которая при каждой паре значений t_1, t_2 равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции (рис. 1.12):

$$K_x(t_1, t_2) = M \left[\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2) \right], \quad (1.49)$$

где $\overset{\circ}{X}(t_1) = X(t_1) - m_x(t_1)$; $\overset{\circ}{X}(t_2) = X(t_2) - m_x(t_2)$.

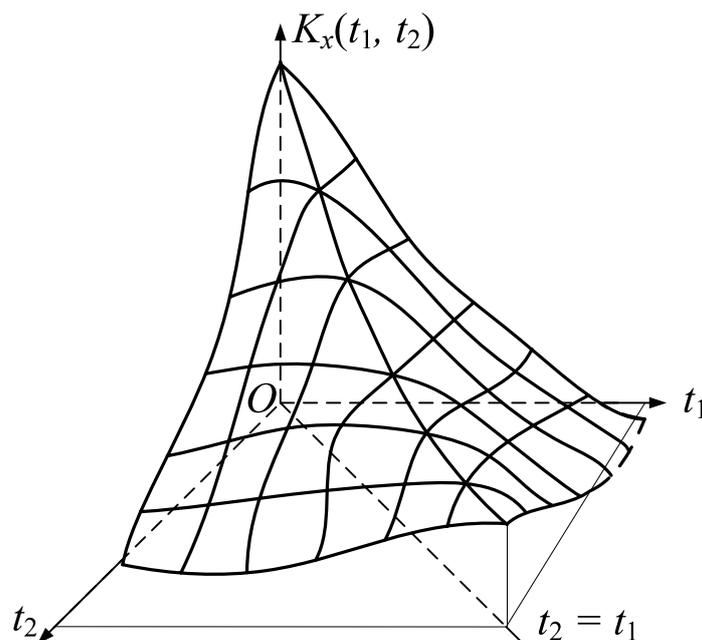


Рис. 1.12. Автокорреляционная функция нестационарного случайного процесса X

По мере увеличения интервала времени между значениями t_1 и t_2 автокорреляционная функция убывает – медленнее для процесса типа X_1 (рис. 1.11, а) и значительно быстрее для процесса типа X_2 (рис. 1.11, б). При $t_1 = t_2$ корреляционная функция обращается в дисперсию рассматриваемого случайного процесса (1.49):

$$K_x(t_1, t_1) = M \left[\overset{\circ}{X}(t_1)^2 \right] = M \left\{ [X(t_1) - m_x(t_1)]^2 \right\} = D_x(t_1). \quad (1.50)$$

Ввиду этого, в качестве основных характеристик случайного процесса можно рассматривать его математическое ожидание и автокорреляционную функцию.

Практически часто удобно пользоваться нормированной автокорреляционной функцией:

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}. \quad (1.51)$$

Для каждого фиксированных t_1 и t_2 нормированная автокорреляционная функция представляет собой коэффициент корреляции между случайными величинами $X(t_1)$ и $X(t_2)$. При $t_1 = t_2$ нормированная автокорреляционная функция становится равной единице:

$$r_x(t_1, t_1) = \frac{K_x(t_1, t_1)}{[\sigma_x(t_1)]^2} = \frac{D_x(t_1)}{[\sigma_x(t_1)]^2} = 1. \quad (1.52)$$

При прибавлении к случайной функции неслучайного слагаемого к ее математическому ожиданию прибавляется то же неслучайное слагаемое.

Если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t). \quad (1.53)$$

От прибавления неслучайного слагаемого корреляционная функция случайной функции не меняется:

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2). \quad (1.54)$$

При умножении случайной функции на неслучайную функцию ее математическое ожидание умножается на тот же множитель.

Если $Y(t) = \varphi(t) \cdot X(t)$, то

$$m_y(t) = M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)m_x(t). \quad (1.55)$$

При умножении случайной функции на неслучайную функцию $\varphi(t)$ ее корреляционная функция умножается на $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$:

$$K_y(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_x(t_1, t_2). \quad (1.56)$$

Если $\varphi(t) = c = \text{const}$, то

$$K_y(t_1, t_2) = c^2 K_x(t_1, t_2).$$

Пользуясь этими свойствами характеристик случайных функций, на практике часто переходят к центрированной функции:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t). \quad (1.57)$$

Математическое ожидание центрированной случайной функции тождественно равно нулю, а ее корреляционная функция совпадает с корреляционной функцией случайной функции $X(t)$:

$$m_x(t) = M[\overset{\circ}{X}(t)] = 0; K_x(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right] = K_x(t_1, t_2). \quad (1.58)$$

Иногда, кроме центрирования, применяется еще нормирование случайных функций. Нормированной называется случайная функция вида:

$$X_N(t) = \frac{\overset{\circ}{X}(t)}{\sigma_x(t)}. \quad (1.59)$$

Корреляционная функция нормированной случайной функции $X_N(t)$ равна:

$$K_{X_N}(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} = r_x(t_1, t_2), \quad (1.60)$$

а ее дисперсия равна единице.

При анализе производства часто приходится изучать совокупность случайных процессов, характеризующих работу какого-либо участка производства. Так, например, протекание реакции в химическом аппарате обычно характеризуется не менее чем двумя случайными процессами: изменением температуры и давления внутри аппарата во времени. Такая совокупность случайных процессов образует систему, которая аналогично системе случайных величин может быть охарактеризована математическим ожиданием каждого случайного процесса; автокорреляционной функцией каждого случайного процесса и взаимной корреляционной функцией.

Взаимная корреляционная функция случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ является неслучайной функцией двух аргументов t_1 и t_2 и характеризует степень связи между сечением случайного процесса $X(t)$ при t_1 и сечением случайного процесса $Y(t)$ при t_2 :

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1), \overset{\circ}{Y}(t_2)\right]. \quad (1.61)$$

Для удобства характеристики связи часто пользуются нормированной взаимной корреляционной функцией:

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \frac{K_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}. \quad (1.62)$$

Эта функция для каждого фиксированных t_1 и t_2 представляет собой коэффициент корреляции системы случайных величин $X(t_1)$, $Y(t_2)$.

Если взаимная корреляционная функция равна нулю при всех возможных значениях t_1 и t_2 , то случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ являются некоррелированными.

Из основных свойств корреляционных функций можно отметить следующие:

- 1) автокорреляционная функция симметрична:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1); \quad (1.63)$$

- 2) для взаимной корреляционной функции выполняется соотношение:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = K_{yx}(t_2, t_1); \quad (1.64)$$

- 3) корреляционные функции ограничены по модулю следующим неравенством:

$$\begin{cases} |K_x(t_1, t_2)| \leq \sqrt{K_x(t_1, t_1)K_x(t_2, t_2)}, \\ |K_{xy}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{K_x(t_1, t_1)K_y(t_2, t_2)}. \end{cases} \quad (1.65)$$

Отсюда следует, что нормированные корреляционные функции не превосходят единицы.

1.3.1 Понятие о стационарном случайном процессе

Исключительно большое значение для практики имеют случайные процессы, имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются *стационарными*.

Изменения реальных производственных величин во времени во многих случаях носят характер, близкий к характеру стационарных случайных процессов. К таким величинам относятся, например, величины, характеризующие протекание технологического процесса в агрегате, работающем по непрерывному способу производства (барабанные мельницы, ректификационные колонны, химические реакторы и т. д.). При нормальном ходе технологического процесса характер изменений режимных величин представляет собой случайные колебания около их средних значений, характер этих случайных колебаний не изменяется во времени. Любое превышение амплитуды колебания относительно заданного значения технологической переменной приводит к появлению тех или иных управляющих воздействий; поэтому средняя амплитуда случайных колебаний также не претерпевает значительных изменений во времени (рис. 1.13).

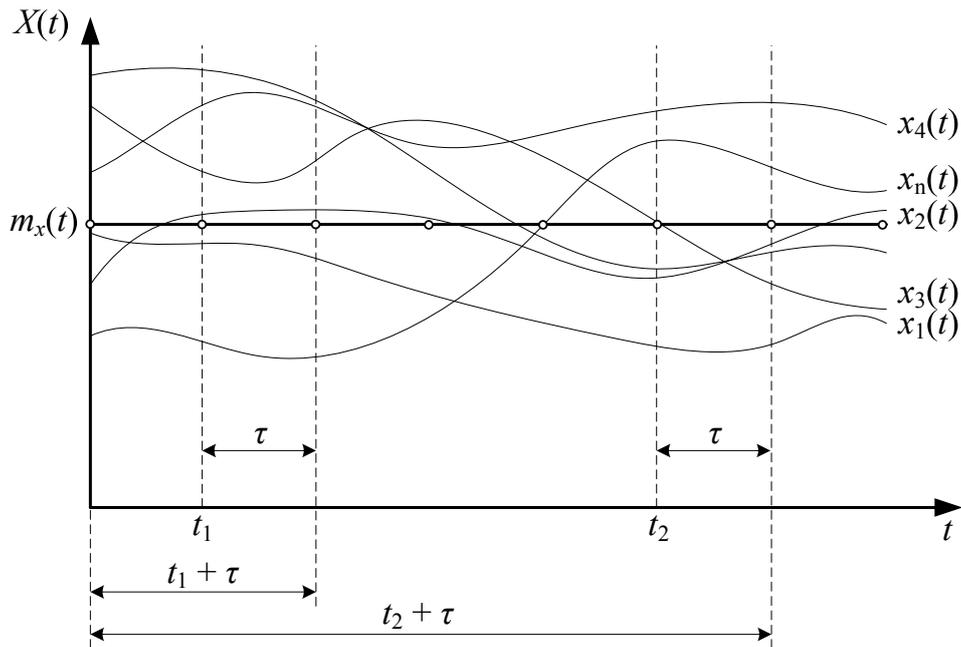


Рис.1.13. Стационарный случайный процесс

В отличие от стационарного случайного процесса нестационарный процесс (рис. 1.14) имеет тенденцию развития во времени, его характеристики зависят от времени, зависят от начала отсчета.

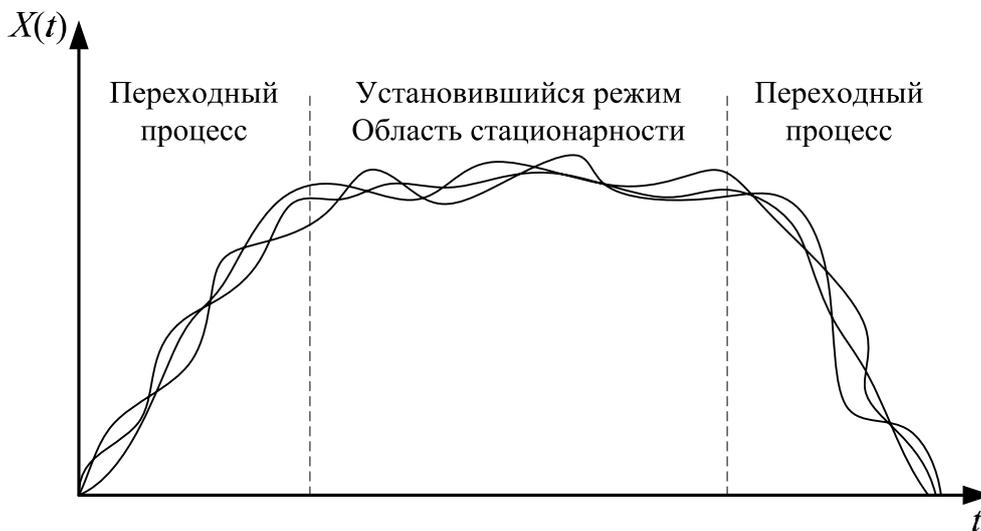


Рис. 1.14. Нестационарный случайный процесс

Заметим, что далеко не все нестационарные случайные процессы являются существенно нестационарными на всем протяжении своего развития. Существуют нестационарные процессы, которые (на известных отрезках времени и с известным приближением) могут быть приняты за стационарные.

Вообще, как правило, случайный процесс в любой динамической системе начинается с нестационарной стадии – с так называемого «переходного процесса». После затухания переходного процесса система обычно переходит на установившийся режим, и тогда случайные процессы, протекающие в ней, могут считаться стационарными (рис. 1.14).

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным*, если все его вероятностные характеристики не меняются при любом сдвиге по оси t .

Сформулируем определение стационарного случайного процесса в терминах вероятностных характеристик.

Для стационарного случайного процесса:

- 1) математическое ожидание постоянно:

$$m_x(t) = m_x = \text{const}; \quad (1.66)$$

- 2) дисперсия постоянна:

$$D_x(t) = D_x = \text{const}; \quad (1.67)$$

- 3) автокорреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ есть функция одного аргумента τ .

$$K_x(t, t + \tau) = K_x(\tau). \quad (1.68)$$

Если случайный процесс стационарен, то значение автокорреляционной функции не зависит от того, где именно на оси аргумента t взят участок τ , а только от длины участка (рис. 1.13).

Автокорреляционная функция стационарного случайного процесса есть четная функция аргумента (следует из свойства симметрии (рис. 1.15)):

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (1.69)$$

На графиках изображают обычно только одну правую половину автокорреляционной функции $K_x(\tau)$.

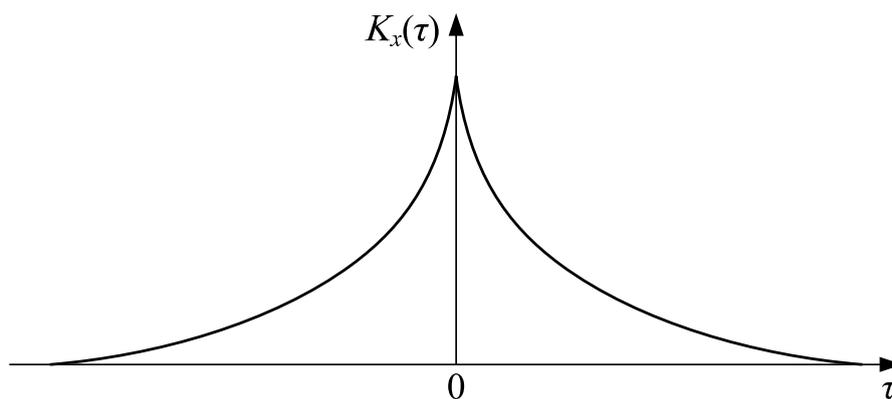


Рис. 1.15. Автокорреляционная функция стационарного случайного процесса

Любое значение автокорреляционной функции не может превышать его значения при $\tau = 0$:

$$K_x(\tau) \leq K_x(0) = D_x \quad (1.70)$$

(следует из свойства ограниченности по модулю автокорреляционной функции).

Для стационарных и стационарно связанных случайных процессов взаимная корреляционная функция (1.61) также является функцией одного аргумента:

$$K_{xy}(t, t + \tau) = K_{xy}(\tau). \quad (1.71)$$

При этом свойство (1.64) приобретает следующий вид:

$$K_{xy}(-\tau) = K_{yx}(\tau). \quad (1.72)$$

1.3.2 Спектральные плотности случайных процессов

Как указывалось выше, характер изменения во времени случайного процесса определяет вид его автокорреляционной функции.

Однако основное различие случайных процессов может быть охарактеризовано и составом частот, преобладающих в данном случайном процессе.

Так, в случайном процессе (рис. 1.11, а) преобладают более низкие частоты, чем в процессе, изображенном на рис. 1.11, б.

Частотная характеристика, определяющая спектральный состав случайного процесса – спектральная плотность $S_x(\omega)$ (рис. 1.16), довольно широко применяется при изучении стационарных случайных процессов. По сравнению с автокорреляционной функцией спектральная плотность не дает каких-либо новых сведений о процессе, однако, переводя рассмотрение характеристик процесса из временной в частотную область, она позволяет наглядно очертить различные свойства рассматриваемого случайного процесса.

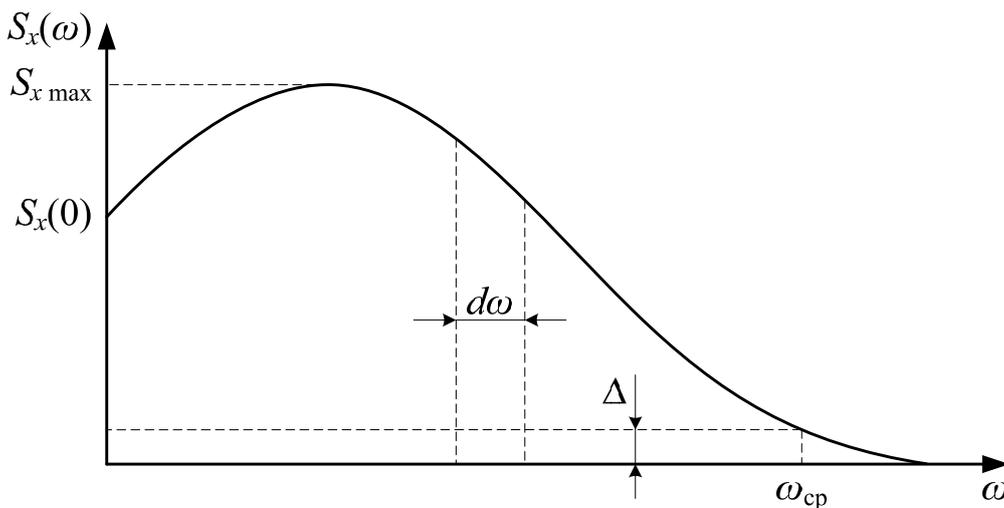


Рис. 1.16. Спектральная плотность стационарного случайного процесса

Определение спектрального состава стационарного случайного процесса производится применением метода гармонического анализа (преобразование Фурье) к автокорреляционной функции процесса:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (1.73)$$

откуда спектральная плотность стационарного случайного процесса $X(t)$ определяется по формуле:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.74)$$

Из четности автокорреляционных функций вещественных случайных процессов следует четность функций $S_x(\omega)$, поэтому формулы принимают вид:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad (1.75)$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.76)$$

Полагая в формуле (1.73) $\tau = 0$, определяют дисперсию случайного процесса $X(t)$ как площадь, ограниченную кривой спектральной плотности

$$K_x(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega = D_x. \quad (1.77)$$

Таким образом, физически спектральную плотность можно интерпретировать как разложение дисперсии процесса D_x на сумму элементарных слагаемых $S_x(\omega)d\omega$, каждое из которых представляет собой дисперсию, приходящуюся на элементарный диапазон частот $d\omega$, прилежащий к точке ω (рис. 1.16) или иначе: спектральная плотность характеризует распределение энергии процесса по частотам элементарных гармоник.

Спектральная плотность является четной функцией, она положительна при всех значениях ω . Диапазон частот, на которых величина $S_x(\omega)$ имеет существенные с точки зрения практических приложений значения, тем шире, чем уже интервал времени, в течение которого спадает автокорреляционная функция.

Аналогично автокорреляционной функции определяют нормированную спектральную плотность:

$$s_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x}. \quad (1.78)$$

Нормированные автокорреляционная функция и спектральная плотность также связаны преобразованиями Фурье:

$$r_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} s_x(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega; \quad (1.79)$$

$$s_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} r_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (1.80)$$

Из (1.79) при $\tau = 0$ получаем:

$$r_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} s_x(\omega) d\omega = 1. \quad (1.81)$$

Для практических приложений удобно по аналогии со спектральной плотностью формально определить взаимную спектральную плотность, вычисляемую с помощью преобразования Фурье:

$$K_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \quad (1.82)$$

$$S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (1.83)$$

Формулу (1.83) можно представить также в виде:

$$S_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau. \quad (1.84)$$

1.3.3 Эргодическое свойство стационарных случайных функций

Если случайный процесс является стационарным и протекает однородно во времени, естественно предположить, что одна единственная реализация достаточной продолжительности может служить достаточным опытным материалом для получения характеристик случайной функции. Про такую случайную функцию говорят, что она обладает *эргодическим свойством*.

Эргодическое свойство состоит в том, что каждая отдельная реализация случайной функции является как бы «полномочным представителем» всей совокупности возможных реализаций; одна реализация достаточной продолжительности может заменить при обработке множество реализаций той же общей продолжительности.

Если случайный процесс $X(t)$ обладает эргодическим свойством, то для него среднее по времени (на достаточно большом участке наблюдения) приближенно равно среднему по множеству наблюдений (реализации). То же будет верно и для $X^2(t)$, $X(t) \cdot X(t + \tau)$ и т. д. Следовательно,

все характеристики эргодического стационарного случайного процесса (математическое ожидание, дисперсию, автокорреляционную функцию) можно будет приближенно определить по одной достаточно длинной реализации.

Существенно отметить, что не всякий стационарный процесс является эргодическим.

Примером неэргодического стационарного случайного процесса является процесс, в составе которого есть слагаемое, представляющее собой случайную величину, изменяющую свое значение от реализации к реализации. Ввиду этого удлинение одной реализации не может выявить свойства других реализаций этого стационарного случайного процесса. Среднее по времени процесса здесь уже будет отличаться от среднего, полученного по множеству реализаций.

Если автокорреляционная функция стационарного случайного процесса при увеличении τ , начиная с некоторого τ , остается приблизительно постоянной, это есть признак того, что в составе данного случайного процесса имеется слагаемое в виде обычной случайной величины $Z(t) = X(t) + Y$ и что процесс не является эргодическим. Стремление же автокорреляционной функции к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ говорит в пользу эргодичности процесса (рис. 1.17).

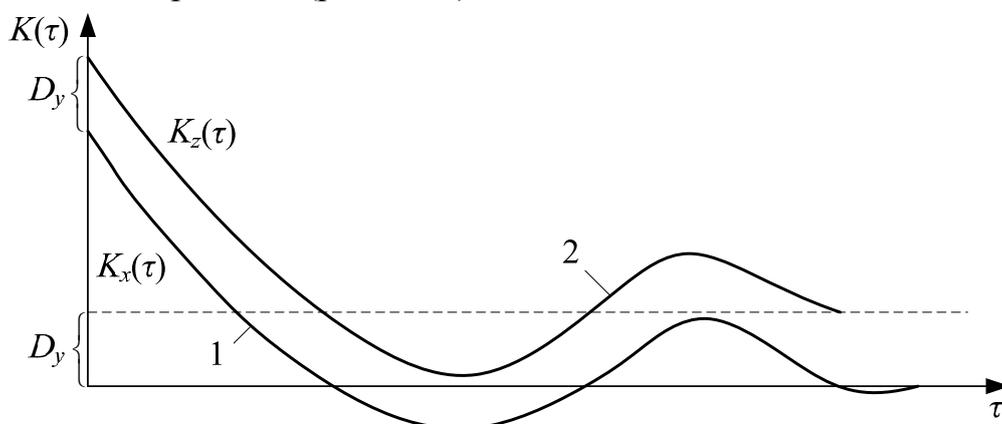


Рис. 1.17. Автокорреляционные функции стационарных случайных процессов: 1 – эргодического; 2 – неэргодического

При решении практических задач часто суждение об эргодичности случайного процесса выносится на основании физических соображений, связанных с существованием процесса.

2 СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В данном разделе рассматриваются вопросы методики и точности вычисления оценок статистических характеристик по экспериментальным данным, полученным путем наблюдений за работой автоматизируемого технологического объекта. Вопросы эти имеют исключительно важное значение для правильной постановки опытов и обработки материалов при статистическом анализе работы производства.

2.1 Оценки характеристик случайных величин

Генеральная совокупность обычно интерпретируется как совокупность всех мыслимых (возможных) результатов наблюдений над случайной величиной, которые в принципе могут быть проведены при данных условиях.

Содержательный смысл этого понятия состоит в том, что предполагается существование некоторых вполне определенных свойств, неслучайных закономерностей, присущих данной совокупности, которые и должны быть выяснены исследователем.

Фактически эти свойства являются объективным отображением вероятностных свойств изучаемого объекта, которые могут быть охарактеризованы с помощью соответствующих законов распределения вероятностей или связанных с ними числовых параметров.

Считается, что указанные свойства не изменяются во времени и присущие генеральной совокупности неслучайные закономерности сохраняют постоянным свой характер, т. е. являются устойчивыми.

Выборка – это конечный набор значений случайной величины, полученный в результате наблюдений. Число элементов выборки называется ее *объемом*. Если, например, x_1, x_2, \dots, x_N – наблюдаемые значения случайной величины X (возможно и совпадающие), то объем данной выборки – N .

Выборка называется *представительной* (репрезентативной), если она достаточно полно характеризует генеральную совокупность.

Для обеспечения репрезентативности выборки используется случайный выбор элементов.

Смысл статистических методов заключается в том, чтобы по выборке ограниченного объема N , т. е. по некоторой части генеральной

совокупности, высказать обоснованное суждение о свойствах генеральной совокупности в целом.

Подобное суждение может быть получено путем оценивания параметров (характеристик) генеральной совокупности с помощью их оценок по результатам реальных наблюдений.

Характеристики случайных величин имеют числовую меру.

Численные значения характеристик случайных величин (относительной частоты, математического ожидания, среднеквадратичного отклонения), которые относятся к генеральной совокупности, называются *параметрами a* .

Числовые значения характеристик случайных величин, рассчитанные на основании выборки, называют *оценками* этих параметров или *статистиками a^** .

Оценка будет тем точнее, чем отчетливее случайный характер выборки и чем больше ее объем. Предполагается, что все наблюдения независимы.

Различают оценки (рис. 2.1):

- 1) точечные – в виде числа, рассчитанного по определенной формуле;
- 2) интервальные – задаваемые величиной доверительного интервала.

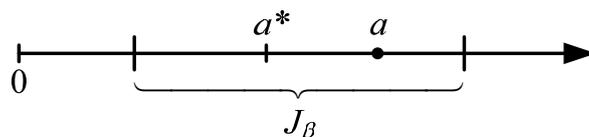


Рис. 2.1. Иллюстрация расположения на числовой оси параметра и его оценки

Вероятностные свойства произвольной оценки $a^* = a^*(x_1, x_2, \dots, x_N)$ параметра a можно описать с помощью функции распределения оценки $F(a^*)$ или ее характеристик m_{a^*}, σ_{a^*} .

Для оценивания одного и того же параметра можно использовать, в принципе, различные оценки. Чтобы выбрать наилучшую из них, необходимо сформулировать некоторые требования к свойствам оценок, желательные с точки зрения практики.

Оценки параметров («статистики») должны удовлетворять следующим 4 условиям:

1. Оценки должны быть «несмещенными» (unbiased, verzerrungsfrei):

$$M[a^*] = a, \quad (2.1)$$

т. е. при очень большом числе испытаний с одинаковыми выборками среднее значение оценок должно стремиться к истинному значению параметра генеральной совокупности.

2. Оценки должны быть «*состоятельными*» (согласованными) (consistent):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a^* = a, \quad (2.2)$$

т. е. с ростом N они должны стремиться к соответствующему параметру генеральной совокупности.

3. Оценки должны быть «*эффективными*» (efficient):

$$D[a^*] = \min, \quad (2.3)$$

$N_1 = N_2 = \dots = N_k$ – т. е. для выборок равного объема они должны иметь минимальное рассеяние (дисперсию).

Как правило, среднеквадратичное отклонение оценки по абсолютной величине и отнесенное к математическому ожиданию уменьшается при увеличении объема выборки.

4. Оценки должны быть «*достаточными*» (sufficient), т. е. не должна возникать необходимость в дополнительной информации об оцениваемом параметре.

Названия состоятельная (consistent), эффективная (efficient), достаточная (sufficient) введены Фишером Р.А. (1925 г.).

2.1.1 Точечные оценки параметров случайных величин

Для оценивания параметров по выборочным данным разработаны многочисленные методы. Случайная выборка важна, так как только она позволяет распространить выводы на всю генеральную совокупность. Полное исследование почти всегда или невозможно, или связано со слишком большими материальными или временными затратами.

Математическое ожидание случайной величины X оценивается ее средним арифметическим, которое при увеличении числа опытов N сходится по вероятности к математическому ожиданию:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad (2.4)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ – наблюдаемые значения случайной величины.

При операциях с непрерывными случайными величинами:

или

$$\begin{cases} m_x^* = \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} x(l) dl, \\ m_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \end{cases} \quad (2.5)$$

Иногда требуется определить числовые характеристики не по выборке полного объема, а по мере поступления новых данных.

