МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЮРГИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

У Т В Е Р Ж Д А Ю
Зам. директора по УР

___________ В.Л. Бибик

"___"__________2014 г.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ. АППРОКСИМАЦИЯ

Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу «Математическое моделирование процессов сварки, пайки и наплавки» для студентов, обучающихся по специальности 150202 «Оборудование и технология сварочного производства» и направлению 150700 «Машиностроение», профиль «Оборудование и технология сварочного производства» всех форм обучения

Юрга 2014

УДК 681.332

Обработка результатов экспериментальных исследований. Аппроксимация: Методические указания к выполнению лабораторной работы по курсу «Математическое моделирование процессов сварки, пайки и наплавки» для студентов, обучающихся по специальности 150202 «Оборудование и технология сварочного производства» и направлению 150700 «Машиностроение», профиль «Оборудование и технология сварочного производства» всех форм обучения. – Юрга: Изд. ЮТИ ТПУ, 2014. – 17 с.

Составитель: к.т.н., доцент Д.А. Чинахов

Рецензент к.т.н., доцент А.В. Проскоков

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании кафедры сварочного производства «_____» ____________ 2014 г.

Зав. кафедрой
к.т.н., доцент ______________________ Е.А. Зернин

ВВЕДЕНИЕ

Широкая автоматизация и механизация технологических процессов и применение в машиностроении все более высококачественных и труднообрабатываемых конструкционных металлов выдвигает перед исследователями новые сложные задачи и требования. К ним в первую очередь относится повышение научно-теоретического уровня, как методики экспериментальных исследований, так и подходов и способов математической обработки и обобщения результатов эксперимента, удовлетворяющих требованиям автоматизированного производства.

Начиная с двадцатых годов широкое распространение получила методика аппроксимации, основанная на использовании системы двойных логарифмических координат для графической обработки результатов экспериментальных исследований. В этой методике использовано свойство степенных уравнений параболы и гиперболы после логарифмирования трансформироваться в уравнение прямой.

Получить уравнение аппроксимации можно при помощи различных методик, которые выбираются в зависимости от требуемой точности уравнения аппроксимации. Построение уравнения аппроксимации с наименьшей погрешностью требует объемных и достаточно сложных вычислений.

Для автоматизации интеллектуального труда и повышения эффективности научных исследований используется ПЭВМ. Основная особенность ПЭВМ - ориентация на применение пользователями, не владеющими языками программирования. Такой подход позволяет преодолеть языковой барьер, отделяющий человека от машины. С этой целью разработаны пакеты прикладных программ, рассчитанные на широкие круги специалистов. К подобным пакетам относится MATHCAD.

MATHCAD - универсальный математический пакет, предназначенный для выполнения инженерных и научных расчетов. Основное преимущество пакета - естественный математический язык, на котором формулируются решаемые задачи. Объединение текстового редактора с возможностью использования общепринятого математического языка позволяет пользователю получить готовый итоговый документ. Пакет обладает широкими графическими возможностями. Практическое применение пакета существенно повышает эффективность интеллектуального труда.

1 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ

Пусть величина **у** является, функцией аргумента **х**. Это означает, что любому значению х из области определения поставлено в соответствие значение у. Вместе с тем на практике часто неизвестна явная связь между у и х, т. е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости у=F(x). В некоторых случаях даже при известной зависимости y=F(x) она настолько громоздка (например, содержит трудно вычисляемые выражения, сложные интегралы и т. п.), что ее использование в практических расчетах затруднительно.

Наиболее распространенным и практически важным случаем, когда вид связи между параметрами х и у неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы $\{x_i, y_i\}$. Это означает, что дискретному множеству значений аргумента $\{x_i\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}$ ($i = 0, 1, ..., n$). Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике нам могут понадобиться значения величины у и в других точках, отличных от узлов x_i. Однако получить эти значения можно лишь путем очень сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов.

Таким образом, с точки зрения экономии времени и средств мы приходим к необходимости использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра *у* при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра х, поскольку точная связь у= f(x) неизвестна.

Этой **цели** и служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функцию f(x) требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией φ(x) так, чтобы отклонение (в некотором смысле) φ(x) от f(x) в заданной области было наименьшим. Функция φ(x) при этом называется аппроксимирующей.

Для практики весьма важен случай аппроксимации функции многочленом

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m \ . \qquad (1)$$

При этом коэффициенты a_j будут подбираться так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от данной функции. Что касается самого понятия «малое отклонение», то оно будет уточнено в дальнейшем – при рассмотрении конкретных способов аппроксимации.

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, то аппроксимация называется *точечной*. К ней относятся интерполирование, среднеквадратичное приближение и др. При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке. [a, b]) аппроксимация называется *непрерывной* (или *интегральной*).

