ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Л.М. Бер

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 517.518.15(075.8)
ББК 22.161.1я73
Б48

Бер Л.М.

Б48 Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / Л.М. Бер; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 80 с.

В пособии рассматриваются основные вопросы дифференциального исчисления функций одной переменной, предусмотренные программой курса «Математический анализ» для технических вузов. Содержит теоретический материал, примеры и задачи, иллюстрирующие теоретические положения, приводятся алгоритмы некоторых методов. Предлагаемые в пособии задания носят тренировочный характер и способствуют подготовке к письменному рубежному и итоговому контролю.

Предназначено для студентов высших технических учебных заведений, а также может быть полезно преподавателям, ведущим практические занятия.

УДК 517.518.15 (075.8)
ББК 22.161.1я73

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук, доцент ТГУ

Л.С. Копанева

Кандидат физико-математических наук, доцент ТГАСУ

Г.Д. Садритдинова

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие охватывает основные разделы дифференциального исчисления функций одной переменной и его назначение – помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. Материал составлен на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математическому анализу на факультете автоматики и вычислительной техники ТПУ.

Пособие имеет следующую структуру. В нем содержаться определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, приводятся доказательства наиболее важных теорем и выводы многих формул. Кроме того, в пособии приводятся примеры решения задач, иллюстрирующие теоретические положения и поясняющие рисунки, а также вопросы и задания для самопроверки.

Предполагается, что, приступая к изучению данного материала, студенты уже знакомы со следующими разделами высшей математики: линейная алгебра, аналитическая геометрия, введение в анализ.

Последний раздел «Исследование функций и построение графиков» представляет собой самостоятельную часть и не требует обязательного изучения предыдущих разделов. Он включает в себя все необходимые формулировки теорем и определения, возможно уже сформулированные ранее. Изучение характера поведения функции и построение ее графика – одна из важнейших задач математического анализа. Используя элементарное исследование функций и средства дифференциального исчисления можно провести глубокое и разностороннее изучение свойств функций и обосновать характерные качественные особенности.

Учебное пособие может быть использовано студентами всех технических специальностей для самостоятельной работы по изучению данного курса, а также преподавателями при подготовке лекционного курса и практических занятий.

1. ПРОИЗВОДНАЯ

1. 1. Определение производной

Дифференцированием называется операция нахождения производной функции. К понятию производной приводят многие задачи естествознания: задача о скорости прямолинейного движения, скорости химической реакции, плотности среды, теплоемкости тела. Все эти характеристики связаны со скоростью изменения функции, описывающей некоторый процесс. Скорость изменения функции можно определить с помощью последовательности действий, которая осуществляется независимо от конкретного физического смысла.

Понятие производной впервые появилось в физике в связи с понятием скорости.

***Задача* 1.** (*О вычислении скорости движущейся точки*) Пусть некоторая материальная точка (т. е. любое физическое тело, размерами которого можно пренебречь) движется прямолинейно и задан закон ее движения $s = s\ (t)$, т. е. известно расстояние s точки от некоторого начала отсчета в каждые момент времени t.

В момент времени t пройденное расстояние равно $s\ (t)$, в момент времени $t + \Delta t$ расстояние равно $s\ (t + \Delta t)$. За промежуток времени $(t,\ t + \Delta t)$ точка прошла путь $\Delta s = s\ (t + \Delta t) - s\ (t)$, $\Delta s/\Delta t$ – средняя скорость движения точки за промежуток времени $(t,\ t + \Delta t)$.

Средняя скорость движения на различных промежутках различна. Чем меньше промежуток времени Δt, тем точнее средняя скорость движения «характеризует» это движение в момент времени t. Поэтому предел средней скорости движения при стремлении Δt к нулю называют скоростью движения точки в данный момент времени t и обозначают $v\ (t)$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)\,.$$

***Задача* 2.** (*О вычислении скорости химической реакции*) Пусть $\gamma\,(t)$ есть количество вещества прореагировавшего за время t. В момент времени $t + \Delta t$ количество вещества будет $\gamma\ (t + \Delta t)$, т. е. за промежуток времени $(t,\ t + \Delta t)$ (время Δt) количество прореагировавшего вещества $\Delta\gamma = \gamma\,(t + \Delta t) - \gamma\,(t)$. Средняя скорость химической реакции за интервал времени Δt будет равна $\Delta\gamma/\Delta t$. Чтобы найти скорость химической реакции в данный момент времени t надо устремить Δt к нулю, то есть

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t} = \gamma'(t)\,.$$

Таким образом, производная от количества прореагировавшего вещества определяет скорость химической реакции.

Учитывая это, можно сказать, что производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ характеризует скорость изменения функции в зависимости от изменения аргумента.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Дадим аргументу x приращение Δx (при этом предполагается, что точка $x + \Delta x$ принадлежит области определения функции). Величина Δx называется приращением аргумента. В каждой из этих точек посчитаем значение функции $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$. Тогда можно говорить о приращении функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ (см. рис. 1).

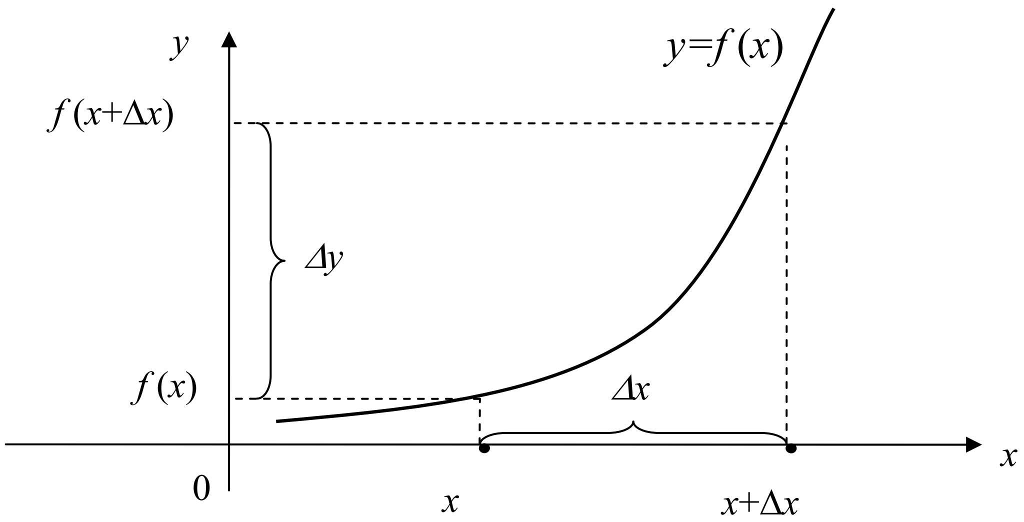


Рис. 1. Приращение функции и приращение аргумента

Определение. Если существует предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению аргумента Δx, при стремлении приращения аргумента к нулю, то он называется ***производной функции в точке x***

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Обозначения: $y', f'(x)$ или $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$.

Иногда производная обозначается не только штрихом, но еще указывается в виде нижнего индекса переменная, по которой берется производная, т. е. пишут y_x' а не просто y_x.

Если предел равен ∞, $+\infty$ и $-\infty$, то производная $f'(x)$ называется бесконечной.

В дальнейшем под выражением «функция имеет производную» будем понимать существование конечной производной, если не оговорено противное.

Как следует из определения, производная функции $f\,(x)$ в точке x есть число, зависящее от рассматриваемого значения x (но не зависящее от Δx). Рассматривая производную функции $f\,(x)$ в различных точка x, мы будем получать, вообще говоря, различные значения.

Можно сказать, что функция $f\,(x)$ «порождает» или производит функцию $f'\,(x)$.

Таким образом, производная $f'\,(x)$ является функцией переменной x, определенной в области определения функции $f\,(x)$ или в части этой области.

Если фиксировать значение x, например, положить $x = x_0$, то производная функции $f\,(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается:

$$f'\,(x_0),\ y'(x_0),\ y'\big|_{x=x_0},\ \frac{df\,(x_0)}{dx}.$$

Операция вычисления производной функции называется *дифференцированием* этой функции. Для нахождения производной от данной функции $y = f\,(x)$, согласно определению, необходимо выполнить следующие действия:

1. Придаем фиксированному аргументу $x \in D\,(f)$ приращение Δx и вычислим значения функции: $f\,(x)$ и $f\,(x + \Delta x)$.

2. Найдем соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f\,(x + \Delta x) - f\,(x).$$

3. Делим приращение функции на приращение аргумента, т. е. составляем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x}.$$

4. Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Этот предел и даст искомую производную от функции $y = f\,(x)$.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x}.$$

Пример 1.1. Найдите по определению производную функции $y = x^3$.

Решение. Дадим фиксированному аргументу $x \in D\,(f)$ приращение Δx. Тогда

1. $x \quad \to f\,(x) = x^3$;

$x + \Delta x \ \to f\,(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3$;

2. $\Delta y = f\,(x + \Delta x) - f\,(x) = (3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x^2)\Delta x$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)\Delta x}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2.$

4. $y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2\right)=3x^2.$

Следовательно, $(x^3)'=3x^2$.

1. 2. Физический и геометрический смысл производной

Физический смысл производной

Пусть значения y функции $y=f(x)$ и ее аргумент x являются некоторыми физическими величинами, причем аргумент x меняется на некотором промежутке, например на отрезке $[a, b]$. Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где $\Delta x=x-x_0$, $x_0\in[a, b]$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, называется средней скоростью изменения переменной y относительно переменной x на отрезке с концами x_0 и $x_0+\Delta x$, а предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

– *скоростью изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0*. В случае существования этой скорости приращение переменной y имеет вид

$$\Delta y=f'(x_0)\,\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0.$$

Это означает, что приращение Δy линейно зависит от приращения Δx переменной x с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Иначе говоря, существование скорости означает, что в малом физический процесс, описываемый функцией f, протекает почти линейно. Этим обстоятельством и объясняется широкое применение дифференциального исчисления при изучении самых разнообразных явлений.

Геометрический смысл производной

Рассмотрим задачу о проведении касательной к плоской кривой. В определение производной входят две операции: деление $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ и предельный переход при $\Delta x\to 0$.

Что же это дает? Нанося на график точки с координатами $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ мы получим фигуру изображенную на рис. 2. Проведем через точки M_0 и M прямую, которая называется секущей.

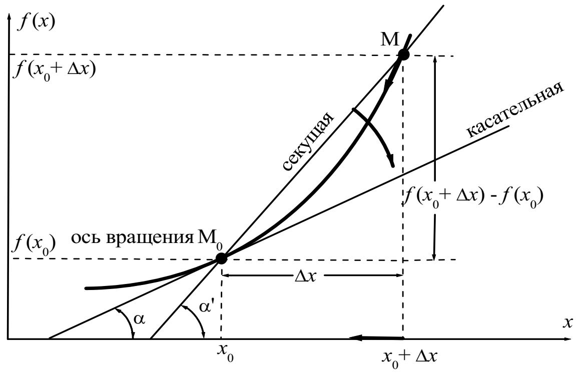


Рис. 2. Геометрический смысл производной

Тогда дробь $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ есть не что иное как $\mathrm{tg}\,\alpha'$, где α' есть угол наклона секущей к оси *Ox*. Но в определении производной есть еще предельный переход при $\Delta x \to 0$. Что же дает этот предельный переход?

При $\Delta x \to 0$ точка *M* начинает двигаться к точке M_0. При этом вся секущая будет поворачиваться около точки M_0 и в пределе она превратиться в касательную к точке M_0. Угол α' при этом перейдет в угол α, который эта касательная образует с осью *Ox*. Поэтому можно утверждать, что

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha = k\,,$$

где α – угол, образованный касательной к кривой в точке x_0 и осью *Ox*, *k* – угловой коэффициент касательной. И ***геометрический смысл производной***: производная от функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной в точке M_0 $(x_0, f(x_0))$ к графику функции $f(x)$.

С геометрической точки зрения дифференцируемость означает, что к графику функции в данной точке можно провести единственную невертикальную касательную.

Уравнения касательной и нормали к кривой

Определение. Касательной к графику функции в точке M_0 (x_0, y_0) назовем предельное положение секущей M_0M, когда точка *M*, двигаясь вдоль кривой, стремиться к совпадению с точкой M_0.

Прямая, проведенная через точку касания, перпендикулярно касательной к графику функции, называется ***нормалью***.

Заметим, что для записи уравнения касательной можно использовать любое из известных Вам уравнений прямой, где присутствует угловой коэффициент, например $y - y_0 = k(x - x_0)$. Тогда

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \ -$$
уравнение касательной к графику функции в точке M_0 (x_0, y_0) и $y_0 = f$ (x_0).

Используя условия перпендикулярности двух прямых $k_1 = -\dfrac{1}{k}$, где k_1 – угловой коэффициент нормали, запишем уравнение нормали к графику функции в точке M_0 (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

1. 3. Односторонние производные

Определение. Если функция $y = f(x)$ определена в левосторонней (правосторонней) окрестности точки x_0 и существует

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{=\!=}{\overset{}{\underline{об}}} f'(x_0 - 0) = f'_-(x_0),$$

то он называется ***производной*** от функции $y = f(x)$ в точке x_0 слева, а

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{=\!=}{\overset{}{\underline{об}}} f'(x_0 + 0) = f'_+(x_0)$$

производной в той же точке ***справа***.

Из теоремы о существовании конечного предела следует справедливость следующей теоремы.

***Теорема* 1.1.** (*Необходимое и достаточное условие существования производной в точке*)

Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке тогда и только тогда когда в этой точке существуют и равны между собой производные функции слева и справа, причем

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

***Теорема* 1.2.** (*Связь между дифференцируемостью функции в точке и ее непрерывностью в этой точке*)

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Пусть существует производная $f'(x_0)$. Тогда по определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

По теореме о роли б. м. в теории пределов получаем

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(\Delta x),$$

где $o(\Delta x)$ – б. м. при $\Delta x \to 0$ или $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \Delta x\cdot o(\Delta x)$.

Вычислим предел $\Delta f(x_0)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(x_0)\cdot\Delta x + \Delta x\cdot o(\Delta x)\right] = 0.$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. •

Следствие. Если существует производная $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \Delta x\cdot o(\Delta x)$, где $o(\Delta x)$ – б. м. при $\Delta x \to 0$.

Замечание. Теорема 1.2 утверждает, что непрерывность функции в точке является необходимым условием существования в этой точке производной. Обратное утверждение неверно.

Пример 1.2. Производные $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$ существуют, но не равны друг другу.

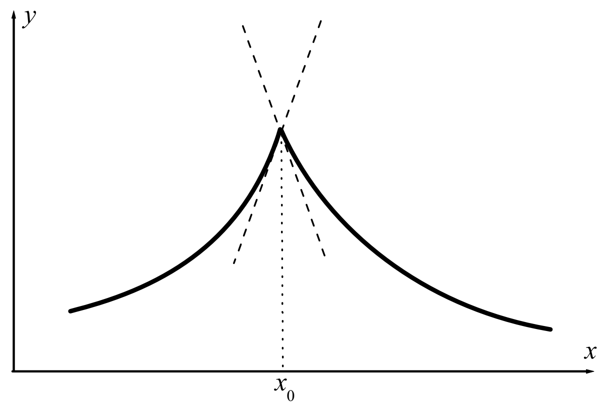


Рис. 3. Производные в точке x_0 слева и справа не равны

В этом случае не существует и $f'(x_0)$. График функции $f(x)$ имеет в точке x_0 в этом случае «излом», и в этой точке к графику можно провести две касательные (см. рис. 3.).

Например, функция $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не имеет производной. Вычислим производные слева и справа в точке $x_0 = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{x\to -0}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{(0+\Delta x) - 0} = \lim_{x\to -0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to +0}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{(0+\Delta x) - 0} = \lim_{x\to +0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Следовательно, $f'(-0) \neq f'(+0)$ и $f'(0)$ не существует и функция не дифференцируема.

Пример 1.3. Бесконечная производная.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$, определенную для значения $x \geq 0$ и найдем $f'(0)$. Имеем

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty .$$

Рассматривая график функции $f(x) = \sqrt{\text{x}}$ (рис. 4) легко увидеть, что это означает просто то, что в точке $x = 0$ касательная к графику параллельна оси Oy (вертикальная касательная).