Текущее выборочное среднее оценивается по формуле:

$$m_x^*(N) = m_x^*(N-1) + \frac{x(t_N) - m_x^*(N-1)}{N}. \quad (2.6)$$

Точечные оценки дисперсии и среднего квадратичного отклонения (стандартного отклонения) вычисляются по следующим формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x^*)^2}{N-1}; \quad \sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x^*)^2}{N-1}}; \\ D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N}}{N-1}; \quad \sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N}}{N-1}}; \\ D_x^* = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N(N-1)}; \quad \sigma_x^* = \sqrt{\frac{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N(N-1)}}; \\ D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N m_x^{*2}}{N-1}; \quad \sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N m_x^{*2}}{N-1}}; \\ D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - m_x^* \sum_{i=1}^N x_i}{N-1}; \quad \sigma_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 - m_x^* \sum_{i=1}^N x_i}{N-1}}. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Точечные оценки дисперсии и среднеквадратичного отклонения по мере поступления новых данных вычисляются по рекуррентным формулам:

$$D_x^*(N) = \frac{N-2}{N-1} D_x^*(N-1) + \frac{[x(t_N) - m_x^*(N-1)]^2}{N}; \quad (2.8)$$

$$\sigma_x^*(N) = \sqrt{D_x^*(N)}.$$

Если необходимо несколько рядов данных размера N_1, N_2, \dots, N_k со средними $m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*$ и дисперсиями $D_1^*, D_2^*, \dots, D_k^*$ объединить в один ряд объема $N = N_1 + N_2 + \dots + N_k$, то точечная оценка математического ожидания полного ряда есть:

$$m_x^* = \frac{N_1 m_1^* + N_2 m_2^* + \dots + N_k m_k^*}{N}, \quad (2.9)$$

а взвешенное среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{D_1^*(N_1 - 1) + D_2^*(N_2 - 1) + \dots + D_k^*(N_k - 1)}{N - k}}. \quad (2.10)$$

Следует отметить, что при анализе какой-либо технологической случайной величины X , непрерывно изменяющей во времени свое значение (температура реактора, давление газа в трубопроводе и т. д.), под наблюдаемыми значениями x_i понимают значения процесса в фиксированные моменты времени, разделенные таким интервалом, при котором соседние значения величины можно считать полученными из независимых опытов.

Шаг квантования должен быть не менее времени спада автокорреляционной функции рассматриваемой технологической случайной величины X :

$$\Delta t \geq \tau_m.$$

2.1.2 Интервальные оценки параметров случайных величин

Степень близости статистической оценки a^* к соответствующему параметру a удобно характеризовать с помощью доверительного интервала.

Поскольку оценка параметра, вычисленная по ограниченной выборке, является случайной величиной, необходимо оценить ее *точность* и *надежность*.

Чтобы дать представление о точности и надежности оценки a^* параметра a в математической статистике пользуются так называемыми доверительными интервалами и доверительными вероятностями. Параметры генеральной совокупности могут быть известны только на основании теоретических соображений.

Понятие «*доверительный интервал*» было введено Дж. Нейманом и Е.С. Пирсоном (1950 г.). Так называют вычисленный по выборочным значениям (x_1, x_2, \dots, x_N) выборки объема N интервал J_β , который с заданной вероятностью, доверительной вероятностью β накрывает истинное, но не известное нам значение параметра a (рис. 2.2).

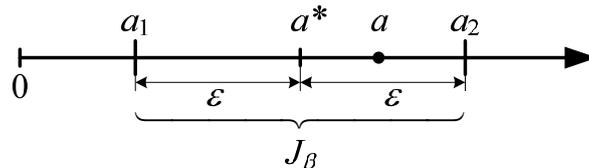


Рис. 2.2. Иллюстрация понятия «доверительный интервал»

В качестве *доверительной вероятности* в инженерной практике обычно принимают $\beta = 95\%$; эта вероятность говорит о том, что при частых применениях данного метода вычисленный доверительный интервал примерно в 95 % случаев будет покрывать параметр a :

$$P[(a^* - \varepsilon) \leq a \leq (a^* + \varepsilon)] = \beta. \quad (2.11)$$

Равенство (2.11) означает, что с вероятностью β неизвестное значение параметра a попадает в интервал

$$J_\beta = [(a^* - \varepsilon); (a^* + \varepsilon)]. \quad (2.12)$$

Вероятность β принято называть доверительной вероятностью – статистической надежностью, а интервал J_β – доверительным интервалом.

Границы интервала J_β $a_1 = a^* - \varepsilon$ и $a_2 = a^* + \varepsilon$ называются *доверительными границами*.

Если бы нам был известен закон распределения величины a^* , задача нахождения доверительного интервала была бы весьма проста: достаточно было бы найти такое значение ε , для которого $P[|a^* - a| < \varepsilon] = \beta$.

Так для нормального закона распределения имели бы

при $\beta = 0,6827 = 68,27\%$	$\varepsilon = \pm \sigma_{a^*}$;
$\beta = 0,95 = 95\%$	$\varepsilon = \pm 1,96 \sigma_{a^*} \approx 2 \sigma_{a^*}$;
$\beta = 0,99 = 99\%$	$\varepsilon = \pm 2,58 \sigma_{a^*}$;
.....	
$\beta = 0,9973 = 99,73\%$	$\varepsilon = \pm 3 \sigma_{a^*}$.

Затруднение состоит в том, что закон распределения оценки a^* зависит от закона распределения величины X и, следовательно, от неизвестных параметров (в частности, от самого параметра a) и как правило, неизвестен.

Если отдельные наблюдения независимы (x_i) и распределены (хотя бы приближенно), нормально искомое математическое ожидание m_x со статистической надежностью β лежит между доверительными границами

$$m_x^* \pm t_{(N-1);\alpha} \sigma_x^* / \sqrt{N}, \quad (2.13)$$

где $t_{(N-1);\alpha}$ – квантиль распределения Стьюдента (табл. А.1), $(N - 1)$ – число степеней свободы, $\alpha = 1 - \beta$ – вероятность ошибки, вероятность превышения уровня, уровень значимости.

То есть в среднем в $\beta\%$ всех выборок между этими границами заключено истинное значение математического ожидания m_x :

$$P\left[(m_x^* - t_{(N-1);\alpha} \sigma^* / \sqrt{N}) \leq m_x \leq (m_x^* + t_{(N-1);\alpha} \sigma_x^* / \sqrt{N})\right] = \beta. \quad (2.14)$$

Если σ известна (из генеральной совокупности), то вместо (2.13) используется выражение:

$$m_x^* \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

где z – нормированная нормально-распределенная переменная; $z = 1,96$ ($\beta = 95\%$), $z = 2,58$ ($\beta = 99\%$), $z = 3,29$ ($\beta = 99,9\%$).

Для *нормального* распределения $P[|x - m_x| \geq 3\sigma] = 0,0027$, т. е. вероятность того, что разность между случайной переменной, распределенной примерно по нормальному закону, и ее средним значением по абсолютной величине превосходит 3σ , меньше чем $0,3\%$.

Для *произвольного* распределения справедливо неравенство Бьенэмэ (1853 г.) и Чебышева (1874 г.): вероятность того, что разность между случайной переменной и ее математическим ожиданием по абсолютной величине больше $k\sigma$, меньше чем $\frac{1}{k^2}$.

$$\text{В общем случае } P[|x - m_x| > k\sigma] < \frac{1}{k^2}.$$

Так, например, если $k = 3$, то $P[|x - m_x| > 3\sigma] < \frac{1}{3^2} < 0,1111$.

При $k \geq 1$, т. е. чтобы получить 5% -й уровень значимости, необходимо принять $\varepsilon = \pm 4,47\sigma$, тогда $\frac{1}{4,47^2}$ примерно равно $0,05$.

Для *симметричного* распределения с одним максимумом справедливо строгое неравенство Гаусса (1821 г.) $P[|x - m_x| > k\sigma] < \frac{4}{9k^2}$, и отсюда $P[|x - m_x| > 3\sigma] < \frac{4}{9 \cdot 9} < 0,0494$, т. е. вероятность отклонения случайной величины от ее математического ожидания большего чем 3σ , примерно равно 5% .

Интервальная оценка (доверительный интервал) J_β дисперсии (среднего квадратичного отклонения) случайной величины для D_x может быть построен на основании χ^2 распределения («хи-квадрат» распределения).

Пусть D_x^* – оценка дисперсии случайной величины выборки объема N из генеральной совокупности с дисперсией (параметром) D_x ; тогда

случайная переменная $\chi^2 = \frac{(N-1)D^*}{D}$ представляет собой «хи-квадрат» распределение, параметр этого распределения – число степеней свободы $\nu = N - k$. ν равно разности между числом имеющихся экспериментальных значений N , по которым вычисляют оценку дисперсии, и количеством дополнительных параметров, входящих в формулу. Ее область изменения $0 \div \infty$, с ростом N χ^2 распределение приближается к нормальному.

Доверительный интервал для D_x вычисляется по формуле:

$$\frac{D_x^*(N-1)}{\chi_{(N-1);\alpha/2}^2} < D_x < \frac{D_x^*(N-1)}{\chi_{(N-1);(1-\alpha/2)}^2}, \quad (2.15)$$

где $\chi_{(N-1);\alpha/2}^2$ и $\chi_{(N-1);(1-\alpha/2)}^2$ – квантили χ^2 распределения (табл. А.2), $(N-1)$ – число степеней свободы, α – уровень значимости.

Например, при $\beta = 95\%$ ($\alpha = 0,05$) доверительный интервал для $N = 51$ и $D_x^* = 2$ равен:

$$\frac{2 \cdot 50}{71,42} < D_x < \frac{2 \cdot 50}{32,36} \text{ или } 1,40 < D_x < 3,09,$$

где $\chi_{50;0,025}^2 = 72,42$ и $\chi_{50;0,975}^2 = 32,36$.

$$\sqrt{\frac{\sigma_x^{*2}(N-1)}{\chi_{(N-1);\alpha/2}^2}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{\sigma_x^{*2}(N-1)}{\chi_{(N-1);(1-\alpha/2)}^2}}. \quad (2.16)$$

95%-й доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения равен: $1,18 < \sigma_x < 1,76$. Так как χ^2 распределение несимметрично, оцениваемый параметр лежит не в середине доверительного интервала ($\sigma^* = \sqrt{2} = 1,41$).

2.1.3 Оценка объема выборки

Планирование эксперимента при построении интервальных оценок сводится к определению необходимого объема N выборки с тем, чтобы при фиксированной доверительной вероятности достигнуть заданной точности оценивания параметров.

Минимальные объемы выборки N_σ при заданной точности d и заданной статистической надежности (доверительной вероятности β), необходимые для оценки среднеквадратичного отклонения σ_x определяются формулой:

$$N_{\sigma} \cong 1 + 0,5 \left(\frac{z_{\alpha}}{d} \right)^2. \quad (2.17)$$

Численные значения z_{α} для различных доверительных вероятностей приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Отдельные значения вероятностей нормального распределения для двустороннего критерия

β	α	Критическое значение z_{α}
		двусторонний критерий
0,999	0,001	3,2905
0,99	0,01	2,5758
0,95	0,05	1,9600
0,93	0,07	1,8119
0,8	0,2	1,2816
0,7	0,3	1,0364

Значения ошибки оценки среднего квадратичного отклонения случайной величины X приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Заданная ошибка d , как функция доверительной вероятности β объема выборки N для среднего квадратичного отклонения

$N \backslash \beta$	0,99	0,95	0,90	0,80
6	0,77	0,60	0,50	0,40
12	0,54	0,41	0,35	0,27
30	0,34	0,26	0,22	0,17
100	0,18	0,14	0,12	0,09
1000	0,06	0,04	0,04	0,03

Для оценки среднеквадратичного отклонения со статистической надежностью (доверительной вероятностью) $\beta = 95\%$ ($\alpha = 0,05$) с ошибкой 20% ($d = 0,2$) необходимо $N_{\sigma} = 1 + 0,5 \left(\frac{1,96}{0,2} \right)^2 = 49$ наблюдений.

Выборка, содержащая 21 элемент, позволяет оценивать σ_x с ошибкой:

$$\begin{aligned} \beta = 0,99 & \quad d = 0,4 & \quad (d = 40\%); \\ \beta = 0,95 & \quad d = 0,3 & \quad (d = 30\%); \\ \beta = 0,80 & \quad d = 0,2 & \quad (d = 20\%). \end{aligned}$$

2.2 Оценки характеристик системы двух случайных величин (X; Y)

Оценки математических ожиданий, дисперсий и среднеквадратичных отклонений отдельных случайных величин X и Y , образующих систему, вычисляются по соответствующим формулам раздела 2.1.

Точечная оценка коэффициента корреляции производится по формуле:

$$r_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)}{(N-1)\sigma_x^* \sigma_y^*}. \quad (2.18)$$

После замены оценок средних квадратичных отклонений σ_x^* и σ_y^* формулами (2.7) и соответствующих преобразований формула (2.18) принимает вид, удобный для практических вычислений точечной оценки коэффициента корреляции:

$$\left\{ \begin{aligned} r_{xy}^* &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^N y_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \right]}}, \\ r_{xy}^* &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - N m_x^* m_y^*}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2 - N m_x^{*2} \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 - N m_y^{*2} \right)}}. \end{aligned} \right.$$

При малом объеме выборки можно использовать выражение:

$$r_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x^*)^2 \sum_{i=1}^N (y_i - m_y^*)^2}}.$$

Для уточнения рекомендуется использовать формулу:

$$r_{xy}^{**} = r_{xy}^* \left[1 + \frac{1 - (r_{xy}^*)^2}{2(N-3)} \right].$$

Так, например,

для $N = 10$ и $r^* = 0,5$ $r_{xy}^{**} = 0,527$;

для $N = 10$ и $r^* = 0,9$ $r_{xy}^{**} = 0,912$;

для $N = 30$ и $r^* = 0,5$ $r_{xy}^{**} = 0,507$;

для $N = 30$ и $r^* = 0,9$ $r_{xy}^{**} = 0,903$.

Обычно объем выборки не слишком мал и поправку не учитывают. Точечную оценку корреляционного момента вычисляют по формуле:

$$K_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)}{N-1} \quad (2.19)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{xy}^* = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{N(N-1)}; \\ K_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{N-1}; \\ K_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - N m_x^* m_y^*}{N-1}. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

95%-й доверительный интервал для r_{xy} можно определить по рис. 2.3 [3] как расстояние между точками пересечения вертикали, соответствующей значению r_{xy}^* , с кривыми, соответствующими значению N . Если доверительный интервал не включает значение $r_{xy} = 0$, то можно говорить о наличии корреляции ($r_{xy} \neq 0$).

Для $r_{xy}^* = 0,68$ и $N = 50$ доверительный интервал коэффициента корреляции равен $0,5 \leq r_{xy} \leq 0,80$, что соответствует утверждению о наличии корреляции.

Для $r_{xy}^* = 0,5$ и $N = 3$ доверительный интервал коэффициента корреляции равен $-0,91 \leq r_{xy} \leq 0,98$. Доверительный интервал слишком большой и по существу не несет никакой информации о коэффициенте корреляции.

Наличие корреляции проверяется также по критерию Фишера на основании t -распределения (Стьюдента) с $(N-2)$ степенями свободы. При выполнении условия:

$$t_{\text{расч}} = \frac{r_{xy}^* \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^{*2}}} \geq t_{N-2, \beta} \quad (2.21)$$

налицо с доверительной вероятностью β наличие достоверной стохастической зависимости, в противном случае существование стохастической зависимости между величинами x и y недостоверно.

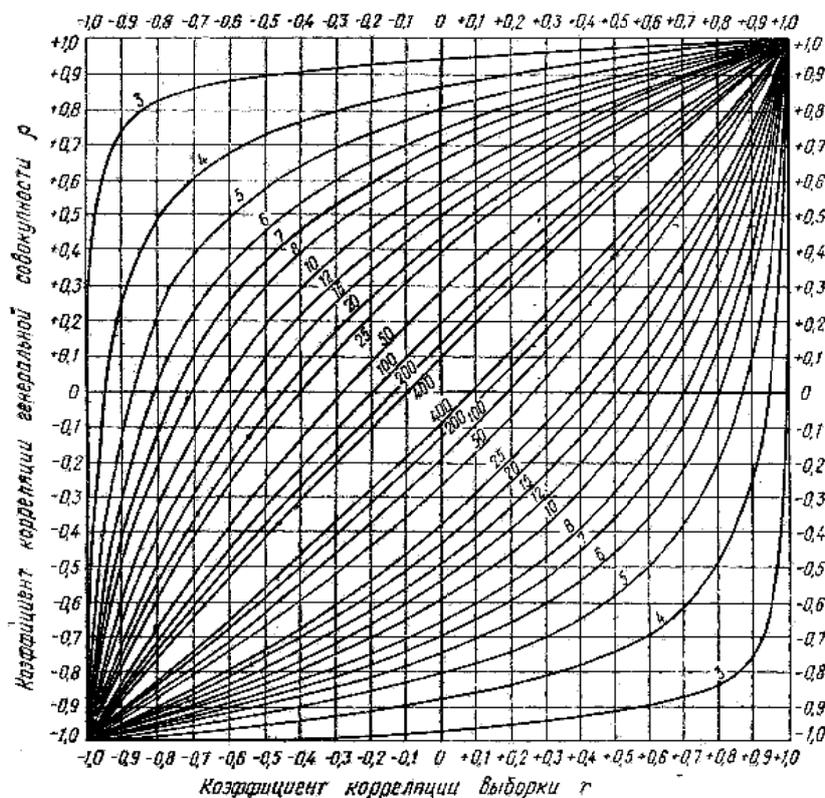


Рис. 2.3. 95%-й доверительный интервал для коэффициента корреляции r_{xy}

Для определения доверительных интервалов коэффициенты корреляции используются и другие различные методы [3].

2.2.1 Оценивание линейной регрессии

Всегда нужно различать следующие две модели регрессионного анализа (рис. 2.4):

Модель 1. Зависимая переменная Y – случайная переменная; значения входной переменной x заданы точно (рис. 2.4, а).

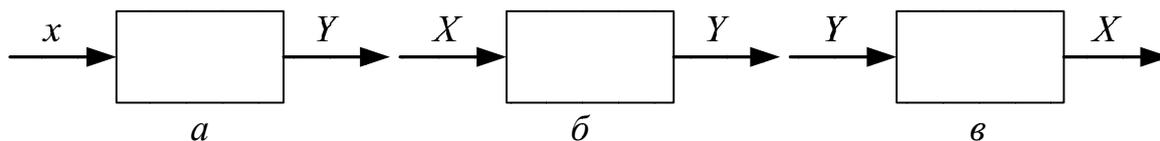


Рис. 2.4. Модели регрессионного анализа:
а – входная координата – неслучайная величина, выходная – случайная; б, в – входная и выходная координаты – случайные величины

$$\hat{y} = a_{yx}^* + b_{yx}^* x; \quad (2.22)$$

$$b_{yx}^* = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}; \quad (2.23)$$

$$a_{yx}^* = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - b_{yx}^* \sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (2.24)$$

Модель 2. Как переменная y , так и переменная x – случайные переменные. Здесь возможны две регрессии, определяющие \hat{y} по x и \hat{x} по y (рис. 2.4, б, в):

$$\hat{y} = a_{yx}^* + b_{yx}^* x; \quad (2.25)$$

$$\hat{x} = a_{xy}^* + b_{xy}^* y; \quad (2.26)$$

$$b_{xy}^* = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)^2}; \quad (2.27)$$

$$a_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i - b_{xy}^* \sum_{i=1}^N y_i}{N}. \quad (2.28)$$

Подставляя b_{yx}^* в a_{yx}^* и b_{xy}^* в a_{xy}^* , тогда a_{yx}^* и a_{xy}^* могут быть определены непосредственно по формулам:

$$a_{yx}^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2};$$

$$a_{xy}^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N y_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right)}{N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)^2}.$$

Если N велико или задано много пар значений x_i и y_i , выражения (2.23) и (2.27) заменяют следующими выражениями:

$$b_{yx}^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)\left(\sum_{i=1}^N y_i\right)}{N}}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N}};$$

$$b_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)\left(\sum_{i=1}^N y_i\right)}{N}}{\sum_{i=1}^N y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N y_i\right)^2}{N}}.$$

Для практических вычислений оценок систем случайных величин удобно ввести промежуточные вычислительные блоки [3]:

$$Q_x = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x^*)^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{N}; \quad (2.29)$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^N (y_i - m_y^*)^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N y_i\right)^2}{N}; \quad (2.30)$$

$$Q_{xy} = \sum (x - m_x^*)(y - m_y^*) = \sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)\left(\sum_{i=1}^N y_i\right)}{N}. \quad (2.31)$$

Тогда:

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{Q_x}{N-1}}; \sigma_y^* = \sqrt{\frac{Q_y}{N-1}}; \quad (2.32)$$

$$r_{xy}^* = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x Q_y}}; \quad (2.33)$$

$$b_{yx}^* = \frac{Q_{xy}}{Q_x}; \quad (2.34)$$

$$b_{xy}^* = \frac{Q_{xy}}{Q_y}. \quad (2.35)$$

Решение об адекватности линейного уравнения регрессии опытным данным принимается по величине ошибки предсказания, характеризующей рассеяние опытных данных относительно уравнения регрессии. Оценка среднеквадратичного отклонения для Y при условии, что X принимает определенное значение x (оценка среднеквадратичной ошибки предсказания), осуществляется по формуле:

$$\sigma_{y/x}^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y})^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - a_{yx} - b_{yx}x_i)^2}{N-2}}. \quad (2.36)$$

Символ $\sigma_{y/x}$ – среднеквадратичное отклонение значений y для заданных x . Числитель под корнем представляет собой сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений y от соответствующих значений, вычисленных по уравнению регрессии. Эта сумма делится на $(N-2)$, а не на $(N-1)$, так как по наблюдаемым данным оцениваются два параметра a_{yx} и b_{yx} . Среднеквадратичную ошибку предсказания можно вычислить по формуле:

$$\sigma_{y/x}^* = \sqrt{\frac{Q_y - \frac{(Q_{xy})^2}{Q_x}}{N-2}}. \quad (2.37)$$

Т. к. $\sigma_{y/x}^*$ есть мера ошибки, которая получается при оценке или предсказании y по заданным x , это среднеквадратичное отклонение называется также *среднеквадратичной ошибкой оценивания* или *среднеквадратичной ошибкой предсказания*. Две линии, параллельные линии регрессии и отстоящие на расстоянии $2\sigma_{y/x}^*$, образуют полосу, содержащую около 95 % всех наблюдений (рис. 2.5).

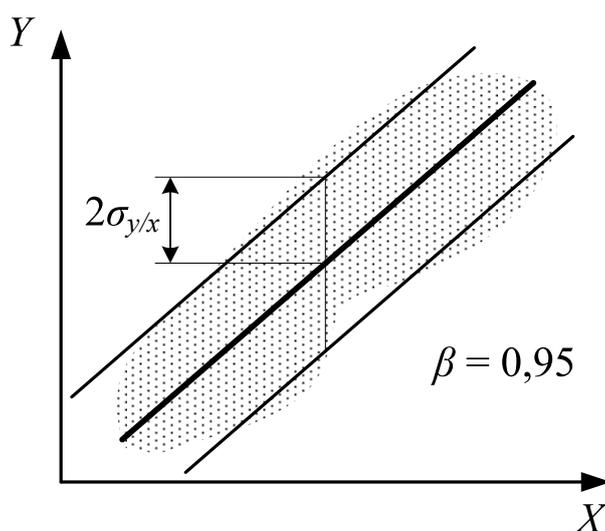


Рис. 2.5. Интервальная оценка линейной регрессии

Если обозначить среднеквадратичное отклонение коэффициента регрессии a_{yx} через σ_a^* ; среднеквадратичное отклонение коэффициента регрессии b_{yx} через σ_b^* , то получим:

$$\sigma_{a_{yx}}^* = \sigma_{y/x}^* \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(m_x^*)^2}{Q_x}}; \quad (2.38)$$

$$\sigma_{b_{yx}}^* = \frac{\sigma_{y/x}^*}{\sqrt{Q_x}}; \quad (2.39)$$

$$\sigma_{a_{yx}}^* = \sigma_{b_{yx}}^* \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}. \quad (2.40)$$

Контроль для σ_a^* и σ_b^* :

$$\frac{\sigma_a^*}{\sigma_b^*} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}. \quad (2.41)$$

При больших объемах выборки справедливо:

$$\begin{cases} \sigma_{y/x}^* \cong \sigma_y^* \sqrt{1 - (r_{xy}^*)^2}, \\ \sigma_{x/y}^* \cong \sigma_x^* \sqrt{1 - (r_{xy}^*)^2}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Доверительные интервалы для коэффициента регрессии и для свободного члена определяются выражениями:

$$b_{yx}^* \pm t \sigma_{b_{yx}}^* \text{ и } a_{yx}^* \pm t \sigma_{a_{yx}}^* \quad (2.43)$$

при $(N-2)$ степенях свободы для t (распределение Стьюдента) (рис.2.6).

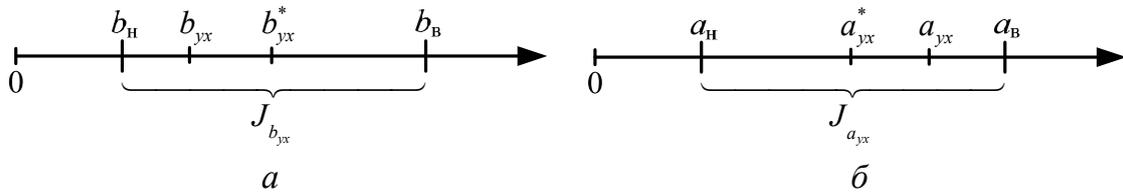


Рис. 2.6. Доверительные интервалы для коэффициентов уравнения регрессии: a – для коэффициента регрессии b_{yx} ; \bar{b} – для свободного члена a_{yx}

Доверительный интервал для дисперсии предсказания определяется выражением [3]:

$$\frac{D_{y/x}^* (N-2)}{\chi_{N-2; \frac{\alpha}{2}}^2} \leq D_{y/x} \leq \frac{D_{y/x}^* (N-2)}{\chi_{N-2; (1-\frac{\alpha}{2})}^2}, \quad (2.44)$$

а для среднеквадратичной ошибки предсказания:

$$\sqrt{\frac{D_{y/x}^* (N-2)}{\chi_{N-2; \frac{\alpha}{2}}^2}} \leq \sigma_{y/x}^* \leq \sqrt{\frac{D_{y/x}^* (N-2)}{\chi_{N-2; (1-\frac{\alpha}{2})}^2}}.$$

2.3 Оценки характеристик случайных процессов

При определении характеристик случайного процесса обработке подвергаются значения реализаций, полученные в ряде независимых опытов (рис. 2.7).

Расчет искомых оценок характеристик случайных процессов сводится к рассмотренному выше расчету оценок характеристик случайных величин для ряда сечений случайного процесса и сведением его к системе случайных величин. Для каждого сечения случайного процесса $X(t_i)$, т. е. для значений случайного процесса в фиксированные моменты времени t_i определяются из N полученных реализаций N значений случайной величины $x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_N(t_i)$. Сечения случайного процесса обычно делаются равноотстоящими, при этом величина интервала выбирается по возможности настолько малой, чтобы по значениям каждой реализации в фиксированных точках можно было в случае необходимости достаточно точно восстановить ее ход во времени.