Из числа эмпирических формул для аппроксимации результатов эксперимента особый интерес представляет уравнение

$$y=ax^be^{cx} \ . \qquad (2)$$

Помимо аргумента *х* уравнение (3) содержит еще три константы *a, b* и *c*. Применительно к описанию результатов экспериментального исследования процессов резания константа a>0 и может быть равна любому дробному или целому числу. Константа b – показатель степени при аргументе x и константа c, входящая как сомножитель в показатель степени при **e**, могут быть как положительными, так и отрицательными величинами.

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ УРАВНЕНИЯ $y = ax^b e^{cx}$

Эмпирическое уравнение $y = ax^b e^{cx}$ содержит три константы a, b и c, числовые значения которых могут быть определены различными способами.

Первый, наиболее простой способ определения значений всех трех констант заключается в составлении четырех уравнений. Для этого на выровненной кривой, плавно проведенной через отложенные на графике опытные точки, берутся четыре произвольные точки с координатами $x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, x_4 y_4$. Если на кривой имеются участки, которые должны быть подвергнуты наиболее точной аппроксимации, то точки для расчета констант надо брать на этом участке. Таким образом, могут быть написаны четыре частных уравнения:

$$y_1 = ax_1^b e^{cx_1};\, y_2 = ax_2^b e^{cx_2};\, y_3 = ax_3^b e^{cx_3};\, y_4 = ax_4^b e^{cx_4}.$$

После логарифмирования имеем

$$\lg y_1 = \lg a + b\lg x_1 + cx_1 \lg e; \lg y_2 = \lg a + b\lg x_2 + cx_2 \lg e;$$

$$\lg y_3 = \lg a + b\lg x_3 + cx_3 \lg e; \lg y_4 = \lg a + b\lg x_4 + cx_4 \lg e.$$

Вычитанием попарно первого уравнения из второго и третьего из четвертого исключается константа a и получаем два уравнения с двумя неизвестными b и c:

$$\begin{aligned} &\lg y_2 - lgy_1 = b(\lg x_2 - \lg x_1) + c\lg e(x_2 - x_1); \\ &\lg y_4 - lgy_3 = b(\lg x_4 - \lg x_3) + c\lg e(x_4 - x_3). \end{aligned} \qquad (3)$$

Разрешив оба уравнения относительно c lg **e** и приравняв их, получаем

$$\frac{\lg y_2 - Lgy_1 = b(\lg x_2 - \lg x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\lg y_4 - lgy_3 = b(\lg x_4 - \lg x_3)}{x_4 - x_3}$$

откуда

$$b = \frac{\left(\lg y_2 - lgy_1\right)(x_4 - x_3) - \left(\lg y_4 - lgy_3\right)(x_2 - x_1)}{\left(\lg x_2 - \lg x_1\right)(x_4 - x_3) - \left(\lg x_4 - \lg x_3\right)(x_2 - x_1)}$$

Разделив числитель и знаменатель на $x_2 - x_1$

$$\frac{\left(\lg y_2 - lgy_1\right)\left(\dfrac{x_4 - x_3}{x_2 - x_1}\right) - \left(\lg y_4 - lgy_3\right)}{\left(\lg x_2 - \lg x_1\right)\left(\dfrac{x_4 - x_3}{x_2 - x_1}\right) - \left(\lg x_4 - \lg x_3\right)}$$

и обозначив

$$\triangle x_{21} = x_2 - x_1; \qquad \triangle x_{43} = x_4 - x_3;$$

$$\triangle \lg y_{21} = \lg y_2 - \lg y_1; \qquad \triangle \lg x_{21} = \lg x_2 - \lg x_1;$$

$$\triangle \lg y_{43} = \lg y_4 - \lg y_3; \qquad \triangle \lg x_{43} = \lg x_4 - \lg x_3,$$

получим расчетное уравнение для определения константы

$$b = \frac{\triangle \lg y_{21}\left(\dfrac{\triangle x_{43}}{\triangle x_{21}}\right) - \triangle \lg y_{43}}{\triangle \lg x_{21}\left(\dfrac{\triangle x_{43}}{\triangle x_{21}}\right) - \triangle \lg x_{43}}. \tag{4}$$

Полагая из уравнения (3) величину константы b известной из уравнения (4) с двумя неизвестными, находим расчетное уравнение для определения константы

$$c = \frac{\triangle \lg y_{21} - b \triangle \lg x_{21}}{\triangle x_{21} \lg e} = \frac{\triangle \lg y_{43} - b \triangle \lg x_{43}}{\triangle x_{43} \lg e}. \tag{5}$$

Найдя по уравнениям (3) и (5)константы b и c, находим третью константу

$$a = \frac{y_1}{x_1^b e^{cx_1}} = \frac{y_2}{x_2^b e^{cx_2}} = \frac{y_n}{x_n^b e^{cx_n}}. \tag{6}$$

Значение константы a целесообразно вычислять по координатам x и y точки, в которой желательно иметь наименьшие отклонения расчетной ординаты y_p от заданной.