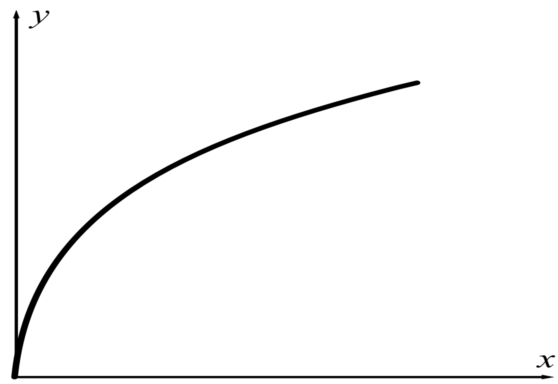


Рис. 4. График функции $f(x) = \sqrt{x}$

Пример 1.4. Производная не существует.

Наконец, может быть ситуация, когда предел, фигурирующий в определении производной, не существует.

Рассмотрим для примера, $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Так как $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$, то $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Поэтому, полагая $f(0) = 0$, получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right),$$

и этот предел просто не существует.

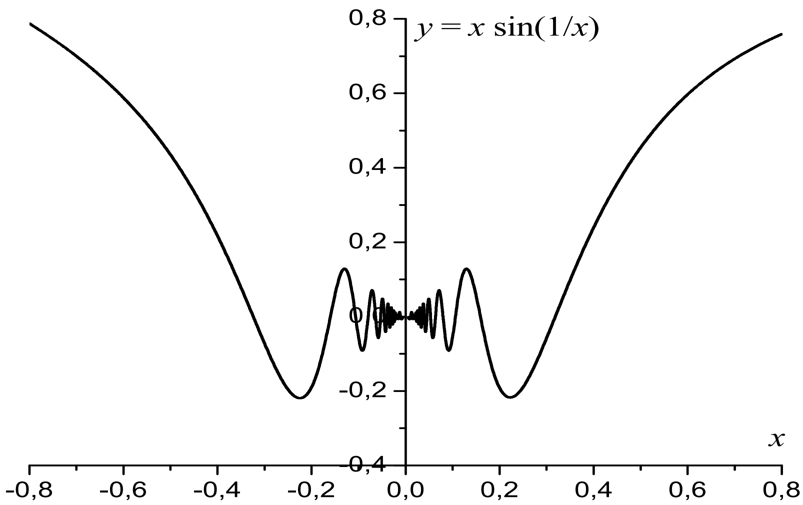


Рис. 5. График функции $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Из графика функции $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ видно, что с приближением к точке $x = 0$ касательная колеблется, не стремясь ни к какому определенному положению (рис. 5).

В математике построены даже примеры функций, которые являются непрерывными, но ни в одной точке не имеют производной.

1. 4. Основные правила дифференцирования

Выведем важнейшие формулы, касающиеся вычисления производных. В дальнейшем $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, у которых существуют $f'(x)$ и $g'(x)$.

***Теорема* 1.3.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые функции и c – константа, тогда справедливы соотношения.

1. $[cf(x)]' = cf'(x)$.

Доказательство. Вычислим производную

$$[cf(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x). \bullet$$

2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

Доказательство. Вычислим производную алгебраической суммы функций

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} =$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)$$

Аналогично выводится формула для разности $[f(x)-g(x)]'$.●

3. $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

Доказательство. Вычислим производную произведения

$$[f(x)\cdot g(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}=$$

В числителе дроби прибавим и вычтем комбинацию $f(x+\Delta x)g(x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)}{\Delta x}\right]+\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=f(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot f'(x).●$$

4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказательство. Вычислим производную частного

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}\right]=$$

прибавляем и вычитаем в числителе комбинацию $f(x)g(x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x)g(x+\Delta x)\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)}\cdot$$

$$\cdot\left[g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

●

Замечание. Производная алгебраической суммы конечного числа функций (п. 2 теоремы 3) равна алгебраической сумме производных отдельных слагаемых.

***Теорема* 1.4.** (*Производная сложной функции*) Пусть функция $g(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $f(x)$ имеет производную в точке $g_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z = F(x) = f(g(x))$ будет иметь производную в точке x_0 и справедливо соотношение

$$F'(x_0) = \left[f(g(x_0))\right]' = f'(g_0)g'(x_0),$$

или, опуская значение аргумента,

$$z'_x = z'_g \cdot g'_x.$$

Доказательство. Пусть аргумент x получил приращение Δx. Тогда функция $g(x)$ получила приращение $\Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x)$, так что $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g(x)$.

Запишем тождество

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g}\frac{\Delta g}{\Delta x}$$

и найдем его предел при $\Delta x \to 0$. Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta g \to 0$, так как $g(x)$ – непрерывная функция в точке x. И, следовательно,

$$F'(x_0) = \left[f(g(x_0))\right]' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta g}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Или более подробно

$$\left[f(g(x))\right]' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta x} =$$

(делим и умножаем дробь на Δg)

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta g \to 0)}}\frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(g)g'(x). \bullet$$

Замечание. Эта формула называется правило дифференцирования сложной функции или цепное правило. И производная сложной функции по независимой переменной равна произведению производной этой функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по независимой переменной.

В выражении $f'(g(x))$ подразумевается, что производная от функции f берется так, как будто $g(x)$ является единым целым (аргументом).

***Теорема* 1.5.** (*Производная обратной функции*) Пусть $y = f^{-1}(x)$ – обратная функция к функции $x = f(y)$, имеющей производную в точке y_0, причем $f'(y_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $y = f^{-1}(x)$ имеет производную в точке $x_0 = f(y_0)$, причем

$$\left[f^{-1}(x_0)\right]' = \frac{1}{f'(y_0)} \text{ или } \left[f^{-1}(x_0)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Доказательство. Пусть $y = f^{(-1)}(x)$ так что $x = f(y)$. Если аргументу x дать приращение Δx, то величина y получит приращение $\Delta y = f^{(-1)}(x+\Delta x) - f^{(-1)}(x)$. Поэтому

$$\left[f^{(-1)}(x)\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(-1)}(x+\Delta x) - f^{(-1)}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}.$$

Однако в данной формуле есть одна неувязка. Слева стоит функция от x, а справа получилась функция от y. Чтобы устранить это несоответствие надо в правой части заменить y на $f^{(-1)}(x)$. Тогда получим окончательно

$$f^{(-1)}(x) = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}. \bullet$$

Все эти формулы сведены в табл. 1, которую следует запомнить.

Таблица 1

Основные правила дифференцирования

Функция	Производная
$cf(x)$	$cf'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g) \cdot g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

1. 5. Таблица производных

Выведем теперь таблицу производных от элементарных функций

1. $c' = 0$.

Действительно, если $f(x) = c$, то $c' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c - c}{\Delta x} = 0$.

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Имеем

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = x^{\mu} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\Delta x} =$$

Сделаем «замену переменных» $\dfrac{\Delta x}{x} = z$. Тогда $\Delta x = z \cdot x$ и

$$= \frac{x^n}{x} \lim_{z \to 0} \frac{(1+z)^n - 1}{z} = n \cdot x^{n-1},$$

где был использован замечательный предел.

В частности, при $n = \dfrac{1}{2}$ имеем:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

при $n = -1$ получим:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}.$$

3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.

Имеем

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a,$$

где был использован замечательный предел

Особенно простой результат получается при $a = e$: $\left(e^x\right)' = e^x$.

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(\dfrac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

сделаем «замену переменных» $\dfrac{\Delta x}{x}=\alpha$. Тогда $\Delta x = a\cdot x$ и

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha\cdot x}=\frac{1}{x}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{x\ln a}.$$

Особенно простой результат получается при $a=e$: $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

5. $(\sin x)'=\cos x$.

Имеем

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x,$$

где также был использован замечательный предел.

6. $\left(\cos x\right)'=-\sin x$.

$$\left(\cos x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

7. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Так как $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, то

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Так как $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, то

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

В данном случае $y=\arcsin x = f^{(-1)}(x)$ и $x=\sin y = f(y)$, то есть $f(y)=\sin y$ и $x'_y=\cos y$. Поэтому

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

В данном случае $y=\arccos x = f^{(-1)}(x)$ и $x=\cos y = f(y)$, то есть $f(y)=\cos y$ и $x'_y=-\sin y$. Поэтому

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

В данном случае $y=f^{(-1)}(x)=\operatorname{arctg} x$ и $x=\operatorname{tg} y = f(y)$, то есть $f(y)=\operatorname{tg} y$ и $x'_y=\dfrac{1}{\cos^2 y}$. Поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1/\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$. Вывод аналогичен.

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

Действительно

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$. Вывод аналогичен.

15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$. Вывод аналогичен.

Заканчивая рассмотрение формул дифференцирования, отметим, что, пользуясь полученными формулами производных основных элементарных функций и правилами дифференцирования, можно найти производную любой элементарной функции, т. е. функции, которая получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и применения конечного числа операций вычисления функции от функции.

Все эти формулы сведены в табл. 2, которую следует заучить.

Таблица 2

Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная
1. c	0	7. $\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
2. x^n	nx^{n-1}	8. $\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	9. $\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	10. $\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. a^x	$a^x \ln a$	11. $\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	12. $\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
4. $\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	13. $\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	14. $\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$
5. $\sin x$	$\cos x$	15. $\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
6. $\cos x$	$-\sin x$	16. $\mathrm{cth}\, x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

1. 6. Производная логарифмической функции

Рассмотрим функцию $y = \ln |x|$. Так как

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} \text{ и } \left(\ln(-x)\right)' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x},$$

то окончательно получаем:

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}.$$

Учитывая полученное равенство, найдем производную функции $y = \ln |f(x)|$ или, что то же, функции $y = \ln|u|$, где $u = f(x)$. При этом предполагается, что функция $f(x)$ не обращается в нуль в рассматриваемой точке x и имеет производную в этой точке.

Дифференцируя сложную функцию, получим:

$$y' = (\ln|u|)'u' = \frac{1}{u}u' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

или

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется *логарифмической производной функции* $f(x)$.

Способ *логарифмического дифференцирования* состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле:

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' f(x).$$

Для упрощения записи условимся при логарифмическом дифференцировании знак модуля у $f(x)$ опускать.

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно-степенной функции.

Полезно вспомним свойства логарифмов:

$$\ln a/b = \ln a - \ln b,$$
$$\ln a\, b = \ln a + \ln b,$$
$$\ln a^b = b \ln a.$$

Производная показательно-степенной функции

Пусть $u = f(x)$ $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x, $f(x)>0$. Найдем производную функции $y = u^{v.}$ Логарифмируя левую и правую часть равенства, получим:

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируем обе части полученного уравнения:

$$y'/y = v' \ln u + v\,(u'/u).$$

Решаем получившееся уравнение относительно y'. Окончательно имеем

$$y' = u^{v}\,(v' \ln u + v\,(u'/u)).$$

Вместо того чтобы запоминать эту формулу лучше запомнить правило: для того чтобы вычислить производную от $y = f(x)^{g(x)}$, надо это выражение сначала прологарифмировать, а потом найти производную обеих частей.

Пример 1.5. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение.

1. Логарифмируем исходную функцию

$$z = \ln y = \ln(x)^x = x \ln x$$

2. Дифференцируем обе части полученного уравнения почленно по x, учитывая, что y – функция от x.

$$\frac{y'}{y} = (x \ln x)' = x' \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 .$$

3. Решаем получившееся уравнение относительно y' и подставляя вместо функции y ее выражение из условия задачи, получим

$$y' = z' f(x) = (\ln x + 1)x^x .$$

1. 7. Производная функции, заданной параметрически

Параметрическое задание функции заключается в том, что и x и y задаются как функции некоторого параметра t, то есть

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ \alpha \le t \le \beta .$$

Значение параметра t определяет одновременно и x и y, и, тем самым, некоторую точку на плоскости. Меняя t, мы двигаем точку на плоскости, и она описывает некоторую кривую, определяющую зависимость y от x.

Параметрическое задание функции считается самым общим способом задания кривых на плоскости.

***Теорема* 1.6. (*Производная функции, заданной параметрически*)** Если функция аргумента x задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ \alpha \le t \le \beta ,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – дифференцируемые функции, причем $\varphi'(t) \ne 0$, то производная этой функции по переменной x вычисляется по формуле

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}, \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\varphi\ (t)$ и $\psi\ (t)$ – дифференцируемы и $\varphi\ '(t) \neq 0$. Кроме того, будем считать, что функция $x = \varphi\,(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}\ (x)$, которая также дифференцируема. Тогда функцию заданную параметрически можно рассматривать как

$$y = \psi\,(t),\ t = \varphi^{-1}\ (x),$$

считая t промежуточным аргументом.

Продифференцируем функцию $y = \psi\,(t)$, $t = \varphi^{-1}\ (x)$ по правилу дифференцирования сложной функции, получим

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x.$$

Производную t'_x найдем по правилу дифференцирования обратной функции:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'_t}.$$

Итак, окончательно имеем: если $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то $\begin{cases} y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}, \\ x = \varphi(t). \end{cases}$. ●

Пример 1.6. Найти производную y'_x если $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$.

Решение. Найдем $\begin{cases} x'_t = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y'_t = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{1+t^2-1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$.

Тогда

$$y'_x = \frac{x'_t}{y'_t} = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) \div \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) = \frac{t}{2}$$

и окончательно имеем $\begin{cases} y'_x = \dfrac{t}{2}, \\ x = \ln(1+t^2). \end{cases}$

1. 8. Производная неявной функции

Пусть функция $y = f\ (x)$ задана уравнением $F\ (x,\ y) = 0$, не разрешенным относительно y. В этом случае говорят, что функция y задана ***неявно***.

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ задает y как неявную функцию от x, т. е. $y = f(x)$. Предположим, что функция y дифференцируема. Если в уравнении $F(x, y) = 0$ под y подразумевать функцию $y(x)$, то это уравнение обращается в тождество по аргументу x: $F(x, y(x)) = 0$. Для нахождения производной $y'(x)$ нужно продифференцировать по x обе части, помня, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное новое уравнение относительно искомой производной. Как правило, она будет зависеть от x и y: $y'(x) = \varphi(x, y)$.

Пример 1.7. Найти производную функции $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$, заданной неявно.

Решение. Дифференцируя по x неявную функцию и считая, что y – функция от x, имеем:

$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0.$$

Отсюда

$$y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}.$$

Отметим, что в этом случае $y' = g(x, y)$.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Понятие производной функции в точке. Найдите по определению производную функции $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$.
2. Понятие производной функции. Геометрический и физический смысл производной.
3. Понятие односторонних производных функции в точке. Найдите односторонние производные функции $y = 2|x| + 1$ в точке $x_0 = 0$.
4. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^3 - x - 2$ в точке M_0 (2; 4).
5. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой $x^2 + y^2 - 153 = 0$ в точке M_0 (12;3).
6. Составьте уравнения касательных к линии $y = x - \frac{1}{x}$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.
7. Найдите производную функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $2^{x+y} = x + y$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

2. 1 Определение и геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим важное для дальнейшего понятие дифференциала.

Напомним, что величина $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ называется приращением функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой в точке x***, если ее приращение можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Определение. Линейная часть приращения функции, то есть $A \cdot \Delta x$ называется ***дифференциалом функции*** $f(x)$ и обозначается $df(x)$

$$df(x) = A \cdot \Delta x.$$

Вспомнив определение $o\ (\Delta x)$ условие $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ можно переписать в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x,\ \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

Пример 2.1. Найти дифференциал функции $f(x) = x^3$ по определению.

Решение. Вычислим приращение функции

$$\Delta f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Заметим, что $\Delta f(x)$ содержит слагаемое, линейное по Δx, слагаемые с Δx^2 и Δx^3. Так вот, только слагаемое, линейное по Δx дает дифференциал, то

$$df(x) = 3x^2 \cdot \Delta x.$$

Покажем, что $3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = o(\Delta x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) = 0.$$

Теорема 2.1. **(***Критерий дифференцируемости функции***)** Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала производная $f'(x)$. При этом $A = f'(x)$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x. Это значит, что $\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$.

Разделим обе части равенства на Δx и, получим,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Достаточность. Пусть в точке x существует производная

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Это, по определению, означает, что $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$,

где $\alpha\,(x)$ – б. м. величина. Отсюда следует, что

$$\Delta f = f'(x)\Delta x - \alpha(x) \cdot \Delta x.$$

Но $\left(-\alpha(x) \cdot \Delta x\right) = o(\Delta x)$ и поэтому

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

и функция $f\,(x)$ была дифференцируемой в точке x. ●

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции данной точке устанавливает следующая теорема.

***Теорема* 2.2.** Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Если функция $f\,(x)$ дифференцируема в точке x, то в силу условия дифференцируемости ее приращение в этой точке представимо в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x,\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x\right) = 0,$$

что и означает непрерывность функции в точке x. ●

Выражение для дифференциала

Итак, мы получили, что для дифференцируемой функции $\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$. Это означает, что $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$.