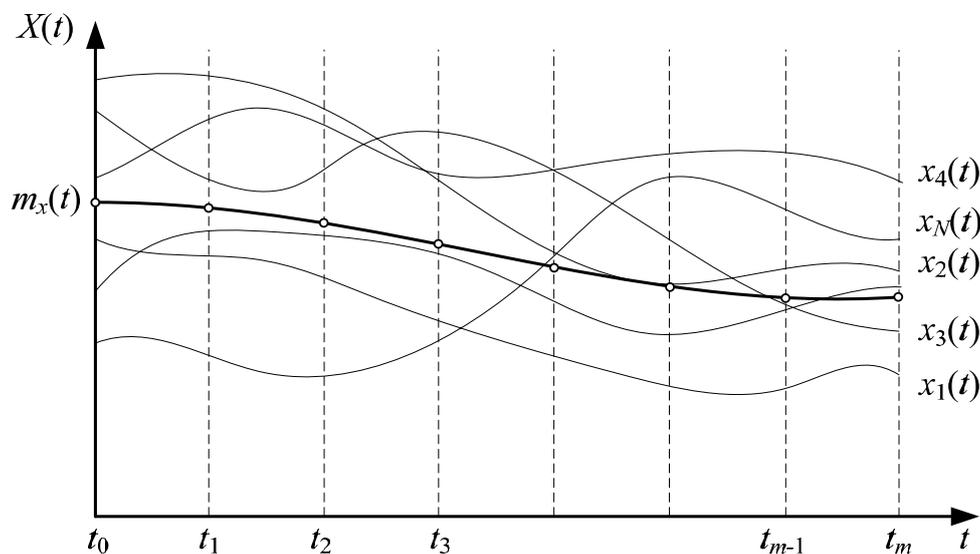


Рис. 2.7. Исходные реализации для оценки характеристик случайных процессов

Зарегистрированные значения $X(t)$ заносятся в таблицу, каждая строка которой соответствует определенной реализации, а каждый столбец — фиксированному сечению случайного процесса (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Экспериментальные данные для оценки характеристик случайного процесса

№ реализации	Сечение							
	t_1	t_2	...	t_i	...	t_j	...	t_m
1	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$...	$x_1(t_i)$...	$x_1(t_j)$...	$x_1(t_m)$
2	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$...	$x_2(t_i)$...	$x_2(t_j)$...	$x_2(t_m)$
...
k	$x_k(t_1)$	$x_k(t_2)$...	$x_k(t_i)$...	$x_k(t_j)$...	$x_k(t_m)$
...
N	$x_N(t_1)$	$x_N(t_2)$...	$x_N(t_i)$...	$x_N(t_j)$...	$x_N(t_m)$

Символом $x_k(t_i)$ обозначено значение, соответствующее k -ой реализации в момент t_i .

Полученный материал представляет собой не что иное, как результаты N опытов над системой m случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$ и обрабатывается по методикам, изложенным в разделах 2.1; 2.2.

Прежде всего, для каждого фиксированного сечения определяются:

- оценки для математических ожиданий:

$$m_x^*(t_i) = \frac{\sum_{k=1}^N x_k(t_i)}{N}; \quad (2.45)$$

- оценки для дисперсий:

$$D_x^*(t_i) = \frac{\sum_{k=1}^N [x_k(t_i) - m_x^*(t_i)]^2}{N-1}. \quad (2.46)$$

Для любых двух сечений (i -ого и j -ого) определяется оценка значения автокорреляционной функции:

$$K_x^*(t_i, t_j) = \frac{\sum_{k=1}^N [x_k(t_i) - m_x^*(t_i)][x_k(t_j) - m_x^*(t_j)]}{N-1}. \quad (2.47)$$

Перебором возможных номеров i и j определяются оценки всех ординат искомой автокорреляционной функции.

При анализе стационарного случайного процесса после получения значений $m_x^*(t_i)$; $D_x^*(t_i)$; $K_x^*(t_i, t_j)$ производится усреднение значений $m_x^*(t_i)$; $D_x^*(t_i)$ по всем фиксированным значениям t_1, \dots, t_m и усреднение значений $K_x^*(t_i, t_j)$ при равных $\tau = t_j - t_i$, и в случае надобности автокорреляционная функция аппроксимируется аналитическим выражением.

В результате этих действий определяются оценки характеристик стационарного случайного процесса: $m_x^* = \text{const}$, $D_x^* = \text{const}$ и $K_x^*(\tau)$.

В ряде случаев бывает удобно при вычислении оценок для дисперсий и корреляционных моментов пользоваться формулами:

$$D_x^*(t_i) = \left[\frac{\sum_{k=1}^N [x_k(t_i)]^2}{N} - [m_x^*(t_i)]^2 \right] \frac{N}{N-1}; \quad (2.48)$$

$$K_x^*(t_i, t_j) = \left[\frac{\sum_{k=1}^N x_k(t_i)x_k(t_j)}{N} - m_x^*(t_i)m_x^*(t_j) \right] \frac{N}{N-1}. \quad (2.49)$$

Для эргодических стационарных случайных процессов рассматриваемые оценки могут быть получены более простым путем. Эргодическое свойство заключается в том, что среднее по времени процесса, вычисленное по достаточно большой реализации, приблизительно равно среднему по множеству реализаций этого процесса (рис. 2.8).

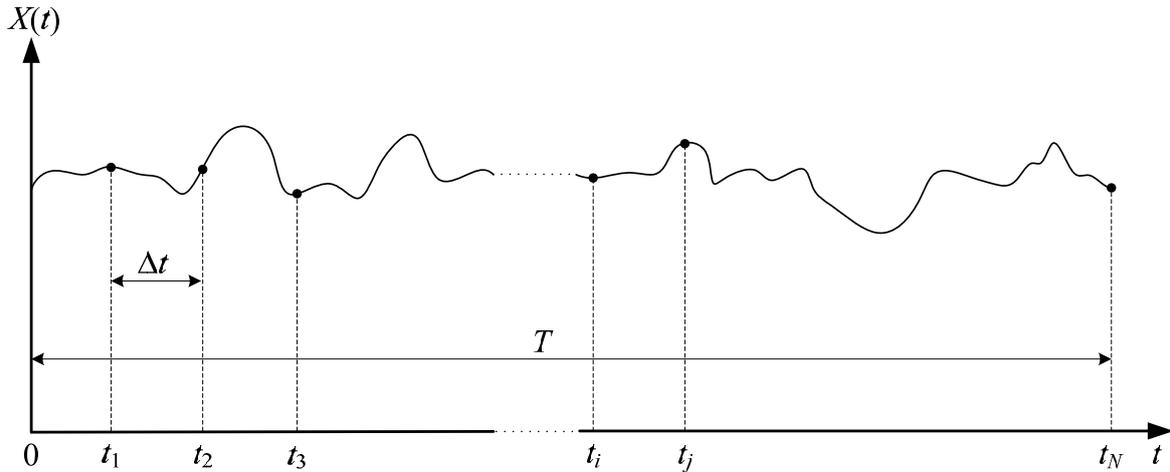


Рис. 2.8. Эргодический стационарный случайный процесс

При наличии этого свойства одна реализация является достаточной для получения оценок характеристик случайного процесса. При большой длине одной реализации (T) путем усреднения ее значений по времени (t) можно получить оценки всех характеристик случайного процесса, поскольку в этой реализации имеются свойства всего множества реализаций процесса. Так, оценка математического ожидания и дисперсии эргодического стационарного процесса определяются по формулам:

$$m_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt; \quad (2.50)$$

$$D_x^*(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x^*]^2 dt,$$

где $x(t)$ – текущая координата исследуемой реализации.

Оценка автокорреляционной функции эргодического стационарного случайного процесса производится по формуле:

$$K_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x^*][x(t+\tau) - m_x^*] dt. \quad (2.51)$$

Аналогично определяется и оценка взаимной корреляционной функции между процессами $x(t)$ и $y(t)$:

$$K_{xy}^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x^*][y(t+\tau) - m_y^*] dt. \quad (2.52)$$

При вычислении этих оценок при дискретной обработке вместо интегралов пользуются конечными суммами. Для этого весь интервал записи реализации от 0 до T разбивается на N равных частей, каждая длиной Δt . Значения реализации в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_N , равные соответственно $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$, используются для вычисления соответствующих оценок.

Представляя интегралы в формулах (2.50)–(2.52) приближенно конечными суммами, получим:

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i); \quad (2.53)$$

$$K_x^*\left(\frac{lT}{N}\right) = \frac{1}{N-l} \sum_{i=1}^{N-l} [x(t_i) - m_x^*][x(t_{i+l}) - m_x^*], \quad (2.54)$$

где $\tau = l\Delta t = \frac{lT}{N}$ ($l = 0, 1, \dots, k; k < N$),

$$K_{xy}^*\left(\frac{lT}{N}\right) = \frac{1}{N-l} \sum_{i=1}^{N-l} [x(t_i) - m_x^*][y(t_{i+l}) - m_y^*]. \quad (2.55)$$

Существенно отметить, что не всякий стационарный процесс является эргодическим и, следовательно, не при всяком стационарном процессе можно воспользоваться формулами (2.53)–(2.55). Примером не эргодического стационарного случайного процесса является процесс, в составе которого есть слагаемое, представляющее собой случайную величину, изменяющую свое значение от реализации к реализации. Ввиду этого удлинение одной реализации не может выявить свойства других

реализаций этого стационарного процесса. Среднее по времени процесса здесь уже будет отличаться от среднего, полученного по множеству реализаций.

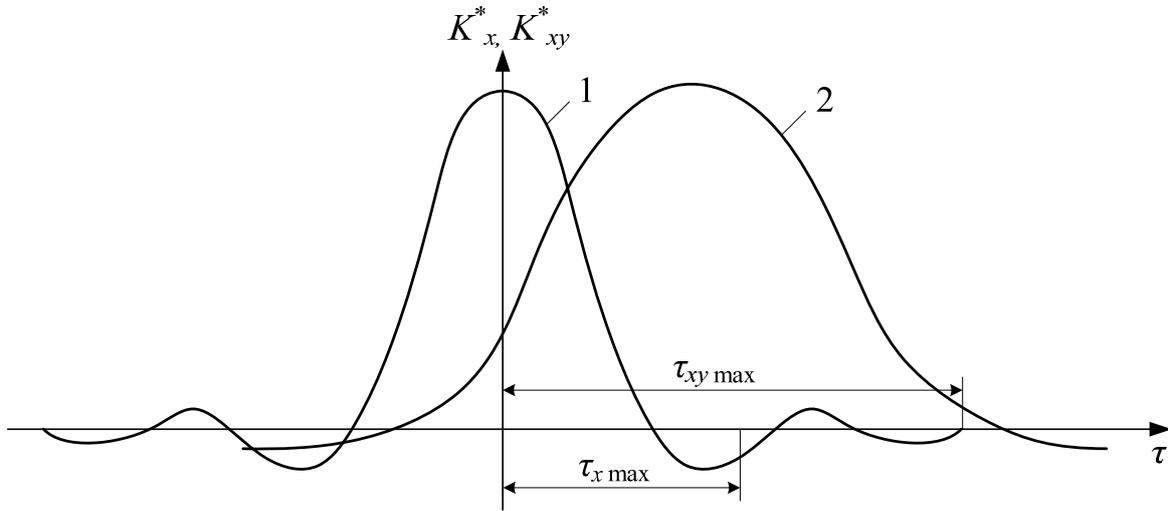


Рис. 2.9. Графики корреляционных функций эргодических стационарных случайных процессов: 1 – автокорреляционной; 2 – взаимокорреляционной

Относительная величина погрешности определения автокорреляционной функции (рис. 2.9) определяется выражением [18]:

$$\delta_{\text{AK}}^2 = \frac{D[K_x^*(\tau)]}{K_x^*(0)} < 4 \frac{\tau_{x \text{ max}}}{T}, \quad (2.56)$$

из которого и находится требуемый интервал наблюдения T :

$$T \geq \frac{4}{\delta_{\text{AK}}^2} \tau_{\text{max}}. \quad (2.57)$$

Так, например,

для $\delta_{\text{AK}} \leq 50 \%$	$T = 16\tau_{\text{max}};$
$\delta_{\text{AK}} \leq 30 \%$	$T = 45\tau_{\text{max}};$
$\delta_{\text{AK}} \leq 10 \%$	$T = 400\tau_{\text{max}};$
$\delta_{\text{AK}} \leq 2 \%$	$T = 10^4\tau_{\text{max}}.$

Для эргодических стационарно-связанных случайных процессов относительная величина погрешности взаимной корреляционной функции (рис. 2.9) определится выражением:

$$\delta_{\text{ВКФ}} = \frac{\sigma^2[K_{xy}^*(\tau)]}{\sigma_x \sigma_y} \leq \sqrt{\frac{2(\tau_{0xy} + \tau_{xy \text{ max}})}{T}}. \quad (2.58)$$

Отсюда следует, что:

$$\delta_{\text{ВКФ}}^2 \leq 2 \frac{\tau_{0xy} + \tau_{xy}}{T}, \quad (2.59)$$

где τ_{0xy} – наименьшее время спада автокорреляционных функций $K_x^*(\tau)$; $K_y^*(\tau)$, т. е.:

$$\begin{cases} \tau_{0xy} = \tau_{x \max}, & \text{если } \tau_{x \max} < \tau_{y \max}, \\ \tau_{0xy} = \tau_{y \max}, & \text{если } \tau_{y \max} < \tau_{x \max}, \end{cases}$$

где $\tau_{xy \max}$ – время спада взаимной корреляционной функции $K_{xy}^*(\tau)$.

При этом предполагаются выполненными неравенства:

$$\begin{cases} \tau_{0xy} \ll T - \tau, \\ \tau_{xy} \ll T - \tau. \end{cases}$$

Тогда величина интервала наблюдения, необходимого для оценки взаимной корреляционной функции с заданной погрешностью $\delta_{\text{ВКФ}}$, равна:

$$T \geq \frac{2(\tau_{0xy} + \tau_{xy})}{\delta_{\text{ВКФ}}^2}. \quad (2.60)$$

При $\delta_{\text{ВКФ}} = 10\%$ ($\delta_{\text{ВКФ}} = 0,1$) $T \geq 200(\tau_{0xy} + \tau_{xy})$.

Расчет оценки спектральной плотности производится применением преобразования Фурье к оценке корреляционной функции процесса (1.74). Однако непосредственный расчет по указанной формуле без предварительной обработки оценки корреляционной функции обычно оказывается неправильным ввиду того, что преобразование Фурье возможно только при условии абсолютной интегрируемости функций. Данное условие не имеет места при наличии в хвосте оценки корреляционной функции каких-либо периодических или случайных колебаний. Ввиду этого перед применением преобразования Фурье к оценке корреляционной функции последняя должна быть предварительно обработана. Практически такая обработка сводится к следующим действиям:

1. Усечение колебательных хвостов оценки автокорреляционной функции (рис. 2.10, а и б):

$${}_y K_x^*(\tau) = \begin{cases} K_x^*(\tau) & \text{при } |\tau| < m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > m, \end{cases} \quad (2.61)$$

где m – абсцисса, при которой появляются колебательные составляющие оценки автокорреляционной функции.

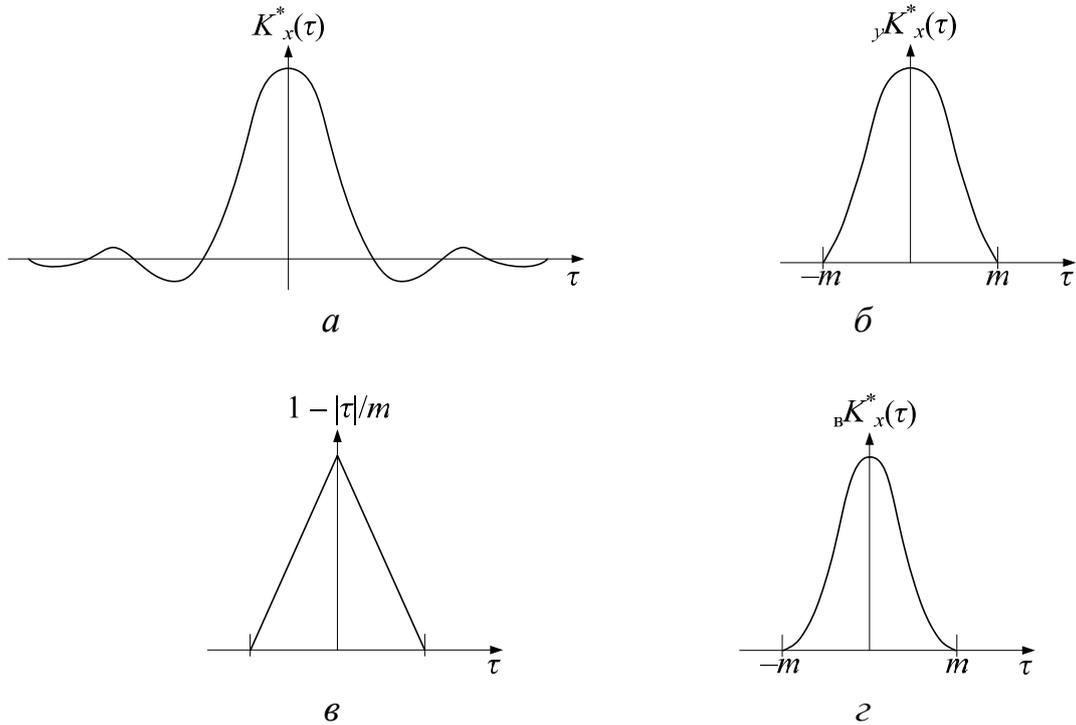


Рис. 2.10. Этапы предварительной обработки автокорреляционной функции для оценки спектральной плоскости стационарного случайного процесса: а – исходная АКФ; б – усеченная АКФ; в – весовой коэффициент; г – усеченная и взвешенная АКФ

Такая обработка оценки автокорреляционной функции значительно снижает погрешность определения оценки спектральной плотности, однако спектральная плотность приобретает колебательный характер.

Для сглаживания значений оценки спектральной плотности следует каждому значению усеченной автокорреляционной функции придать определенный вес в формировании оценки спектральной плотности.

2. Умножение усеченной оценки корреляционной функции на весовой коэффициент (рис. 2.10, в и г):

$${}_v K_x^*(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{m}\right) {}_y K_x^*(\tau). \quad (2.62)$$

При указанном взвешивании значений оценки автокорреляционной функции ее величина уменьшается пропорционально увеличению абсолютного значения аргумента τ .

Оценка спектральной плотности делается по формуле:

$$S_x^*(\omega) = 2 \int_0^{\infty} {}_v K^*(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (2.63)$$

Как показывает анализ, полученная указанным образом оценка достаточно близка к истинной спектральной плотности исследуемого процесса. Аналогичной обработке подвергается и оценка взаимной корреляционной функции для расчета оценки взаимной спектральной плотности:

$$S_{xy}^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}^*(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.64)$$

Существенной характеристикой спектральной плотности является частота среза спектральной плотности ω_c . Она определяет собой верхнюю граничную частоту спектральной плотности. Практически она рассчитывается как частота, при которой значение оценки спектральной плотности становится достаточно малым, часто равным 0,05 от значения оценки спектральной плотности при нулевой частоте, т. е.:

$$S_x^*(\omega_c) = 0,05 S_x^*(0). \quad (2.65)$$

3 СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эксперимент всегда служил средством познания окружающего мира, критерием истинности гипотез и теорий. Долгое время считалось, что выбор стратегии эксперимента и его реализация полностью определяются опытом и интуицией исследователя. Математики же принимали участие только в обработке результатов эксперимента.

Однако рост объёмов экспериментальных исследований сделал актуальной постановку вопроса об эффективности эксперимента. Возникли математическая теория эксперимента и планирование эксперимента как его часть.

Профессор Налимов В.В. даёт следующее определение планированию эксперимента: «...планирование эксперимента – это оптимальное управление экспериментом при неполном знании механизма явлений».

Методы планирования эксперимента используются при исследовании различных объектов (доменных печей, ядерных и химических реакторов и т. д.). Объекты отличаются, прежде всего, процессами, которые в них протекают. Процессы, протекающие в каких либо объектах, характеризуются переменными, между которыми существуют определенные причинно-следственные связи (рис. 3.1).

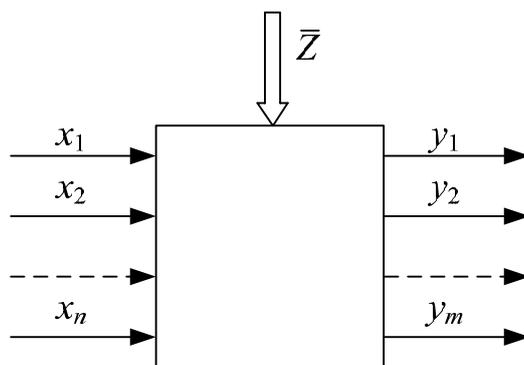


Рис. 3.1. Информационная структура объекта исследования

Переменные, играющие роль причин, называются *входными* (x_1, x_2, \dots, x_n); а переменные, отражающие последствия причин – *выходными* (y_1, y_2, \dots, y_m).

Входные управляемые переменные (x_1, x_2, \dots, x_n) называют *факторами*.

\bar{Z} – входные неконтролируемые и неуправляемые переменные;

Z – считают случайной переменной или помехой, имеющей определенный закон распределения.

Планы эксперимента составляются, исходя из заданных целей исследования, которых может быть множество. Разнообразие целей порождает многообразие планов эксперимента.

Выходные переменные \bar{Y} называют также *параметрами оптимизации* (критериями оптимизации, целевыми функциями).

Целью экспериментальных исследований является построение математической модели объекта исследования. Под *математической моделью* понимается уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. В общем виде его можно записать как функцию $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая называется *функцией отклика*. Здесь временными изменениями переменных пренебрегают и считают, что они неизменны, а переход с одного уровня переменной на другой происходит мгновенно, т. е. здесь рассматриваются статические модели объектов. Но и определение оптимальных условий в статике имеет серьезное практическое значение.

Каждый фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений, называемых *уровнями*. Фиксированный набор уровней факторов (т. е. установление каждого фактора на некоторый уровень) определяет одно из возможных состояний объекта. Одновременно это есть условие проведения одного из возможных опытов в проводящем эксперименте. Если перебрать все возможные наборы состояний, получим полное множество различных состояний данного объекта, т. е. число возможных различных опытов в данном эксперименте.

Число различных состояний определяет сложность данной системы. Чтобы узнать число различных состояний N , достаточно число уровней факторов (если оно для всех факторов одинаково и равно k) возвести в степень числа факторов n , т. е.:

$$N = k^n.$$

Так, на первый взгляд, простая система с пятью факторами на пяти уровнях имеет $5^5 = 3125$ состояний, а для 10 факторов на четырех уровнях их уже свыше миллиона $N = 4^{10} = 1048576$.

В этих условиях мы просто вынуждены отказаться от таких экспериментов, которые включают все возможные опыты, поскольку перебор слишком велик. Тогда возникает вопрос, сколько и каких опытов надо включить в эксперимент, чтобы решить поставленную задачу построения искомой модели исследуемого процесса.

Здесь-то и приходит на помощь планирование эксперимента.

Планирование экстремальных экспериментов (ПЭЭ) – это метод выбора количества и условий проведения опытов, минимально необходимых для построения модели.

3.1.1 Параметры оптимизации (целевые функции)

При планировании экспериментов очень важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Это требует чёткой формулировки цели исследования и количественной её оценки. Характеристика цели, заданная количественно, называется *параметром оптимизации*. Физически параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной системы. В зависимости от объекта и цели исследования параметры оптимизации могут быть весьма разнообразными (рис. 3.2).



Рис. 3.2. Классификация параметров оптимизации

Экономические параметры оптимизации – прибыль, себестоимость и рентабельность – обычно используются при исследовании действующих промышленных объектов, хотя затраты на эксперимент имеет смысл оценивать в любых исследованиях. Среди технико-экономических параметров наибольшее распространение имеет производительность. Группу технико-технологических параметров образуют характеристики количества и качества продукта. Среди прочих мы выделили статистические параметры, используемые для улучшения характеристик случайных величин или случайных функций. Например, задачи на минимизацию дисперсии случайной величины, на уменьшение

числа выбросов случайного процесса за фиксированный уровень и т. д. Последняя задача возникает, в частности, при выборе оптимальных настроек автоматических регуляторов.

Параметр оптимизации должен быть эффективным с точки зрения достижения цели; универсальным; количественным; статистически эффективным; иметь физический смысл; просто и легко вычисляться; существовать для всех возможных состояний. Из многих параметров, характеризующих объект исследования, выбирается один, часто обобщенный, который и служит параметром оптимизации. Остальные рассматриваются как ограничения. Параметр оптимизации должен оценивать функционирование системы в целом, а не отдельных её подсистем.

3.1.2 Факторы

Входные управляемые переменные (x_1, x_2, \dots, x_n) называют *факторами* (рис. 3.1).

При выборе факторов нужно выполнять следующие требования:

- 1) фактор должен быть регулируемым (требование управляемости);
- 2) точность измерения и управления факторов должна быть известна и достаточно высока (требование однозначности).

Требования, предъявляемые к совокупности факторов, – совместимость и отсутствие линейной корреляции.

К факторам и параметрам оптимизации одновременно также предъявляется ряд требований.

1. Факторы и параметры оптимизации должны иметь области определения, заданные технологическими или принципиальными ограничениями (пример технологического ограничения – максимальная производительность компрессора, подающего газ в реактор; пример принципиального ограничения – температура кристаллизации жидкого продукта, образующегося в результате реакции). Области определения факторов должны быть таковы, чтобы при различных их комбинациях переменные состояния не выходили за свои ограничения.

2. Между факторами и параметрами оптимизации должно существовать однозначное соответствие; оно позволит в эксперименте построить математическую модель объекта исследования и решить поставленную задачу эксперимента.

3.1.3 Модель

Свойства изучаемого объекта (системы) можно описывать различными моделями, одновременно имеющими право на существование. Однако, можно говорить о том, что одни из этих моделей в каком-то

смысле хороши, другие – плохи. Для выбора конкретной модели необходимо сформулировать конкретные требования. К ним относятся: адекватность, содержательность, простота и др. Под *адекватностью* понимается способность модели предсказывать результаты эксперимента в некоторой области с требуемой точностью. Как указывает В.В. Налимов, модель должна быть содержательна – она должна хорошо объяснять множество уже известных факторов, выявлять новые, незамеченные явления, в какой-то степени предсказывать их дальнейшее развитие и, что вероятно имеет наибольшее значение, должна выдвигать перед исследователями новые проблемы. Одним из главных достоинств модели должна быть её простота.

Для экстремального планирования эксперимента наибольшее применение нашли модели в виде алгебраических полиномов:

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n \beta_{jj} x_j^2 + \dots \quad (3.1)$$

Самыми распространёнными являются полиномы первого и второго порядка.

3.2 Планирование эксперимента

Если выбрана модель и записано ее уравнение, то остается в ответственной для исследования области факторного пространства спланировать и провести эксперимент для оценки численных значений коэффициентов этого уравнения. При этом план должен содержать количество опытов не менее числа коэффициентов уравнения модели. В зависимости от порядка полинома модели (3.1) различают: планы первого порядка, второго порядка, в общем случае m порядка, но обычно ограничиваются на практике планами 1 либо 2 порядков.

Сущность факторного эксперимента 1 порядка состоит в одновременном варьировании всех факторов при его проведении по определенному плану, представлении математической модели (функции отклика) в виде линейного полинома:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \quad (3.2)$$

и в исследовании последнего методами математической статистики.

Пример: предположим, что объектом исследования является реактор, в котором выход продукта Y зависит от температуры X_1 и давления X_2 в реакторе (рис. 3.3). Дополнительно известно, что изменение температуры от 60 до 80 °С и давления от 1000 до 1500 кПа изменяет выход продукта.

Таким образом, после проведения эксперимента необходимо определить коэффициенты линейного уравнения регрессии $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

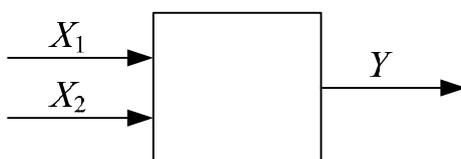


Рис. 3.3. Информационная структура исследуемого объекта

Дополнительно известно, что изменение температуры от 60 до 80 °С и давления от 1000 до 1500 кПа изменяют выход продукта.

Уровнем фактора называют определенное значение фактора, которое будет фиксироваться при проведении эксперимента.

В нашем примере в качестве уровней факторов примем 60 и 80 °С для фактора «температура» и 1000 и 1500 кПа для фактора «давление». Уровнями факторов можно назвать и средние значения рассматриваемых интервалов, эти значения называют *нулевыми уровнями*, обозначают X_{j0} : $X_{10} = 70$ °С и $X_{20} = 1250$ кПа.

Интервал варьирования – это такое значение фактора в натуральных единицах, прибавление которого к нулевому уровню даёт верхний, а вычитание – нижний уровень фактора, обозначим ΔX_j .