Вычисление констант b и c может быть облегчено, если производить подготовительные расчеты в порядке, приведенном в табл. 1, с последующей подстановкой вычисленных числовых значений в расчетные уравнения (4) и (5).

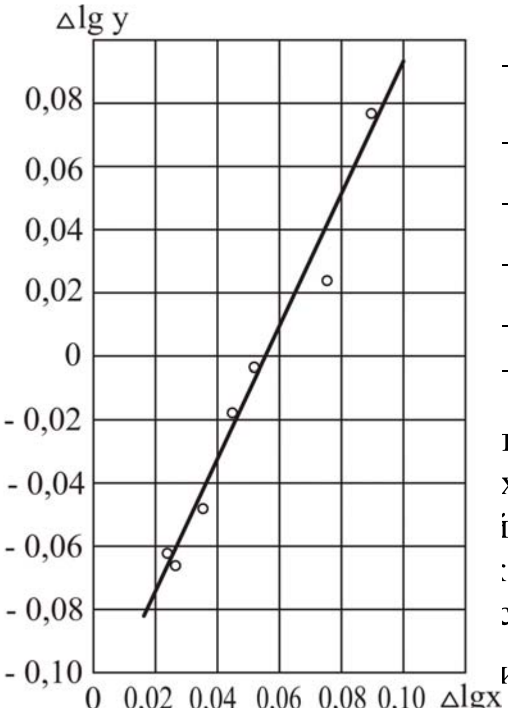


Таблица 1

$\triangle x_{43} : \triangle x_{12}$	lgx	lgy	$\triangle lgx$	$\triangle lgy$
-	lgx_1	lgy_1	$\triangle lgx_{21}$	$\triangle lgy_{21}$
	lgx_2	lgy_2		
-	lgx_3	lgy_3	$\triangle lgx_{43}$	$\triangle lgy_{43}$
	lgx_4	lgy_4		

тся в составлении двух условных уравнений для х величины и знака констант b и c. Как и по пер- і кривой, проведенной через опытные точки, бе- :. Если значения координат взятых точек обра- :сию с разностью h, то пригодность уравнения и опытной кривой может быть проверена выравниванием $\triangle lg\, x$ и $\triangle lg\, y$. Для этого требуется, чтобы на дополнительном графике рис.1 с миллиметровыми шкалами точки, отложенные по вычисленным и

Рис. 1. Проверка выравниванием $\triangle lg\ x$ и $\triangle lg\ y$ для случаев, когда протокольные значения x образуют арифметическую прогрессию.

приведенным в табл. 2 значениям $\vartriangle lg\ x$ и $\vartriangle lg\ y$ как координатам, достаточно точно располагались бы по прямой линии. В этом случае для определения величины и знака констант *b* и *c* ищется линейная зависимость между $\vartriangle lg\ x$ и $\vartriangle lg\ y$ по методу средних, используя условное уравнение

$$\vartriangle \lg y = ch \lg e + b \vartriangle \lg x$$

Чтобы облегчить вычислительные действия в табл. 2 вносятся необходимые для расчета записи и предварительные промежуточные результаты счета. В графах 1 и 2 записываются координаты точек *x* и *y;* в графах 3 и 4 записываются логарифмы lg *x* и lg *y,* а в графах 5 и 6 – разности логарифмов:

$$\vartriangle \lg x_{21} = \lg x_2 - \lg x_1; \qquad \vartriangle \lg y_{21} = \lg y_2 - \lg y_1;$$

$$\vartriangle \lg x_{32} = \lg x_3 - \lg x_2; \qquad \vartriangle \lg y_{32} = \lg y_3 - \lg y_2;$$

$$\vartriangle \lg x_{43} = \lg x_4 - \lg x_3; \qquad \vartriangle \lg y_{43} = \lg y_4 - \lg y_3.$$

Чтобы по данным табл. 2 составить два условных уравнения,. все *n* записанные в табл. 2 значения $\vartriangle lg\ x$ и $\vartriangle lg\ y$ делятся на две равные или примерно равные группы. В первую группу входят первые n_1 значений $\vartriangle lg\ x$ и $\vartriangle lg\ y$; во вторую группу – остальные $n - n_1$.