Но если взять $f\,(x) = x$, где x – независимая переменная, то мы получим, что $dx = \Delta x$. Таким образом, *дифференциал dx независимой переменной x равен ее приращению* Δx. Поэтому окончательно

$$df(x) = f'(x) \cdot dx.$$

Отсюда следует, что

$$f(x) = \frac{df}{dx},$$

то есть производная есть отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной. Заметьте, что $\dfrac{df}{dx}$ есть обычная дробь и с ней можно обращаться как с обычной дробью.

Следствие. Если функция в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке.

Утверждение, обратное теореме 2.2, вообще говоря, неверно, т. е. из непрерывности функции в точке еще не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Геометрический смысл дифференциала

Вспомним, что $f'(x)$ есть тангенс угла наклона касательной к оси Ox. Поэтому, если провести касательную к кривой в точке x, то df будет катетом, который противолежит углу α в треугольнике, гипотенуза которого образована касательной, а другой катет есть приращение $dx = \Delta x$. На рис. 6 нарисован и отрезок Δf, так что видно отличие $\Delta f(x)$ и $df(x)$.

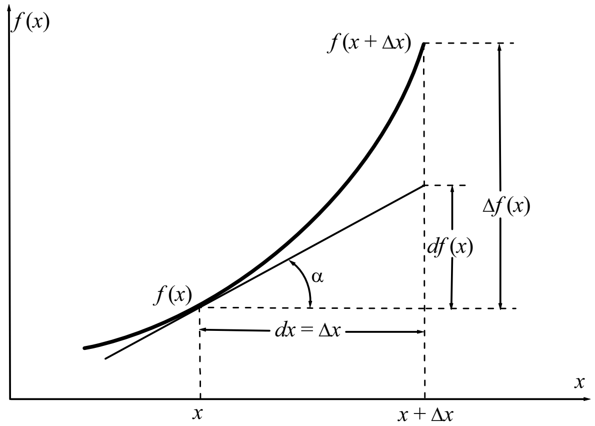


Рис. 6. Геометрический смысл дифференциала

Таким образом, $df(x_0)$ равен приращению, которое получает ордината касательной проведенной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ соответствующее приращению Δx.

2. 2. Правила дифференцирования

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x. Непосредственно из определения дифференциала и свойств производных вытекают следующие правила дифференцирования.

1. $d\left[cf(x)\right] = c \cdot df(x)$.

Действительно

$$d\left[cf(x)\right]=\left[cf(x)\right]'dx=c\cdot f'(x)dx=c\cdot df(x).$$

2. $d\left[f\pm g\right]=df\pm dg$

Имеем

$$d\left[f\pm g\right]=(f\pm g)'dx=(f'\pm g')dx=f'dx\pm g'dx=df\pm dg.$$

3. $d\left[f\cdot g\right]=g\cdot df+f\cdot dg$.

Имеем

$$d\left[f\cdot g\right]=(f\cdot g)'dx=(f'g+g'f)dx=g\cdot f'dx+f\cdot g'dx=gdf+fdg.$$

4. $d\left[\dfrac{f}{g}\right]=\dfrac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}$.

Имеем

$$d\left[\frac{f}{g}\right]=\left(\frac{f}{g}\right)'dx=\frac{f'g-g'f}{g^2}dx=\frac{g\cdot f'dx-f\cdot g'dx}{g^2}=\frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}.$$

5. Инвариантность формы первого дифференциала.

Пусть $y=f(x)$, $x=x(t)$, т. е. y является сложной функцией независимой переменной t; x – промежуточная переменная. Выполняются условия для существования производной сложной функции. Тогда ее дифференциал будет иметь вид:

$$d\left[f(x(t))\right]=\left[f(x(t))\right]'dt=f'(x)\cdot x'(t)dt=f'(x)dt$$

или окончательно

$$d\left[f(x(t))\right]=f'(x)dx.$$

То есть форма записи дифференциала не зависит от того, будет x независимой переменной или функцией другой переменной. В связи с этим форма записи называется *инвариантной формой записи дифференциала.*

Вопросы и задания для самопроверки

1. Понятие функции, дифференцируемой в данной точке. Докажите по определению, что функция $y=4x-x^2$ дифференцируема в любой точке $x_0\in\mathbb{R}$.

2. Сформулируйте критерий дифференцируемости функции в точке. Исследуйте дифференцируемость функции $y=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ в точке $x_0=0$.

3. Исследуйте дифференцируемость функции $f(x)=|\sin x|$ в точке $x_0 = 0$.

4. Исследуйте на дифференцируемость функцию

$a)$ $y=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$; $b)$ $y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$.

5. Понятие дифференциала функции, его геометрический смысл. Постройте график функции $y=e^x$ и изобразите отрезки, соответствующие приращению и дифференциалу этой функции в точке $x_0=0$ при $\Delta x=1$.

6. Вычислите по определению $df(x_0)$ для функции $y=\ln(1+x)$.

7. Постройте график функции $y=\ln(1+x)$, укажите не чертеже приращение и дифференциал функции в точке $x_0=0$, отвечающее приращению аргумента $\Delta x=1$.

3. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

3. 1. Производные высших порядков

Пусть имеется функция $y = f(x)$, от которой мы вычислили первую производную $f'(x)$. Но $f'(x)$ снова является функцией и от нее можно тоже вычислить производную.

Определение. Производная от первой производной, то есть $\left[f'(x)\right]'$, называется ***второй производной*** и обозначается $f''(x)$ или y'':

$$f''(x)=\left[f'(x)\right]' \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Аналогично, производная от второй производной называется третьей производной

$$f'''(x)=\left[f''(x)\right]' \text{ или } \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Аналогично определяются производные более высоких порядков. Отметим только, что производные более высоких порядков отмечаются не штрихами (их было бы слишком много), а римскими цифрами, заключенными в скобки – $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$ и т. д. или арабскими цифрами – $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$ и т. д.

Определение. Производная n-го порядка определяется как производная от производной $(n-1)$-го порядка

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'.$$

Обозначение: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ или $\dfrac{d^n y}{dx^n}, \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Пример 3.1. Найти производную 6 порядка функции

$$y = x^4 + 3x + 4.$$

Решение. Найдем производные первого, второго, третьего, четвертого, пятого и шестого порядка

$$y' = 4x^3 + 3,\ y'' = 12x^2,\ y''' = 24x,\ y^{(4)} = 24,\ y^{(5)} = y^{(6)} = 0.$$

Основные формулы, касающиеся производных высших порядков, следующие:

1. $[cf(x)]^{(n)} = cf^{(n)}(x)$.
2. $[f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$.
3. $[f(x) \cdot g(x)]^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.

Первые две формулы очевидны. Рассмотрим третью формулу, носящую название *формулы Лейбница*. Учитываем, что по определению, производной нулевого порядка считается сама функция, то есть $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$. Доказательство этой формулы можно провести методом математической индукции.

Коэффициенты C_n^k вычисляют, используя формулу «число сочетаний из n по k»:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

или используя треугольник Паскаля:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
… .

Первая строчка соответствует $n = 0$, вторая – $n = 1$, …, шестая – $n = 5$ и т. д. Коэффициенты C_5^k, записанные по последней записанной выше (шестой) строчке следующие:

$$C_5^0=1,\ C_5^1=5,\ C_5^2=10,\ C_5^3=10,\ C_5^4=5,\ C_5^5=1.$$

В n-ой строчке будут стоять числа

$$C_n^0=1,\ C_n^1=n,\ C_n^2,\ \ldots\ C_n^k,\ \ldots C_n^{n-1}=n,\ C_n^n=1.$$

Производные высших порядков от функции, заданной неявно

В разделе 1.8 было дано правило нахождения первой производной от функции, заданной неявно, и показано на примере, что y'_x в общем случае содержит как аргумент x, так и функцию y.

По определению вторая производная от функции $y = f(x)$ есть производная от первой производной. Следовательно, для нахождения второй производной надо продифференцировать найденную первую производную по аргументу x, продолжая рассматривать y как функцию от x. В выражении для второй производной войдут x, y и y'. Подставляя вместо y' его значение, находим y'', зависящую только от x и y. Аналогично поступаем при нахождении y''', y^{IV} и производных более высоких порядков.

Производные высших порядков от функции,

заданной параметрически

Пусть y – функция от x, задана параметрически:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

Поскольку вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то задача нахождения второй производной сводится к отысканию первой производной от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x=\varphi(t). \end{cases}$$

Следовательно, по определению первой производной для функции, заданной параметрически, имеем:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x=\varphi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x=\dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x=\varphi(t). \end{cases}$$

Аналогично находится третья и др. производные:

$$\begin{cases} y'''_x=\dfrac{\left(y''_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x=\varphi(t). \end{cases}$$

3. 2. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производные n – го порядка на некотором интервале.

Дифференциал этой функции: $dy = f'(x)dx$, где $dx = \Delta x$ – приращение независимой переменной. Если фиксировать некоторое значение Δx, то dy будет функцией только независимой переменной x.

Определение. Дифференциал от дифференциала dy называется ***дифференциалом второго порядка*** (вторым дифференциалом) функции $y = f(x)$ и обозначается $d^2 y$.

Итак, по определению

$$d^2 y = d\,(dy).$$

Выведем формулу для дифференциала второго порядка $d^2 y$. Имеем

$$d^2 y = (d\,y)'\,dx = (f'(x)\,dx)'\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Замечание. Чтобы избежать путаницы, дифференциал от функции $y = x^2$ записывают $d(x^2)$.

Аналогично, дифференциал третьего порядка определяется как дифференциал от дифференциала второго порядка этой функции и обозначается $d^3 y$. По определению

$$d^3 y = (d^2 y)'\,dx = (f''(x)\,dx^2)'\,dx = f'''(x)\,dx^3.$$

так что $d^3 y = f'''(x)\,dx^3$.

В общем случае

Определение. Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка, то есть:

$$d^n y = d\,(d^{n-1} y).$$

При этом

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n \text{ и } f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Из полученного соотношения следует, что n-ая производная функции равна отношению ее дифференциала n-го порядка к n-ой степени дифференциала независимой переменной, и, следовательно, введенный ранее символ n-ой производной становиться реальной дробью – отношением дифференциала $d^n y$ к n-ой степени dx.

Замечание. Дифференциалы высших порядков ($n \geq 2$) *не обладают уже свойством инвариантности,* как это имело место для дифференциала первого порядка.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Понятие производных высших порядков. Найдите производную порядка n от функции $y = \frac{1}{x}$.

2. Найдите $\frac{d^2 y}{dx^2}$, если $\begin{cases} y = \sin t \\ x = 2\cos t \end{cases}$.

3. Найдите $y'(x)$ и $y''(x)$ в точке M_0 (1;0) для функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 + x\,y + e^{x\,y} = 0$.

4. Найдите $d^2 y$, если $y = x^2 e^{-x}$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ

***Теорема* 4.1.** (*Ферма*) Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a, b]$ и в некоторой внутренней точке x_0 этого промежутка достигает своего наибольшего или наименьшего значения. Если в этой точке существует производная, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть, для определенности, в точке x_0 функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения.

По условию теоремы эта точка внутренняя, то есть $a < x_0 < b$, и поэтому к этой точке можно подойти и слева и справа.

Пусть мы подходим к x_0 слева. Тогда, так как $f(x_0)$ − наибольшее значение: $f(x) < f(x_0)$, следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$, так как мы подходим слева, то $x < x_0$ и $x - x_0 < 0$.

Тогда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 .$$

Делая предельный переход при $x \to x_0 - 0$, получим

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 .$$

Пусть мы подходим к точке x_0 справа. Тогда, так как $f(x_0)$ − наибольшее значение: $f(x) < f(x_0)$, следовательно, $f(x) - f(x_0) < 0$, так как мы подходим справа, то $x > x_0$ и $x - x_0 > 0$.

Тогда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 .$$

Делая предельный переход при $x \to x_0 - 0$, получим

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \le 0\,.$$

Совместить два полученных неравенства можно только в одном случае: $f'(x_0)=0$. •

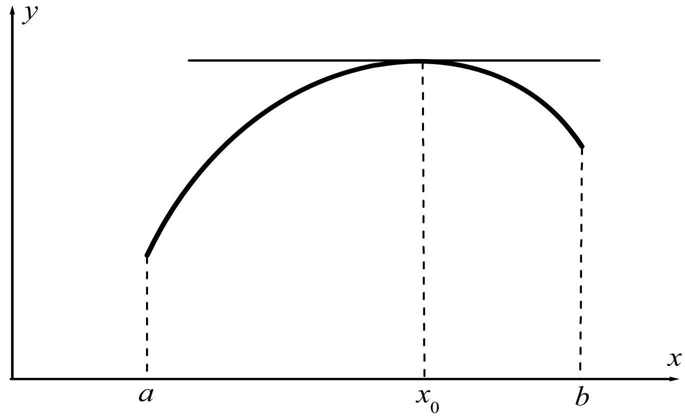


Рис. 7. Геометрический смысл теоремы Ферма

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что в точке наибольшего (рис. 7) или наименьшего значения функции касательная к графику функции параллельна оси *Ox* (горизонтальная).

В теореме Ферма по сути дела два ограничения:

а) точка x_0 расположена внутри отрезка $[a, b]$ и

б) существует производная $f'(x_0)$.

Покажем, что оба ограничения являются существенными, то есть отказ от любого из них приводит к тому, что утверждение теоремы становится неверным.

Если максимум или минимум функции $f(x)$ достигается на границе отрезка, то, как видно из рис. 8, утверждение теоремы Ферма неверно.

Рис. 8. Нарушается «внутренность» точки x_0 в теореме Ферма

При доказательстве это проявляется в том, что мы сможем подойти к точке x_0 только с одной стороны, и поэтому не получится второго, противоположного неравенства.

Пусть в точке x_0 существуют только односторонние производные. Тогда, как это видно из рис. 9, теорема Ферма неверна.

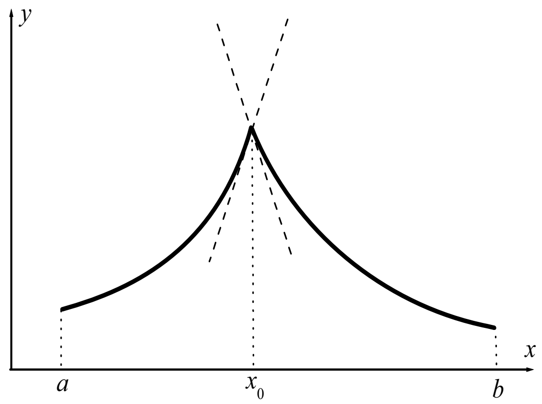


Рис. 9. Нарушается «существование производной» в точке x_0

При доказательстве это проявиться в том, что получаться неравенства $f'(x_0-0)\geq 0$ и $f'(x_0+0)\leq 0$, которые нельзя будет объединить в одно равенство, так как теперь $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$.

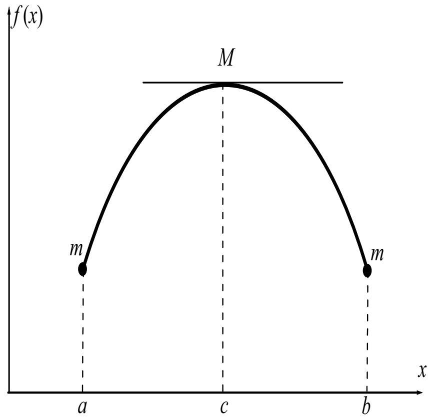
***Теорема* 4.2.** (*Ролля, о нулях производной*)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$. Тогда на интервале (a, b) существует точка c, $a < c < b$, в которой производная функции $f(x)$ равна нулю, $f'(c) = 0$.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке, функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее и наименьшее значения, которые обозначим соответственно через M и m. Имеется две возможности $m = M$ или $m \neq M$.

Если $m = M$, то $f(x)$ есть константа, то есть $f(x) = m = M$ и поэтому $f'(x) = 0\ \forall x\in\left[a,b\right]$. В качестве точки c можно взять любую точку из интервала (a, b).