Экстремальные значения, которые могут принимать факторы, не меняя своих физико-химических свойств и не искажая сути исследуемого процесса, назовём *границами существования факторов*, а интервал $(X_{j\max} - X_{j\min})$ – *интервалом определения фактора*. Область варьирования факторов M составляет часть области определения факторов L (рис. 3.4).

Для упрощения процедуры вычисления коэффициентов полиномиальной модели применяют приведенные значения факторов в безразмерной форме, что достигается кодированием факторов по формуле:

$$x_j = \frac{X_j - X_{j0}}{\Delta X_j}. \quad (3.3)$$

При этом верхние и нижние уровни всех безразмерных факторов принимают значения «+1», «-1».

Для рассматриваемого примера:

$$X_{1B} = 80 \text{ °С}; \quad x_{1B} = \frac{80 - 70}{10} = +1;$$

$$X_{2B} = 1500 \text{ кПа}; \quad x_{2B} = \frac{1500 - 1250}{250} = +1;$$

$$X_{1H} = 60^\circ\text{C}; \quad x_{1H} = \frac{60 - 70}{10} = -1;$$

$$X_{2H} = 1000 \text{ кПа}; \quad x_{2H} = \frac{1000 - 1250}{250} = -1.$$

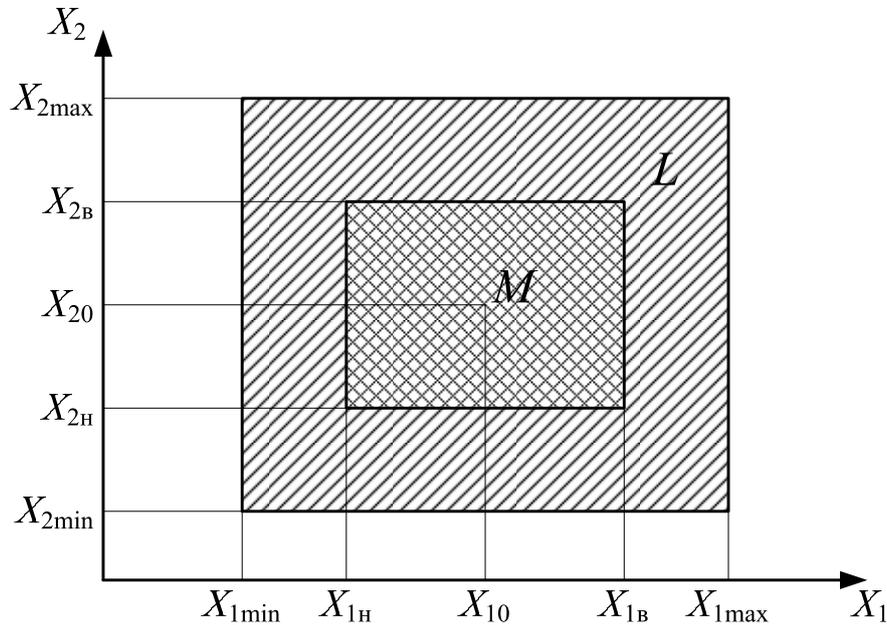


Рис. 3.4. Факторное пространство исследуемого объекта:
L – область определения факторов; *M* – область варьирования факторов

Кодирование факторов, по сути, означает переход от системы координат в натуральных единицах (рис. 3.5, а) к системе координат в кодированной форме (рис. 3.5, б).

В общем случае эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется *полным факторным экспериментом* (ПФЭ). Если каждый фактор варьируется на двух уровнях, то получается полный факторный эксперимент типа 2^n . Для двух факторов ($n = 2$) число опытов $N = 2^2 = 4$ (рис. 3.5).

Каждая точка факторного пространства $(+1, +1)$, $(-1, +1)$, $(-1, -1)$, $(+1, -1)$ – это опыт в исследованиях.

Можно осуществлять планирование эксперимента на трёх уровнях (верхний, средний, нижний), тогда ПФЭ будет типа 3^n и для $n = 2$ общее число опытов будет $N = 3^2 = 9$ (рис. 3.6).

Если k – число уровней, n – число факторов, то количество опытов N равно:

$$N = k^n.$$

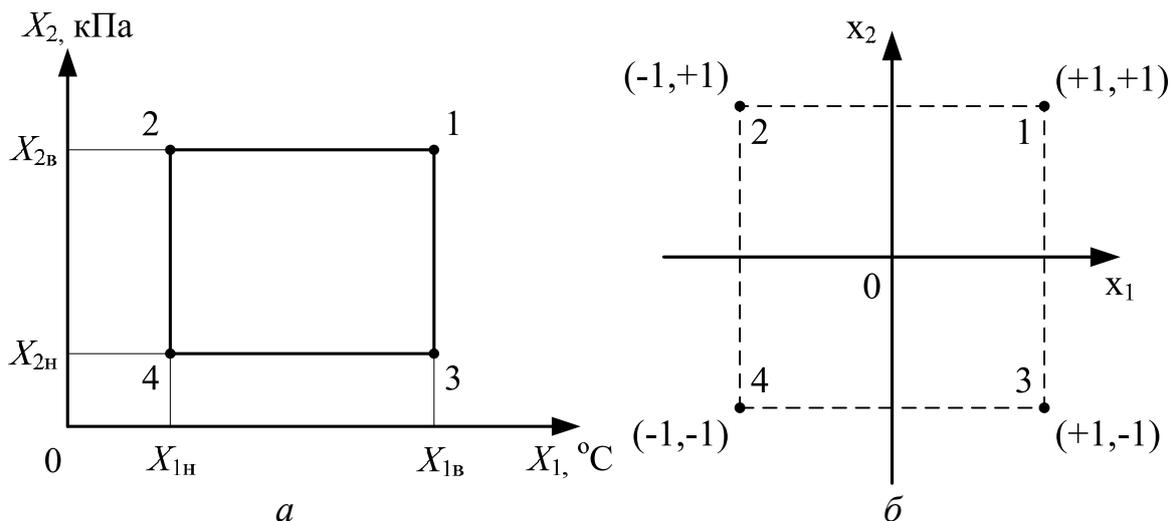


Рис. 3.5. Области варьирования факторов: а – в натуральных единицах; б – в кодированной форме

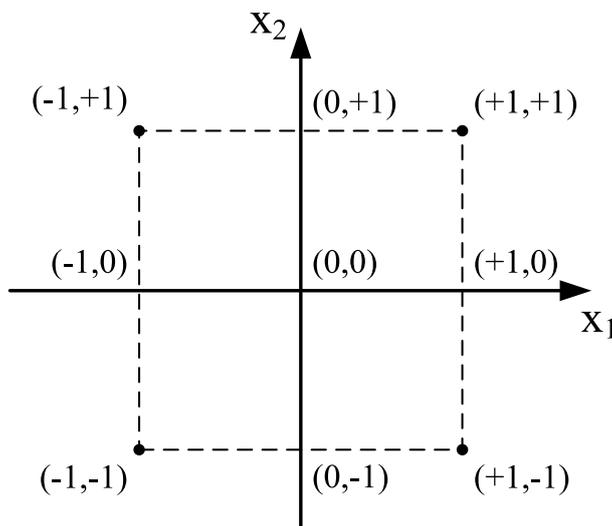


Рис. 3.6. Область варьирования факторов ПФЭ типа 3^2

Правильный выбор нулевых уровней (центра плана) и интервалов варьирования факторов имеет решающее значение для действенности математической модели.

Огромная роль при изучении не исследованных ранее объектов с целью получения их математических моделей принадлежит аналогии и интуиции.

Основное требование к интервалу варьирования состоит в том, чтобы он превышал удвоенную среднюю квадратичную ошибку фактора:

$$2\sigma_{x_j} < \Delta X_j < \frac{(X_{j\max} - X_{j\min})}{2}, \quad (3.4)$$

где σ_{x_j} – средняя квадратичная ошибка фактора X_j , ΔX_j – интервал варьирования, $(X_{j\max} - X_{j\min})$ – область определения фактора.

Это требование связано с тем, что интервал между двумя соседними уровнями должен значимо (неслучайно) влиять на переменную состояния. Обычно интервал варьирования выбирается на основании априорной информации (или интуитивно) и затем уточняется (если он выбран неудачно) после получения математической модели. Цена уточнения ощутима, так как повторение эксперимента резко увеличивает число опытов.

Удачный выбор интервалов варьирования факторов гарантирует получение достоверной математической модели объекта.

3.2.1 Построение матрицы планирования

План, содержащий запись всех комбинаций факторов или их части в кодированной форме, называется *матрицей планирования*.

При построении матриц планирования применяется прием чередования знаков. Для планов первого порядка в первом столбце матрицы планирования знаки не меняются, во втором – меняются поочередно, в третьем они чередуются через два, в четвертом – через 4 и т. д. (по показателям степеней двойки). Вводится столбец x_0 – столбец значений фиктивного фактора, его участие в матрице планирования делает расчеты коэффициентов математической модели более общими (табл. 3.1).

Данные матрицы планирования обладают такими свойствами, которые позволяют считать, что их построение выполнялось оптимально с точки зрения получаемой по результатам реализации матрицы планирования математической модели. Если мы ищем модель в виде уравнения регрессии, то коэффициенты должны быть наилучшими и точность предсказания значений переменной состояния одинакова в любом направлении факторного пространства. Эти требования формулируются как условия ортогональности и ротатабельности.

Из построения матрицы планирования вытекают следствия, которые математически можно представить так:

- свойство симметричности: $\sum_{u=1}^N x_{ju} = 0$, (3.5)

т. е. сумма элементов любого столбца матрицы планирования равна нулю;

- свойство нормировки: $\sum_{u=1}^N x_{ju}^2 = N$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $u = 1, 2, \dots, N$), (3.6)

т. е. сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, где n – число факторов, N – число опытов (или строк матрицы планирования);

- условие ортогональности: $\sum_{u=1}^N x_{iu}x_{ju} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j) \quad (3.7)$

предполагает равенство нулю суммы почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы.

Эти условия легко проверить по табл. 3.1.

Таблица 3.1

Организация матриц планирования ПФЭ от 2^2 до 2^5

№ п/п	Тип эксперимента			Планирование						
				x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	ПФЭ 2^5	ПФЭ 2^3	ПФЭ 2^2	+1	+1	+1	+1	+1	+1	
2				+1	-1	+1	+1	+1	+1	
3				+1	+1	-1	+1	+1	+1	
4				+1	-1	-1	+1	+1	+1	
5			+1	+1	+1	-1	+1	+1		
6			+1	-1	+1	-1	+1	+1		
7			+1	+1	-1	-1	+1	+1		
8			+1	-1	-1	-1	+1	+1		
9		ПФЭ 2^4		+1	+1	+1	+1	-1	+1	
10				+1	-1	+1	+1	-1	+1	
11				+1	+1	-1	+1	-1	+1	
12				+1	-1	-1	+1	-1	+1	
13				+1	+1	+1	-1	-1	+1	
14				+1	-1	+1	-1	-1	+1	
15				+1	+1	-1	-1	-1	+1	
16				+1	-1	-1	-1	-1	+1	
17					+1	+1	+1	+1	+1	-1
18					+1	-1	+1	+1	+1	-1
19					+1	+1	-1	+1	+1	-1
20					+1	-1	-1	+1	+1	-1
21					+1	+1	+1	-1	+1	-1
22					+1	-1	+1	-1	+1	-1
23					+1	+1	-1	-1	+1	-1
24					+1	-1	-1	-1	+1	-1
25					+1	+1	+1	+1	-1	-1
26					+1	-1	+1	+1	-1	-1
27					+1	+1	-1	+1	-1	-1
28					+1	-1	-1	+1	-1	-1
29					+1	+1	+1	-1	-1	-1
30					+1	-1	+1	-1	-1	-1
31					+1	+1	-1	-1	-1	-1
32					+1	-1	-1	-1	-1	-1

Действительно, полный факторный эксперимент типа 2^n является ортогональным. Ортогональные планы ПФЭ (для линейных моделей) имеют свойство – рототабельность.

Последнее предполагает равенство и минимальность дисперсий предсказанных значений переменной состояния для всех точек факторного пространства.

По закону определения ошибки косвенных измерений

$\sigma_{\bar{y}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \beta_i} \right)^2 \sigma_{\beta_i}^2$ для уравнения (3.2) имеем:

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \sigma_{\beta_0}^2 + x_1^2 \sigma_{\beta_1}^2 + \dots + x_n^2 \sigma_{\beta_n}^2, \quad (3.8)$$

где $\sigma_{\beta_i}^2$ – дисперсия коэффициентов модели β_i .

Из условия (3.7) вытекает, что дисперсии коэффициентов регрессии равны между собой. Тогда можно записать:

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \sigma_{\beta_j}^2 \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \quad (3.9)$$

или с учётом того, что $\sum_1^n x_i^2 = \rho^2$, где ρ – радиус сферы:

$$D_{\bar{y}} = D_{\beta_j} (1 + \rho^2) \quad (3.10)$$

– это свойство рототабельности эквивалентно независимости дисперсии выходной переменной от вращения координат в центре плана и оправдано при поиске оптимума градиентными методами.

Достоинства ПФЭ:

- 1) независимость определения коэффициентов уравнения регрессии друг от друга и простота их вычисления;
- 2) одинаковая и минимальная дисперсия коэффициентов уравнения регрессии.

Для рассмотренного нами примера матрица планирования эксперимента для двух факторов на двух уровнях приведена в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Матрица планирования ПФЭ типа 2^2

№ п/п	x_0	План				Параметр оптимизации y
		x_1	X_1	x_2	X_2	
		отн. ед.	$T, ^\circ\text{C}$	отн. ед.	$P, \text{Кпа}$	
1	+1	+1	80	+1	1500	y_1
2	+1	-1	60	+1	1500	y_2
3	+1	+1	80	-1	1000	y_3
4	+1	-1	60	-1	1000	y_4

Трехуровневый план, в котором реализованы все возможные комбинации из n факторов на трех уровнях, представляет собой полный факторный эксперимент типа 3^n , например, для ПФЭ 3^2 имеем (табл. 3.3)

Таблица 3.3

Матрица планирования ПФЭ типа 3^2

№ п/п	x_0	План				Параметр оптимизации y
		x_1	X_1	x_2	X_2	
		отн. ед.	$T, ^\circ\text{C}$	отн. ед.	$P, \text{Кпа}$	
1	+1	+1	80	+1	1500	y_1
2	+1	0	70	+1	1500	y_2
3	+1	-1	60	+1	1500	y_3
4	+1	+1	80	0	1250	y_4
5	+1	0	70	0	1250	y_5
6	+1	-1	60	0	1250	y_6
7	+1	+1	80	-1	1000	y_7
8	+1	0	70	-1	1000	y_8
9	+1	-1	60	-1	1000	y_9

3.2.2 Реализация эксперимента

После построения матрицы планирования приступают непосредственно к эксперименту. Перед экспериментом матрицу планирования представляют в виде, удобном для реализации опытов – составляют так называемую рабочую матрицу планирования, в которой все кодированные значения факторов заменяют натуральными. Заносят время проведения опытов – значения ограничений на уровни факторов и т. д. Поскольку на изменение выходной переменной влияют помехи, план чаще всего реализуют несколько раз, получая m параллельных значений функции отклика на каждой строке матрицы планирования.

Первоначально число m выбирают по результатам предварительного эксперимента или с помощью случайно поставленных опытов, оценивающих их воспроизводимость.

Для того чтобы избежать появления некоторой неслучайной связи между реализациями каждого эксперимента или серии экспериментов, рекомендуется опыты рандомизировать во времени. Здесь рандомизация предполагает случайное расположение или случайную реализацию плана эксперимента.

Рандомизация обычно проводится следующим образом. В таблице случайных чисел из любого столбца выбирают числа в порядке их следования от 1 до N . Если матрица предполагает параллельные опыты, то тогда количество случайных чисел возрастает от 1 до mN , т. е. нумеру-

ются не только строки матрицы, но и параллельные опыты. Каждое число от 1 до N или mN из таблицы случайных чисел берут только один раз (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Результаты рандомизации опытов ПФЭ типа 2^3

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8
Рандомизированные опыты	05	02	03	07	06	01	08	04

3.2.3 Расчет ошибки опыта (дисперсии воспроизводимости)

Если априорные сведения предполагают невысокую воспроизводимость результатов эксперимента, то в матрицу планирования эксперимента включают параллельные опыты, в результате получают экспериментальный материал для последующей обработки (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Матрица ПФЭ типа 2^2 с параллельными опытами

Но- мер опы- та	x_0	Планирова- ние		Результаты наблюдений				Результаты предвари- тельной обработки	
				Параметр оптимизации (функция отклика)					
		x_1	x_2	y_{u1}	y_{u2}	...	y_{um}	\bar{y}_u	D_u^*
1.	+1	+1	+1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1m}	\bar{y}_1	D_1^*
2.	+1	-1	+1	y_{21}	y_{22}	...	y_{2m}	\bar{y}_2	D_2^*
3.	+1	+1	-1	y_{31}	y_{32}	...	y_{3m}	\bar{y}_3	D_3^*
4.	+1	-1	-1	y_{41}	y_{42}	...	y_{4m}	\bar{y}_4	D_4^*

Разброс параметра оптимизации обусловлен наличием ошибки опыта (ошибки воспроизводимости). Ошибка опыта является суммарной величиной, состоящей из ошибок при измерении факторов и параметра оптимизации, а также ошибок при проведении опыта. Знание ошибки воспроизводимости необходимо для анализа данных эксперимента.

Воспроизводимость оценивают по результатам параллельных опытов. Перед расчетом ошибки опыта необходимо убедиться, что рассеяние опытов в каждой точке факторного пространства не превышает некоторой величины. С этой целью рассчитывают построчные дисперсии и проверяют их однородность

$$D_u^* \{y\} = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (y_{uk} - \bar{y}_u)^2. \quad (3.11)$$

Если результат одного из параллельных наблюдений, например, $(m+1)$ -го вызывает сомнения (значительно отличается от остальных), он должен быть проверен и в случае необходимости отброшен.

Проверка при малом числе измерений может быть осуществлена согласно Критерию Романовского. Результат $(m+1)$ -го сомнительного опыта исключается и по остальным m опытам; находятся среднее и дисперсия:

$$\bar{y}_u = \frac{\sum_{k=1}^m y_{uk}}{m}; D_u^* \{y\} = \frac{\sum_{k=1}^m (y_{uk} - \bar{y}_u)^2}{m-1}.$$

Результат $(m+1)$ -го опыта отбрасывается, если

$$y_{m+1} - \bar{y}_u \geq t_{(m-1);\alpha} \sigma_u^* \{y\}. \quad (3.12)$$

Значения $t_{(m-1);\alpha}$ для различных α и m берут из табл. А.1.

Если же $(m+1)$ -й результат не будет признан грубым промахом, его следует включить в расчет, пересчитать среднее и дисперсию с учетом результатов всех $(m+1)$ опытов и в качестве строчной дисперсии использовать именно эту величину, т. е. чтобы среди всех дисперсий не было таких, которые значительно превышали все остальные.

Требование однородности дисперсий является одним из требований регрессионного анализа. Для проверки однородности построчных дисперсий (при равном числе параллельных опытов на каждой строчке матрицы планирования) применяют критерий Кохрена. Согласно критерию Кохрена, образуют отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий и сравнивают с табличным значением критерия:

$$G_p = \frac{D_{u \max}^*}{\sum_{u=1}^N D_u^*} \leq G_T, \quad (3.13)$$

где $D_{u \max}^*$ – максимальная из рассчитанных построчных дисперсий,

$\sum_{u=1}^N D_u^*$ – сумма всех дисперсий по N строкам матрицы планирования, G_T –

табличное значение критерия Кохрена для степеней свободы $\nu_1 = m - 1$ и $\nu_2 = N$ и уровня значимости α (табл. А.3).

Если условие (3.13) выполняется, то гипотеза об однородности дисперсий принимается.

Однородность построчных дисперсий можно проверить и по критерию Фишера. Если

$$F_p = \frac{D_{u \max}^*}{D_{u \min}^*} \leq F_T, \quad (3.14)$$

то построчные дисперсии однородны. Значения F_T для числа степеней свободы ν_{\max} и ν_{\min} и принятого уровня значимости α (обычно $\alpha = 0,05$) берут из таблицы F -распределения (табл. А.4).

Если условия (3.13), (3.14) не выполняются, то одним из решений является увеличение числа параллельных опытов, т. е. еще раз или несколько раз необходимо реализовать матрицу планирования.

Если увеличение m не дает результата, то следует изменить метод контроля функции отклика y , увеличив его точность. Иногда прибегают к масштабированию переменной состояния – вводится некоторая математическая функция от y (например, квадратный корень или логарифм).

При выполнении условий (3.13) либо (3.14) построчные дисперсии усредняют по формуле:

$$D_0^* = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N D_u^* = \frac{1}{N(m-1)} \sum_{u=1}^N \sum_{k=1}^m (y_{uk} - \bar{y}_u)^2. \quad (3.15)$$

Таким образом, получают ошибку опыта (дисперсию воспроизводимости).

3.2.4 Проверка значимости различия средних максимального и минимального значений параметра оптимизации

Реализовав эксперимент и вычислив средние значения откликов для каждой точки плана, нужно проверить, значимо ли отличаются друг от друга средние максимальное и минимальное значения параметра оптимизации \bar{y}_{\max} и \bar{y}_{\min} . Значимость различия двух средних можно проверить с помощью t -критерия (критерия Стьюдента) по формуле

$$t_p = \frac{(\bar{y}_{\max} - \bar{y}_{\min})}{\sigma_0^* \sqrt{1/m_{\max} + 1/m_{\min}}} > t_T, \quad (3.16)$$

если $t_p > t_T$ – то \bar{y}_{\max} и \bar{y}_{\min} значимо отличаются.

Средние значимо отличаются, если расчетное значение t -критерия превосходит табличное (табл. А.1) (для $\nu = m_{\max} + m_{\min}$ степеней свободы и заданного уровня значимости α), σ_0^* – оценка среднеквадратичной ошибки опыта.

Если расчетное значение t_p будет меньше табличного, то с вероятностью $P = 1 - \alpha$ можно считать, что разницы между результатами двух опытов нет.

Если разница между максимальным и минимальным результатами плана статистически незначима, вряд ли удастся получить, сколько-

нибудь ценную информацию, применив к обработке таких практически идентичных данных метод регрессионного анализа.

3.2.5 Расчет коэффициентов уравнения регрессии

Основная задача обработки результатов эксперимента сводится к получению математической модели процесса в общем случае в виде:

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n \beta_{jj} x_j^2.$$

Целью же планов первого порядка является линейная модель вида:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n.$$

Искомая модель представляет собой уравнение регрессии, т. е. при обработке стоит задача определения коэффициентов уравнения регрессии.

При обработке экспериментальных данных, полученных при планировании эксперимента, используют метод наименьших квадратов – эффективный и простой способ получения оценок коэффициентов уравнения регрессии.

При этом предполагают выполнение следующих предпосылок: независимые переменные x_j достаточно точно поддерживаются на определенных уровнях, а наблюдаемые значения отклика $y_1, y_2, \dots, y_N, \dots, y_{N+m}$ по данным N ; $(N \cdot m)$ опытов плана представляют собой независимые и нормально распределенные случайные величины.

Полученный в результате опытов ограниченный статистический материал даёт возможность определить лишь оценки b_0, b_1, \dots, b_n теоретических коэффициентов регрессии $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, справедливых для некоторой гипотетической совокупности, состоящей из всех мыслимых опытов. Тогда линейное уравнение регрессии, полученное на основании N ; $(N \cdot m)$ опытов, запишется следующим образом

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = \sum_{j=0}^n b_j x_j. \quad (3.17)$$

Согласно методу наименьших квадратов находятся такие значения оценок b_j величин β_j , которые минимизируют сумму квадратов отклонений (невязок) ε_u опытных точек от величин, предсказанных регрессионным уравнением (3.17), т. е. минимизирующие функцию:

$$G = \sum_{u=1}^N \varepsilon_u^2 = \sum_{u=1}^N \left(\bar{y}_u - \sum_{j=0}^n b_j x_{uj} \right)^2. \quad (3.18)$$

Условия минимальности для суммы квадратов отклонений (3.18) получают путём приравнивания нулю частных производных от G по параметрам b_j :

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial b_0} = \frac{\partial}{\partial b_0} \left[\sum_{u=1}^N \left(\bar{y}_u - \sum_{j=0}^n b_j x_{uj} \right)^2 \right] = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial b_1} = \frac{\partial}{\partial b_1} \left[\sum_{u=1}^N \left(\bar{y}_u - \sum_{j=0}^n b_j x_{uj} \right)^2 \right] = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial G}{\partial b_n} = \frac{\partial}{\partial b_n} \left[\sum_{u=1}^N \left(\bar{y}_u - \sum_{j=0}^n b_j x_{uj} \right)^2 \right] = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Проведя необходимые преобразования, из (3.19) получают систему нормальных уравнений для определения величин b_j .

Так для уравнения $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ введя x_{u0} – фиктивную переменную, равную единице во всех точках получим:

$$\begin{cases} b_0 \left(\sum_{u=1}^N x_{u0}^2 \right) + b_1 \left(\sum_{u=1}^N x_{u0} x_{u1} \right) = \sum_{u=1}^N x_{u0} y_u, \\ b_0 \left(\sum_{u=1}^N x_{u0} x_{u1} \right) + b_1 \left(\sum_{u=1}^N x_{u1}^2 \right) = \sum_{u=1}^N x_{u1} y_u, \end{cases} \quad (3.20)$$

т. е. выполнение указанной процедуры даёт возможность составить систему, число уравнений которой равно числу неизвестных коэффициентов.

Решение (3.20) при $x_{u0} = 1$ даёт формулы для вычисления коэффициентов уравнения регрессии:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N \bar{y}_u \sum_{u=1}^N x_{u1}^2 - \sum_{u=1}^N x_{u1} \sum_{u=1}^N x_{u1} \bar{y}_u}{N \sum_{u=1}^N x_{u1}^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_{u1} \right)^2}; \quad (3.21)$$

$$b_1 = \frac{N \sum_{u=1}^N x_{u1} \bar{y}_u - \sum_{u=1}^N x_{u1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u}{N \sum_{u=1}^N x_{u1}^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_{u1} \right)^2}. \quad (3.22)$$

Система нормальных уравнений (3.20) имеет интересные особенности. Во-первых, по диагонали левых частей уравнений под знаком

суммы последовательно стоят квадраты независимых переменных (факторов). Во-вторых, относительно этой диагонали наблюдается симметрия. В-третьих, в правой части системы расположены произведения, полученные в результате последовательного умножения столбца (колонки) параметра оптимизации на столбец факторов.

Эти свойства позволили найти очень простой метод составления системы нормальных уравнений для любого числа факторов. Пример плана ПФЭ типа 2^3 и результатов предварительной обработки эксперимента приведен в табл. 3.6.

Первое уравнение системы получают умножением величин из первого столбца x_0 на ту же величину, а затем на все остальные по очереди.

Второе уравнение получают умножением величин из второго столбца на все величины из остальных столбцов по очереди, начиная со столбца x_0 .

Во всех уравнениях системы располагают коэффициенты b_j в одинаковом порядке по возрастанию индекса.

Таблица 3.6

План ПФЭ типа 2^3 и результаты предварительной обработки эксперимента

Номер опыта	x_0	План			Параметр оптимизации y
		x_1	x_2	x_3	\bar{y}
1	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	\bar{y}_1
2	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	\bar{y}_2
3	x_{30}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	\bar{y}_3
...
N	x_{N0}	x_{N1}	x_{N2}	x_{N3}	\bar{y}_N

Система нормальных уравнений, составленная согласно приведенному правилу по плану и результатам эксперимента, представленных в табл. 3.6, принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 \sum_{u=1}^N x_{u0}^2 + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u1} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u2} + b_3 \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u3} = \sum_{u=1}^N x_{u0} \bar{y}_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u0} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u1}^2 + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2} + b_3 \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u3} = \sum_{u=1}^N x_{u1} \bar{y}_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{u2}x_{u0} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u2}x_{u1} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u2}^2 + b_3 \sum_{u=1}^N x_{u2}x_{u3} = \sum_{u=1}^N x_{u2} \bar{y}_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{u3}x_{u0} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u3}x_{u1} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u3}x_{u2} + b_3 \sum_{u=1}^N x_{u3}^2 = \sum_{u=1}^N x_{u3} \bar{y}_u. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Решение системы нормальных уравнений (3.23) позволит найти оценки коэффициентов b_j уравнения регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.