Суммируя все n_1 условных уравнений, составляющих первую группу, и все $n - n_1$, составляющие вторую группу, для каждой из них пишется одно суммарное условное:

$$\sum_{1}^{n_1} \vartriangle \lg y = n_1 hc \lg e + b \sum_{1}^{n_1} \vartriangle \lg x; \tag{7}$$

$$\sum_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg y = (n - n_1) hc \lg e + b \sum_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg x. \tag{8}$$

Таблица 2

1	2	3	4	5	6
x	*y*	*lgx*	*lgy*	$\vartriangle lgx$	$\vartriangle lgy$
x_1	y_1	lgx_1	lgy_1	$\vartriangle lgx_1$	$\vartriangle lgy_1$
x_2	y_2	lgx_2	lgy_2	$\vartriangle lgx_2$	$\vartriangle lgy_2$
x_3	y_3	lgx_3	lgy_3	$\vartriangle lgx_3$	$\vartriangle lgy_3$
x_4	y_4	lgx_4	lgy_4	$\vartriangle lgx_4$	$\vartriangle lgy_4$
x_5	y_5	lgx_5	lgy_5	$\vartriangle lgx_5$	$\vartriangle lgy_5$
				$\sum_{1}^{n_1} \vartriangle \lg x$	$\sum_{1}^{n_1} \vartriangle \lg y$
x_6	y_6	lgx_6	lgy_6	$\vartriangle lgx_6$	$\vartriangle lgy_6$
x_7	y_7	lgx_7	lgy_7	$\vartriangle lgx_7$	$\vartriangle lgy_7$
x_8	y_8	lgx_8	lgy_8	$\vartriangle lgx_8$	$\vartriangle lgy_8$
x_9	y_9	lgx_9	lgy_9	$\vartriangle lgx_9$	$\vartriangle lgy_9$

x_{10}	y_{10}	lgx_{10}	lgy_{10}	$\vartriangle lgx_{10}$	$\vartriangle lgy_{10}$
x_{11}	y_{11}	lgx_{11}	lgy_{11}	$\vartriangle lgx_{11}$	$\vartriangle lgy_{11}$
				$\sum\limits_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg x$	$\sum\limits_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg y$
x_{12}	y_{12}	lgx_{12}	lgy_{12}		
$\sum\limits_{1}^{n} x$		$\sum\limits_{1}^{n} \lg x$	$\sum\limits_{1}^{n} \lg y$		

Совместным решением уравнений (7) и (8) получается уравнение для вычисления величины и знака константы

$$b = \frac{n_1 \sum\limits_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg y - (n-n_1) \sum\limits_{1}^{n_1} \vartriangle \lg y}{n_1 \sum\limits_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg x - (n-n_1) \sum\limits_{1}^{n_1} \vartriangle \lg x} \qquad (9)$$

и для константы

$$c = \frac{\sum\limits_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg y \sum\limits_{1}^{n_1} \vartriangle \lg x - \sum\limits_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg x \sum\limits_{1}^{n_1} \vartriangle \lg y}{h \lg e \left[(n-n_1) \sum\limits_{1}^{n_1} \vartriangle \lg x - n_1 \sum\limits_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg x \right]} = \qquad (10)$$

$$\frac{\sum\limits_{n-n_1}^{n_1} \vartriangle \lg y - b \sum\limits_{1}^{n_1} \vartriangle \lg x}{n_1 n \lg e} = \frac{\sum\limits_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg y - b \sum\limits_{n-n_1}^{n} \vartriangle \lg x}{(n-n_1) n \lg e}.$$

Если значения координаты *x* взятых точек образуют геометрическую прогрессию с знаменателем *q,* то аппроксимация опытной кривой по уравнению $y = ax^b e^{cx}$ проверяется выравниванием *x* и $\vartriangle_1 lgy$. Для определения величины и знака констант *b* и *c* ищется линейная зависимость между *x* и $\vartriangle_1 lgy$ по методу средних, используя условное уравнение

$$\vartriangle_1 \lg y = b \lg q + c(q-1) \lg e x.$$

Необходимые для расчета записи и результаты предварительных расчетов заносятся в табл. 3. В графах 1 и 2 записываются координаты взятых точек *x* и *y,* в графах 3 и 4 – логарифмы *lg x* и *lg y;* в графах 5 и 6 разности логарифмов $\vartriangle \lg x = \lg x_n - \lg x_{n-1}$ и $\vartriangle \lg y = \lg y_n - \lg y_{n-1}$; в графу 7 – суммы $\vartriangle_1 lgy,$ подсчитанные в следующем порядке:

$\triangle_1 \lg y_1 = \triangle \lg y_1;$

$\triangle_1 \lg y_2 = \triangle \lg y_2 + \triangle \lg y_3;$

$\triangle_1 \lg y_3 = \triangle \lg y_3 + \triangle \lg y_4 + \triangle \lg y_5;$

$\triangle_1 \lg y_5 = \triangle \lg y_5 + \triangle \lg y_6 + \triangle \lg y_7 + \triangle \lg y_8 + \triangle \lg y_9.$

Чтобы по данным табл. 3 составить два условных уравнения, все записанные в графе *7n* значений $\triangle_1 lg\ y$ делятся на две группы. Суммируя все n_1 условных уравнений первой группы и все $n - n_1$, второй группы, получаем для каждой группы по суммарному уравнению:

$$\sum_{1}^{n_1} \triangle_1 \lg y = n_1 b \lg q + c(q-1)\lg e \sum_{n_1}^{n} x; \tag{11}$$

$$\sum_{n-n_1}^{n} \triangle_1 \lg y = (n-n_1) b \lg q + c(q-1)\lg e \sum_{n-n_1}^{n} x. \tag{12}$$