Пусть $m < M$, тогда, в силу условия $f(a) = f(b)$, m и M не могут быть одновременно значениями функции на концах отрезка. Хотя бы одно из значений m или M согласно теореме Вейерштрасса о достижимости непрерывной на отрезке функцией своих наибольшего и наименьшего значений, достигается во внутренней точке промежутка $[a, b]$ (см. рис. 10). По теореме Ферма, в этой точке (их может быть и несколько) производная равна нулю. ●



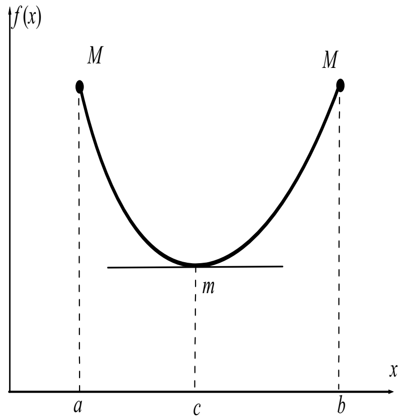


Рис. 10. Внутри промежутка достигаются max *или* min

Геометрический смысл теоремы Роля состоит в том, что на графике функции, удовлетворяющей условиям теоремы Роля, имеется, по крайней мере, одна точка, в которой касательная горизонтальна.

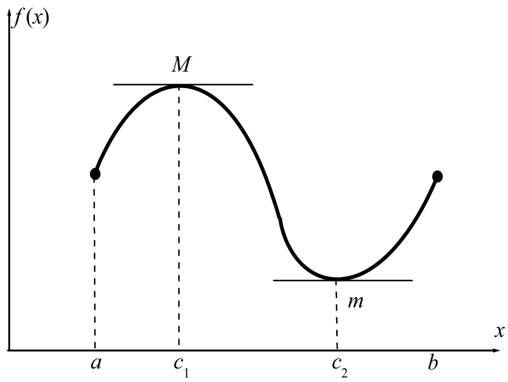


Рис. 11. Геометрический смысл теоремы Ролля

Другими словами, между двумя нулями функции находится, по крайней мере, один нуль ее производной.

***Теорема* 4.3.** (*Коши*) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b). Тогда существует точка c, $a < c < b$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Прежде всего, отметим, что $g(a) \neq g(b)$, иначе, по теореме Ролля, существовала бы точка $x_0 \in [a,b]$, где $g'(x_0)=0$, что противоречит ограничению $g'(x) \neq 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = [f(x)-f(a)] - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Она

а) определена и непрерывна на [a, b], так как $g(a) \neq g(b)$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на [a, b];

б) существует $F'(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

в) $F(a) = F(b) = 0$.

Таким образом, для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует $c \in [a, b]$ такая, что

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

но тогда в этой точке c, учитывая, что $g'(x) \neq 0$, получаем:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

что и дает формулу Коши. •

Формула Лагранжа

Рассмотрим частный случай, когда $g(x) = x$. Тогда формула Коши приобретает вид

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ или } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

где $c \in (a, b)$. Эта формула и называется *формулой Лагранжа* или формулой конечных приращений.

***Теорема* 4.4.** (*Лагранжа*) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на интервале (a, b). Тогда на интервале (a, b) существует точка c, $a < c < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \left[f(x) - f(a)\right] - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a).$$

Она

а) определена и непрерывна на [a, b], так как функция $f(x)$ непрерывна на [a, b];

б) существует $F'(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right].$$

в) $F(a) = F(b) = 0$.

Таким образом, для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Нетрудно проверить, подставляя $x = a$ и $x = b$, что $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$, т. е. $F(a) = F(b)$. Поэтому существует $c \in [a, b]$ такая, что

$$F'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] = 0,$$

но тогда в этой точке c

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

что и дает формулу Лагранжа. ●

Пусть мы имеем график $f(x)$. Проведем через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ секущую. Она образует с осью Ox угол α и, как видно из рис. 12, $tg\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Но $f'(c)$ есть тангенс угла, который касательная к кривой в точке $x = c$ образует с осью Ox.

Заметим, что теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа при условии, что $f(a) = f(b)$.

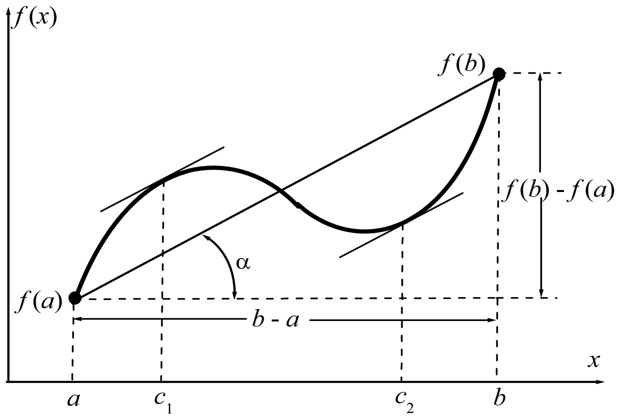


Рис. 12. Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Геометрический смысл формулы Лагранжа состоит в том, что существует точка $c \in (a, b)$, в которой касательная параллельна секущей, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Замечание. Точка c не обязательно «единственная» точка, может быть несколько точек c, удовлетворяющих формулам Коши или Лагранжа. На рис. 11 и рис. 12 таких точек две: c_1 и c_2.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Сформулируйте и докажите теорему Ферма. Применима ли теорема Ферма к функции $y = x^2 - 2x$ на отрезке [0; 2]. Приведите геометрическую иллюстрацию.
2. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. Применима ли теорема Лагранжа к функции $f(x) = x^2$ на отрезке [0; 1]. Приведите геометрическую иллюстрацию.
3. Сформулируйте и докажите теорему Коши. Справедлива ли формула Коши для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на отрезке [–1; 1]? Какое условие теоремы Коши не выполнено для этих функций?
4. Сформулируйте и докажите теорему Ролля. Проверьте справедливость теоремы Ролля для функций $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ на отрезке [1; 2]?

5. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

5. 1. Правило Лопиталя

При вычислении пределов среди неопределенных выражений чаще всего приходится встречаться с неопределенностями типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. При их раскрытии очень помогает так называемое правило Лопиталя.

Теорема **5.1.** (*Правило Лопиталя, раскрытие неопределенностей типа* $\frac{0}{0}$) Пусть $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и выполнены условия:

а) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в $U(a,\delta)$ или $U^*(a,\delta)$;

б) в $U(a,\delta)$ или $U^*(a,\delta)$ существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $\forall x \in U^*(a,\delta)\;\; g'(x) \neq 0$;

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

г) существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ **.** Тогда существует

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K .$$

Доказательство. Докажем это утверждение для $a \in \mathbb{R}$.

1) Пусть $x \in U^*(a,\delta)$. Для точки *a* возможны два случая:

а) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке *a*. Тогда из условия получаем $f(a)=g(a)=0$.

b) Пусть $x\in U^*(a,\delta)$, функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке *a*. Тогда *a* – точка устранимого разрыва I рода. Доопределим функции, полагая $f(a)=g(a)=0$. Таким образом можно считать, что $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в $U(a,\delta)$.

2) Пусть $x\in U(a,\delta)$. Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$ на [*a*, *x*] (или [*x*, *a*]). Они удовлетворяют теореме Коши. Тогда по формуле Коши

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $a<c<x$ (или $x<c<a$). Поэтому при $x\to a$ также будет $c\to a$. Переходя к пределу, получим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=K,$$

так как последний предел существует. •

Геометрический смысл правила Лопиталя состоит в том, что предел отношения ординат графиков функций *f* и *g* равен пределу отношения ординат их касательных $y=f'(a)(x-a)$ и $y=g'(a)(x-a)$, которое постоянно и равно $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}=K$.

***Теорема* 5.2.** (*Правило Лопиталя, раскрытие неопределенностей типа* $\dfrac{\infty}{\infty}$) Пусть $a\in\overline{\mathbb{R}}$ и выполнены условия:

а) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в $U(a,\delta)$ или $U^*(a,\delta)$;

б) в $U(a,\delta)$ или $U^*(a,\delta)$ существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $\forall x\in U^*(a,\delta)\ \ g'(x)\neq 0$;

в) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;

г) существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$. Тогда существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

Несмотря на свою внешнюю простоту, правило Лопиталя довольно сложно при его практическом использовании. При практическом применении этого правила следует иметь в виду следующие рекомендации:

Замечание.

1. Прежде, чем находить $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ рекомендуется выражение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ упрощать, насколько это возможно;

2. Если при вычислении $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ снова получилась неопределенность, то применить правило Лопиталя еще раз. Однако перед его повторным применением рекомендуется выделить отдельно сомножители, не стремящиеся к нулю, и заменить их предельными значениями.

3. Правило Лопиталя позволяет раскрывать и неопределенности типа $0\cdot\infty$, если произведение $f(x)\cdot g(x)$ привести к виду $\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ или $\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$. Для достижения наилучшего результата рекомендуется комбинировать ранее изученные методы и правило Лопиталя.

4. Предел неопределенностей типа 0^0, ∞^0 или 1^∞ можно найти, предварительно прологарифмировав функции, предел которых ищется.

5. Из существования предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *не следует* существование предела отношения $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Рассмотрим примеры на эти рекомендации.

Пример 5.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

Решение. Используем правило Лопиталя. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Пример 5.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$.

Решение. Используем правило Лопиталя. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=$$

И вот тут не имеет смысла сразу подставлять $x=0$, так как снова получилась неопределенность. Не имеет также смысла, сразу применять правило Лопиталя еще раз – залезем в такие дебри, из которых не выберемся. Поэтому сначала упрощаем, – убираем «трехэтажность» и сокращаем сомножитель $(1-\cos x)$:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

Пример 5.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Используем правило Лопиталя и упрощаем. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^2 x}=$$

У нас снова получилась неопределенность. Но, прежде чем применять правило Лопиталя еще раз, надо сначала выделить сомножители, не стремящиеся к 0, и вычислить их предел отдельно:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{3\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

А вот теперь к оставшемуся выражению применяем правило Лопиталя еще два раза:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 5.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

Решение. Прежде чем применять правило Лопиталя рассмотрим

$$x^x=e^{\ln x^x}\ \text{ и }\ \ln x^x=x\ln x=\frac{\ln x}{1/x}.$$

Используем правило Лопиталя и упрощаем.

$$\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to +0}(-x)=0.$$

И окончательно получаем

$$\lim_{x\to +0} x^x=\lim_{x\to +0} e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to +0} x\ln x}=e^0=1.$$

Пример 5.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Решение. Здесь отношение производных числителя и знаменателя

$$\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$ и, следовательно, правило Лопиталя неприменимо. В этом случае предел находится непосредственно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0.$$

5. 2. Формула Тейлора

Определение. Многочленом (полином) ***от x степени n*** называется функция

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

где a_0, a_1, …,$a_n \in \mathbb{R}$ – коэффициенты, $n \in \mathbb{N}$. Многочлен полностью определяется своими коэффициентами.

Поставим задачу: найти коэффициенты этого многочлена.

Пусть имеется полином от x степени n:

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_nx^n.$$

Сосчитаем все производные от этого полинома до n-го порядка включительно:

$$\begin{aligned}
p_n(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots+a_nx^n,\\
p_n'(x)&=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1},\\
p_n''(x)&=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2},\\
p_n'''(x)&=6a_3+24a_4x+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3},\\
p_n^{(4)}(x)&=24a_4+\ldots+n(n-1)(n-2)(m-3)a_nx^{n-4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_n^{(n)}(x)&=n!a_n.
\end{aligned}$$

Положим во всех этих выражениях $x = 0$. Тогда получим выражения для коэффициентов

$$p_n(0)=a_0;\ p_n'(0)=a_1;\ p_n''(0)=2!a_2;\ p_n'''(0)=3!a_3;$$
$$p_n^{(4)}(0)=4!a_4;\ldots;\ p_n^{(n)}(0)=n!a_n.$$

Отсюда получаем

$$a_0 = p_n(0);\ a_1 = \frac{p_n'(0)}{1!};\ a_2 = \frac{p_n''(0)}{2!};\ a_3 = \frac{p_n'''(0)}{3!};\ldots;\ a_n = \frac{p_n^{(n)}(0)}{n!}.$$

И поэтому исходный полином может быть записан в виде

$$p_n(x) = p_n(0) + \frac{p_n'(0)}{1!}x + \frac{p_n''(0)}{2!}x^2 + \frac{p_n'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{p_n^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Для полинома общего вида

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

аналогичным образом можно получить

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Эта формула носит название формулы Тейлора для полинома от $(x - x_0)$ степени *n*.

Формула Тейлора в общем случае

Пусть теперь имеется некоторая произвольная функция $f(x)$, у которой в точке x_0 существуют $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)$. Для нее тоже можно написать комбинацию

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\left(x - x_0\right) + \frac{f''(x_0)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 +$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}\left(x - x_0\right)^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x - x_0\right)^n,$$

но теперь, очевидно, уже нельзя утверждать, что $f(x) = P_n(x)$, ведь $f(x)$ – не полином. Введем, поэтому, функцию $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ и будем писать

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\left(x - x_0\right) + \frac{f''(x_0)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 +$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}\left(x - x_0\right)^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x - x_0\right)^n + r_n(x).$$

Функцию $r_n(x)$ будем называть *остаточным членом*, а саму формулу – *формулой Тейлора для функции* $f(x)$. Самая главная задача теперь – сказать что-то о свойствах $r_n(x)$, а еще лучше – как-то оценить его. Тогда $P_n(x)$ можно будет использовать для приближенного вычисления функции $f(x)$.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано

***Теорема* 5.3.** Если функция $f(x)$ определена и n раз дифференцируема в окрестности точки x_0, то при $x \to x_0$ имеет место формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x),$$

где $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ – остаточный член в форме Пеано.

Доказательство. Напишем $r_n(x)$ в явном виде

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 -$$

$$- \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Полагая $x = x_0$, получим $r_n(x_0) = 0$.

Далее, находя производные и полагая $x = x_0$, получим

$$r_n'(x) = f'(x) - \frac{f'(x_0)}{1!} - \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1},$$

$$r_n'(x_0) = 0,$$

$$r_n''(x) = f''(x) - \frac{f''(x_0)}{1!} - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2},$$

$$r_n''(x_0) = 0,$$

…………………………………………………………………………………

$$r_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0),$$

$$r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Таким образом, остаточный член в формуле Тейлора обладает следующим основным свойством

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = r_n'''(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Докажем, что $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$,

где $r_n(x) = \alpha(x)(x - x_0)^n$, $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина и $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Применим n раз правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left(\frac{0}{0}\right)$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0,$$

т. е. $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x\to x_0$. ●

Замечание.

1. Формулу Тейлора можно записать в виде

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}\left(x-x_0\right)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Эта формула носит название *формулы Тейлора* (или ряда Тейлора) *с остаточным членом в форме Пеано*.

2. Остаточный член в форме $o\left((x-x_0)^n\right)$ дает лишь качественную оценку $r_n(x)$. Хотелось бы иметь более точную количественную оценку. Такую оценку часто позволяет получить остаточный член в форме Лагранжа. Если функция $f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$ порядка, то *остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа* имеет вид

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ x_0<c<x.$$

Ее дальнейшее использование заключается в том, что пытаются оценить сверху $f^{(n+1)}(c)$, то есть ищут такое M, что $\left|f^{(n+1)}(c)\right|\le M$. Тогда

$$\left|r_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

что и позволяет оценивать погрешность от использования формулы Тейлора для вычисления $f(x)$.

3. Если взять в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то мы получим формулу Маклорена (или ряд Маклорена) с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

Используя последнюю формулу, напишем разложение в ряд Маклорена некоторых наиболее часто встречающихся функций. Рекомендуется запомнить эти разложения:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{x^n}{n!}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + o(x^n)$;

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + o(x^n)$;

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$;

5. $(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1!}x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + ... +$
$$+\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

6. $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + \left(-1\right)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$.

Получим некоторые разложения в ряд Маклорена.

1. $f(x) = e^x$.

Пусть $0 \le x \le H$. Имеем
$$f(x) = e^x;\ f'(x) = e^x;\ f''(x) = e^x;\ \dots;\ f^{(n)}(x) = e^x;$$
$$f(0) = 1;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = 1;\ \dots;\ f^{(n)}(0) = 1.$$
Ряд Маклорена дает нам
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n$$
где $r_n = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$. Но, так как $0 < c < x < H$, то $e^c < e^H$ и мы имеем оценку
$$|r_n(x)| < \frac{e^H}{(n+1)!}x^{n+1}$$

В частности, беря $x = 1$, $e^1 < 3$, получим формулу для вычисления числа *e*:
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n,$$
где погрешность r_n не превосходит величины $\frac{3}{(n+1)!}$.

2. $f(x) = \sin x$.