Системы нормальных уравнений для полиномов выше 1 порядка составляются аналогично. При этом нелинейные члены уравнения регрессии рассматриваются как самостоятельные переменные. Например, система нормальных уравнений, составленная для вычисления коэффициентов полинома второго порядка по плану второго порядка и результатам предварительной обработки эксперимента, представленных в табл. 3.7, принимает вид (3.24):

Таблица 3.7

План второго порядка и результаты предварительной обработки эксперимента

Номер опыта	x_0	План		$x_{u1}x_{u2}$	x_{u1}^2	x_{u2}^2	Параметр оптимизации y
		x_{u1}	x_{u2}				\bar{y}_u
1	$1 x_{10}$	x_{11}	x_{12}	$x_{11}x_{12}$	x_{11}^2	x_{12}^2	\bar{y}_1
2	$1 x_{20}$	x_{21}	x_{22}	$x_{21}x_{22}$	x_{21}^2	x_{22}^2	\bar{y}_2
...
...
N	$1x_{N0}$	x_{N1}	x_{N2}	$x_{N1}x_{N2}$	x_{N1}^2	x_{N2}^2	\bar{y}_N

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 \sum_{u=1}^N x_{u0}^2 + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u1} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u2} + b_{12} \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u1}x_{u2} + b_{11} \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u1}^2 + b_{22} \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u2}^2 = \sum_{u=1}^N x_{u0} \bar{y}_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u0} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u1}^2 + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2} + b_{12} \sum_{u=1}^N x_{u1}^2x_{u2} + b_{11} \sum_{u=1}^N x_{u1}^3 + b_{22} \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2}^2 = \sum_{u=1}^N x_{u1} \bar{y}_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{u2}x_{u0} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u2}x_{u1} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u2}^2 + b_{12} \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2}^2 + b_{11} \sum_{u=1}^N x_{u1}^2x_{u2} + b_{22} \sum_{u=1}^N x_{u2}^3 = \sum_{u=1}^N x_{u2} \bar{y}_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2}x_{u0} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u1}^2x_{u2} + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2}^2 + b_{12} \sum_{u=1}^N x_{u1}^2x_{u2}^2 + b_{11} \sum_{u=1}^N x_{u1}^3x_{u2} + b_{22} \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2}^3 = \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2} \bar{y}_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{u1}^2x_{u0} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u1}^3 + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u1}^2x_{u2} + b_{12} \sum_{u=1}^N x_{u1}^3x_{u2} + b_{11} \sum_{u=1}^N x_{u1}^4 + b_{22} \sum_{u=1}^N x_{u1}^2x_{u2}^2 = \sum_{u=1}^N x_{u1}^2 \bar{y}_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_{u2}^2x_{u0} + b_1 \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2}^2 + b_2 \sum_{u=1}^N x_{u2}^3 + b_{12} \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u2}^3 + b_{11} \sum_{u=1}^N x_{u1}^2x_{u2}^2 + b_{22} \sum_{u=1}^N x_{u2}^4 = \sum_{u=1}^N x_{u2}^2 \bar{y}_u. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Решение системы нормальных уравнений (3.24) позволяет найти оценки коэффициентов уравнения регрессии:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

В общем случае, когда по каким-то причинам матрица планирования не ортогональна, коэффициенты уравнения регрессии находят путем решения системы нормальных уравнений, записанной в матричной форме. Исходным материалом для составления системы нормальных уравнений в матричной форме являются план и результаты предварительной обработки эксперимента (табл. 3.8).

Обозначим через \bar{X} матрицу значений факторов, через \bar{Y} – матрицу-столбец опытных значений параметра оптимизации, через \bar{B} – матрицу-столбец коэффициентов регрессии (табл. 3.8).

Таблица 3.8

План и результаты предварительной обработки эксперимента

Номер опыта	\bar{X}					\bar{Y}
	x_{u0}	x_{u1}	x_{u2}	...	x_{un}	y
1	x_{10}	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1
2	x_{20}	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2
...	
N	x_{N0}	x_{N1}	x_{N2}	...	x_{Nn}	y_N

Исходная матрица факторов, согласно табл. 3.8, принимает вид:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{1n} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N0} & x_{N1} & x_{N2} & x_{Nn} \end{pmatrix}.$$

$\bar{X} = [N \times l]$; матрица \bar{X} – прямоугольная,

N – число строк матрицы планирования, $l = n + 1$ – число столбцов;

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} \text{ – матрица столбец опытных значений функций отклика;}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – матрица столбец коэффициентов регрессии.}$$

Расчет коэффициентов уравнения регрессии, записанного в матричной форме:

$$\bar{Y} = \bar{X} \bar{B}, \quad (3.25)$$

осуществляется методом наименьших квадратов.

Пользуясь принципом наименьших квадратов, надо свести матрицу \bar{X} к квадратной матрице порядка $l = n + 1$. Для этого составим транспонированную матрицу значений факторов.

Транспонированной матрицей \bar{X}^T для матрицы \bar{X} размером $N \times l$ называется матрица размера $l \times N$, получаемая из матрицы \bar{X} заменой её строк столбцами, т. е.:

$$\bar{X}^T = \begin{pmatrix} x_{10} x_{20} \dots x_{N0} \\ x_{11} x_{21} \dots x_{N1} \\ x_{12} x_{22} \dots x_{N2} \\ \dots \dots \dots \dots \\ x_{1n} x_{2n} \dots x_{Nn} \end{pmatrix}; \bar{X}^T = [l \times N]. \quad (3.26)$$

Для получения системы нормальных уравнений необходимо иметь $\bar{X}^T \cdot \bar{X}$ и $\bar{X}^T \cdot \bar{Y}$, т. е. нужно \bar{X} -матрицу умножить слева на матрицу, транспонированную к ней и умножить слева \bar{Y} на \bar{X}^T .

$$\begin{aligned}
X^T X &= \begin{vmatrix} x_{10} & x_{20} & \dots & x_{N0} \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{Nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N0} & x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nn} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u0} & \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{u1} & \dots & \sum_{u=1}^N x_{u0}x_{un} \\ \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u0} & \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{u1} & \dots & \sum_{u=1}^N x_{u1}x_{un} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{u=1}^N x_{un}x_{u0} & \sum_{u=1}^N x_{un}x_{u1} & \dots & \sum_{u=1}^N x_{un}x_{un} \end{vmatrix} \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Матрица $\bar{X}^T \cdot \bar{X}$ получила название информационной:

$$\begin{aligned}
X^T Y &= \begin{vmatrix} x_{10}x_{20} \dots x_{N0} \\ x_{11}x_{21} \dots x_{N1} \\ x_{12}x_{22} \dots x_{N2} \\ \dots \dots \dots \\ x_{1n}x_{2n} \dots x_{Nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ Y_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{u=1}^N x_{u0}y_u \\ \sum_{u=1}^N x_{u1}y_u \\ \sum_{u=1}^N x_{u2}y_u \\ \dots \\ \sum_{u=1}^N x_{un}y_u \end{vmatrix}. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

В результате система нормальных уравнений в матричной форме принимает вид:

$$\left(\bar{X}^T \cdot \bar{X} \right) \bar{B} = \bar{X}^T \cdot \bar{Y}. \quad (3.29)$$

Умножив слева обе части матричного уравнения (3.29) на $\left(\bar{X}^T \cdot \bar{X} \right)^{-1}$, получим решение системы нормальных уравнений в общем виде:

$$\left(\bar{X}^T \cdot \bar{X} \right)^{-1} \left(\bar{X}^T \cdot \bar{X} \right) \bar{B} = \left(\bar{X}^T \cdot \bar{X} \right)^{-1} \left(\bar{X}^T \cdot \bar{Y} \right);$$

$$\bar{B} = \left(\bar{X}^T \cdot \bar{X} \right)^{-1} \left(\bar{X}^T \cdot \bar{Y} \right). \quad (3.30)$$

Таким образом, возможность отыскания матрицы коэффициентов регрессии зависит от того, существует ли обратная матрица $\left(\bar{X}^T \cdot \bar{X} \right)^{-1}$.

Свойства ортогональности (3.7) (скалярное произведение всех вектор-столбцов равно нулю), нормировки (3.6) и симметричности (3.5) матрицы планирования ПФЭ типа 2^n резко уменьшают трудности, связанные с расчётом коэффициентов уравнения регрессии.

В самом деле, из условия ортогональности (3.7) $\left[\sum_{u=1}^N x_{ui} x_{uj} = 0 \right]$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n; i \neq j$) следует, что матрица $\bar{X}^T \cdot \bar{X}$ диагональная.

Из условия нормировки (3.6) $\left[\sum_{u=1}^N x_{uj}^2 = N \right]$ ($u = 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, n$) следует, что все диагональные элементы этой матрицы $\bar{X}^T \cdot \bar{X}$ равны числу опытов N (строк матрицы планирования).

Тогда диагональные элементы обратной матрицы $\left(\bar{X}^T \cdot \bar{X} \right)^{-1}$:

$$C_{ii} = \frac{1}{N}. \quad (3.31)$$

С учетом сказанного, решение системы нормальных уравнений, записанной в матричной форме, позволяющее определить матрицу-столбец искоемых коэффициентов уравнения регрессии принимает вид:

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} (X^T Y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{N} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{N} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^N x_{u0} y_u \\ \sum_{u=1}^N x_{u1} y_u \\ \sum_{u=1}^N x_{u2} y_u \\ \dots \\ \sum_{u=1}^N x_{un} y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{u=1}^N x_{u0} y_u}{N} \\ \frac{\sum_{u=1}^N x_{u1} y_u}{N} \\ \frac{\sum_{u=1}^N x_{u2} y_u}{N} \\ \dots \\ \frac{\sum_{u=1}^N x_{un} y_u}{N} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Из (3.32) следует, что коэффициенты уравнения регрессии (3.17) определяются независимо друг от друга по формуле:

$$b_j = \frac{\sum_{u=1}^N x_{uj} y_u}{N}. \quad (3.33)$$

В качестве примера рассчитаем коэффициенты уравнения регрессии $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$. Для этого составим план ПФЭ типа 2^2 , проведем эксперимент и его предварительную обработку. Результаты представлены в табл. 3.9.

Таблица 3.9

План ПФЭ типа 2^2 и результаты предварительной обработки эксперимента

Номер опыта	x_0	Планирование		Параметр оптимизации y
		x_1	x_2	
1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	y_2
3	+1	+1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	y_4

По табл. 3.9 составляются матрица факторов \bar{X} и матрица-столбец опытных значений функции отклика \bar{Y} :

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \bar{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

Для получения системы нормальных уравнений находят произведения матриц $\bar{X}^T \cdot \bar{X}$ и $\bar{X}^T \cdot \bar{Y}$:

$$\bar{X}^T \bar{X} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\bar{X}^T \bar{Y} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^4 x_{u0} y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{u1} y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{u2} y_u \end{bmatrix}.$$

Тогда система нормальных уравнений (3.29) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^4 x_{u0}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{u1}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{u2}y_u \end{bmatrix}.$$

Решение этой системы, согласно (3.30), запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sum_{u=1}^4 x_{u0}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{u1}y_u \\ \sum_{u=1}^4 x_{u2}y_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{u=1}^4 x_{u0}y_u}{4} \\ \frac{\sum_{u=1}^4 x_{u1}y_u}{4} \\ \frac{\sum_{u=1}^4 x_{u2}y_u}{4} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, b_0 равен среднему арифметическому всех значений выходной переменной, b_1 и b_2 находят как среднее алгебраической суммы y_u со знаками столбца x_1 или x_2 . Коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга:

$$b_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}; b_1 = \frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{4}; b_2 = \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4}.$$

Следовательно, любой коэффициент b_j уравнения регрессии (3.17) определяется скалярным произведением столбца $\bar{Y} = \{y_u\}$ на соответствующий столбец $\bar{X}_j = \{x_{uj}\}$ и делением его на число опытов в матрице планирования N (3.33), т. е. коэффициенты уравнения регрессии определяются независимо друг от друга. Для расчета b_0 по формуле (3.33) в матрицу планирования вводят вектор-столбец фиктивной переменной $\bar{X}_0 = \{x_{u0}\}$, которая принимает во всех опытах значение +1.

Коэффициенты при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, и наоборот. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

Если коэффициенты уравнения регрессии рассчитываются по матрице планирования с m параллельными опытами, то:

$$b_j = \frac{\sum_{u=1}^N x_{uj} \bar{y}_u}{N} \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad (3.34)$$

где $\bar{y}_u = \frac{\sum_{k=1}^m y_{u_k}}{m}$ – среднее значение по параллельным опытам u -й строки матрицы планирования; формулу (3.34) можно переписать в виде:

$$b_j = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{k=1}^m x_{uj} y_{u_k}}{Nm}. \quad (3.35)$$

3.2.6 Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии

Очевидно, что один фактор больше влияет на параметр оптимизации, другой – меньше. Для оценки этого влияния используют проверку значимости каждого коэффициента по критерию Стьюдента.

Для этого находят дисперсии коэффициентов уравнения регрессии по формуле:

$$D_{b_j}^* = \frac{D_0^*}{Nm}. \quad (3.36)$$

Для ПФЭ дисперсии коэффициентов регрессии равны и определяются независимо друг от друга, зависят только от ошибки опыта D_0^* , числа строк матрицы планирования N и числа параллельных опытов на каждой строчке матрицы планирования m .

Оценку значимости коэффициентов уравнения регрессии осуществляют с помощью критериального соотношения:

$$t_{jp} = \frac{|b_j|}{\sigma_{b_j}^*} > t_{\Gamma}; \quad \sigma_{b_j}^* = \sqrt{D_{b_j}^*}, \quad (3.37)$$

где t_{Γ} – табличное значение квантиля распределения Стьюдента (табл. А.1), которое находят по числу степеней свободы $\nu_0 = N(m - 1)$ и уровню значимости α ; $\sigma_{b_j}^*$ – оценка среднеквадратичного отклонения коэффициента b_j . Если условие (3.37) выполняется, то b_j – признается значимым (гипотеза о значимости b_j принимается).

Для проверки значимости коэффициентов уравнения регрессии можно также использовать доверительный интервал Δb_j , который одинаков для всех b_j вследствие равенства $\sigma_{b_j}^*$ для всех коэффициентов:

$$\Delta b_j = \pm t_T \sigma_{b_j}^*, \quad (3.38)$$

(табличный квантиль распределения Стьюдента t_T находят, как и в первом случае, по числу степеней свободы $\nu_0 = N(m - 1)$ и уровню значимости α , либо доверительной вероятности $\beta = 1 - \alpha$ (табл. А.1).

Тогда b_j признаётся значимым, если выполняется условие:

$$|b_j| > |\Delta b_j|. \quad (3.39)$$

Если для какого-то коэффициента условия (3.37), (3.39) не выполняются, то соответствующий фактор можно признать незначимым и исключить его из уравнения регрессии.

Однако лучше быть осторожным и проверить, не является полученная незначимость фактора следствием неудачно выбранного интервала варьирования: возможно, он был выбран малым.

Поэтому лучше повторить эксперимент при расширенном интервале варьирования для исследуемого фактора.

Если фактор остался незначимым после повторения эксперимента и всех необходимых расчетов, то его (или их) отбрасывают и переходят к оценке адекватности полученной математической модели.

3.2.7 Проверка адекватности модели (уравнения регрессии)

Проверку адекватности линейного уравнения регрессии можно провести сравнением двух дисперсий – одна показывает рассеяние средних опытных данных параметра оптимизации \bar{y}_u относительно предсказанных уравнением регрессии \hat{y}_u . Эта дисперсия называется дисперсией адекватности и рассчитывается по формуле:

$$D_{ад}^* = \frac{m}{N - l} \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2, \quad (3.40)$$

где m – число параллельных опытов, N – число строк матрицы планирования, l – число членов в уравнении регрессии, оставшихся после оценки значимости его коэффициентов.

Вторая (из двух сравниваемых) – дисперсия воспроизводимости (ошибка опыта), вычисленная по формуле (3.15).

Адекватность модели проверяется по критерию Фишера.

Если выполняется условие:

$$F_p = \frac{D_{ад}^*}{D_0^*} < F_T, \quad (3.41)$$

где F_T – табличное значение квантиля F -распределения (табл. А.4) для степеней свободы $\nu_{ад} = N - l$; $\nu_0 = N(m - 1)$ и заданного уровня значимости – α ,

то уравнение регрессии признается адекватным, т. к. при этом рассеяние экспериментальных данных параметра оптимизации относительно уравнения регрессии того же порядка, что и рассеяние, вызванное случайными изменениями в объекте исследования (ошибка опыта).

При расчете F_p предполагается, что $D_{ад}^* > D_0^*$. Однако на практике бывает, что $D_{ад}^* \leq D_0^*$, тогда вывод об адекватности модели может быть сделан без проверки условия (3.41).

При невыполнении условия (3.41), т. е. при неадекватности построенной модели:

- 1) включают в план эксперимента новый (-ые) фактор (-ы);
- 2) уменьшают интервалы варьирования факторов и повторяют эксперимент;
- 3) принимают другие решения.

3.2.8 Расчет коэффициентов взаимодействия факторов по планам ПФЭ

Как мы говорили ранее, цель полного факторного эксперимента первого порядка состоит в получении адекватной линейной модели, которую предполагается использовать для оптимизации объекта исследования.

Оказывается, план ПФЭ типа 2^n позволяет достаточно просто рассчитать и коэффициенты при парных взаимодействиях факторов, т. е. получать более сложную нелинейную модель.

Для нахождения коэффициентов при взаимодействиях факторов план ПФЭ типа 2^n дополняют столбцами, представляющими собой произведения столбцов соответствующих факторов. Для ПФЭ типа 2^2 матрица планирования с учетом эффекта взаимодействия представлена табл. 3.10.

Таблица 3.10

Матрица планирования ПФЭ типа 2^2 с учетом взаимодействия факторов и результаты предварительной обработки эксперимента

Номер опыта	x_0	План		x_1x_2	Функция отклика \bar{y}
		x_1	x_2		
1	+1	+1	+1	+1	\bar{y}_1
2	+1	-1	+1	-1	\bar{y}_2
3	+1	+1	-1	-1	\bar{y}_3
4	+1	-1	-1	+1	\bar{y}_4

С ее помощью могут быть рассчитаны коэффициенты уравнения:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Коэффициенты b_{ij} рассчитываются по формуле аналогично формуле (3.34):

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N (x_{ui} x_{uj}) \bar{y}_u}{N}, \quad (i \neq j) \quad (3.42)$$

поскольку свойство ортогональности матрицы планирования при добавлении к ней столбцов $x_i x_j$ не изменяется.

Таким образом, с помощью ПФЭ типа 2^n может быть получена математическая модель вида:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j. \quad (3.43)$$

3.2.9 Полный факторный эксперимент при разном числе параллельных опытов

На практике иногда невозможно выдержать одинаковое число параллельных опытов по каждой строке матрицы планирования. Это происходит либо из-за случайных грубых нарушений условий эксперимента, когда опыт признается неудачным, а повторить его по каким-либо причинам нельзя, либо вследствие неуверенности экспериментатора в точности опыта.

Последовательность обработки результатов эксперимента при неравном числе параллельных опытов не нарушается. Однако изменяются расчетные формулы.

Построчная дисперсия вместо (3.11) рассчитывается по формуле:

$$D_u^* \{y\} = \frac{\sum_{k=1}^{m_u} (y_{uk} - \bar{y}_u)^2}{m_u - 1}, \quad (3.44)$$

где m_u – число параллельных опытов u -строки матрицы планирования.

При неравном числе параллельных опытов для проверки однородности дисперсий применяется критерий Бартлета.

Для этого рассчитывают величину χ_p^2 :

$$\chi_p^2 = \frac{1}{C} \left(\nu \lg D_0^* - \sum_{u=1}^N \nu_u \lg D_u^* \right), \quad (3.45)$$

где $C = 0,4343 \left\{ 1 + \frac{1}{3(N-1)} \left[\left(\sum_{u=1}^N \frac{1}{\nu_u} \right) - \frac{1}{\nu} \right] \right\}$, $\nu = \sum_{u=1}^N \nu_u$ – число степеней свободы, N – число сравниваемых дисперсий (здесь их количество равно числу строк матрицы планирования).

Если выполняется неравенство:

$$\chi_p^2 < \chi_T^2, \quad (3.46)$$

где χ_T^2 – табличное значение квантиля «хи-квадрат» распределения (табл. А.2) для числа степеней свободы $\nu = \sum_{u=1}^N \nu_u$ и заданного уровня значимости α), то дисперсии признаются однородными.

Для проверки однородности дисперсий при разном числе параллельных опытов можно также использовать критерий Фишера. Для этого определяют отношение максимальной построчной дисперсии к минимальной:

$$F_p = \frac{D_{u \max}^*}{D_{u \min}^*} < F_T, \quad (3.47)$$

где F_T – табличное значение квантиля F -распределения (табл. А.4) для степеней свободы $\nu_{\max} = m_{u \max} - 1$; $\nu_{\min} = m_{u \min} - 1$, а также заданного уровня значимости – α .

При выполнении условия (3.47) гипотеза об однородности дисперсий принимается.

При расчете ошибки опыта (дисперсии воспроизводимости) для усреднения построчных дисперсий используют средневзвешенные значения дисперсий, взятые с учетом числа степеней свободы ν_u для строки матрицы планирования:

$$D_0^* = \frac{\nu_1 D_1^* + \nu_2 D_2^* + \dots + \nu_N D_N^*}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_N} = \frac{\sum_{u=1}^N \nu_u D_u^*}{\sum_{u=1}^N \nu_u}, \quad (3.48)$$

$$\nu_1 = m_1 - 1; \nu_2 = m_2 - 1; \dots; \nu_u = m_u - 1.$$

Если какой-либо опыт из N будет полностью отброшен (не использована хотя бы одна из строк матрицы планирования), то вследствие неортогональности матрицы планирования коэффициенты регрессии нельзя рассчитывать по формулам (3.34). В этом случае для определения коэффициентов уравнения регрессии b_j необходимо решать систему нормальных уравнений (3.29), общее решение которой имеет вид (3.30).

Оценку значимости коэффициентов уравнения регрессии и в этом случае осуществляют с помощью критериальных соотношений (3.37) либо (3.39).

Проверка адекватности уравнения регрессии, также как и раньше, проводится по критерию Фишера (3.41).

Но при этом дисперсию адекватности рассчитывают по формуле:

$$D_{\text{ад}}^* = \frac{1}{N - l} \sum_1^N m_u (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2. \quad (3.49)$$

3.2.10 Полный факторный эксперимент с параллельными опытами в одной точке факторного пространства

Часто экспериментатору известна заранее хорошая воспроизводимость опытов на объекте исследования, что позволяет ему не проводить проверку однородности дисперсий во всех точках факторного пространства. Такая априорная информация резко сокращает число опытов, поскольку не надо повторять опыты каждой строки матрицы планирования эксперимента.

В таком случае для расчета ошибки опыта (дисперсии воспроизводимости) достаточно поставить несколько параллельных опытов в одной из точек факторного пространства. Обычно такой точкой принимают центр плана, где реализуется 3-4 опыта, и по ним D_0^* оценивается по формуле:

$$D_0^* = \frac{\sum_{k=1}^{m_0} (y_{0k} - \bar{y}_0)^2}{m_0 - 1}, \quad (3.50)$$

(индекс «0» означает центр плана),

где y_{0k} – значения параметра оптимизации в центре плана в k -ом опыте,

\bar{y}_0 – среднее значение параметра оптимизации в центре плана,

m_0 – число параллельных опытов в центре плана.

В остальном – алгоритм расчета ПФЭ типа 2^n не изменяется.

3.3 Дробный факторный эксперимент

Количество опытов в ПФЭ типа 2^n значительно превосходит число определяемых коэффициентов линейной модели ($2^6 = 64$; $2^7 = 128$ и т. д.).

Другими словами, ПФЭ обладает большой избыточностью опытов для построения линейной модели. Как правило, при числе независимых факторов $n > 4$ ПФЭ использовать неэффективно из-за большого числа опытов, поэтому в случае линейной математической модели:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$$

можно сократить число опытов, применяя дробный факторный эксперимент ДФЭ или так называемую дробную реплику.

Чтобы дробный факторный эксперимент (дробная реплика) представлял собой ортогональный план, следует брать полный факторный эксперимент для меньшего числа факторов. Число опытов при этом должно быть больше числа неизвестных коэффициентов в уравнении регрессии.

ДФЭ представляет собой некоторую часть (1/2, 1/4, 1/8 и т. д.) от полного факторного эксперимента. Дробный факторный эксперимент, который используется для сокращения опытов в 2^p раз, где $p = 1, 2, 3, 4, \dots$ называется *регулярным*. Он позволяет производить расчет коэффициен-

тов уравнения регрессии также просто, как и в случае полного факторного эксперимента.

Сокращение числа опытов не проходит бесследно: появляется корреляция между некоторыми столбцами матрицы планирования. Это обстоятельство не позволяет отдельно оценивать коэффициенты при факторах и коэффициенты при взаимодействиях факторов, получаются так называемые смешанные оценки.

Рассмотрим идею дробного факторного эксперимента на конкретном примере. Предположим, что необходимо построить линейную регрессионную модель объекта, на выходную координату которого влияют три независимых фактора:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (3.51)$$

Можно использовать план полного факторного эксперимента типа 2^3 с 8 опытами.

Но ограничимся 1/2 частью этого плана, т. е. четырьмя опытами, для чего столбец произведения факторов x_1x_2 плана ПФЭ 2^2 приравняем третьему фактору x_3 (табл. 3.11).

Таблица 3.11
1/2 полного факторного эксперимента типа 2^3

Номер опыта	x_0	План			Параметр оптимизации y_u
		x_1	x_2	$x_3 = x_1x_2$	
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	y_4

Такой сокращенный план – половина ПФЭ 2^3 – носит название *полуреплики* от ПФЭ 2^3 .

По данному плану можно оценить коэффициенты уравнения регрессии $\beta_0; \beta_1; \beta_2; \beta_3$. Но при этом оценки коэффициентов регрессии будут смешаны с парными взаимодействиями:

$$\begin{cases} b_1' \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}, \\ b_2' \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}, \\ b_3' \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}, \\ b_0' \rightarrow \beta_0 + \beta_{123}, \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\hat{y} = b_0' + b_1'x_1 + b_2'x_2 + b_3'x_3.$$

Эти эффекты не могут быть отдельно оценены в планировании, состоящем всего из четырех опытов, т. к. в данном случае неразличимы столбцы для отдельных факторов и парных произведений. Так, можно убедиться, что элементы столбца произведения x_1x_3 в точности равны элементам столбца x_2 . Таким образом, сокращение числа опытов приводит к получению смешанных оценок для коэффициентов.

Можно реализовать и другую полуреплику, где принято $x_3 = -x_1x_2$ (табл. 3.12).

Таблица 3.12

Вторая полуреплика от ПФЭ типа 2^3

Номер опыта	x_0	План			Параметр оптимизации y
		x_1	x_2	$x_3 = -x_1x_2$	
1	+1	+1	+1	-1	y_1
2	+1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	-1	-1	-1	y_4

Пользуясь этой матрицей, можно получить смешанные оценки коэффициентов уравнения регрессии:

$$\begin{cases} b_1'' \rightarrow \beta_1 - \beta_{23}, \\ b_2'' \rightarrow \beta_2 - \beta_{13}, \\ b_3'' \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}, \\ b_0'' \rightarrow \beta_0 - \beta_{123}, \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\hat{y} = b_0'' + b_1''x_1 + b_2''x_2 + b_3''x_3.$$

Объединив матрицы (табл. 3.11 и табл. 3.12), получим план ПФЭ типа 2^3 , в котором линейные эффекты определяются отдельно. Действительно, взяв среднее из сумм и разностей для первой и второй системы смешанных оценок (3.52), (3.53), получим несмешанные оценки:

$$b_1 = \frac{b_1' + b_1''}{2} \rightarrow \beta_1; \quad b_2 = \frac{b_2' + b_2''}{2} \rightarrow \beta_2 \text{ и т. д.} \quad (3.54)$$

Из приведенного примера видно, что матрицы ПФЭ при создании ДФЭ делятся на части не произвольно, а так, чтобы свойство ортогональности сохранялось и при дробном факторном эксперименте.