Совместным решением уравнений (9) и (10) находится уравнение для вычисления по нему величины и знака константы

$$b \frac{\sum\limits_{n-n_1}^{n} \triangle_1 \lg y \sum\limits_{1}^{n_1} x - \sum\limits_{1}^{n_1} \triangle \lg y \sum\limits_{n-n_1}^{n} x}{\lg q[(n-n_1)\sum\limits_{1}^{n} x - n_1 \sum\limits_{n-n_1}^{n} x} \tag{13}$$

и уравнение для константы

$$c \frac{n \sum\limits_{n-n_1}^{n} \triangle_1 \lg y - (n-n_1)\sum\limits_{1}^{n} \triangle_1 \lg y}{(q-1)\lg e[n_1 \sum\limits_{n-n_1}^{n} x - (n-n_1)\sum\limits_{1}^{n_1} x} = \frac{\sum\limits_{1}^{n} \triangle_1 \lg y - n_1 b \lg q}{(q-1)\lg e \sum\limits_{1}^{n_1} x} = \tag{14}$$

$$= \frac{\sum\limits_{n-n_1}^{n} \triangle_1 \lg y - (n-n_1) b q}{(q-1)\lg e \sum\limits_{n-n_1}^{n} x}.$$

Полагая константы b и c известными по уравнениям (13) и (14), третья константа *a,* применяя метод средних, может быть определена по суммарному условному уравнению, составленному для всех *n* значений *x* и *y,* записанных в табл. 2 и 3:

$$\sum_{1}^{n} \lg y = n \lg a + b \sum_{1}^{n} \lg x + c \lg e \sum_{1}^{n} x. \tag{15}$$

Решая уравнение (31) относительно *a,* имеем

$$\lg a = \frac{\sum_{1}^{n} \lg y - b \sum_{1}^{n} \lg x - c \lg e \sum_{1}^{n} x}{n}. \tag{16}$$

Значение средней величины третьей константы *a* определяется по значению *lg a,* вычисленному по уравнению (16).

Числовая величина константы *a* может быть вычислена также приемом, изложенным для первого способа определения констант *a, b* и *c*.

Таблица 3

x	y	lgx	lgy	$\triangle lgx$	$\triangle lgy$	$\triangle_1 lgy$
x_1	y_1	lgx_1	lgy_1	$\triangle lgx_1$	$\triangle lgy_1$	$\triangle_1 lgy_1$
x_2	y_2	lgx_2	lgy_2	$\triangle lgx_2$	$\triangle lgy_2$	$\triangle_1 lgy_2$
x_3	y_3	lgx_3	lgy_3	$\triangle lgx_3$	$\triangle lgy_3$	$\triangle_1 lgy_3$
$\sum_{1}^{n_1} x$						
x_4	y_4	lgx_4	lgy_4	$\triangle lgx_4$	$\triangle lgy_4$	$\triangle_1 lgy_4$
x_5	y_5	lgx_5	lgy_5	$\triangle lgx_5$	$\triangle lgy_5$	$\triangle_1 lgy_5$
x_6	y_6	lgx_6	lgy_6	$\triangle lgx_6$	$\triangle lgy_6$	$\triangle lgy_6$
$\sum_{n-n_1}^{n} x$						
x_7	y_7	lgx_7	lgy_7	$\triangle lgx_7$	$\triangle lgy_7$	
x_8	y_8	lgx_8	lgy_8	$\triangle lgx_8$	$\triangle lgy_8$	
x_9	y_9	lgx_9	lgy_9	$\triangle lgx_9$	$\triangle lgy_9$	
x_{10}	y_{10}	lgx_{10}	lgy_{10}	$\triangle lgx_{10}$	$\triangle lgy_{10}$	
x_{11}	y_{11}	lgx_{11}	lgy_{11}	$\triangle lgx_{11}$	$\triangle lgy_{11}$	
x_{12}	y_{12}	lgx_{12}	lgy_{12}			
$\sum_{1}^{n} x$		$\sum \lg x$	$\sum \lg y$			

Третий способ наименьших квадратов заключается в составлении трех нормальных уравнений для вычисления по ним величины и знака констант *a, b* и *c*. На выравнивающей кривой, проведенной через опытные точки, берутся несколько (8 - 12) точек, координаты *x* и *y* которых заносятся в табл. 4.