Имеем

$$f(x)=\sin x;\ f'(x)=\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);\ f''(x)=-\sin x=\sin(x+\pi);$$

$$f'''(x)=-\cos(x)=\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right);\ \ldots\ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Подставляя $x=0$, получим

$$f(0)=0;\ f'(0)=1;\ f''(0)=0;\ f'''(0)=-1,$$

и дальше эти значения начинают повторяться. Поэтому ряд Маклорена дает

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n+r_n,$$

$$r_n=\frac{\sin\left(c+(2n+3)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+3)!}x^{2n+3}.$$

Так как $\left|\sin\alpha\right|\le 1$, то $\left|r_n\right|<\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

Окончательно

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n+r_n,$$

где $\left|r_n\right|<\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

3. $f(x)=\cos x$.

Имеем:

$$f(x)=\cos x;\ f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right);\ f''(x)=-\cos x=\cos(x+\pi);$$

$$f'''(x)=\sin x=\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right);\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Подставляя $x=0$, получим

$$f(0)=1;\ f'(0)=0;\ f''(0)=-1;\ f'''(0)=0$$

и далее эти значения повторяться.

Формула Маклорена дает:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r_n,$$

где $r_n(x) = \dfrac{\cos\left(x + (2n+2)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$.

Так как $|\cos\alpha| \le 1$, то

$$|r_n(x)| \le \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$.

Имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \; f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3};$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}; \; \ldots \; f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Подставляя $x = 0$, получим

$$f(0) = 1; \; f'(0) = 0; \; f''(0) = -1; \; f'''(0) = 2!; \; f^{(4)}(0) = -3!; \; \ldots$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Подстановка в формулу Маклорена дает

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \pm \ldots.$$

5. $f(x) = (1+x)^{\mu}$.

Имеем

$$f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1}; \; f''(x) = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2};$$

$$f'''(x) = \mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3}; \; \ldots.$$

Подставляя $x = 0$, получим

$$f(0) = 1; \; f'(0) = \mu; \; f''(0) = \mu(\mu-1); \; f'''(0) = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots,$$

и формула Маклорена дает

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1!} + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

Заметим, что если $\mu = n$ (целое число), то этот ряд обрывается на x^n, и получается формула бинома Ньютона. Данная формула может рассматриваться как обобщение формулы бинома Ньютона на случай произвольного вещественного μ.

Замечание. Повышая степень многочлена Тейлора можно получить более точные приближения функции. Чем больше слагаемых мы записали, тем шире интервал вокруг точки x_0, в котором функцию $f(x)$ можно заменить полиномом Тейлора.

5. 3. Аналитические признаки монотонности функции

Производные являются мощным средством исследования функций. Все дальнейшее в этом разделе посвящено именной этой теме.

***Теорема* 5.4.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке $[a, b]$ существует $f'(x)$. Тогда, для того, чтобы $f(x)$ была монотонно возрастающей (убывающей) функцией необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, x \in [a, b]\, f'(x) \geq 0 \ (f'(x) \leq 0).$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $f(x)$ монотонно возрастает. Рассмотрим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x' - x}.$$

Но тогда, если $\Delta x > 0$, $x + \Delta x > x$, то $f(x+\Delta x) \geq f(x)$ и

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Если $\Delta x < 0$, $x + \Delta x < x$, то $f(x+\Delta x) \leq f(x)$ и

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Так как в результате предельного перехода неравенство измениться не может, то $f'(x) \geq 0$.

Достаточность. Пусть $x_2 > x_1$. Тогда, по формуле Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

так как $f'(c) \geq 0$. Но тогда $f(x_2) \geq f(x_1)$. При этом если для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и, следовательно, в формуле Лагранжа $f'(c) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$ и функция f строго возрастает.

Аналогично доказывается если $f(x)$ монотонно убывающая функция. ●

Замечание. Как было показано, условие положительности производной на интервале является достаточным условием строгого возрастания. Отметим, что это условие не является, однако, необходимым условием строгого возрастания. Действительно, например, функция $y = x^3$ строго возрастает на всей числовой оси, однако ее производная $y' = 3x^2$ не всюду положительна – она обращается в нуль при $x = 0$.

5. 4. Локальные экстремумы функции

Определение. Говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет ***локальный максимум*** (***локальный минимум***), если

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall x \ |x - x_0| < \delta \ \ f(x) \le f(x_0) \ \ \big(f(x) \ge f(x_0)\big).$$

В этом определении обратите внимание на слово «локальный». Оно означает, что $f(x)$ принимает свое наибольшее значение в точке x_0 только по отношению к отрезку $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Вне этого отрезка о поведении функции ничего не утверждается: она может принять там и значение, больше чем $f(x_0)$. То же самое можно сказать и по отношению к локальному минимуму (см. рис. 13).

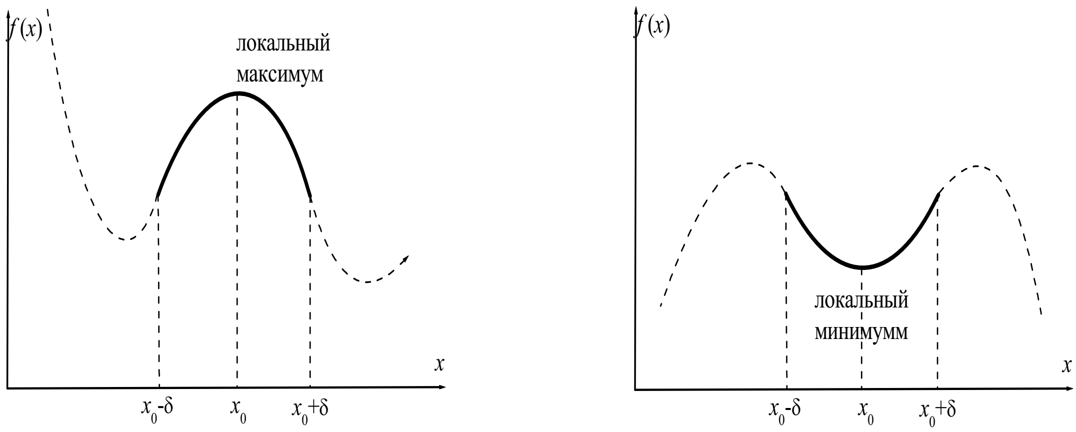


Рис. 13. Локальный максимум (минимум) функции

Определение. Точки, в которых функция имеет локальный максимум или локальный минимум называются ***точками экстремума***.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются ***стационарными точками***,

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x) = \infty$ называются ***критическими точками.***

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a, b]$. Пусть в точке x_0, такой, что $a < x_0 < b$, функция $f(x)$ принимает свое экстремальное, то есть наибольшее или наименьшее значение. Тогда, по теореме Ферма $f'(x) = 0$.

И следует необходимое условие локального экстремума.

Теорема* 5.5. (Необходимое условие экстремума*) Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю.

Отметьте, что если выполнено условие $f'(x) = 0$ или $f'(x) = \infty$, то это еще не означает, что в точке x_0 функция имеет локальный экстремум. Условие $f'(x_0) = 0$ (или $f'(x) = \infty$) дает лишь точку «подозрительную» на экстремум, и что там на самом деле – еще предстоит ответить.

Теорема* 5.6. (Первый достаточный признак экстремума*) Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка локального максимума. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка локального минимума. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Доказательство. Пусть x_0 – точка возможного экстремума функции, причем

$$f'(x) > 0 \text{ для } x < x_0,\ \forall x \in U(x_0, \delta);$$
$$f'(x) < 0 \text{ для } x > x_0,\ \forall x \in U(x_0, \delta).$$

Тогда

$$\text{при } f'(x) > 0 \text{ для } x < x_0,\ \forall x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x_0) > f(x),$$
$$\text{при } f'(x) < 0 \text{ для } x > x_0,\ \forall x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x_0) > f(x),$$

следовательно $\forall x \in U(x_0, \delta)$: $f(x_0) > f(x)$, т. е. точка x_0 является точка локального максимума.

Аналогично доказывается и существование точки локального минимума. Если $f'(x)$ сохраняет знак в окрестности точки x_0, то в этой окрестности функция монотонна, т. е. точка x_0 не является точкой локального экстремума. •

***Теорема* 5.7.** (*Второй достаточный признак экстремума*) Пусть функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ \ f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда возможны следующие варианты:

а) $n = 2m$ – *четное число* и

если $f^{(2m)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 – локальный максимум,

если $f^{(2m)}(x_0) > 0$, то в точке x_0 – локальный минимум.

б) $n = 2m + 1$ – *нечетное число*

тогда в точке x_0 локального экстремума нет.

Замечание.

1. Частный случай теоремы 5.7 при $n = 2$: $f'(x_0) = 0$,

   если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума,

   если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума.

2. Все условия экстремума относятся к внутренним точкам промежутка, на котором определена функция.

Пример 5.6. Найти точки экстремума функции

$$y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Решение. Найдем точки подозрительные на точки экстремума.

$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 4(x-1)^3$$

Используем необходимый признак экстремума

$$y'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

Используем второй достаточный признак экстремума.

$$y'' = 4(3x^2 - 6x + 3) = 12(x^2 - 2x + 1) = 12(x-1)^2 \;\Rightarrow\; y''(1) = 0$$

$$y''' = 24(x-1) \;\Rightarrow\; y'''(1) = 0$$

$$y^{(4)} = 24 > 0 \;\Rightarrow\; x_0 - \min.$$

Пример 5.7. Производная в точке x_0 равна нулю $y'(x_0) = 0$.

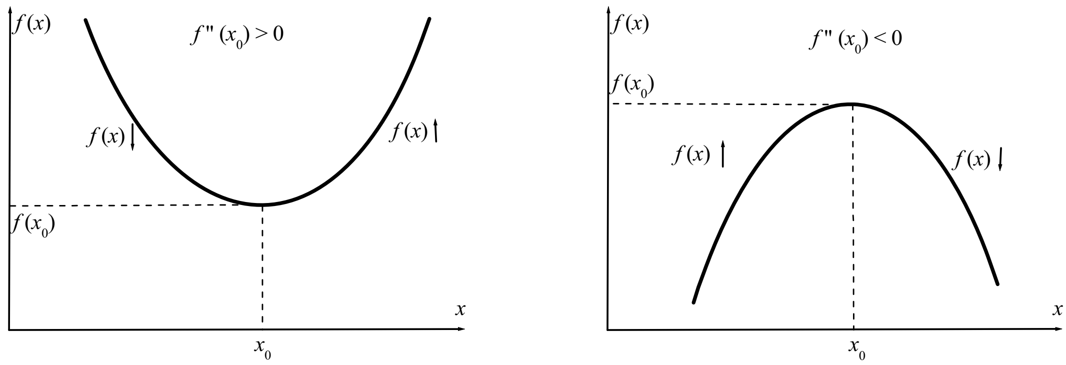


Рис. 14. Экстремумы функции если производная равна нулю

Функция в точке x_0 принимает min значение (рис. 14), если $f''(x_0) > 0$; функция в точке x_0 принимает max значение (рис. 14), если $f''(x_0) < 0$.

Рассмотрим случай, когда в точке x_0 существуют лишь односторонние производные $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$. Вспоминая, что производная – это тангенс угла наклона касательной к оси Ox.

Пример 5.8. Производная в точке x_0 $y'(x_0) = \infty$.

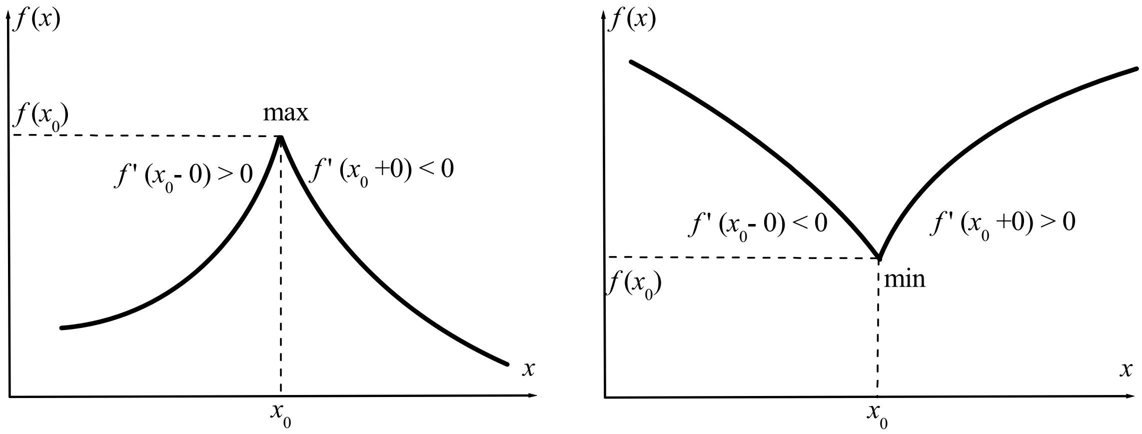


Рис. 15. Экстремум функции если производная равна ∞

Функция в точке x_0 принимает max значение (рис. 15), если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–»; функция в точке x_0 принимает min значение (рис. 15), если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+».

Пример 5.9. Производная в точке x_0 – $y'(x_0)$ «не существует».

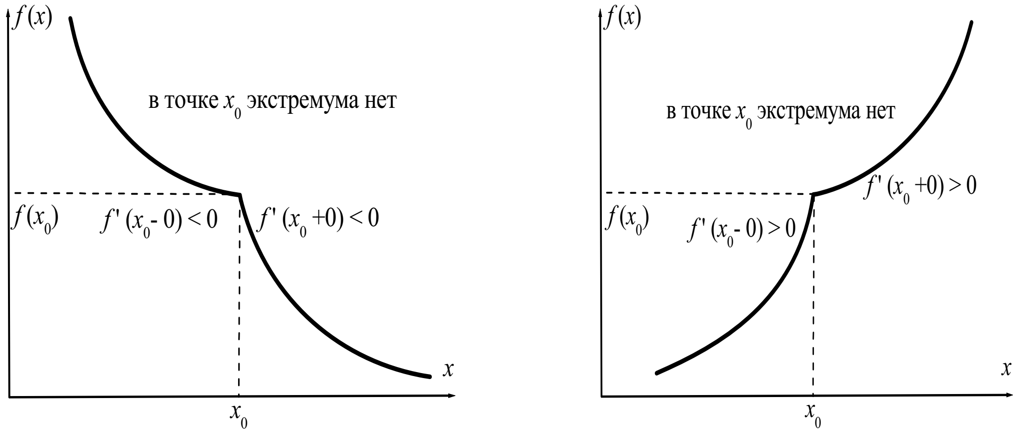


Рис. 16. Экстремума функции нет

Экстремума в точке x_0 нет (рис. 16) так как $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак.

Отсюда видно, что если $f'(x_0-0)$ и $f'(x_0+0)$ имеют разные знаки, то в точке x_0 – локальный экстремум. Если $f'(x_0-0)$ и $f'(x_0+0)$ имеют одинаковые знаки, то локального экстремума нет.

5. 5. Наибольшее и наименьшее значения функции

Наибольшим значением функции называется самое большое, а *наименьшим значением* – самое меньшее из всех ее значений.

Функция может иметь только одно наибольшее значение и только одно наименьшее значение или может не иметь их совсем.

Например, во всей своей области определения функция:

1. $y = \sin x$ имеет наибольшее значение, равное единице, и наименьшее значение, равное минус единице;
2. $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^3$ – не имеют ни наибольшего, ни наименьшего значения;
3. $y = -x^2$ – имеет наибольшее значение, равное нулю, но не имеет наименьшего значения;
4. $y = 1 + \sqrt{|x|}$ – имеет наименьшее значение, равное единице, но не имеет наибольшего значения.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения непрерывных функций основывается на следующих свойствах этих функций:

1. Если в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция $f(x)$ непрерывна и имеет только один экстремум и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$, то она обязательно имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются функцией или в точках экстремума, лежащих внутри отрезка, или на границах этого отрезка.

Получаем *правило для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, где она непрерывна:

1. Найти критические точки, лежащие внутри отрезка $[a, b]$, и вычислить значения функции в этих точках (не исследуя эти точки на экстремум).

2. Вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$.

3. Сравнить полученные значения функции: самое большое из них будет наибольшим значением, а самое меньшее – наименьшим значением функции на отрезке $[a, b]$.

Пример 5.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^2 \ln x \text{ на отрезке } [1/\sqrt[4]{e},\, e].$$

Решение.

1. Найдем критические точки:

$$y' = 2x \ln x + x^2/x = x\,(1 + 2\ln x),$$
$$y' = 0 \text{ в точках } x_1 = 0 \text{ и } x_2 = e^{-1/2}.$$

Точка x_1 лежит вне области определения данной функции. Производная y' существует во всем интервале определения функции. Поэтому внутри заданного отрезка одна критическая точка $x_2 = e^{-1/2}$ и $y\,(e^{-1/2}) = -1/2e$.

2. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$y\,(e^{-1/4}) = -1/4\sqrt{e},\ y\,(e) = e^2.$$

3. Сравнивая полученные значения функции, получаем:

$$y_{нб} = y\,(e) = e^2,$$
$$y_{нм} = y\,(e^{-1/2}) = -1/2e.$$

5. 6. Выпуклость и точки перегиба

Пусть кривая (график) задан функцией $y = f(x)$. Функция $y = f(x)$ имеет в каждой точке интервала (a, b) конечную производную. Тогда в каждой точке $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ график функции имеет касательную, не параллельную оси Oy.

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** **(*выпуклым вверх*)** на интервале (a, b), если дуга кривой расположена выше (ниже) любой касательной, проведенной к графику этой функции.

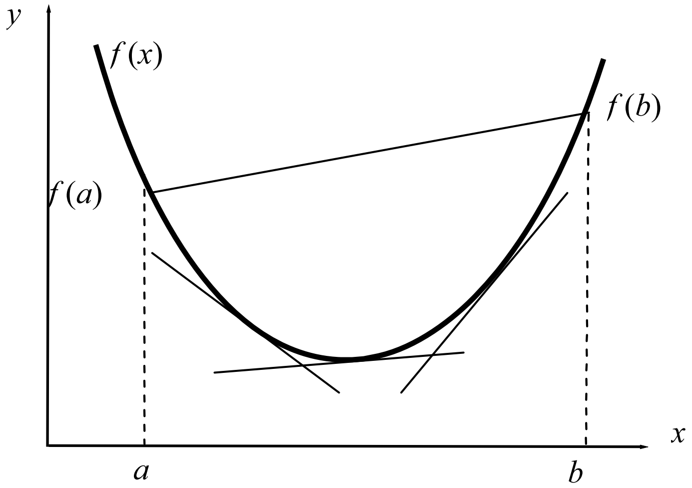


Рис. 17. Вид графика функции – вогнутость (выпуклость вниз)

Вогнутость (выпуклость вниз) рис. 17 функции означает, что график функции лежит ниже секущей, соединяющей любые две ее точки и выше (ниже) любой касательной, проведенной к графику этой функции выше любой касательной, проведенной к графику этой функции.

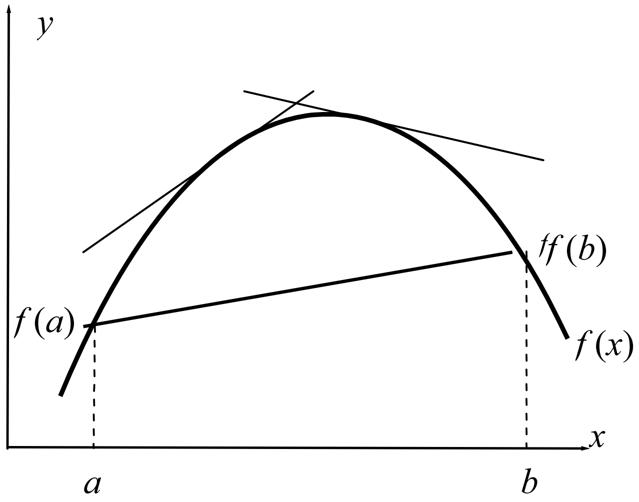


Рис. 18. Вид графика выпуклость (выпуклость вверх) функции

График выпуклой (выпуклость вверх) рис. 18 функции лежит выше секущей, соединяющей любые две ее точки и ниже любой касательной, проведенной к графику этой функции.

***Теорема* 5.8.** (*Достаточные условия выпуклости вогнутости*)

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на некотором промежутке (a, b), причем $f''(x) < 0$) для любого $x \in (a, b)$, то на этом промежутке график функции выпуклый, если $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый на промежутке (a, b).

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$ и проведем касательную в точке x_0.

Теорема будет доказана, если установим, что все точки графика функции $f(x)$ лежат ниже (выше) касательной $\forall x \in (a,b)$.

График функции $f(x)$ по формуле Тейлора можно представить в виде:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \; x < c < x_0.$$

Остаточный член записан в форме Лагранжа.

Уравнение касательной проведенной через точку x_0 запишем в виде:

$$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Рассмотрим разность ординат кривой и касательной при одном и том же значении x:

$$f(x) - y_{кас} = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Если $f''(c) > 0$, то $f(x) - y_{кас} \geq 0$, следовательно, $f(x) \geq y_{кас}$. Т. е. кривая $f(x)$ выше касательной для любого $x \in (a,b)$, вогнутая.

Если $f''(x) < 0$, то $f(x) - y_{кас} \leq 0$, следовательно, $f(x) \leq y_{кас}$. Т. е. кривая $f(x)$ ниже касательной для любого $x \in (a,b)$, выпуклая. ●

Точки перегиба

Определение. Точка $(x_0, f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называется ***точкой перегиба графика*** функции, если она отделяет участок, где кривая выпукла от участка, где кривая вогнута.

Рассмотрим, как выглядит на графике точка перегиба. Пусть левее точки x_0 функция выпукла, а правее x_0 – вогнута (см. рис. 19). Тогда левее точки x_0 график функции лежит под касательной, а правее x_0 – над касательной. Точка перегиба x_0 характеризуется тем, что здесь кривая переходит с одной стороны касательной на другую ее сторону, то есть *кривая пересекает касательную***.** То же самое будет, если левее x_0 функция $f(x)$ вогнута, а правее x_0 – выпукла.

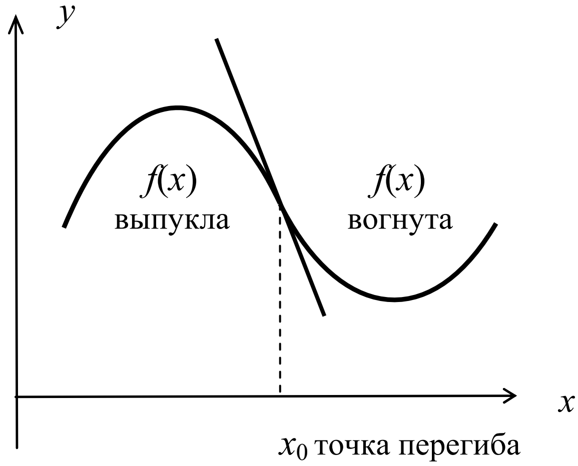


Рис. 19. Точка перегиба

Теорема* 5.9. (Необходимое условие точки перегиба*) Если график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $(x_0, f(x_0))$ и вторая производная $f''(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема* 5.10. (Достаточное условие точки перегиба*) Если в некоторой окрестности точки x_0 существует вторая производная функции $y = f(x)$, причем $f''(x_0) = 0$, и в пределах этой окрестности слева и справа от точки x_0 знаки $f''(x)$ различны, то график функции имеет перегиб в точке $(x_0, f(x_0))$.

Доказательство. Пусть в некоторой точке x_0 выполнено условие $f''(x_0) = 0$. Это, конечно, не означает, что x_0 есть точка перегиба; это дает лишь точку «подозрительную» на перегиб. Если

$$f''(x) < 0 \text{ для } x \in U(x_0, \delta),\ x < x_0 \text{ и}$$

$$f''(x) > 0 \text{ для } x \in U(x_0, \delta) \text{ и } x > x_0,$$

то точка x_0 отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости. Если

$$f''(x) > 0 \text{ для } x \in U(x_0, \delta),\ x > x_0 \text{ и}$$

$$f''(x) < 0 \text{ для } x \in U(x_0, \delta),\ x < x_0,$$

то точка x_0 отделяет интервал вогнутости от интервала выпуклости.

В обоих случаях точка $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика функции. ●

5. 8. Асимптоты

Пусть функция $f(x)$ определена на полу бесконечном (типа $[a, +\infty)$ или $(-\infty, a]$) или бесконечном интервале.

Определение. Асимптотой графика функции называется прямая, к которой неограниченно приближается график функции при $x \to \infty$ или $y \to \infty$.

Определение. Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $f(x)$, если при $x \to a \pm 0$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ рис. 20.

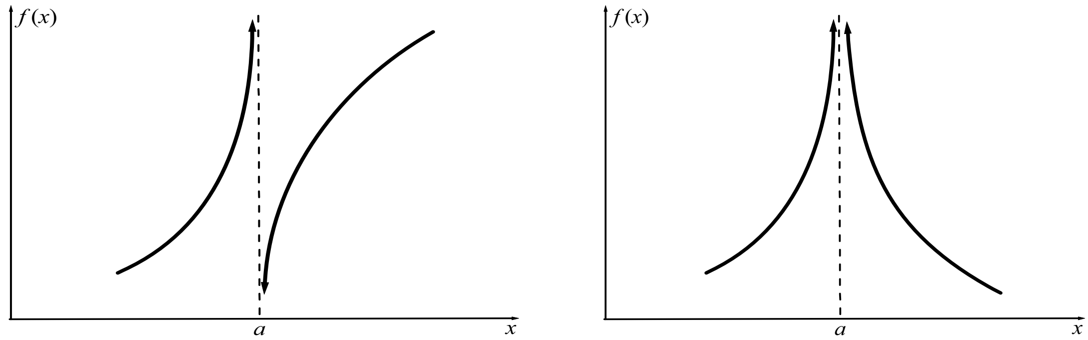


Рис. 20. Вертикальная асимптота

Определение. Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $f(x)$, если при $x \to a \pm 0$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ рис. 20.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ если эту прямую можно представит в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \alpha(x) = 0$.

Т. е. разность α (x) между ординатами точек кривой и асимптоты (рис. 21) при $x \to \pm\infty$ б. м. в.

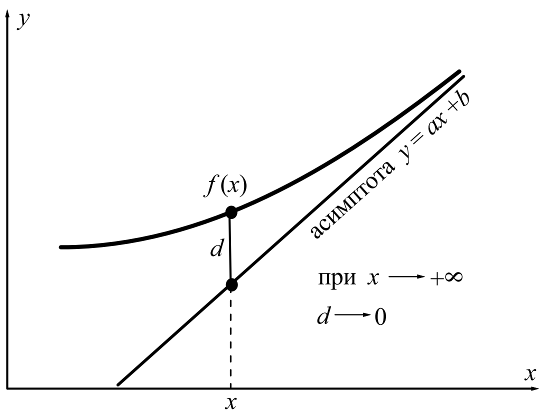


Рис. 21. Наклонная асимптота

Пусть существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$. Тогда говорят, что у функции $f(x)$ имеется ***горизонтальная асимптота*** $y=b$. Графики функций рис. 22 имеют горизонтальную асимптоту при $x\to+\infty$.

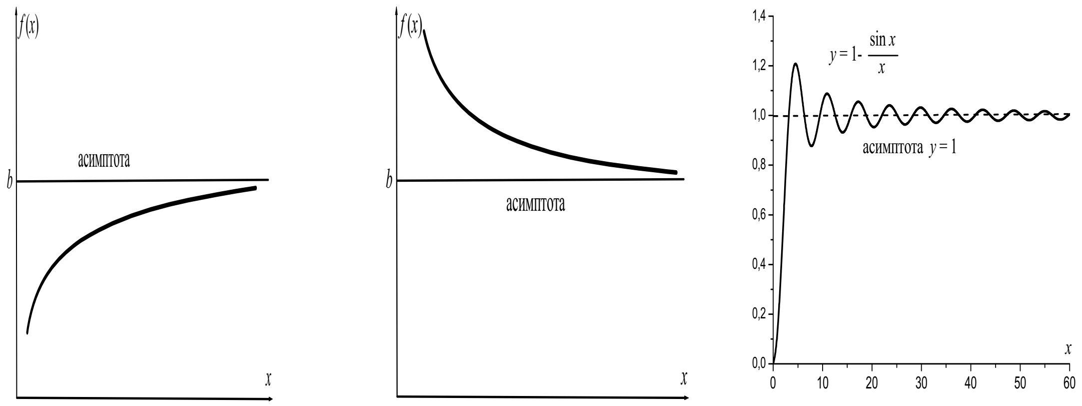


Рис. 22. Горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$

***Теорема* 5.11.** (*Критерий существования наклонной асимптоты*)

Для того чтобы прямая $y=kx+b$ была наклонной асимптотой необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=b.$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $y=kx+b$ наклонная асимптота при $x\to+\infty$. Тогда имеет место равенство $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, $\alpha(x)\to 0$ *при* $x\to+\infty$. Рассмотрим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[b+\alpha(x)\right]=b.$$

Таким образом, если прямая $y=kx+b$ наклонная асимптота, то пределы существуют.

Достаточность. Пусть существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \text{ и } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b.$$

Тогда из второго равенства следует, что

$$f(x)-kx=b+\alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$, т. е. $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ и $y = kx + b$ наклонная асимптота.

Аналогично рассматривается случай $x \to -\infty$. •

Пример 5.11. Найти асимптоты графика функции $y = \sqrt{c^2 + x^2}$.

Решение. Область определения $D(y) = \mathbb{R}$. Функция не имеет точек разрыва. Следовательно, график функции не имеет вертикальных асимптот. Функция определена при сколь угодно больших x, и возможно существование наклонных асимптот.

Пусть наклонная асимптота имеет вид $y = k\,x + b$. Тогда

$$\kappa = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{c^2 + x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{c^2}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{c^2 + x^2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(c^2 + x^2) - x^2}{\sqrt{c^2 + x^2} + x} = 0,$$

то есть асимптота при $x \to +\infty$ имеет уравнение $y = x$.

Аналогично можно показать, что при $x \to -\infty$ асимптота имеет вид $y = -x$ так как функция четная.

Схема графика функции $y = \sqrt{c^2 + x^2}$ изображена на рис. 23:

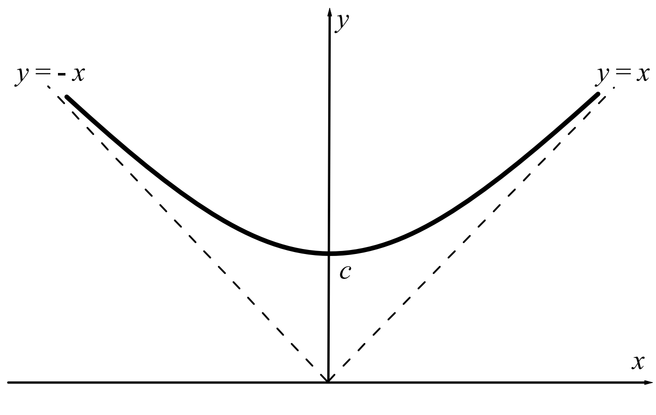


Рис. 23. График функции $y = \sqrt{c^2 + x^2}$

5.9. Кривизна. Радиус кривизны

Одним из элементов, характеризующих форму кривой, является степень ее искривленности.

Пусть мы имеем кривую, которая не пересекает самое себя и имеет определенную касательную в каждой точке. Проведем касательные к кривой в каких-нибудь двух ее точках A и B и обозначим через α угол, образованный этими касательными, или – точнее – угол поворота касательной при переходе от точки A к точке B. Этот угол называется *углом смежности* дуги AB. У двух дуг, имеющих одинаковую длину, больше изогнута та дуга, у которой угол смежности больше.

С другой стороны, рассматривая дуги различной длины, мы можем оценить степень их искривленности только соответствующим углом смежности. Отсюда следует, что полной характеристикой изогнутости кривой будет отношение угла смежности к длине соответствующей дуги.

Определение. Средней кривизной $K_{\text{ср}}$ ***дуги*** $\breve{AB}$ называется отношение соответствующего угла смежности к длине дуги.

Для того, чтобы охарактеризовать степень искривленности данной линии в непосредственной близости к данной точке А, введем понятие кривизны в данной точке.

Определение. Кривизной K_A линии в данной точке называется предел средней кривизны дуги, когда длина этой дуги стремиться к нулю

$$K_A = \lim_{B \to A} K_{cp} = \lim_{AB \to 0} \frac{\alpha}{\breve{AB}}.$$

Пусть кривая задана в декартовой системе координат уравнением вида $y = f(x)$ и функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную. Тогда в любой точке кривой, где существует и непрерывна вторая производная $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, можно вычислить кривизну по формуле

$$K = \frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Заметим, что при вычислении кривизны кривой следует брать только арифметическое (т. е. положительное) значение корня в знаменателе, так как кривизна линии по определению не может быть отрицательной.

Пример 5.12. Определите кривизну параболы $y^2 = 2px$:

а) в ее произвольной точке $M(x, y)$;

б) в точке $M_1(0, 0)$;

с) в точке $M_2(p/2, p)$.