Для обозначения дробных факторных экспериментов, в которых p факторов приравнены к эффектам взаимодействия, принято пользоваться условным обозначением 2^{n-p} . Так, полуреплика от ПФЭ типа 2^6 , т. е. ДФЭ типа 1/2 ПФЭ 2^6 запишется как ДФЭ типа 2^{6-1} ; число опытов при

этом будет равно 32, число факторов – шести. Основные показатели дробных реплик приведены в табл. 3.13.

Преимущество ДФЭ по числу опытов очевидно. При умелой же организации дробных реплик удастся получить результаты не хуже, чем при ПФЭ.

Однако с ростом числа факторов быстро увеличивается число реплик различной дробности. Какие же из них выбирать?

Таблица 3.13

Основные показатели дробных реплик

Количество факторов	ДФЭ (дробная реплика)	Условное обозначение ДФЭ	Количество опытов ДФЭ	Количество опытов ПФЭ
3	$\frac{1}{2}$ от 2^3	2^{3-1}	4	8
4	$\frac{1}{2}$ от 2^4	2^{4-1}	8	16
5	$\frac{1}{4}$ от 2^5	2^{5-2}	8	32
6	$\frac{1}{8}$ от 2^6	2^{6-3}	8	64
7	$\frac{1}{16}$ от 2^7	2^{7-4}	8	128
5	$\frac{1}{2}$ от 2^5	2^{5-1}	16	32
6	$\frac{1}{4}$ от 2^6	2^{6-2}	16	64
7	$\frac{1}{8}$ от 2^7	2^{7-3}	16	128
8	$\frac{1}{16}$ от 2^8	2^{8-4}	16	256
9	$\frac{1}{32}$ от 2^9	2^{9-5}	16	512
10	$\frac{1}{64}$ от 2^{10}	2^{10-6}	16	1024

При построении дробных факторных экспериментов используют следующее правило: для сокращения числа опытов при введении в планирование нового фактора нужно поместить этот фактор в вектор-столбец матрицы планирования ПФЭ, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь. Т. е. априорные сведения о взаимодействии

ях в этом смысле весьма полезны экспериментатору. Реплики, у которых коэффициенты при факторах смешаны с взаимодействиями наивысшего порядка, являются наиболее эффективными, т. к. вероятность их значимости мала.

Для построения дробных факторных экспериментов (дробных реплик) используют специальные алгебраические соотношения, облегчающие выявление смешанных эффектов. Они носят названия генерирующих соотношений, определяющих контрастов.

Генерирующим называется соотношение, которое показывает, какое из взаимодействий заменено в матрице планирования новым фактором.

Так, рассмотренное выше планирование типа 2^{3-1} задавалось одним из следующих генерирующих соотношений:

$$x_3 = x_1x_2;$$

$$x_3 = -x_1x_2.$$

Умножим генерирующее соотношение для ДФЭ типа 2^{3-1} на x_3 :

$$x_3^2 = x_1x_2x_3, \quad x_3^2 = -x_1x_2x_3,$$

$$1 = x_1x_2x_3, \quad 1 = -x_1x_2x_3.$$

Это и есть определяющие контрасты – соотношения, которые задают элементы первого столбца матрицы планирования.

Определяющий контраст нужен, чтобы найти соотношения, задающие все смешанные оценки для данной дробной реплики. Для этого умножают определяющий контраст на каждый фактор.

В рассматриваемом примере для первой полуреплики от плана 2^3 смешанные оценки коэффициентов регрессии задаются следующими соотношениями:

$$\text{Определяющий контраст: } 1 = x_1x_2x_3.$$

Тогда

$$x_1 = x_1x_1x_2x_3 = x_2x_3,$$

$$x_2 = x_2x_1x_2x_3 = x_1x_3,$$

$$x_3 = x_3x_1x_2x_3 = x_1x_2,$$

что соответствует оценкам:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23},$$

$$b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13},$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Для второй полуреплики определяющий контраст: $1 = -x_1x_2x_3$.

Последовательно умножая левую и правые части определяющего контраста на каждый из факторов получим:

$$x_1 = -x_2x_3, b_1 \rightarrow \beta_1 - \beta_{23},$$

$$x_2 = -x_1x_3, b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{13},$$

$$x_3 = -x_1x_2, b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}.$$

Эффективность системы смешивания факторов и взаимодействий факторов определяется разрешающей способностью матрицы. Она будет максимальной, если линейные эффекты смешаны с наибольшими эффектами взаимодействия по числу факторов, входящих в него.

Так, при ДФЭ типа 2^{4-1} возможны восемь решений:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1. x_4 = x_1x_2, & 5. x_4 = x_1x_3, \\ 2. x_4 = -x_1x_2, & 6. x_4 = -x_1x_3, \\ 3. x_4 = x_2x_3, & 7. x_4 = x_1x_2x_3, \\ 4. x_4 = -x_2x_3, & 8. x_4 = -x_1x_2x_3. \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Наибольшая разрешающая способность у реплик 7 и 8. Они называются главными.

При наличии априорной информации о значимости взаимодействий факторов выбор ясен – выбирают столбец с менее значимыми взаимодействиями. Если этих сведений нет, то выбирают реплику с наибольшей разрешающей способностью, т. к. тройные взаимодействия обычно менее важны, чем двойные.

Т. е. для задачи с четырьмя факторами ($n = 4$) в качестве генерирующего соотношения можно выбрать: $x_4 = x_1x_2x_3$.

Тогда матрица планирования примет вид, приведенный в табл. 3.14.

Таблица 3.14

ДФЭ типа 2^{4-1} с генерирующим соотношением $x_4 = x_1x_2x_3$

Номер опыта	x_0	План				Параметр оптимизации y
		x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1x_2x_3$	
1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	+1	-1	y_2
3	+1	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	+1	y_4
5	+1	+1	+1	-1	-1	y_5
6	+1	-1	+1	-1	+1	y_6
7	+1	+1	-1	-1	+1	y_7
8	+1	-1	-1	-1	-1	y_8

Этот план содержит только половину опытов ПФЭ и носит название *полуреплики* (в данном случае полуреплики от ПФЭ типа 2^4).

Воспользовавшись определяющим контрастом $1 = x_1x_2x_3x_4$, получим систему совместных оценок:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^2x_2x_3x_4 = x_2x_3x_4, \\ x_2 = x_1x_3x_4, \\ x_3 = x_1x_2x_4, \\ x_4 = x_1x_2x_3, \\ x_1x_2 = x_3x_4, \\ x_1x_3 = x_2x_4, \\ x_1x_4 = x_2x_3. \end{cases} \quad (3.56)$$

Соотношения (3.56) указывают на равенство столбцов в матрице, например, столбцов x_1 и $x_2x_3x_4$, поэтому:

$$\begin{aligned} b_1 &\rightarrow \beta_1 + \beta_{234}, & b_{12} &\rightarrow \beta_{12} + \beta_{34}, \\ b_2 &\rightarrow \beta_2 + \beta_{134}, & b_{13} &\rightarrow \beta_{13} + \beta_{24}, \\ b_3 &\rightarrow \beta_3 + \beta_{124}, & b_{14} &\rightarrow \beta_{14} + \beta_{23}, \\ b_4 &\rightarrow \beta_4 + \beta_{123}. \end{aligned}$$

В реальных задачах тройные взаимодействия бывают равны нулю значительно чаще, чем двойные. Значит, для линейных объектов следует брать в качестве генерирующего соотношение с наибольшими эффектами взаимодействия по числу факторов, входящих в него, тогда линейные коэффициенты являются практически несмешанными оценками, а коэффициенты при двойных взаимодействиях – смешанными оценками.

Мы рассмотрели основные идеи организации дробных реплик. Каждая конкретная задача ставит свои условия для образования дробных реплик, поэтому общей теории синтеза планов дробных факторных экспериментов пока не существует.

Расчет коэффициентов уравнения регрессии и исследование уравнения регрессии при использовании дробного факторного эксперимента не отличается от последовательности, изложенной выше при рассмотрении полного факторного эксперимента.

3.4 Алгоритм построения статической модели исследуемого объекта управления с использованием планов полного и дробного факторных экспериментов

Алгоритм построения статической модели исследуемого объекта с использованием методов планирования эксперимента включает следующие этапы:

- 1) выбор выходной координаты (переменной состояния, функции отклика, параметра оптимизации);
- 2) выбор факторов;
- 3) оценка области определения факторов;
- 4) выбор нулевых уровней факторов;
- 5) выбор интервалов варьирования факторов;
- 6) построение матрицы планирования эксперимента;
- 7) проведение эксперимента;
- 8) расчет средних значений выходной координаты (при проведении параллельных опытов);
- 9) расчет построчных дисперсий;
- 10) проверка однородности построчных дисперсий;
- 11) расчет ошибки опыта (дисперсии воспроизводимости);
- 12) проверка значимости различия \bar{y}_{\max} и \bar{y}_{\min} ;
- 13) расчет коэффициентов уравнения регрессии;
- 14) проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии;
- 15) проверка адекватности уравнения регрессии;
- 16) принятие решения об использовании модели.

На рис. 3.7 проиллюстрированы ситуации принятия решений по результатам планов ПФЭ и ДФЭ.

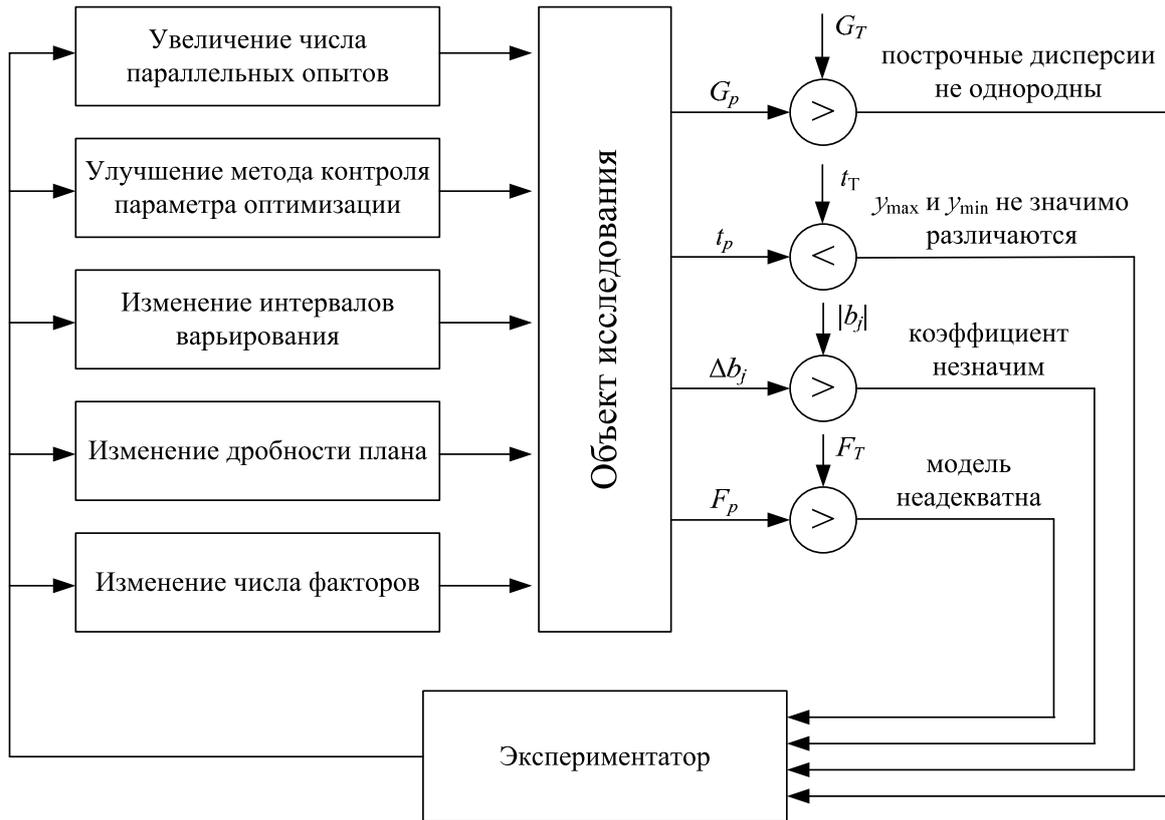


Рис. 3.7. Ситуации принятия решений по результатам планов ПФЭ и ДФЭ

3.5 Планы второго порядка

После достижения области оптимума перед исследователем встает задача детального изучения поверхности отклика. Описать область оптимума линейным уравнением регрессии не удастся из-за значимости эффектов взаимодействия факторов и квадратичных эффектов.

Поэтому область оптимума описывается полиномами более высоких порядков, среди которых самые распространенные уравнения второго порядка:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{\substack{j,i=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_1^n b_{jj} x_j^2. \quad (3.57)$$

Коэффициенты этого полинома невозможно рассчитать с помощью ПФЭ типа 2^n , т. к. число опытов в его матрице планирования меньше количества коэффициентов уравнения (3.57).

Для нахождения коэффициентов уравнения (3.57) нужны планы, в которых каждый фактор принимал хотя бы три разных значения.

Однако полный факторный эксперимент типа 3^n содержит избыточное число опытов по сравнению с количеством искомых коэффициентов уравнения регрессии (3.57).

Сократить число опытов можно, если воспользоваться так называемыми композиционными или последовательными планами, предложенными Боксом и Уилсоном. «Ядро» таких планов составляет ПФЭ типа 2^n (при $n < 5$ или дробная реплика от него при $n \geq 5$); к ядру добавляются т. н. «звездные» точки, расположенные на координатных осях факторного пространства $(\pm\alpha, 0, \dots, 0); (0, \pm\alpha, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \pm\alpha)$, где α – расстояние от центра плана до «звездной» точки, так называемое «звездное» плечо; и эксперименты в центре плана – m_0 .

Общее число опытов в матрице композиционного плана для n факторов составит:

$$N = 2^n + 2n + m_0. \quad (3.58)$$

В табл. 3.15 приводится сравнение количества опытов N и числа степеней свободы $\nu = N - l$ (l – число коэффициентов в уравнении регрессии) для ПФЭ типа 3^n и композиционного плана (3.58) при $m_0 = 1$.

Таблица 3.15

Сравнение количества опытов и числа степеней свободы для ПФЭ типа 3^n и композиционного поля

Число факторов n	ПФЭ $N = 3^n$	Числ. коэфф. l	Число степеней свободы, $\nu = N - l$	Композиционный план, N	Число степеней свободы, $\nu = N - l$
2	9	6	3	9	3
3	27	10	17	15	5
4	81	15	66	25	10
5	243	21	222	43	22
5*	243	21	222	27	6

* – с полуреplikой.

Рассмотрим построение композиционных планов при $n = 2$ (рис. 3.8).

Точки 1, 2, 3, 4 образуют ПФЭ 2^2 , точки 5, 6, 7, 8 – «звездные» точки с координатами $(\pm\alpha, 0)$ и $(0, \pm\alpha)$. Координаты m_0 опытов в центре плана нулевые – $(0, 0)$. Величина звездного плеча α и количество опытов в центре плана m_0 зависит от выбранного плана.

Композиционные планы легко приводятся к ортогональным выбором звездного плеча α . На количество опытов в центре плана m_0 не накладывается никаких ограничений. Оно обычно принимается равным единице.

Рассмотрим матрицу композиционного планирования для $n = 3$, положив $m_0 = 1$ (табл. 3.16).

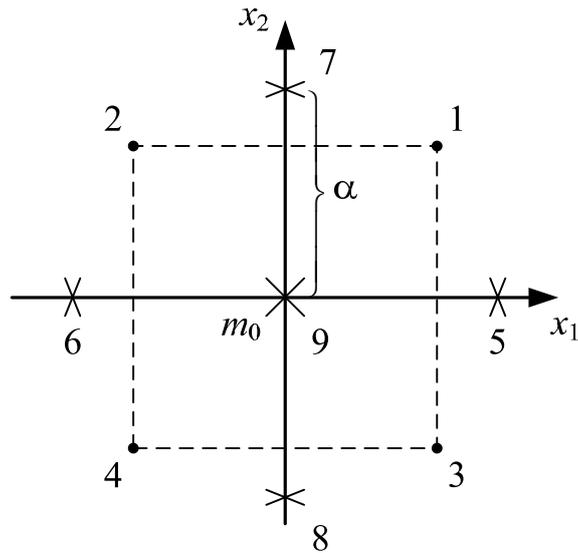


Рис. 3.8. Схема построения композиционного плана

Таблица 3.16

Матрица планирования для композиционного плана при $n = 3$

N	План										
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	y_2
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_5
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	+1	y_6
7	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	y_7
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8
9	+1	$+\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	0	y_9
10	+1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	0	y_{10}
11	+1	0	$+\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	y_{11}
12	+1	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	0	y_{12}
13	+1	0	0	$+\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	y_{13}
14	+1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2	y_{14}
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y_{15}

В общем виде матрица (табл. 3.16) неортогональна, т. к.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{u=1}^N x_{u0} x_{uj}^2 \neq 0, \\ \sum_{u=1}^N x_{ui}^2 x_{uj}^2 \neq 0. \end{array} \right. \quad (3.59)$$

Чтобы получить ортогональное планирование второго порядка, необходимо:

- 1) произвести преобразование квадратичных переменных;
- 2) специальным образом выбрать величину звездного плеча.

Введем вместо истинного квадрата фактора (x_{ij}^2) преобразованную квадратичную переменную x_{ij}^1 согласно выражению:

$$x_{ij}^1 = x_{ij}^2 - \frac{\sum_{u=1}^N x_{uj}^2}{N} = x_{ij}^2 - \overline{x_{uj}^2}. \quad (3.60)$$

Тогда будут равны нулю скалярные произведения

$$\sum_{u=1}^N x_{u0} x_{uj}^1 = \sum_{u=1}^N x_{uj}^2 - N \overline{x_{uj}^2} = 0,$$

т. к. $\sum_{u=1}^N x_{u0} x_{uj}^1 = \sum_{u=1}^N x_{uj}^2 - N \overline{x_{uj}^2} = N - N \cdot 1.$

Неортогональными останутся только вектор-столбцы для вновь введенных квадратичных членов:

$$\sum_{u=1}^N x_{ui}^1 x_{uj}^1 \neq 0.$$

Чтобы сделать матрицу планирования полностью ортогональной, величину звездного плеча α выбирают из условия равенства нулю недиагональных членов матрицы $(X^T X)^{-1}$. В табл. 3.17 приведены значения звездного плеча α и общее число опытов для различного числа факторов (независимых переменных) n .

Таблица 3.17

Значения α и количество опытов композиционного плана при разном числе факторов

Число опытов	Число независимых переменных			
	2	3	4	5*
В ядре плана N_{α}	4	8	16	16
В «звездных» точках N_{α}	4	6	8	10
В центре плана m_0	1	1	1	1
Общее число опытов N	9	15	25	27
Величина «звездного» плеча α	1,00	1,215	1,414	1,547

* – с полурепликой.

Ортогональные матрицы композиционных планов второго порядка для $n = 2$ и $n = 3$ представлены в табл. 3.18, 3.19.

Таблица 3.18

Композиционный план ортогонального эксперимента для двух факторов

Опыты	x_0	План					Параметр оптимизации
		x_1	x_2	x_1x_2	x_1^1	x_2^1	
1	+1	+1	+1	+1	1/3	1/3	y_1
2	+1	-1	+1	-1	1/3	1/3	y_2
3	+1	+1	-1	-1	1/3	1/3	y_3
4	+1	-1	-1	+1	1/3	1/3	y_4
5	+1	+1	0	0	1/3	-2/3	y_5
6	+1	-1	0	0	1/3	-2/3	y_6
7	+1	0	+1	0	-2/3	1/3	y_7
8	+1	0	-1	0	-2/3	1/3	y_8
9	+1	0	0	0	-2/3	-2/3	y_9

Таблица 3.19

Композиционный план ортогонального эксперимента для трех факторов

Опыты	x_0	План									Параметр оптимизации
		x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	x_1^1	x_2^1	x_3^1	
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	y_1
2	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	y_2
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	y_3
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	y_4
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	y_5
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	0,27	0,27	0,27	y_6
7	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	0,27	0,27	0,27	y_7
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	y_8
9	+1	1,215	0	0	0	0	0	0,746	-0,73	-0,73	y_9
10	+1	-1,215	0	0	0	0	0	0,746	-0,73	-0,73	y_{10}
11	+1	0	1,215	0	0	0	0	-0,73	0,746	-0,73	y_{11}
12	+1	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	0,746	-0,73	y_{12}
13	+1	0	0	1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	0,746	y_{13}
14	+1	0	0	-1,215	0	0	0	-0,73	-0,73	0,746	y_{14}
15	+1	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	y_{15}

Коэффициенты уравнения регрессии:

$$\hat{y} = b_0^1 + b_1x_1 + b_2x_2 \dots + b_nx_n + b_{12}x_1x_2 + \dots + b_{n-1,n}x_{n-1}x_n + b_{11}\left(x_1^2 - \overline{x_1^2}\right) + \dots + b_{nn}\left(x_n^2 - \overline{x_n^2}\right), \quad (3.61)$$

построенного по центральному композиционному ортогональному плану второго порядка вычисляют в соответствии с формулами:

при $n = 3$ (табл. 3.19)

$$b_0^1 = \frac{\sum_{u=1}^N y_u}{N}; \quad b_0^1 = \frac{\sum_{u=1}^{15} y_u}{15}; \quad (3.62)$$

$$b_j = \frac{\sum_{u=1}^N x_{uj} y_u}{\sum_{u=1}^N x_{uj}^2}; \quad b_j = \frac{\sum_{u=1}^{15} x_{uj} y_u}{10,95}; \quad (3.63)$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^N (x_{ui} x_{uj}) y_u}{\sum_{u=1}^N (x_{ui} x_{uj})^2}; \quad b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{15} (x_{ui} x_{uj}) y_u}{8}; \quad (3.64)$$

$$b_{jj} = \frac{\sum_{u=1}^N x_{uj}^1 y_u}{\sum_{u=1}^N (x_{uj}^1)^2}; \quad b_{jj} = \frac{\sum_{u=1}^{15} x_{uj}^1 y_u}{4,36}. \quad (3.65)$$

Дисперсии коэффициентов уравнения регрессии (3.61) рассчитываются по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{b_0^1}^* = \frac{D_0^*}{Nm}, \\ D_{b_j}^* = \frac{D_0^*}{\left(\sum_{u=1}^N x_{uj}^2 \right) m}, \\ D_{b_{ij}}^* = \frac{D_0^*}{\left[\sum_{u=1}^N (x_{ui} \cdot x_{uj})^2 \right] m}, \\ D_{b_{jj}}^* = \frac{D_0^*}{\left[\sum_{u=1}^N (x_{uj}^1)^2 \right] m}. \end{array} \right. \quad (3.66)$$

где D_0^* – ошибка опыта, оценивается также, как и по полному факторному эксперименту (3.15); m – число параллельных опытов в каждой строчке матрицы планирования (при их наличии).

Оценка значимости коэффициентов уравнения регрессии, как и ранее, проводится по критерию Стьюдента, для нахождения табличного квантиля Стьюдента t_T требуется знать число степеней свободы: $\nu_0 = N \cdot (m - 1)$, и задать уровень значимости α (табл. А.1).

Из-за разных знаменателей в формулах (3.66) дисперсии коэффициентов уравнения регрессии различны. А из-за различия дисперсий коэффициентов, коэффициенты уравнения регрессии оцениваются с разными ошибками. Коэффициенты уравнения регрессии второго порядка признаются значимыми, если выполняются условия:

$$t_{b'_{0p}} = \frac{b'_0}{\sigma_{b'_0}} > t_T; \quad t_{b_{jp}} = \frac{b_j}{\sigma_{b_j}} > t_T; \quad t_{b_{ijp}} = \frac{b_{ij}}{\sigma_{b_{ij}}} > t_T; \quad t_{b_{jip}} = \frac{b_{ji}}{\sigma_{b_{ji}}} > t_T. \quad (3.67)$$

На практике удобнее пользоваться исходным полиномом 2 порядка:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{n-1,n} x_{n-1} x_n + b_{11} x_1^2 + \dots + b_{nn} x_n^2. \quad (3.68)$$

От уравнения (3.61) к уравнению (3.68) переходят с помощью расчета величины свободного члена по формуле:

$$b_0 = b_0 - b_{11} \overline{x_1^2} - \dots - b_{nn} \overline{x_n^2}, \quad (3.69)$$

где $\overline{x_j^2} = x_j^2 - x_j^1$.

При этом дисперсия величины b_0 оценивается по равенству:

$$D_{b_0}^* = D_{b'_0}^* + \overline{x_1^2} D_{b_{11}}^* + \dots + \overline{x_n^2} D_{b_{nn}}^*. \quad (3.70)$$

Адекватность уравнения регрессии (3.68), как и ранее, проверяется по критерию Фишера (3.41):

$$F_p = \frac{D_{ад}^*}{D_0^*} < F_T,$$

где F_T – табличное значение квантиля F -распределения (табл. А.4) для числа степеней свободы $\nu_{ад} = N - l$; $\nu_0 = N(m - 1)$ и заданного уровня значимости α .

Дисперсию адекватности определяют по формуле:

$$D_{ад}^* = \frac{\sum_{u=1}^N (\bar{y}_{u\hat{y}} - \hat{y}_{ui})^2}{N - l},$$

либо при m параллельных опытах на каждой строчке матрицы планирования:

$$D_{ад}^* = \frac{m}{N - l} \sum_{u=1}^N (\bar{y}_{u\hat{y}} - \hat{y}_{ui})^2.$$

Дисперсию воспроизводимости вычисляют по формуле:

$$D_0^* = \frac{\sum_{u=1}^N D_u}{N}.$$

Дальнейшее совершенствование планов второго порядка привело (Бокс и Хантер) к построению рототабельных планов второго порядка, которые обеспечивают равные оценки дисперсий коэффициентов уравнения регрессии.

3.6 Задачи и методы статической оптимизации технологических процессов

После нахождения искомой модели в виде соответствующего полинома необходимо ее использовать для решения поставленной задачи. При этом модель может быть использована либо для вычисления целевой функции при произвольных значениях факторов, либо для нахождения значений факторов, при которых целевая функция принимает экстремальное значение.

Простейшей задачей оптимизации является нахождение минимума или максимума функций одной переменной. Как известно из классического анализа, если функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные для любого x , принадлежащего множеству действительных чисел R , то необходимым условием экстремума (минимума или максимума) функции в точке $x = x^*$ является равенство первой производной нулю:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} = 0. \quad (3.71)$$

Точка $x = x^*$, в которой выполняется это условие, называется *стационарной*, равенство (3.71) является необходимым, но недостаточным условием экстремума (рис. 3.9).

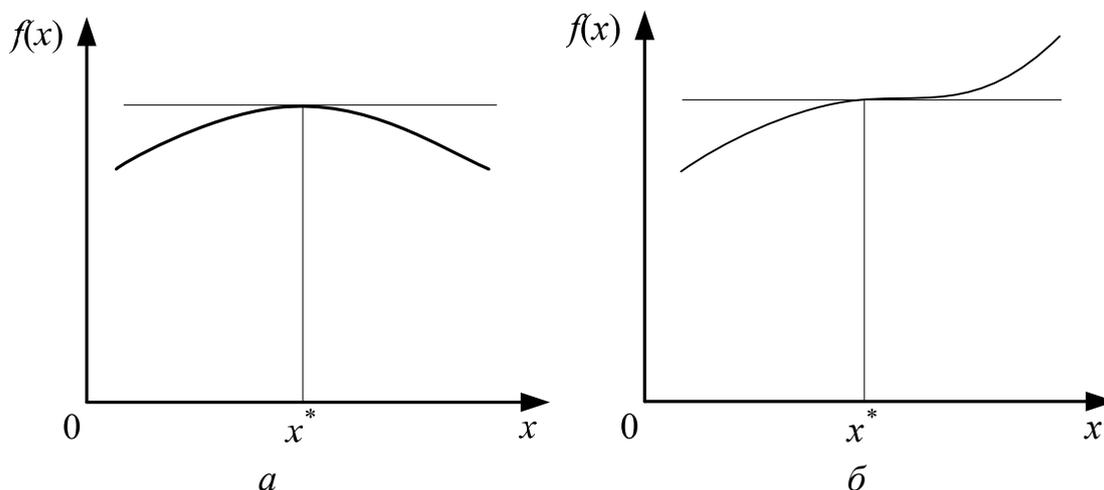


Рис. 3.9. Иллюстрация необходимого условия экстремума функции одной переменной: а – достаточное условие экстремума соблюдается; б – достаточное условие экстремума не соблюдается

Достаточные условия экстремума определяются равенством (3.71) и знаком второй производной в точке $x = x^*$.