Выбранное для аппроксимации нелинейное уравнение

$$y = ax^b e^{cx}$$

может быть преобразовано в линейное логарифмированием. Выполнив логарифмирование, получим линейное условное уравнение

$$\lg a + b \lg x + cx \lg e = \lg y.$$

Обозначим в этом уравнении коэффициенты при искомых *lg a*, *b* и *c* соответственно через

$$k_1 = 1;$$

$$k_2 = \lg x;$$

$$k_3 = x \lg e;$$

тогда общий вид условного уравнения будет

$$k_1 \lg a + k_2 b + k_3 c = \lg y.$$

Таблица 4

n	x	x^2	lgx	$lg^2 x$	$xlgx$	y	lgy	$xlgy$	$lgxlgy$
n_1	x_1	x_1^2	lgx_1	$[lgx_1]^2$	x_1lgx_1	y_1	lgy_1	x_1lgy_1	lgx_1lgy_1
n_2	x_2	x_2^2	lgx_2	$[lgx_2]^2$	x_2lgx_2	y_2	lgy_2	x_2lgy_2	lgx_2lgy_2
n_3	x_3	x_3^2	lgx_3	$[lgx_3]^2$	x_3lgx_3	y_3	lgy_3	x_3lgy_3	$lgx_3\ lgy_3$
n_4	x_4	x_4^2	lgx_4	$[lgx_4]^2$	x_4lgx_4	y_4	lgy_4	x_4lgy_4	$lgx_4\ lgy_4$
n_5	x_5	x_5^2	lgx_5	$[lgx_5]^2$	x_5lgx_5	y_5	lgy_5	x_5lgy_5	$lgx_5\ lgy_5$
n_6	x_6	x_6^2	lgx_6	$[lgx_6]^2$	x_6lgx_6	y_6	lgy_6	x_6lgy_6	$lgx_6\ lgy_6$
n_7	x_7	x_7^2	lgx_7	$[lgx_7]^2$	x_7lgx_7	y_7	lgy_7	x_7lgy_7	$lgx_7\ lgy_7$
n_8	x_8	x_8^2	lgx_8	$[lgx_8]^2$	x_8lgx_8	y_8	lgy_8	x_8lgy_8	$lgx_8\ lgy_8$
n_9	x_9	x_9^2	lgx_9	$[lgx_9]^2$	x_9lgx_9	y_9	lgy_9	x_9lgy_9	$lgx_9\ lgy_9$
n_{10}	x_{10}	x_{10}^2	lgx_{10}	$[lgx_{10}]^2$	$x_{10}lgx_{10}$	y_{10}	lgy_{10}	$x_{10}lgy_{10}$	$lgx_{10}\ lgy_{10}$
	$\sum x$	$\sum x^2$	$\sum \lg x$	$\sum [\lg x]^2$	$\sum x \lg x$		$\sum \lg y$	$\sum x \lg y$	$\sum \mathrm{lgxlgy}$
$\sum k_1$	$\sum k_1 k_3$	$\sum k_3^2$	$\sum k_1 k_2$	$\sum k_2^2$	$\sum k_2 k_3$		$\sum k_1 \lg y$	$\sum k_3 \lg y$	$\sum k_2 \lg y$
n	$\mathrm{lge} \sum x$	$\lg^2 e \sum x^2$	$\sum \lg x$	$\sum [\lg x]^2$	$\lg e \sum x \lg x$		$\sum \lg y$	$\lg e \sum x \lg y$	$\sum \lg x \lg y$

По принципу Лежандра, для получения первого нормального уравнения, написанного для каждой пары табличных значении x и y условное уравнение помножается на коэффициент k_1 первого слагаемого; для получения второго нормального уравнения – помножается на коэффициент k_2 второго слагаемого; для получения третьего нормального уравнения помножается на коэффициент k_3 третьего слагаемого. Сумма всех условных уравнений, помноженных на k_1, дает первое, помноженных на k_2, дает второе и помноженных на k_3 - третье нормальное уравнение:

$$\lg a \sum_i k_1^2 + b \sum_i k_1 k_2 + c \sum_i k_1 k_3 = \sum_i k_1 \lg y; \tag{17}$$

$$\lg a \sum_i k_1\, k_2 + b \sum_i k_1^2 + c \sum_i k_2 k_3 = \sum_i k_2 \lg y; \tag{18}$$

$$\lg a \sum_i k_1 k_3 + b \sum_i k_2 k_3 + c \sum_i k_3^2 = \sum_i k_3 \lg y. \tag{19}$$

В нормальных уравнениях (17), (18) и (19) сомножители под знаком суммы являются коэффициентами при искомых *lg a*, *b*; и *c*. Для совместного решения нормальных уравнений с целью определения искомых необходимо знать числовые значения сумм, являющиеся в свою очередь функциями координат x и y точек, взятых на выравнивающей кривой. Эти функциональные зависимости следующие:

$$\sum_i k_1 = n;$$

$$\sum_i k_1 k_2 = \sum_i \lg x;$$

$$\sum_i k_1 k_3 = \lg e \sum_i x;$$

$$\sum_i k_2^2 = \sum_i (\lg x)^2;$$

$$\sum_i k_2 k_3 = \lg e \sum_i x \lg x;$$

$$\sum_i k_3^2 = \lg^2 e \sum_i x^2;$$

$$\sum_i k_1 \lg y = \sum_i \lg y;$$

$$\sum_i k_2 \lg y = \sum_i \lg x \lg y;$$

$$\sum_i k_3 \lg y = \lg e \sum_i x \lg y.$$

Вычисление суммарных коэффициентов проще выполнить, если придерживаться порядка, примененного в табл. 4. В каждую графу таблицы заносятся соответствующие числовые значения коэффициентов всех условных линейных уравнений, составленных для текущих значении координат x и y.