Решение. Находим первую и вторую производные функции $y = \sqrt{2px}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{\sqrt{2px}},\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу кривизны, получим:

а) $K=\dfrac{p^2}{\left(2px+p^2\right)^{3/2}}$;

б) $K_{x=0,y=0}=\dfrac{1}{p}$;

с) $K_{x=p/2,y=p}=\dfrac{1}{2\sqrt{2p}}$.

Определение. Величина R, обратная кривизне K линии в данной точке, называется ***радиусом кривизны*** этой линии в рассматриваемой точке:

$$R = 1/K, \qquad \text{или} \qquad R=\frac{\left(1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}.$$

Вопросы и задания для самопроверки

1. Определение стационарных и критических точек функции. Найдите стационарные и критические точки функции $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

2. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\ln(1-x)}$.

3. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$.

4. Понятие формулы Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0 и остаточным членом в форме Пеано. Запишите формулу Тейлора для функции $f(x) = x^3$ с центром в точке $x_0 = 1$.

5. Разложите функцию $y=ctgx$ по степеням $x+\dfrac{\pi}{2}$ до члена $\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)^3$ включительно с остаточным членом в форме Пеано.

6. Сформулируйте и докажите достаточные условия выпуклости и вогнутости функции. Примените его к исследованию функции $y = \cos^2 x$ на промежутке $[0; \pi]$.

7. Понятие точки перегиба. Сформулируйте достаточное условие точки перегиба. На основании теоремы проанализируйте поведение функций $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0 = 0$.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

6. 1. Основные понятия и теоремы

Будем предполагать, что функции на интервале (a, b) (или объединении конечного числа интервалов) определены, непрерывны или имеют конечное число точек разрыва и дифференцируемы или имеют лишь конечное число точек разрыва, в которых функция не является дифференцируемой.

1. Четные, нечетные, периодические функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***чётной***, если $f(-x) = f(x)$ для всех x из области определения функции.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечётной***, если $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения функции.

График чётной функции расположен симметрично относительно оси Oy. График нечётной функции расположен симметрично относительно начала координат.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует число T, отличное от нуля, такое, что выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$ для всех x из области определения функции. При этом наименьшее из положительных чисел T является периодом функции $f(x)$.

2. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ если эта функция представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0.$$

Если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, то говорят, что у функции $y = f(x)$ имеется ***горизонтальная асимптота*** $y = b$ (или для наклонной асимптоты $k = 0$).

Теорема **6.1.** (*Критерий существования наклонной асимптоты*) Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,\ \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx \right] = b.$$

Аналогично вводится понятие наклонной и горизонтальной асимптоты графика функции при $x \to -\infty$.

3. Локальный экстремум функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема **6.2.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке $[a, b]$ существует $f'(x)$. Тогда, для того, чтобы $f(x)$ была монотонно возрастающей (убывающей) функцией необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\ x \in [a, b]\ f'(x) \geq 0\ (f'(x) \leq 0).$$

Определение. Говорят, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет ***локальный максимум*** (***локальный минимум***), если существует такая окрестность точки x_0, в которой при $x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0)\ (\text{соответственно}\ f(x) > f(x_0)).$$

Точки локального максимума или минимума называются ***точками экстремума*** функции. Значение функции $y = f(x)$ в точке максимума (минимума) называют ***максимумом*** (***минимумом***) функции, или ***экстремумом*** функции.

Значения аргумента функции $y = f(x)$, при которых производная функции равна, нулю называются ***стационарными точками***.

Значения аргумента функции $y = f(x)$, при которых либо производная функции равна нулю, либо производная не существует называются ***критическими точками первого рода*** **(**или точками возможного экстремума).

Теорема **6.3.** (*Необходимое условие экстремума*) Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю, или не существует.

Теорема **6.4.** (*Первый достаточный признак экстремума*) Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка локального максимума. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на

«+», то x_0 – точка локального минимума. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.

***Теорема* 6.5.** (*Второй достаточный признак экстремума*) Пусть функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда возможны следующие варианты:

а) $n = 2m$ – *четное число* и
если $f^{(2m)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 – локальный максимум,
если $f^{(2m)}(x_0) > 0$, то в точке x_0 – локальный минимум.

б) $n = 2m + 1$ – *нечетное число*
тогда в точке x_0 локального экстремума нет.

4. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в каждой точке интервала (a, b) конечную производную. Тогда в каждой точке $M(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ график функции $y = f(x)$ имеет касательную, не параллельную оси Oy.

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** или вогнутым (***выпуклым вверх*** или выпуклым) на интервале (a, b), если дуга кривой расположена выше (ниже) любой касательной, проведенной к графику этой функции.

***Теорема* 6.6.** (*Достаточное условие выпуклости вогнутости*) Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на некотором промежутке (a, b), причем $f''(x) < 0$) для любого $x \in (a, b)$, то на этом промежутке график функции выпуклый, если $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый на промежутке (a, b).

Определение. Точка $(x_0, f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называется ***точкой перегиба*** функции, если она отделяет участок, где функция выпукла от участка, где функция вогнута.

***Теорема* 6.7.** (*Необходимое условие точки перегиба*) Если график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $(x_0, f(x_0))$ и вторая производная $f''(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

***Теорема* 6.8.** (*Достаточное условие точки перегиба*) Если в некоторой окрестности точки x_0 существует вторая производная функции $y =$ (x), причем $f''(x_0) = 0$, и в пределах этой окрестности слева и справа от точки x_0 знаки $f''(x)$ различны, то график функции имеет перегиб в точке $(x_0, f(x_0))$.

Значения аргумента функции $y = f(x)$, при которых либо вторая производная функции равна нулю, либо «не существует» называются критическими точками второго рода (или возможными точками перегиба).

6. 2. Общая схема исследования графика функции

Приобретенные навыки в определении интервалов монотонности функции, экстремума функции, интервалов выпуклости и вогнутости графика функции, его точек перегиба и асимптот позволяют провести полное исследование функции и построить эскиз графика функции, который, хотя и не будет отличаться большой точностью, но все же даст возможность усмотреть характерные свойства и особенности исследуемой функции.

Под полным исследованием функции обычно понимается решение таких вопросов:

1. Найти область определения функции.
2. Отметить (если они есть) особенности функции (периодичность, четность и нечетность) и точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Если граничные точки области определения функции принадлежат ей, то найти значения функции в этих точках, в противном случае выяснить поведение функции в окрестности этих точек (включая и несобственные точки $-\infty$ и $+\infty$).
4. Найти наклонные асимптоты (вертикальные определяются в пункте 3) или убедиться в их отсутствии.
5. Найти y'. Определить интервалы монотонности (возрастания и убывания функции) и локальные экстремумы.
6. Найти y''. Определить интервалы, на которых график функции выпуклый вверх (выпуклый) или выпуклый вниз (вогнутый) и точки перегиба.
7. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования.

Замечание. Если полученных результатов исследования окажется недостаточно, то следует найти еще несколько точек графика функции, исходя из ее уравнения.

Построение графика функции целесообразно выполнять по его элементам, вслед за выполнением отдельных пунктов исследования.

Не всегда нужно точно следовать этой схеме. Выполнение пункта 2 исследования требует решения уравнения $f(x) = 0$ и может быть опущено, если это решение нельзя получить элементарным путем.

6. 3. Примеры

Пример 6.1. Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{3x}{x^2-4}$.

Решение.

1. Область определения функции $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Область определения симметрична относительно начала координат и

$$f(-x)=\frac{3(-x)}{(-x)^2-4}=-\frac{3x}{x^2-4}=-f(x).$$

Следовательно, функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пересечение с осью Ox:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{3x}{x^2-4}=0 \Rightarrow x = 0.$$

Пересечение с осью Oy:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{3\cdot 0}{0^2-4}=0 \Rightarrow y = 0.$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат в точке O (0; 0).

3. Функция имеет две точки разрыва: $x = -2$ и $x = 2$. Определим тип разрывов:

$$\lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2-0}\frac{3x}{(x-2)(x+2)}=\left(\frac{3(-2)}{(-2-0-2)(-2-0+2)}\right)=\left(\frac{6}{4(-0)}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0} f(x)=\lim_{x\to-2+0}\frac{3x}{(x-2)(x+2)}=\left(\frac{3(-2)}{(-2+0-2)(-2+0+2)}\right)=\left(\frac{6}{4(+0)}\right)=+\infty.$$

Учитывая симметрию графика функции, относительно начала координат для $x = 2$ получаем

$$\lim_{x\to2-0} f(x)=-\infty \text{ и } \lim_{x\to2+0} f(x)=+\infty.$$

Итак, точки $x = -2$ и $x = 2$ точки разрыва второго рода, прямые $x = -2$ и $x = 2$ – вертикальные асимптоты графика функции.

Исследуем поведение функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=0.$$

Учитывая четность функции

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{(x-2)(x+2)} = 0,$$

или вычисляя

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2} = 0.$$

Итак, $y = 0$ – горизонтальная асимптота графика функции при $x \to \pm\infty$.

4. Функция определена при сколь угодно больших x. Следовательно, возможно существование наклонных асимптот. Исследование поведения функции при $x \to \pm\infty$ сразу позволяет найти горизонтальные асимптоты (частный случай наклонной асимптотой $y = k\,x + b$ при $k = 0$).

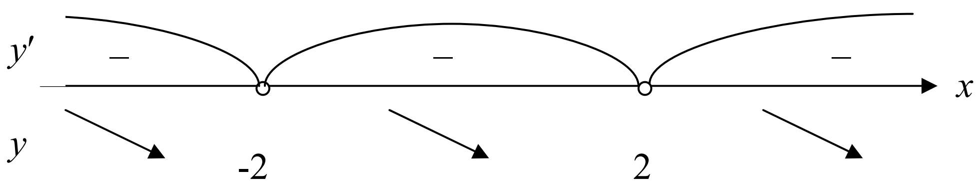
5. Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = \left(\frac{3x}{x^2-4}\right)' = 3\frac{(x^2-4) - x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -\frac{3(4+x^2)}{(x^2-4)^2} \Rightarrow$$

а) $y' \neq 0$ при $\forall\, x \in D\,(y)$;

б) $y' = \infty$ (производная «не существует») при $x = \pm\, 2 \notin D\,(y)$.

Точки разрыва $x = \pm\, 2$ разбивают область определения функции на три части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция убывает на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ и $(2; +\infty)$. Точек экстремума нет.

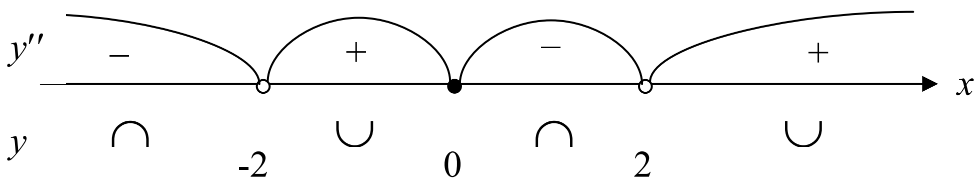
6. Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

$$y'' = \left(-\frac{3(4+x^2)}{(x^2-4)^2}\right)'' = -3\frac{2x(x^2-4)^2 - (4+x^2)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{6x(12+x^2)}{(x^2-4)^3} \Rightarrow$$

а) $y'' = 0$ при $x = 0$;

б) $y'' = \infty$ (вторая производная «не существует») при $x = \pm\, 2 \notin D\,(y)$.

Критическая точка второго рода и точки разрыва разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, график функции выпуклый на интервалах (–∞; –2) и (0;2), график функции вогнутый на интервалах (–2; 0) и (2;+∞). Точка перегиба $x = 0$.

7. На основании проведенного исследования строим схему графика рис. 24.

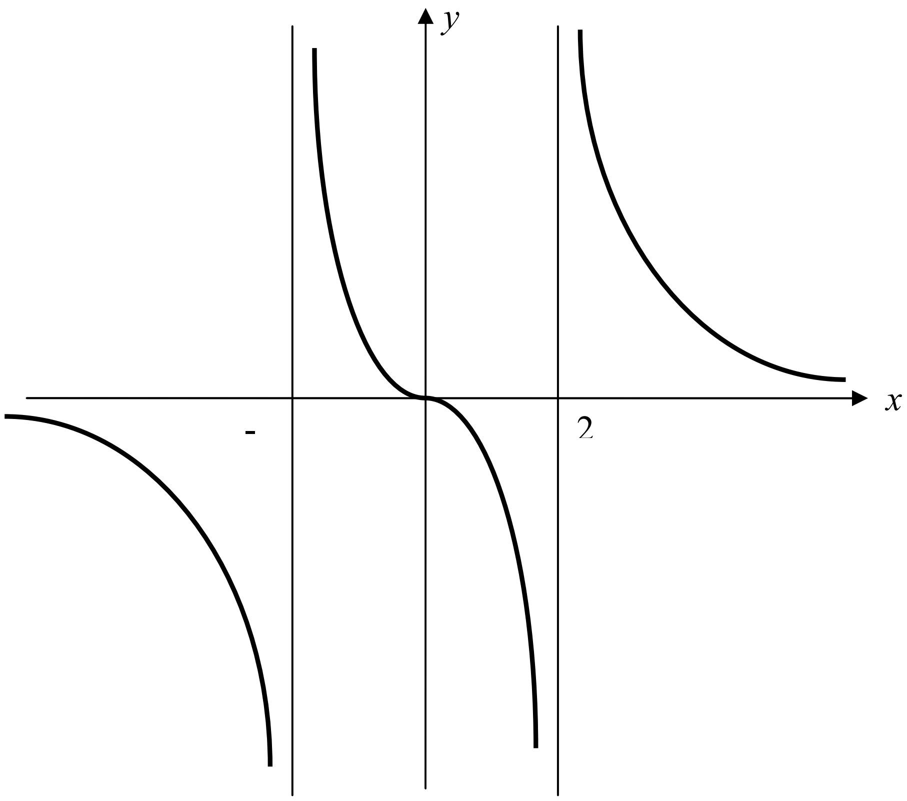


Рис. 24. График функции $y = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$

Пример 6.2. Провести полное исследование и построить график функции $y = x^2 e^{-x}$.

Решение.

1. Область определения функции $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Область определения симметрична относительно начала координат и

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)} = x^2 e^x \neq \pm f(x).$$

Следовательно, функция общего вида, и ее график не является симметричным относительно оси Oy или начала координат.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пересечение с осью Ox:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Пересечение с осью Oy:

$$x = 0 \Rightarrow 0^2 e^0 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат в точке O (0; 0).

3. Функция не имеет точек разрыва. Поэтому вертикальных асимптот у графика функции нет.

Исследуем поведение функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+0}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2x\right)'}{\left(e^x\right)'} = 0.$$

Итак, $y = 0$ – горизонтальная асимптота графика функции при $x \to +\infty$.

4. Функция определена при сколь угодно больших x. Следовательно, возможно существование наклонных асимптот. Исследование поведения функции при $x \to +\infty$ позволило найти горизонтальную асимптоту.

При $x \to -\infty$ имеем:

$$\kappa = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{-\infty}{+0}\right) = -\infty.$$

Следовательно, наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ нет.

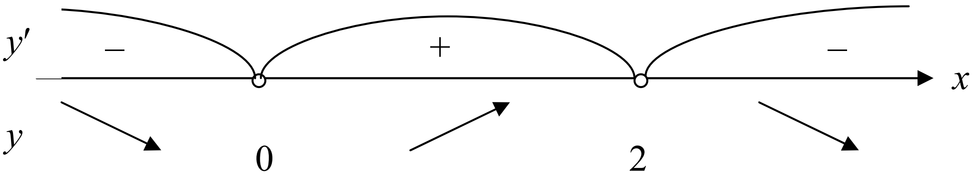
5. Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} x(2 - x) \Rightarrow$$

а) $y' = 0$ при $x = 0$, $x = 2$;

б) y' всюду существует и непрерывна $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, критическими точками первого рода являются точки $x = 0$, $x = 2$. Критические точки разбивают область определения функции на три части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция убывает на интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $(2;+\infty)$, функция возрастает на интервале $(0;\ 2)$.

Точка $x = 0$ – точка минимума. Минимум функции: $y_{\min} = y(0) = 0$.

Точка $x = 2$ – точка максимума. Максимум функции: $y_{\max} = y(2) = 4e^{-2}$.

6. Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

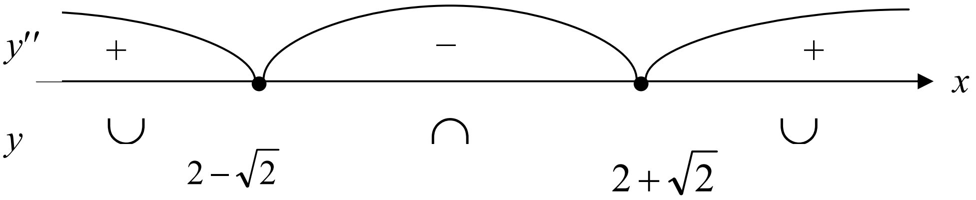
$$y'' = \left(e^{-x}(2x - x^2)\right)' = e^{-x}\cdot(-1)(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2);\ \Rightarrow$$

а) $y'' = 0$ при $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$;

б) y'' всюду существует и непрерывна $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, критическими точками первого рода являются точки $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$.

Критические точки второго рода разбивают область определения функции на три части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, график функции выпуклый на интервале $\left(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\right)$, график функции вогнутый на интервалах $\left(-\infty; 2 - \sqrt{2}\right)$ и $\left(2 + \sqrt{2}; +\infty\right)$. Точки перегиба

$$A\left(2 - \sqrt{2}; \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \cdot e^{-\left(2 - \sqrt{2}\right)}\right) \text{ и } B\left(2 + \sqrt{2}; \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 \cdot e^{-\left(2 + \sqrt{2}\right)}\right).$$

7. На основании проведенного исследования строим схему графика рис. 25.

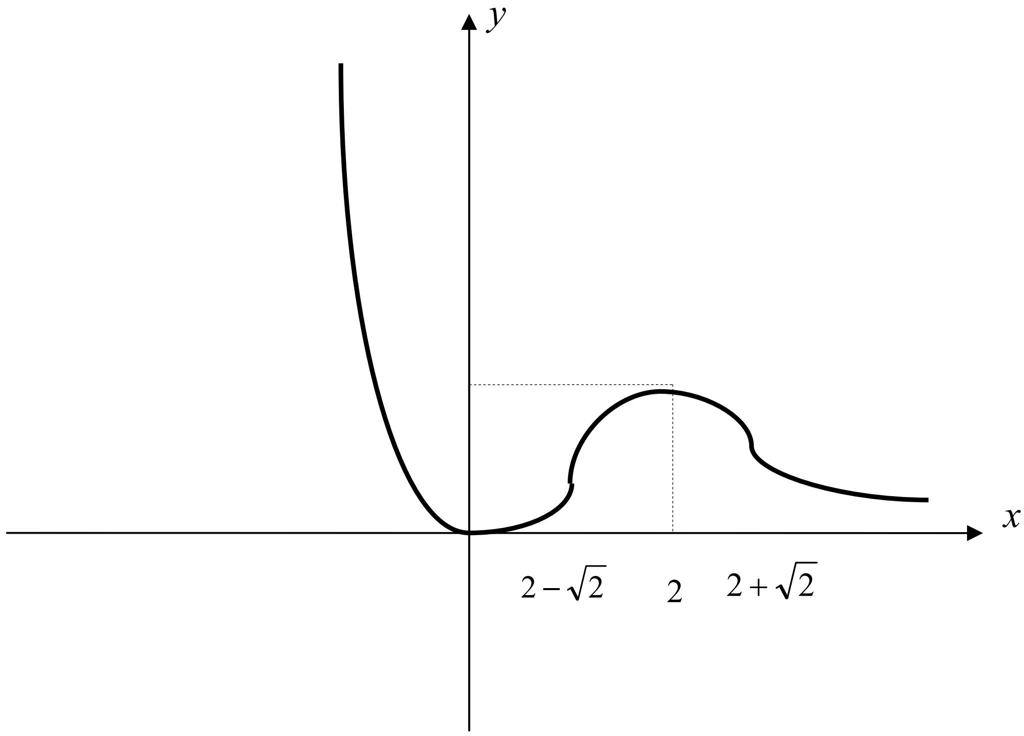


Рис. 25. График функции $y = x^2 e^{-x}$

Пример 6.3. Провести полное исследование и построить график функции $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$.

Решение.

1. Область определения функции:

$$8x^2 - x^4 \geq 0 \Rightarrow (8 - x^2) \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 2\sqrt{2}.$$

Следовательно, $D(y) = \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$.

2. Область определения симметрична относительно начала координат и

$$f(-x) = \sqrt{8(-x)^2 - (-x)^4} = \sqrt{8x^2 - x^4} = f(x).$$

Следовательно, функция четная, и ее график симметричен относительно оси Oy.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пересечение с осью Ox:

$$y = 0 \Rightarrow \sqrt{8x^2 - x^4} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Пересечение с осью Oy:

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{8 \cdot 0^2 - 0^4} = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат в точке O (0; 0) и пересекает ось Ox в точках $A(-2\sqrt{2};0)$ и $B(2\sqrt{2};0)$.

3. 3 Граничные точки области определения функции представляют собой точки A $(-2\sqrt{2}$, 0) и B $(2\sqrt{2}$, 0). Функция не имеет точек разрыва.

4. Функция не определена при сколь угодно больших x. Следовательно, наклонных асимптот у графика функции нет.

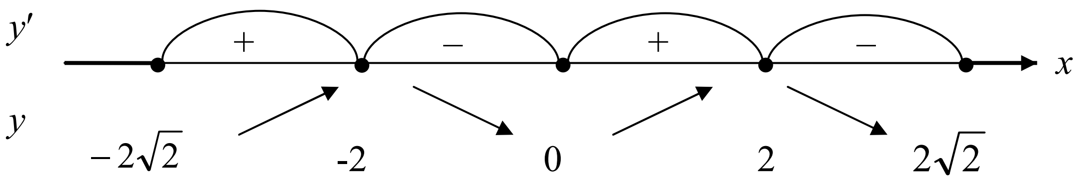
5. Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = \left(\sqrt{8x^2 - x^4}\right)' = \frac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} = -\frac{2x(x-2)(x+2)}{\sqrt{8x^2 - x^4}} \Rightarrow$$

а) $y' = 0$ при $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$;

б) $y' = \infty$ (производная «не существует») при $x = \pm 2\sqrt{2}$.

Таким образом, критическими точками первого рода являются точки $x = 0$, $x = 2$ и $x = -2$. Критические точки разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция убывает на интервалах (– 2; 0) и $(2;2\sqrt{2})$, функция возрастает на интервалах $(-2\sqrt{2}$; – 2) и (0; 2).

Точка $x = 0$ – точка минимума.

Минимум функции: $y_{\min} = y(0) = 0$.

Точки $x = 2$ и $x = -2$ – точки максимума.

Максимум функции: $y_{\max} = y(2) = 4$, $y_{\max} = y(-2) = 4$.

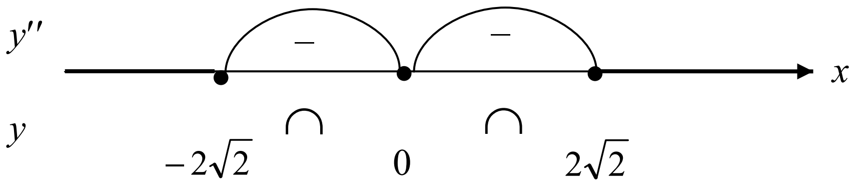
6. Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

$$y'' = \left(-\frac{3(4+x^2)}{(x^2-4)^2}\right)'' = -3\frac{2x(x^2-4)^2 - (4+x^2)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{6x(12+x^2)}{(x^2-4)^3} \Rightarrow$$

а) $y'' = 0$ при $x = 0$;

б) $y'' = \infty$ (вторая производная «не существует») при $x = \pm 2 \notin D(y)$.

Критическая точка второго рода и точки разрыва разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, график функции выпуклый на интервалах (–∞; –2) и (0;2), график функции вогнутый на интервалах (–2; 0) и (2;+∞). Точка перегиба $x = 0$.

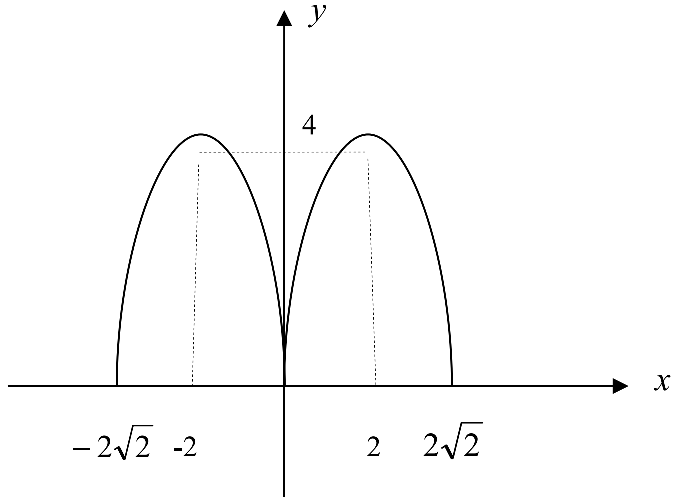


Рис. 26. График функции $y=\sqrt{8x^2-x^4}$

7. На основании проведенного исследования строим схему графика рис. 26.

Пример 6.4. Провести полное исследование и построить график функции $y = x - 2arctgx$.

Решение.

1. Область определения функции $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Область определения симметрична относительно начала координат и

$$f(-x) = -x - 2arctg(-x) = -f(x).$$

Следовательно, функция нечетная, и ее график является симметричным относительно начала координат.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пересечение с осью Ox:

$$y = 0 \Rightarrow x - 2arctgx = 0 \Rightarrow x = 2arctgx.$$

Пересечение с осью Oy:

$$x = 0 \Rightarrow 0 - 2arctg0 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат в точке O (0; 0) и ось Ox в симметричных относительно нуля точках $x_{1,2}$, которые можно найти графически из системы $\begin{cases} y = x, \\ y = 2\text{arctg}x. \end{cases}$

3. Функция не имеет точек разрыва. Поэтому вертикальных асимптот у графика функции нет.

Исследуем поведение функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 2\text{arctg}x\right) = \left(-\infty + \pi\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 2\text{arctg}x\right) = \left(+\infty - \pi\right) = +\infty,$$

Итак, горизонтальных асимптот у графика функции нет.

4. Функция определена при сколь угодно больших x. Следовательно, возможно существование наклонных асимптот.

При $x \to -\infty$ имеем:

$$\kappa_1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x - 2\text{arctg}x}{x} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - k_1 x\right) = -\lim_{x\to-\infty} 2\text{arctg}x = \pi.$$

При $x \to +\infty$ имеем:

$$\kappa_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x - 2\text{arctg}x}{x} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - k_2 x\right) = -\lim_{x\to+\infty} 2\text{arctg}x = -\pi.$$

Следовательно, $y = x + \pi$ наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ и $y = x - \pi$ наклонной асимптоты при $x \to +\infty$.

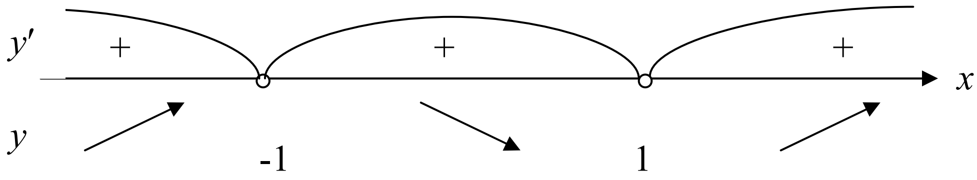
5. Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2} \Rightarrow$$

а) $y' = 0$ при $x = 1$, $x = -1$;

б) y' всюду существует и непрерывна $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, критическими точками первого рода являются точки $x = 1$, $x = -1$. Критические точки разбивают область определения функции на три части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция убывает на интервале(–1; 1), функция возрастает на интервалах(–∞; -1) и (1;+∞), .

Точка $x = 1$ – точка минимума. Минимум функции: $y_{\min} = y(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$.

Точка $x = -1$ – точка максимума. Максимум функции: $y_{\max} = y(-1) = -1 + \dfrac{\pi}{2}$.

6. Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

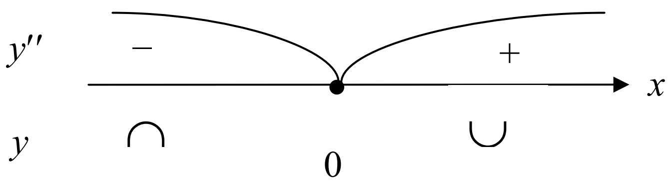
$$y'' = \left(\frac{x^2-1}{1+x^2}\right)' = \frac{2x(1+x^2)-2x(x^2-1)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} \Rightarrow$$

в) $y'' = 0$ при $x = 0$;

г) y'' всюду существует и непрерывна $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, критическими точками первого рода являются точки $x = 0$.

Критические точки второго рода разбивают область определения функции на две части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, график функции выпуклый на интервале $\left(-\infty;0\right)$, график функции вогнутый на интервале $\left(0;+\infty\right)$. Точка O (0; 0) – точка перегиба графика функции.

7. На основании проведенного исследования строим схему графика рис. 27.

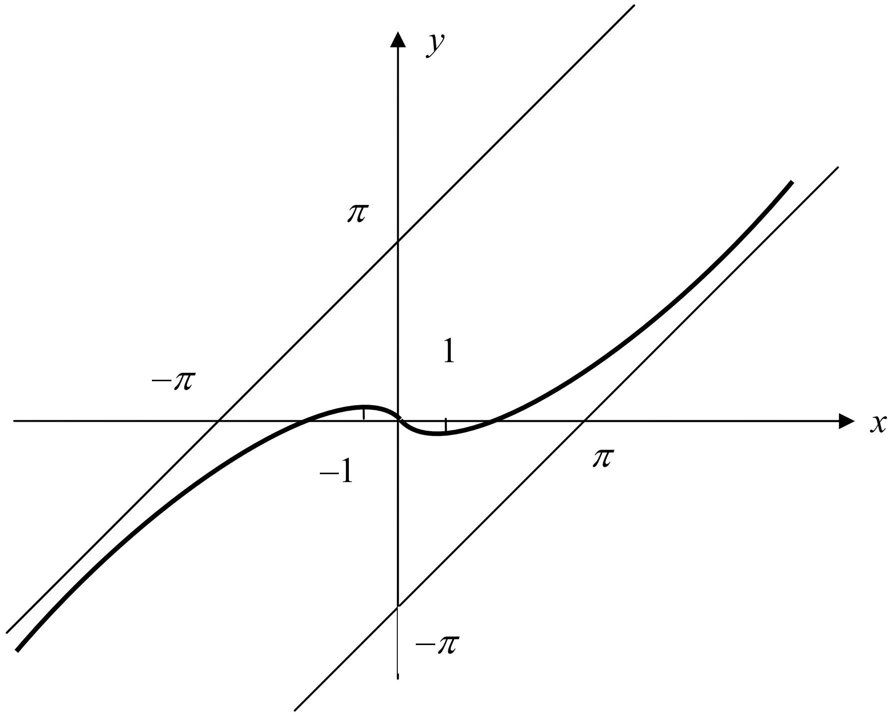


Рис. 27. График функции $y = x - 2arctgx$

Вопросы и задания для самопроверки

1. Найдите асимптоты и постройте график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

2. Найдите асимптоты графика функции $y = \sqrt{x^2-4}$ и постройте его.

3. Найдите экстремумы функции $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и постройте ее график.

4. Найдите точки экстремума и точки перегиба графика функции $y = \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}}$ и постройте график.

5. Найдите интервалы монотонности и точки перегиба графика функции $y = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$ и постройте его.

6. Найдите интервалы монотонности и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y = \dfrac{e^x}{x}$ и постройте график.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 400 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.I – М.: Интеграл-Пресс, 1997. – 416 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. – 432 с.
4. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие/ под ред. В.Ф. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1993. – 480 с.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – Минск: Высшая школа А, 2008. – 460 с.
6. Игнатьева А.В. Курс высшей математики/ Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. – М.: Высшая школа, 1964. – 684 с.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1969.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие. – СПб.: Профессия, 2003. – 432 с.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
10. Высшая математика. Ч.II: Дифференцирование: Учебное пособие. /Кошельская Г.А., Нагорнова А.И., Некряч Е.Н., Столярова Г.П., Харлова А.Н. – Томск: Изд. ТПУ, 2000. –129с.
11. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П. – М.: Наука, 1981. – 368с.

Учебное издание

БЕР Людмила Михайловна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор
доктор физико-математических наук,
профессор *К.П. Арефьев*
Дизайн обложки *А.И. Сидоренко*

Подписано к печати 30.11.2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 4,65. Уч. -изд. л. 4,21.
Заказ 2077-10. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел. /факс: 8 (3822)56-35-35, www. tpu. ru