Достаточным условием минимума является положительность второй производной:

$$\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} > 0. \quad (3.72)$$

Достаточным условием максимума – её отрицательность:

$$\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} < 0. \quad (3.73)$$

Пусть теперь $f(\bar{x})$ является скалярной функцией n переменных. В каждой точке области, где задана функция $f(\bar{x})$, определим вектор, составленный из частных производных функции:

$$\nabla_x [f(\bar{x})] = \left\{ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \right\}. \quad (3.74)$$

Из математического анализа известно, что среди производных от функции $f(\bar{x})$ по всем возможным направлениям в пространстве переменных x_1, x_2, \dots, x_n градиент представляет собой производную от функции $f(\bar{x})$ в точке \bar{x} в направлении наибольшего изменения функции.

Доказывается, что необходимым условием экстремума является равенство нулю вектор-градиента функции:

$$\nabla_x [f(\bar{x})] = 0. \quad (3.75)$$

Достаточные условия вытекают из знакоопределенности матрицы вторых производных, или, как её называют, матрицы Гесса:

$$\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{array} \right\|. \quad (3.76)$$

Достаточным условием минимума функции является положительная определенность матрицы Гесса. Иными словами, все главные миноры матрицы, а, следовательно, и собственные значения должны быть положительными.

Достаточным условием максимума функции является отрицательная определенность матрицы Гесса. В этом случае главные миноры последовательно-повышающегося порядка имеют чередующийся знаки.

В общем случае целевая функция может быть представлена в виде некоторой поверхности, задаваемой в пространстве n переменных.

Полученные необходимые и достаточные условия оптимальности позволяют идентифицировать оптимальную точку.

Полученные необходимые и достаточные условия оптимальности позволяют определить и координаты оптимальной точки, когда целевая функция представляет квадратичный полином. Действительно, пусть целевая функция представляет собой квадратичную форму:

$$Y(\bar{x}) = f(\bar{x}) = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n b_{jj} x_{jj}^2.$$

Вычислив частные производные $\frac{\partial Y(\bar{x})}{\partial x_i}$ и приравняв их к нулю,

получим систему n уравнений, решение которой и даёт искомое значение \bar{x}^* . Такой метод определения координат оптимальной точки называется прямым. Однако при наложении ограничений на определенные факторы не всегда удается применить прямые методы оптимизации для моделей в виде алгебраических полиномов. В этих случаях для определения значения \bar{x}^* , доставляющей экстремум $f(\bar{x})$, применяются различные итерационные методы.

В итерационных методах процедура поиска экстремума $f(\bar{x})$ заключается в следующем:

1. Выбирают какую-либо точку $\bar{x}^0 (x_1^0, \dots, x_n^0)$, называемую нулевым приближением. Этой точке соответствует определенное значение целевой функции $Y_0 = f(\bar{x}^0)$.

2. Затем, если ищется минимум, находят одно из направлений, вдоль которого значение функции уменьшается. На этом направлении берут новую точку $\bar{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$. Новой точке соответствует значение целевой функции $Y_1 = f(\bar{x}^1)$. Если $Y_1 < Y_0$, процедура повторяется. В результате её повторения получают последовательность $(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^i)$ точек в пространстве факторов (x_1, \dots, x_n) . Эта последовательность называется изображающими точками процесса поиска.

Итерационные методы, представляя процедуру последовательного улучшения решения, могут различаться скоростью движения к экстремальной точке, или, как иногда называют, сходимостью. Сходимость итерационных методов определяется методом образования Δx_j^i . Существует целый ряд методов образования Δx_j^i . К числу наиболее простых относится метод градиента (метод пропорционального поиска).

В этом методе при поиске экстремума используется тот факт, что при движении из точки \bar{x}^i градиент в её окрестности задает направле-

ние наискорейшего возрастания (или убывания) функции. Задаваясь нормированным значением градиента:

$$\alpha_j^i = \frac{\partial Y(\bar{x})}{\partial x_j} \left| \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Y(\bar{x})}{\partial x_j} \right)^2} \right|^{-1}; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.77)$$

процедуру поиска можно построить следующим образом:

$$x_j^{i+1} = x_j^i + h\alpha_j^i; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.78)$$

где h – коэффициент пропорциональности, n – число факторов.

Константа h определяет величину изменения переменных. Если выбрать h слишком большой, то итерационный процесс может привести к циклическому колебанию относительно экстремума и даже стать расходящимся. Если h будет малым, то процесс поиска экстремума будет медленно сходиться. Для выбора коэффициента h (при поиске максимума) может быть рекомендовано следующее правило:

$$h^i = \begin{cases} h^{i-1} & \text{при } Y(\bar{x}^i) > Y(\bar{x}^{i-1}), \\ h^{i-1}/k & \text{при } Y(\bar{x}^i) \leq Y(\bar{x}^{i-1}), \text{ где } k > 1. \end{cases} \quad (3.79)$$

Согласно этому правилу, вдалеке от экстремума h выбирается достаточно большим. При переходе через экстремум, о чем свидетельствует изменение знака приращения функции $Y(\bar{x})$, величина шага уменьшается (уменьшение производится каждый раз при переходе через экстремум).

Итерационные методы оптимизации отличаются большим разнообразием. Вместе с различными модификациями их насчитывают несколько десятков. К основным методам поиска можно отнести: метод градиента, метод наискорейшего спуска, метод крутого восхождения, метод Гаусса–Зейделя, метод симплексов, метод случайного поиска и т. д.

Метод крутого восхождения (метод Бокса–Уилсона)

Этот метод объединяет в себе достоинства трех методов – метода Гаусса–Зейделя, метода градиента и метода полного (или дробного) факторного эксперимента, как средства получения математической модели в виде уравнения регрессии.

Задача крутого восхождения заключается в том, чтобы шаговое движение осуществлять в направлении наискорейшего возрастания (или убывания) выходной переменной, то есть по градиенту.

Для линейной модели $Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n$ составляющими градиента (частными производными функции отклика) являются коэффициенты уравнения регрессии b_1, b_2, \dots, b_n .

В этом случае расчет составляющих градиента реализуется вычислением произведений коэффициентов уравнения регрессии на соответствующие интервалы варьирования значимых факторов:

$$\text{grad}Y(\bar{x}) = b_1\Delta X_1 + b_2\Delta X_2 + \dots + b_n\Delta X_n, \quad (3.80)$$

т. е. в качестве шагов крутого восхождения выбирают интервалы варьирования факторов ΔX_j .

Фактор, для которого произведение коэффициента регрессии на интервал варьирования максимально, принимается базовым:

$$\max (b_j\Delta X_j) = a. \quad (3.81)$$

Для базового фактора выбирают шаг крутого восхождения h_a (обычно его выбирают по совету технологов или по имеющейся априорной информации).

Для пересчета составляющих градиента используют условие: умножение составляющих градиента на любое положительное число дает точки, также лежащие на градиенте. Составляющие градиента по каждому фактору пересчитывают по выбранному шагу крутого восхождения базового фактора:

$$h_j = \frac{(b_j\Delta X_j)}{a} h_a. \quad (3.82)$$

При поиске \max коэффициенты b_j в (3.82) берутся со своими знаками, шаги h_j округляют. Если отыскивается минимум выходной переменной, то знаки коэффициентов следует поменять на обратные.

Поиск локального оптимума осуществляется последовательным прибавлением составляющих градиента к нулевому уровню факторов. Получают серию значений факторов крутого восхождения. Переведя их в кодированную форму по выражению (3.3) и подставив в уравнение регрессии, получим ряд «предсказанных» значений параметра оптимизации \hat{y} (рис. 3.10).

Если какой-либо из факторов в процессе движения к оптимуму достигает границы области определения, то его фиксируют и продолжают движение к оптимуму по остальным факторам.

Крутое восхождение прекращается, когда выходная величина начинает ухудшаться, т. е. в точке частного экстремума. В этой точке ставится новый факторный эксперимент, определяется математическая модель и вновь осуществляется крутое восхождение и т. д. (рис. 3.10). По-

иск прекращается, когда квадратичные эффекты в уравнении регрессии становятся значимыми.

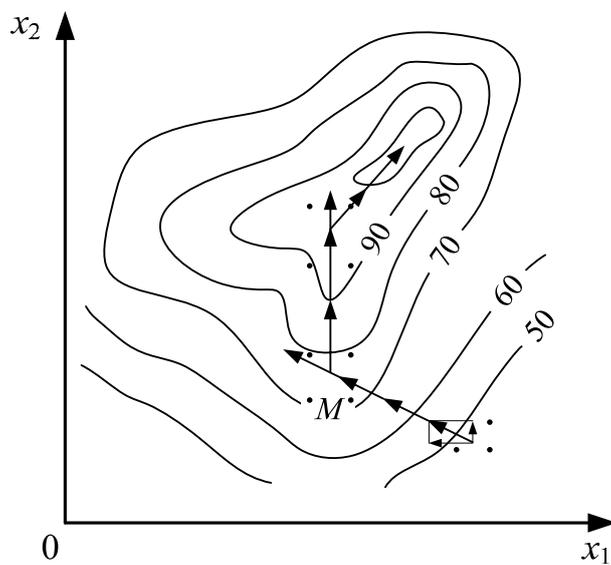


Рис. 3.10. Графическая интерпретация метода крутого восхождения

4 ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ КОНТРОЛЕ И УПРАВЛЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

4.1 Сглаживание измеряемых сигналов

При автоматическом контроле большое значение имеет задача фильтрации (сглаживания) выходного сигнала датчика для выделения значения измеряемой величины от искажающей ее помехи, присутствующей в полученном от датчика сигнале. Так, например, при измерении расхода газа на полезный измеряемый сигнал накладываются пульсации газового потока и т. п.

Существует большое количество алгоритмов фильтрации измеряемых сигналов. Различные типы фильтров дают разную погрешность восстановления полезного сигнала. Однако надо учитывать необходимость компромисса между точностью и сложностью алгоритма фильтрации и загрузки им вычислительных устройств при его многократном использовании. При контроле работы реальных технологических процессов необходимо осуществлять фильтрацию десятков и сотен сигналов датчиков.

В современных автоматизированных системах контроля и управления технологическими процессами широко используются два простых алгоритма фильтрации: скользящего (или подвижного) среднего и экспоненциального сглаживания.

Измеряемый сигнал (показания датчика) $X(t)$ в большинстве случаев может быть представлен как сумма некоррелированных между собой случайных процессов: полезного сигнала $U(t)$, функционально связанного с некоторым параметром $Y(t)$ технологического процесса (сигнал с термопары, с дифманометра) и шума $S(t)$, являющегося следствием различного рода помех и ошибок (рис. 4.1):

$$X(t) = U(t) + S(t).$$

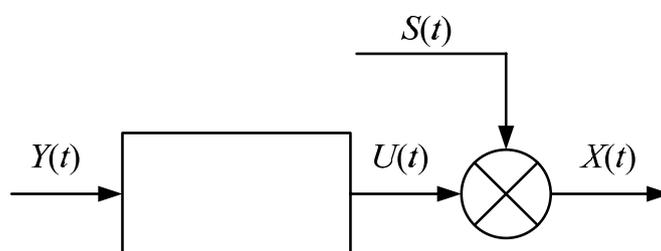


Рис. 4.1. Модель реального измеряемого сигнала при технологическом контроле

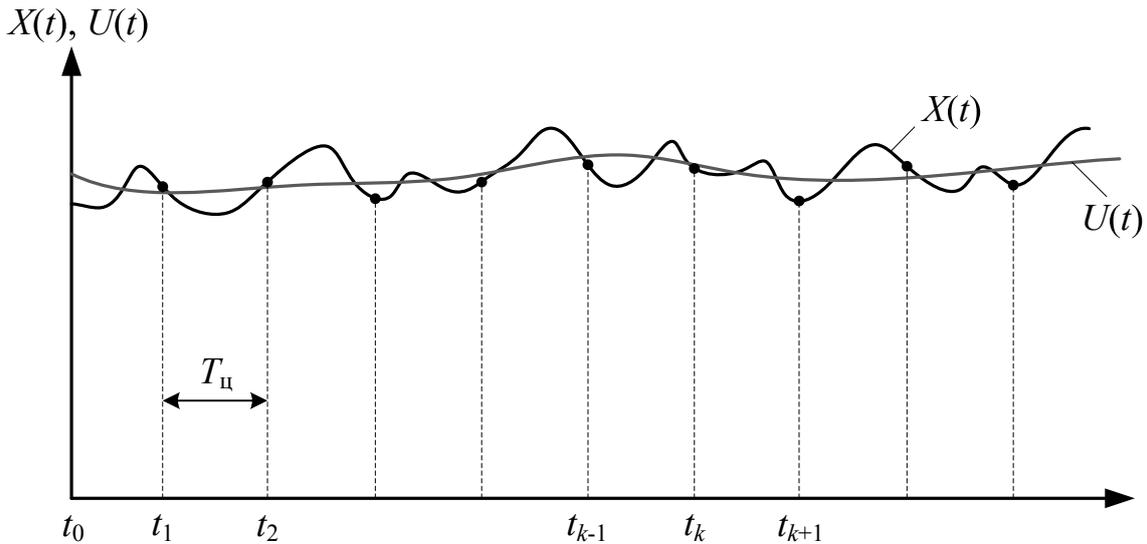


Рис. 4.2. Сигнал с первичного преобразователя технологической переменной $X(t)$ и выделенный полезный сигнал $U(t)$

Считаем, что на ограниченном интервале текущих наблюдений технологическая переменная $Y(t)$ и соответственно $U(t)$ – полезный сигнал, а также шум $S(t)$ могут считаться стационарными случайными процессами (рис. 4.2). Кроме того, полагаем, что шум центрирован, т. е. $M[S(t)] = 0$ (систематические ошибки исключены), а спектры полезного сигнала и шума существенно отличаются, так что для интервалов корреляции выполняется условие $\tau_u \gg \tau_s$.

Процедура контроля проиллюстрирована на рис 4.2. Измерения величины $X(t)$ производятся дискретно с интервалом $\Delta t = T_{ц}$. В том случае, когда помеха незначительна ($D_s \ll D_u$), для дискретного контроля параметра $Y(t)$ не требуется никакой дополнительной обработки измеряемой величины $X(t)$.

Увеличение доли помехи в измеряемом сигнале приводит к необходимости уменьшения ее влияния, фильтрации.

Простейший способ фильтрации – арифметическое усреднение текущих отсчетов $X(t)$ с датчика, основывается на формулах вычисления арифметического среднего по фиксированному (выбранному) количеству отсчетов (окну усреднения) (рис. 4.3):

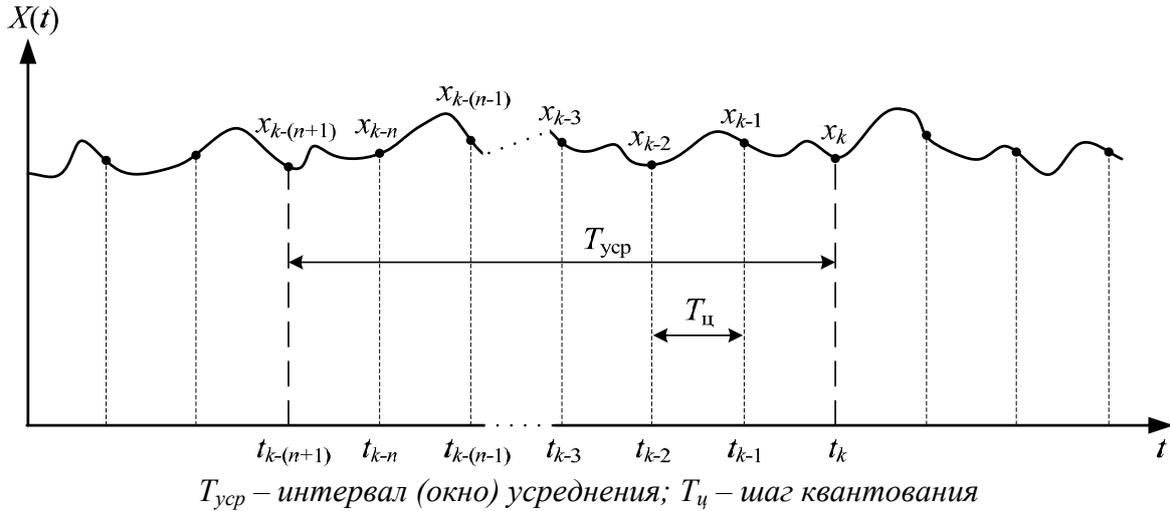


Рис. 4.3. Иллюстрация алгоритма фильтрации, основанного на арифметическом усреднении текущих отсчетов по выбранному числу отсчетов

$$\tilde{U}(k) = \frac{\sum_{r=k}^{k-(n-1)} x_r}{n}. \quad (4.1)$$

Например, для окна усреднения, включающего четыре интервала квантования, $n = 5$ (рис. 4.3), формула (4.1) принимает вид:

$$\tilde{U}(k) = \frac{x_k + x_{k-1} + x_{k-2} + x_{k-3} + x_{k-4}}{5}.$$

Параметром данного алгоритма фильтрации, определяющим степень сглаживания, является интервал (окно) усреднения $T_{уср}$ (количество суммируемых отсчетов с сигнала датчика) (рис. 4.3). Для медленно изменяющегося и сильно зашумленного полезного сигнала выбирают больший интервал усреднения. Для случая, когда помеха незначительна, выбирают меньший интервал усреднения. Поэтому необходимо выбрать величину $T_{уср}$ так, чтобы не только ослабить влияние помехи, но и существенно не сгладить полезный сигнал.

Недостатки алгоритма фильтрации, основанного на формулах арифметического среднего:

- оценка полезного сигнала в этом случае наиболее эффективна для середины интервала усреднения $t = t_k - \frac{T_{уср}}{2}$, в то время как необходима оценка полезного сигнала для момента времени, предшествующему очередному замеру;
- каждое из усредняемых наблюдений имеет один и тот же вес $p = \frac{1}{n}$, в то время, как «цена» наблюдений неодинакова: наиболее точно

величина $U(t_k)$ характеризуется величиной $X(t_k)$, затем $X(t_{k-1})$; $X(t_{k-2})$ и т. д. Поэтому естественно принять веса p_k отдельных измерений $X(t_k)$ неодинаковыми, т. е.:

$$p_k > p_{k-1} > p_{k-2} > \dots \quad (4.2)$$

Невыполнение условия (4.2) приводит к излишнему сглаживанию самого полезного сигнала $U(t)$. Несложный алгоритм фильтрации, учитывающий недостатки арифметического усреднения, основывается на следующей формуле:

$$\tilde{U}_k = \alpha X_k + (1 - \alpha)\tilde{U}_{k-1}, \quad (4.3)$$

где α – параметр формулы экспоненциального сглаживания и называется он *коэффициент сглаживания*, диапазон его изменения: $0 \leq \alpha \leq 1$. Здесь и в дальнейшем для простоты записи мы пользуемся следующими обозначениями: $X_k = X(t_k)$; $U_k = U(t_k)$; $U_{k-1} = U(t_{k-1})$. Волна над обозначением полезного сигнала означает оценку его действительного значения.

Из формулы (4.3) следует, что для оценки значения полезного сигнала в текущий момент времени $t = t_k$, необходимо взять текущий результат измерения X_k с весом α и предыдущий результат сглаживания U_{k-1} с весом $(1 - \alpha)$. В этом случае для реализации операции сглаживания необходимо хранить в памяти ПЭВМ всего два параметра – постоянную сглаживания α и результат предыдущего сглаживания U_{k-1} .

Поскольку результат предыдущего сглаживания был получен подобным же образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{k-1} = \alpha X_{k-1} + (1 - \alpha)\tilde{U}_{k-2}, \\ \tilde{U}_{k-2} = \alpha X_{k-2} + (1 - \alpha)\tilde{U}_{k-3}, \\ \tilde{U}_{k-3} = \alpha X_{k-3} + (1 - \alpha)\tilde{U}_{k-4}, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{U}_{k-n} = \alpha X_{k-n} + (1 - \alpha)\tilde{U}_{k-(n+1)}, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

то нетрудно заключить, что в выражении (4.3) в неявной форме учитываются результаты всех предыдущих наблюдений x_k, x_{k-1}, \dots, x_0 и эквивалентом этой формулы является следующая:

$$\tilde{U}_k = \sum_{r=0}^k p_r x_{k-r}. \quad (4.5)$$

Веса отдельных наблюдений здесь неодинаковы:

$$p_r = \alpha(1 - \alpha)^r,$$

и в зависимости от величины α можно получить различные ряды значений весовых коэффициентов.

Таблица 4.1

Весовые коэффициенты p_r последних пяти наблюдений x_{k-r}

Сдвиг r	Постоянные сглаживания α			
	0,1	0,5	0,9	1
0	0,1	0,5	0,9	1
1	0,09	0,25	0,09	0
2	0,081	0,125	0,009	0
3	0,0729	0,0625	0,0009	0
4	0,6561	0,03125	0,00009	0

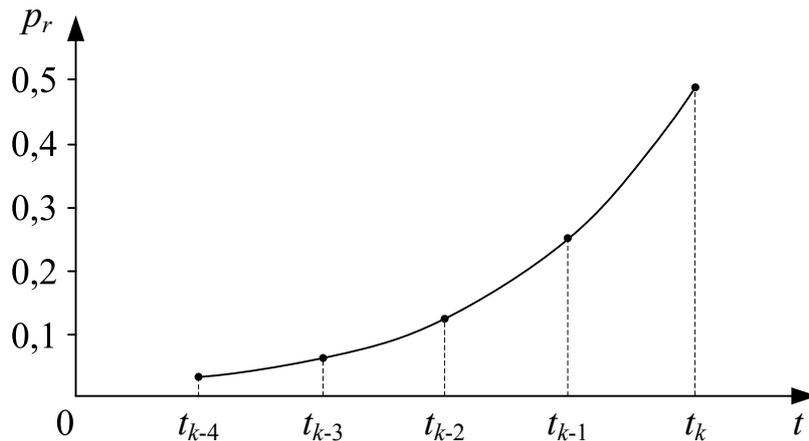


Рис. 4.4. Экспоненциальное распределение весовых коэффициентов p_r формулы экспоненциального сглаживания для $\alpha = 0,5$

Поскольку огибающие изменений p_r , во времени (рис. 4.4) могут быть выражены экспонентами с различными постоянными времени, само сглаживание по формуле (4.3) носит название *экспоненциального*.

Процедура экспоненциального сглаживания (экспоненциальной фильтрации) по результатам воздействия на полезный сигнал принципиально не отличается от операции сглаживания электрического сигнала с помощью обычного RC-фильтра, для которого коэффициент сглаживания рассчитывается по формуле:

$$\alpha = \frac{1}{RC}.$$

Точно также, как при выборе постоянной времени фильтра, при экспоненциальной фильтрации необходимо выбрать величину α так, чтобы не только ослабить влияние помехи, но и существенно не сгладить полезный сигнал.

В частности $\alpha = 0,1$ годится для медленно меняющегося и сильно зашумленного полезного сигнала, величина $\alpha = 1$ соответствует «чистому» сигналу $X(t) = U(t)$.

Расчет величины α для случайных процессов с вогнутыми автокорреляционными функциями полезного сигнала может быть произведен по формуле [18]:

$$\alpha = \frac{2b[r_U(T_{ц}) - r_U(2T_{ц})]}{1 + 2b[1 - r_U(2T_{ц})]}, \quad (4.6)$$

где $b = \frac{D_U}{D_S}$ – отношение сигнал/шум по мощности, $r_U = \frac{K_U}{D_U}$ – нормированная автокорреляционная функция полезного сигнала, $T_{ц}$ – шаг квантования по времени измеряемого сигнала.

Процедура нахождения необходимых для расчета α величин D_U , D_S , $K_U(T_{ц})$, $K_U(2T_{ц})$ проиллюстрирована на рис. 4.5.

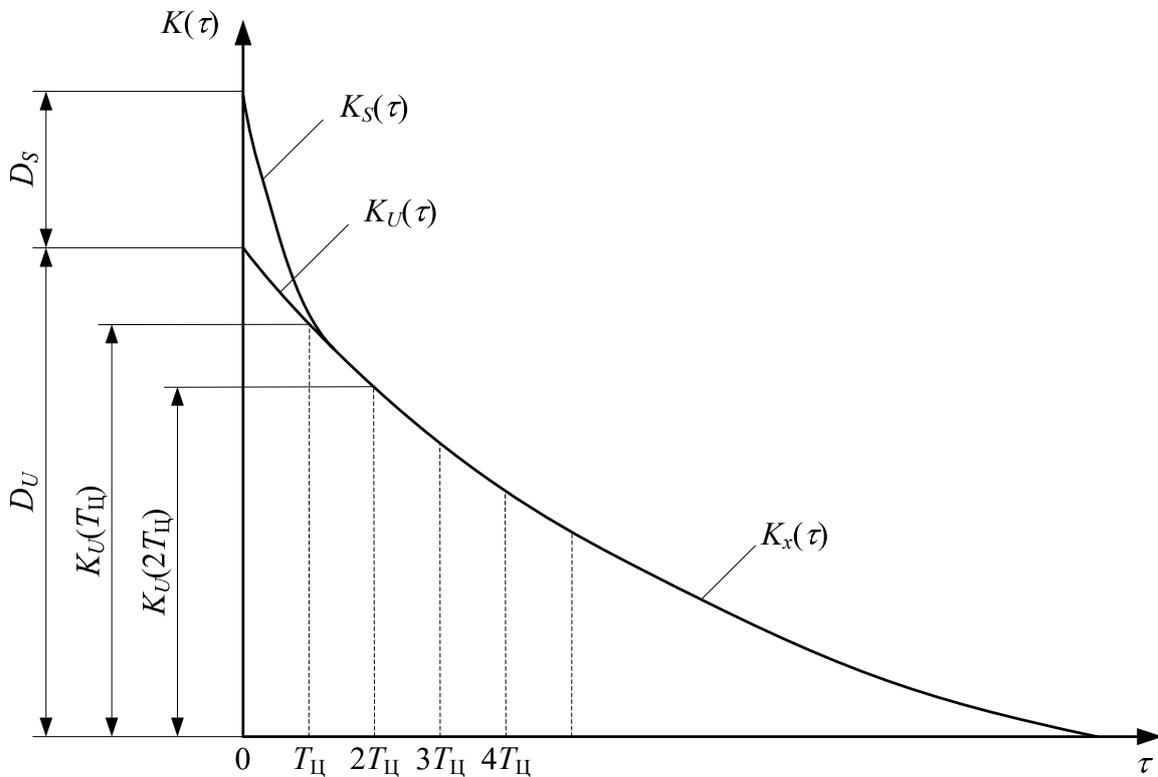


Рис. 4.5. Автокорреляционная функция зашумленного сигнала с датчика и ее компоненты

Пример:

$$D_U = 4,5; D_S = 1,5; b = 3;$$

$$K_U(T_{ц}) = 4 \quad r_U(T_{ц}) = 0,89;$$

$$K_U(2T_{ц}) = 3,4 \quad r_U(2T_{ц}) = 0,76.$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot 3 \cdot [0,89 - 0,76]}{1 + 2 \cdot 3 \cdot [1 - 0,76]} = \frac{0,76}{2,44} = 0,32.$$

$$\text{При } b = 5 \quad \alpha = 0,72.$$

4.2 Статистические методы построения динамических моделей промышленных объектов управления

Эффективное управление промышленным объектом возможно лишь в том случае, когда основные закономерности, присущие объекту, представлены в виде математического описания. Построение математического описания (идентификация) объекта является первым этапом синтеза системы автоматического управления. Полученная модель позволяет разработать алгоритм управления и определить его оптимальные коэффициенты.