Во второй строке снизу для каждой графы таблицы записывается сумма всех чисел каждого столбца. В последней строке таблицы записываются подсчитанные числовые значения всех коэффициентов, входящих в уравнения (17), (18) и (19).

Зная (табл. 4) числовые значения всех коэффициентов, числовые значения и знаки искомых *lg a*, *b* и *c* находят совместным решением трех нормальных уравнений (17), (18) и (19). По вычисленному значению *lg a* определяется значение константы *a*.

Найденные по способу наименьших квадратов значения констант *a, b* и *c* подставляют в уравнение $y = ax^b e^{cx}$ и вычисляют расчетные значения функции y_p для всех табличных значений *x.* Разность заданных и вычисленных по уравнению значений $y - y_P = \varepsilon$ выражает суммарную ошибку ε, складывающуюся из ошибок, связанных с точностью аппроксимации найденным уравнением табличных данных и с точностью выполнения по аппроксимирующему уравнению расчетных действий.

Средняя квадратичная ошибка

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n-i}} = \sqrt{\frac{\sum [y - y_P]^2}{n-i}} \tag{20}$$

выражает возможную ошибку значения функции *y,* вычисленного по найденному уравнению. Это условие можно записать

$$y = ax^b e^{cx} \pm \varepsilon.$$

В уравнении (20) n – число взятых для расчета значений *x* и *y*; *i* – число вычисляемых констант (для уравнения $y = ax^b e^{cx}$ вычислялись константы *a, b* и *c,* поэтому i = 3).

3 СОСТАВЛЕНИЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Константы - это типы данных, имеющих неизменное значение во всей программе. Переменная - имеющий имя (идентификатор) элемент языка системы MATHCAD, который может нести определенное и неоднократно изменяемое по ходу выполнения документа числовое значение.

Пример:

Дана таблица экспериментальных значений (табл. 5). Требуется выполнить аппроксимацию результатов экспериментальных исследований по методу четырех точек и методу наименьших квадратов и получить уравнения аппроксимации вида $y = ax^b e^{cx}$. Построить графики функций. Оценить погрешность вычислений.

Таблица 7

Наименование	1	2	3	4	5	6
Скорость сварки, мм/с (управляемый параметр)	1	2	3	5	7	10
Ширина шва, мм	8.97	6.34	5.18	4.01	3.39	2.84

(целевая функция)						

Ход решения
метод четырех точек

Выбираем четыре точки 2, 3, 4, 5 из табл. 7.

$x2 := 2$ $\quad x3 := 3$ $\quad x4 := 5$ $\quad x5 := 7$

$b2 := 6.34$ $\quad b3 := 5.18$ $\quad b4 := 4.01$ $\quad b5 := 3.39$

Определяем значения, необходимые для расчета коэффициентов уравнения *a*, *b* и *c*.

$x32 := x3 - x2$ $\quad x54 := x5 - x4$

$x32 = 1$ $\quad x54 = 2$

$lgx32 := \log(x3) - \log(x2)$ $\quad lgx54 := \log(x5) - \log(x4)$

$lgx32 = 0.176$ $\quad lgx54 = 0.146$

$lgb32 := \log(b3) - \log(b2)$ $\quad lgb54 := \log(b5) - \log(b4)$

$lgb32 = -0.088$ $\quad lgb54 = -0.073$

Затем приступаем к расчету значений коэффициентов *a*, *b* и *c*.

$$bb := \frac{lgb32 \cdot \left(\frac{x54}{x32}\right) - lgb54}{lgx32 \cdot \left(\frac{x54}{x32}\right) - lgx54} \qquad cb := \frac{lgb32 - bb \cdot lgx32}{x32 \cdot \log(e)} \qquad ab := \frac{b4}{x4^{bb} \cdot e^{cb \cdot x4}}$$

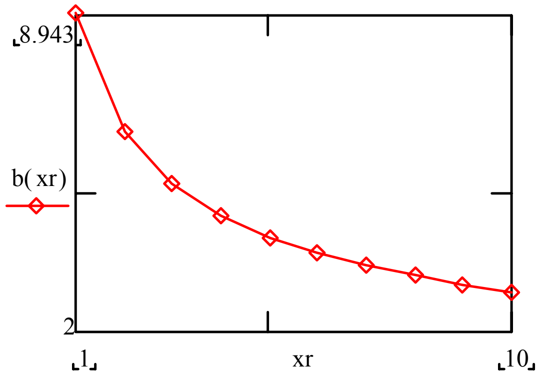
$bb = -0.498$ $\quad cb = -2.324 \cdot 10^{-4}$ $\quad ab = 8.945$

По найденным значениям составляем уравнение аппроксимации вида $y = ax^b e^{cx}$, находим расчетные значения целевой функции на заданном интервале управляемого параметра. Строим график аппроксимирующей функции.

$xr := 1..10$

$b(xr) := ab \cdot xr^{bb} \cdot e^{cb \cdot xr}$

xr =	b(xr) =
1	8.943
2	6.332
3	5.173
4	4.482
5	4.01
6	3.661
7	3.39
8	3.171
9	2.99
10	2.837



Определяем абсолютную погрешность уравнения аппроксимации в выбранных точках 2, 3, 4, 5.

$eb1 := b2 - b(2)$ $\quad eb1 = 7.977 \cdot 10^{-3}$

$eb2 := b3 - b(3)$ $\quad eb2 = 6.518 \cdot 10^{-3}$

$eb3 := b4 - b(5)$ $\quad eb3 = 0$

$eb4 := b5 - b(7)$ $\quad eb4 = 0$

Как видно из расчета погрешность стремится к нулю, т.е. полученное уравнение аппроксимации $y = 8.945 \cdot x^{-0.498} \cdot e^{-2.324 \cdot 10^{-4} \cdot x}$ можно использовать на практике.

Расчет по методу наименьших квадратов выполняется аналогично.

4 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Цель работы: Научиться аппроксимировать результаты экспериментальных исследований посредством эмпирического уравнения $y=ax^b e^{cx}$.

Задание: Используя программу моделирования формы шва, произвести моделирование формы шва по заданным параметрам. Выполнить аппроксимацию полученных результатов. Определить значение констант уравнения (a, b, c) двумя способами: по четырем точкам и способом наименьших квадратов. Оценить погрешность каждого способа.

Номер варианта соответствует последней цифре в зачетной книжке.

Варианты заданий

Последняя цифра зачетной книжки	Номер варианта
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
0	10

Определить зависимость:

1. Глубины проплавления от величины сварочного тока.
При U=27 В, D=1 мм, $V_{св}$=5 мм/с, КПД=0.85, полярность обратная.
2. Ширины шва от величины сварочного тока.
При U=27 В, D=1.2 мм, $V_{св}$=4 мм/с, КПД=0.8, полярность обратная.
3. Глубины проплавления от скорости сварки.
При I=220 А, D=1 мм, U=26 В, КПД=0.8, полярность прямая.
4. Ширины шва от скорости сварки.
При I=270 А, D=1.2 мм, U=24 В, КПД=0.65, полярность прямая.
5. Усиления шва от напряжения дуги.
При I=340 А, D=1.6 мм, $V_{св}$=5 мм/с, КПД=0.9, полярность прямая.
6. Глубины проплавления от диаметра электродной проволоки.
При U=26 В, $V_{св}$=5 мм/с, I=250 А, КПД=0.85, полярность прямая.
7. Ширины шва от диаметра электродной проволоки.
При U=30 В, $V_{св}$=6 мм/с, I=210 А, КПД=0.9, полярность прямая.
8. Усиления шва от диаметра электродной проволоки.
При U=27 В, $V_{св}$=7 мм/с, I=240 А, КПД=0.85, полярность прямая.
9. Усиления шва от величины сварочного тока.
При U=29 В, D=1.6 мм, $V_{св}$=5 мм/с, КПД=0.9, полярность обратная.
10. Глубины проплавления от скорости сварки.
При U=25 В, D=1.4 мм, I=300 А, КПД=0.85, полярность обратная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский Г.И. Обработка результатов экспериментальных исследований резания металлов. – М.: Машиностроение. 1982. – 112 с., ил.
2. Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. пособие. – М.: Гл. ред. Физ.-мат. лит. 1987. – 320 с.
3. Болгаев Ю. П. Вычислительная математика и программирование: Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высш. шк. 1990. – 544 с.: ил.
4. http://mathcad-2010.narod.ru/book.htm

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.
АППРОКСИМАЦИЯ

Методические указания

Составитель: к.т.н., доцент Д.А. Чинахов

Подписано к печати ______________
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Плоская печать. Усл. печ. л. 1,06 . Уч. изд.л. 0,89
Тираж ____ экз. Заказ № _____.
ЮТИ ТПУ. Лицензия ПЛД № 44-55 от 04.12.97.
Ризограф ЮТИ ТПУ. 652055, Юрга, ул. Московская, 17.