В ГОСТ 20913–75 приводится следующее определение задачи идентификации: *идентификацией* называется определение структуры и параметров математической модели, обеспечивающих наилучшее совпадение выходных координат модели и процесса при одинаковых входных воздействиях. Отсюда следует, что процедура идентификации включает следующие три этапа:

- 1) выбор структуры модели на основании имеющейся априорной информации об исследуемом процессе и некоторых эвристических соображений;
- 2) выбор критерия близости объекта и модели, исходя из специфики задачи;
- 3) определение параметров модели, оптимальных с точки зрения выбранного критерия.

Построение математических моделей объектов может производиться аналитическим или экспериментальным методом. В первом случае уравнения динамики и статики составляются на основе анализа физико-химических процессов, происходящих в объекте, и применения фундаментальных законов: сохранения энергии и вещества, Кирхгофа, Ньютона и т. п.

Экспериментальные методы требуют минимальных сведений о сущности процессов, протекающих в исследуемых объектах, однако позволяют с приемлемой для практики точностью строить их математические модели. Все экспериментальные методы исследования динамики процесса основаны на обработке информации, содержащейся в его входных и выходных координатах.

При этом применяются активные и пассивные методы идентификации. Активные методы идентификации характерны тем, что на входы исследуемого объекта подают тестовые воздействия специального вида (ступенчатые, импульсные, гармонические и т. п.) и исследуют реакцию объекта на эти воздействия. Однако во многих случаях нарушение нормального функционирования объекта искусственными пробными воз-

действиями совершенно не допустимо. В этих случаях применяются так называемые пассивные методы идентификации, в которых используются случайные естественные колебания входных и выходных сигналов объекта. Задача идентификации при этом состоит в определении структуры модели и оценок коэффициентов в уравнениях, описывающих объект по реализациям входных и выходных переменных, полученных в условиях нормального функционирования объекта.

Известно, что свойства объекта могут быть описаны различными способами.

Под *моделью объекта* мы понимаем правило преобразования воздействия на объект $X(t)$ в реакцию объекта $Y(t)$.

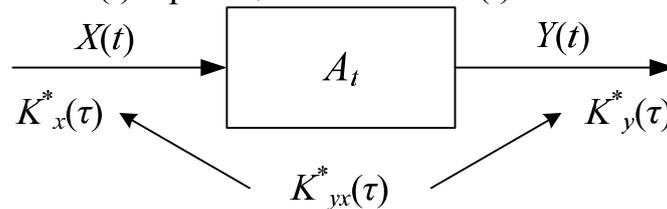


Рис. 4.6. Информационная структура модели объекта

Правило преобразования одной функции в другую называют *оператором*. Оператор представляет собой совокупность математических или логических операций, устанавливающих соответствие между двумя функциями.

Конкретное выражение оператора A_t для стационарных одномерных линейных объектов, для которых реакция $Y(t)$ не зависит от момента начала действия возмущения $X(t)$, а зависит только от интервала времени между началом действия $X(t)$ и данным моментом, может быть задано различными способами:

- с помощью дифференциального уравнения:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}, \quad (4.7)$$

где $n \geq m$;

- с помощью весовой (импульсной переходной) функции:

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(t)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad (4.8)$$

где согласно условию физической реализуемости системы $w(\tau) = 0$ при $t < 0$;

- с помощью АФЧХ:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega}d\omega; \quad (4.9)$$

- с помощью передаточной функции:

$$Y(s) = W(s)X(s). \quad (4.10)$$

Передаточная функция $W(s)$ связана с весовой функцией $w(\tau)$ преобразованием Лапласа:

$$W(s) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st} dt; \quad (4.11)$$

$$w(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s)e^{st} ds; \quad (4.12)$$

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau. \quad (4.13)$$

Если случайные функции $Y(t)$ и $X(t)$ являются стационарными и стационарно-связанными, оптимальная оценка оператора определяется из уравнения:

$$K_{yx}(\tau) = A_t K_x(t - \tau), \quad (4.14)$$

а весовая функция из интегрального уравнения Винера-Хопфа [4, 12]:

$$K_{yx}(\tau) = \int_{t-T}^t w(t)K_x(t - \tau) dt, t \geq 0 \quad (4.15)$$

$w(\tau) = 0$ при $t < 0$, T – интервал времени наблюдения.

Уравнение Винера–Хопфа (4.15) позволяет указать три возможных способа идентификации с использованием временных статистических характеристик случайных процессов.

На первом этапе (для всех трех случаев) по результатам измерения в режиме нормальной эксплуатации входных и выходных переменных объекта определяются оценки автокорреляционной функции входа $K_x^*(\tau)$ (2.54) и взаимной корреляционной функции входа и выхода $K_{yx}^*(\tau)$ (2.55).

Первый способ.

Полученные оценки автокорреляционной функции входа $K_x^*(\tau)$ и взаимной корреляционной функции входа и выхода $K_{yx}^*(\tau)$ аппроксимируют соответствующими аналитическими функциями, а весовую (импульсную переходную) функцию $w(t)$ находят аналитически как решение уравнения Винера–Хопфа (4.15).

1.1. Известны различные виды аппроксимации корреляционных функций реальных промышленных объектов в зависимости от их графиков.

Так, если $K_x^*(\tau) = D_x^* e^{-\alpha\tau}$ (рис. 4.7), где D_x^* – оценка дисперсии входного сигнала, то решение уравнения (4.15) имеет вид [12]:

$$w(t) = \frac{\alpha}{2D_x^*} \left[K_{yx}^*(t) - \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 K_{yx}^*(t)}{dt^2} \right]. \quad (4.16)$$

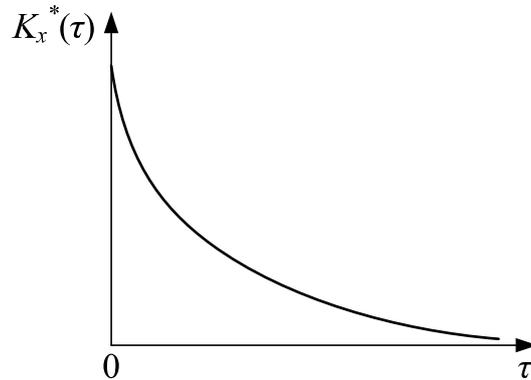


Рис. 4.7. Автокорреляционная функция входного сигнала

1.2. В практике синтеза САУ объект управления часто с достаточной степенью точности описывают инерционным звеном первого порядка с запаздыванием:

$$W(s) = \frac{K_{об}}{T_{об}s + 1} e^{-\tau_{об}s};$$

$$T_{об} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_{об} x(t - \tau_{об}).$$

В этом случае с помощью моментов корреляционных функций

$$A_i = \int_0^{\tau_{max}} \tau^i K_x(\tau) d\tau,$$

$$B_i = \int_0^{\tau_{max}} \tau^i K_{yx}(\tau) d\tau$$

можно определить параметры этой модели [12]:

- коэффициент усиления:

$$K_{об} = \frac{B_0}{A_0};$$

- постоянная времени:

$$T_{об} = \sqrt{\frac{A_0 B_2 - A_2 B_0}{A_0 B_0} - \frac{B_1^2}{B_0^2}};$$

- время запаздывания:

$$\tau_{об} = \frac{B_1}{B_0} - T_{об}.$$

Второй способ связан с построением альбомов типовой идентификации линейных объектов (предложен С.А. Анисимовым и Н.С. Райбманом) [4, 13].

В таблицах типовой идентификации для наиболее характерных авто- и взаимно-корреляционных функций приводятся соответствующие выражения для передаточных и весовых (импульсных переходных) функций, полученные аналитическим путем, либо методом моделирования. Эти альбомы включают соответствующие им уравнения и параметры динамических моделей объектов. Это позволяет исследователю по виду соответствующих корреляционных функций оценить структуру и параметры динамических моделей линейных объектов.

Третий способ заключается в численном решении уравнения Винера–Хопфа (4.15) [13].

Сущность численного метода заключается в возможности представления уравнения (4.15) системой линейных алгебраических уравнений. Для такого представления учитывают, что при $t \leq 0$ весовая функция $w(t) = 0$, а интервал взаимной корреляции τ_{yx} разбивают на m равных интервалов $\tau = T_{ц}, 2T_{ц}, \dots, mT_{ц}$. Тогда интегральное уравнение (4.15) может быть приближено представлено в виде следующей конечной суммы:

$$\frac{1}{T_{ц}} K_{yx}^*(t) = \sum_{i=0}^m w_i K_x^*(t - iT_{ц}), \quad (4.17)$$

где $w_i = w(iT_{ц})$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Таким образом, по всем значениям $t = T_{ц}, 2T_{ц}, \dots, mT_{ц}$ получим m линейных алгебраических уравнений для определения m значений ординат весовой функции $w(t)$ в точках $T_{ц}, 2T_{ц}, \dots, mT_{ц}$ (рис. 4.8).

В матричном виде эту систему линейных уравнений можно представить в виде:

$$\bar{K}_x \bar{W} = \bar{K}_{yx}, \quad (4.18)$$

где \bar{K}_x – корреляционная матрица, составленная по значениям ординат корреляционной функции входной случайной функции $X(t)$:

$$\bar{K}_x = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$K_{ij} = K_{ji}$, $K_{ij} = K_{x(j-i)}$, $i, j = 1, 2, \dots, m$;

\bar{K}_{yx} – матрица-столбец, элементами которой являются ординаты взаимной корреляционной функции входа и выхода:

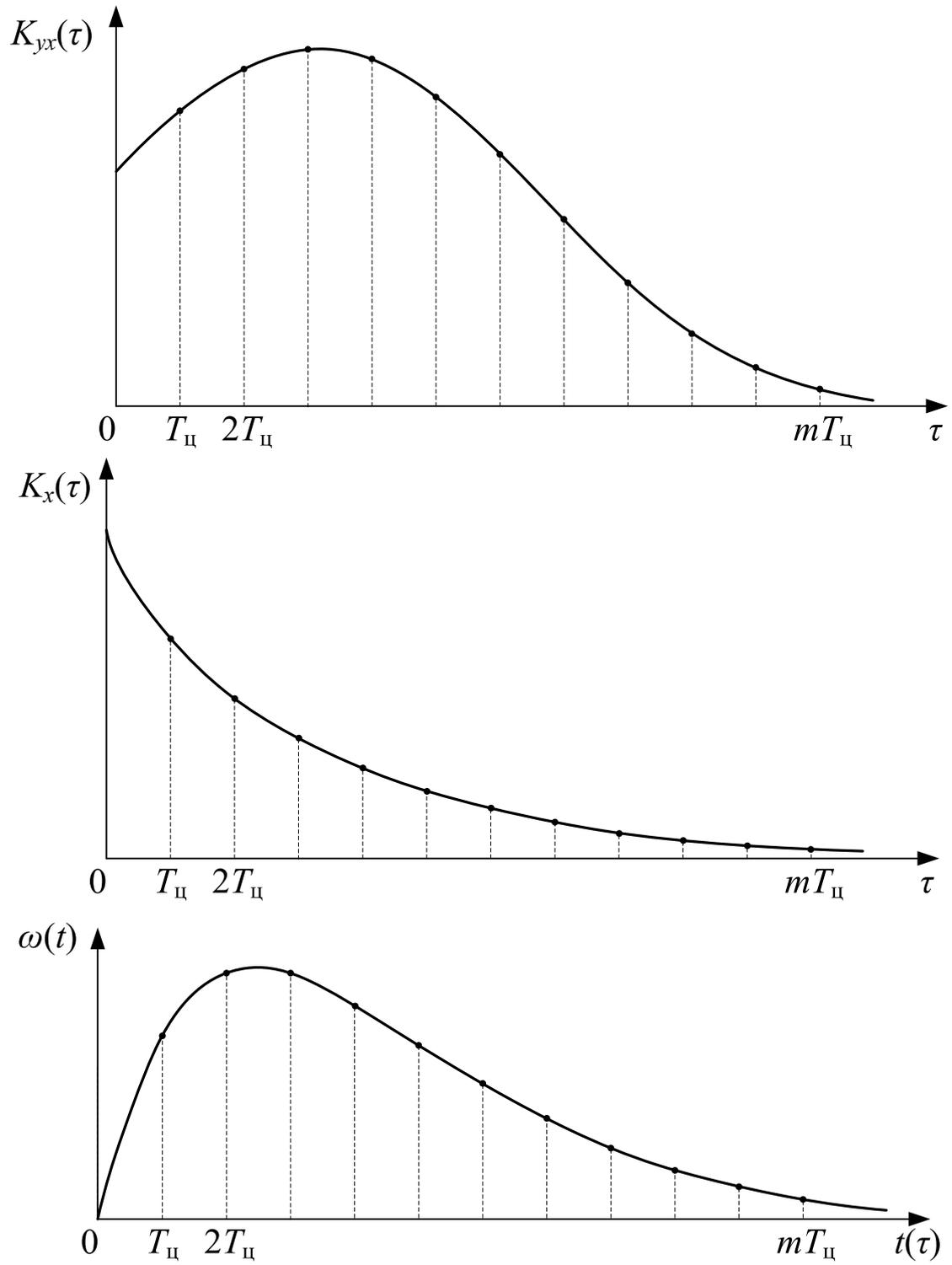


Рис. 4.8. Иллюстрация численного метода решения уравнения Винера–Хопфа

$$\bar{K}_{yx} = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{K}_2 \\ \vdots \\ \bar{K}_m \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_i = \frac{K_{yx}(iT_{ц})}{T_{ц}}; \quad (4.20)$$

\bar{W} – матрица-столбец, состоящая из элементов, представляющих собой значения ординат искомой весовой функции:

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_m \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Как правило, решение уравнения (4.18) осуществляется на ПЭВМ.

Полученные значения ординат весовой функции w_i , $i = 1, 2, \dots, m$ используются для представления аналитическим выражением путем соответствующей аппроксимации.

При наличии формулы весовой функции для рассматриваемого класса стационарных линейных объектов аналитически получают другие характеристики объектов (переходную функцию, передаточную функцию, амплитудно-фазовую частотную характеристику, дифференциальное уравнение исследуемого объекта).

Можно определить вид и параметры динамической модели линейного стационарного объекта используя частотные статистические характеристики случайных процессов (рис. 4.9).

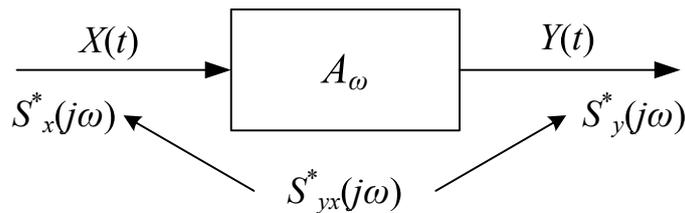


Рис. 4.9. Определение оператора A_{ω} исследуемого объекта с помощью частотных статистических характеристик случайных процессов

Используя оценки спектральных плотностей S_x^* , S_y^* и S_{yx}^* , находят амплитудно-фазовую частотную характеристику исследуемого объекта по формуле [13]:

$$W^*(j\omega) = \frac{S_{yx}^*(j\omega)}{S_x^*(\omega)}. \quad (4.22)$$

Квадрат модуля АФЧХ определяется выражением:

$$|W^*(j\omega)|^2 = \frac{S_y^*(\omega)}{S_x^*(\omega)}, \quad (4.23)$$

соответственно амплитудно-частотную характеристику объекта находят по формуле:

$$A^*(\omega) = \sqrt{\frac{S_y^*(\omega)}{S_x^*(\omega)}}. \quad (4.24)$$

По найденным таким образом частотным характеристикам определяют необходимые временные характеристики объекта:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad (4.25)$$

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau.$$

4.3 Статистические оценки показателей качества работы систем автоматического управления

Для реальных систем автоматического управления внешние воздействия, прежде всего возмущающие воздействия, а также задающие воздействия в следящих системах являются случайными процессами.

При действии случайных возмущений в системе никогда не наступает установившийся режим – она непрерывно переходит из одного состояния в другое (рис. 4.10). Поэтому оценку качества работы систем автоматического управления в реальных условиях обычно производят при помощи статистических характеристик, а именно по математическому ожиданию и среднему квадратичному отклонению регулируемой величины $X(t)$.

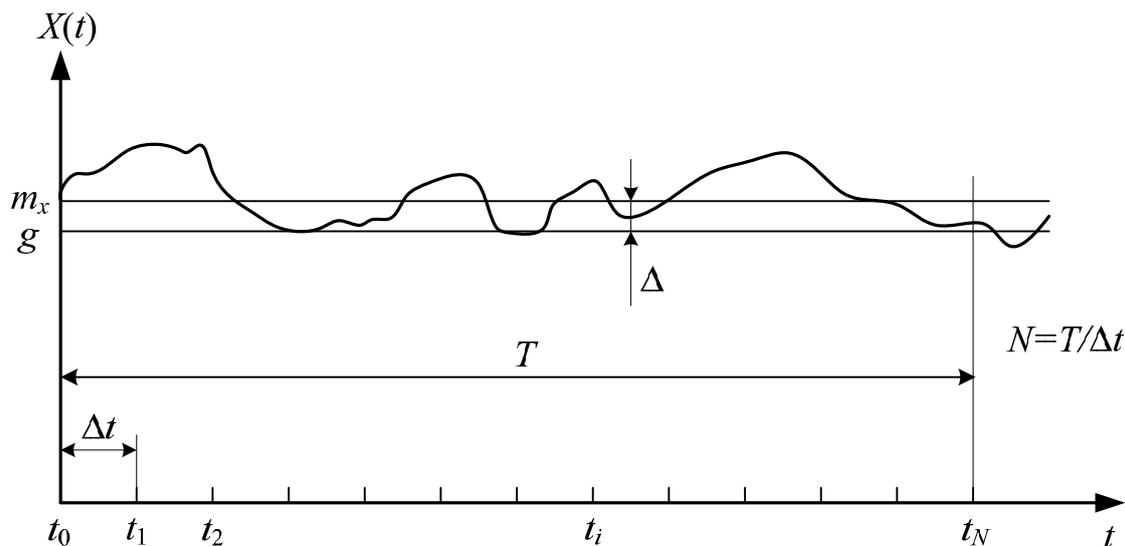


Рис. 4.10. Реализация управляемой переменной $X(t)$

Основными статистическими оценками качества работы систем автоматического управления (регулирования) служат среднее квадратичное отклонение регулируемой величины от ее математического ожидания σ_x^* и смещение математического ожидания регулируемой величины от заданного значения (уставки) $-\Delta = g - m_x^*$.

Знание σ_x^* позволяет также по неравенству Чебышева определить вероятность отклонения регулируемой величины $X(t)$ в определенный момент времени t_k от значения m_x^* на любое фиксированное значение Δx_n (обычно под Δx_n понимают значение, установленное технологической нормой):

$$P[|X(t_k) - m_x^*| \leq \Delta x_n] \leq \frac{D_x^*}{\Delta x_n^2}. \quad (4.26)$$

Иногда качество регулирования определяют не по среднему квадратичному отклонению регулируемой величины, а по относительному числу значений регулируемой величины, находящихся в фиксированной области, или по относительному времени, в течение которого регулируемая величина находится в фиксированной области.

Статистические показатели качества функционирующих систем автоматического управления оцениваются по трендам (реализациям) управляемой (регулируемой) величины с использованием методик оценки характеристик случайных процессов.

Точечные оценки математического ожидания и дисперсии эргодического стационарного случайного процесса (рис. 4.10) определяются по формулам:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^N x(t_i)}{N}; D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^N [x(t_i) - m_x^*]^2}{N-1}. \quad (4.27)$$

Интервальные оценки этих числовых характеристик вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} m_x^* - \frac{t_{(N-1); \alpha} \sigma_x^*}{\sqrt{N}} \leq m_x \leq m_x^* + \frac{t \sigma_x^*}{\sqrt{N}}; \\ \frac{D_x^*(N-1)}{\chi_{(N-1); \frac{\alpha}{2}}^2} \leq D_x \leq \frac{D_x^*(N-1)}{\chi_{(N-1); (1-\frac{\alpha}{2})}^2}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Используя выражение (4.27), оценивают среднее квадратичное отклонение регулируемой координаты от ее математического ожидания:

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*}$$

и смещение математического ожидания регулируемой координаты от уставки (статическую ошибку):

$$\Delta = g - m_x^*.$$

По этим двум критериям и оценивается качество работы функционирующей системы автоматического управления (регулирования).

Для оценки статистических критериев качества системы автоматического управления при ее проектировании необходимы:

- математическое описание замкнутой САУ;
- временные либо частотные статистические характеристики (корреляционные функции либо спектральные плотности) входных случайных воздействий (возмущающих и задающих для следящих систем).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель – 10-е изд., стер. – М.: Академия, 2005. – 576 с.
2. Ицкович Э.Л. Статистические методы при автоматизации производства / Э.Л. Ицкович. – М.: Энергия, 1964. – 192 с.
3. Закс Л. Статистическое оценивание: пер. с нем. / Л. Закс. – М.: Статистика, 1976. – 599 с.
4. Анисимов С.А. и др. Типовые линейные модели объектов управления / С.А. Анисимов и др. / под ред. Н.С. Райбмана. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 264 с.
5. Бондарь А.Г. Планирование эксперимента в химической технологии. Основные положения, примеры и задачи / А.Г. Бондарь, Г.А. Статюха. – Киев: Высшая школа, 1976. – 183 с.
6. Бондарь А.Г. Планирование эксперимента при оптимизации процессов химической технологии: алгоритмы и примеры / А.Г. Бондарь, Г.А. Статюха, И.А. Потяженко. – Киев: Высшая школа, 1980. – 203 с.
7. Астапов Ю.М. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления / Ю.М. Астапов, В.С. Медведев. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
8. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров – 2-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.
9. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман – 10-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2005. – 404 с.
10. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2007. – 573 с.
11. Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 2003. – 400 с.
12. Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов / А.М. Дейч. – М.: Энергия, 1979. – 240с.
13. Райбман Н.С. Построение моделей процессов производства / Н.С. Райбман и В.М. Чадеев. – М.: Энергия, 1975. – 375 с.
14. Ицкович Э.Л. Контроль производства с помощью вычислительных машин / Э.Л. Ицкович. – М.: Энергия, 1975. – 417 с.

15. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных: пер. с англ. / Дж.С. Бендат, О.Дж. Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
16. Егоров А.Е. Исследование устройств и систем автоматики методом планирования эксперимента / А.Е. Егоров, Г.Н. Азаров, А.В. Коваль. – Харьков: Высшая школа, 1986. – 240 с.
17. Рузинов Л.П. Планирование эксперимента в химии и химической технологии / Л.П. Рузинов, Р.И. Слободчикова. – М.: Химия, 1980. – 280 с.
18. Реймаров Г.А. Первичная переработка информации в АСУ ТП / Г.А. Рейманов. – М.: ЦНИАТОМИНФОРМ, 1980. – 95 с.

УКАЗАТЕЛЬ СОКРАЩЕНИЙ

- АКФ – автокорреляционная функция;
- ВКФ – взаимная корреляционная функция;
- АФЧХ – амплитудно-фазовая частотная характеристика;
- ДФЭ – дробный факторный эксперимент;
- ПФЭ – полный факторный эксперимент;
- ПЭЭ – планирование экстремальных экспериментов.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

Распределения выборочных статистик

Таблица А.1

Распределение Стьюдента (доверительные границы)

Число степеней свободы	Вероятность ошибки α для двухстороннего критерия									
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001	
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619	6366,198	
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,598	99,992	
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924	28,000	
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	15,544	
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	11,178	
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	9,082	
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7,885	
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	7,120	
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	6,594	
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	6,221	
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	5,921	
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	5,694	
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	5,513	
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	5,363	

Продолжение табл. А.1

Число степеней свободы	Продолжение табл. А.1									
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001	
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	5,239	
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	5,134	
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	5,044	
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	4,966	
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	4,897	
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	4,837	
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819	4,784	
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792	4,736	
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767	4,693	
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745	4,654	
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	4,619	
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707	4,587	
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690	4,558	
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674	4,530	
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659	4,506	
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	4,482	
35	0,682	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591	4,389	
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	4,321	
45	0,680	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281	3,520	4,269	
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	4,228	
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	4,169	
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435	4,127	

Окончание табл. А.1

Число степеней свободы	Окончание табл. А.1									
	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001	
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	4,096	
90	0,677	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402	4,072	
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	4,053	
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373	4,025	
200	0,676	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	3,970	
500	0,675	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	3,922	
1000	0,675	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300	3,906	
∞	0,675	11,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,290	3,891	

Таблица А.2

 χ^2 -распределение (доверительные границы)

Число степеней свободы	Вероятность ошибки α															
	0,99	0,975	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001		
1	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	0,064	0,148	0,455	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83		
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,446	0,713	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82		
3	0,115	0,216	0,352	0,584	1,00	1,42	2,37	3,66	4,64	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27		
4	0,297	0,484	0,711	1,064	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47		
5	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52		
6	0,872	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46		
7	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,88	9,80	12,02	14,07	16,01	18,48	24,32		
8	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,36	15,51	17,53	20,09	26,12		
9	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88		
10	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59		
11	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,28	19,68	21,92	24,73	31,26		
12	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91		
13	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53		
14	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,2	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12		
15	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70		
16	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,54	26,30	28,85	32,00	39,25		
17	6,41	7,56	8,67	10,08	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79		
18	7,01	8,23	9,39	10,86	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	25,99	28,87	31,53	34,81	42,31		
19	7,63	8,91	10,12	11,65	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82		
20	8,26	9,59	10,85	12,44	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32		

Окончание табл. А.2

Число степеней свободы	0,99	0,975	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
22	9,54	10,98	12,34	14,04	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
24	10,86	12,40	13,85	15,66	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,20	36,42	39,36	42,98	51,18
26	12,20	13,84	15,38	17,29	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
28	13,56	15,31	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
30	14,95	16,79	18,49	20,60	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70
35	18,51	20,57	22,46	24,8	27,8	30,2	34,3	38,9	41,8	46,06	49,80	53,20	57,34	66,62
40	22,16	24,43	26,51	29,05	32,3	34,9	39,3	44,2	47,3	51,81	55,76	59,34	63,69	73,40
50	29,71	32,36	34,76	37,69	41,4	44,3	49,3	54,7	58,2	63,17	67,50	71,42	76,15	86,66
60	37,48	40,48	43,19	46,46	50,6	53,8	59,3	65,2	69,0	74,40	79,08	83,30	88,38	99,61
80	53,54	57,15	60,39	64,28	69,2	72,9	79,3	86,1	90,4	96,58	101,88	106,63	112,33	124,84
100	70,06	74,22	77,93	82,36	87,9	92,1	99,3	106,9	111,7	118,50	124,34	129,56	135,81	149,45
120	86,92	91,57	95,70	100,62	106,8	111,4	119,3	127,6	132,8	140,23	146,57	152,21	158,95	173,62
150	112,7	118,0	122,7	128,3	135,3	140,5	149,3	158,6	164,3	172,6	179,6	185,8	193,2	209,3
200	156,4	162,7	168,3	174,8	183,0	189,0	199,3	210,0	216,6	226,0	234,0	241,1	249,4	267,5

Таблица А.3

Критерий Кохрена при уровне значимости $\alpha = 0,05$

$\nu_1 \backslash \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8584	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6941	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3508	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3907	0,3726	0,3555	0,3384	0,3254	0,3154	0,2756	0,2277	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2606	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3204	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0677
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0958	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0766	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Таблица А.4

Верхние доверительные границы F -распределения для $\alpha = 0,05$
 ($\beta = 95\%$); v_1 – число степеней свободы числителя; v_2 – число степеней
 свободы знаменателя

$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,9	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

Окончание табл. А.4

$v_1 \backslash v_2$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Учебное издание

ДЯДИК Валерий Феодосиевич
БАЙДАЛИ Сергей Анатольевич
БАЙДАЛИ Тамара Алексеевна

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор
*доктор технических наук,
профессор С.Н. Ливенцов*

Дизайн обложки *О.Ю. Аршинова*

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати 09.09.2011. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 8,38. Уч.-изд. л. 7,57.
Заказ 1200-11. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  **ТПУ**. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru