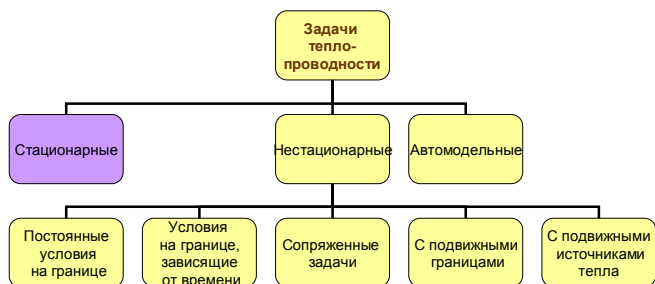


ЛЕКЦИЯ 5

Обзор методов решения задач теплопроводности

Точные методы

- Метод функций Грина
- Метод Дюамеля (Дюамеля-Неймана)
- Метод разделения переменных (метод Фурье)
- Методы интегральных преобразований в конечных и бесконечных пределах



1

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

До сих пор мы рассматривали системы, в которых в результате теплопроводности процессы изменения температуры во времени были завершены. Но для установления стационарного состояния с заданной точностью требуется некоторое время. Кроме того, большинство технологических процессов обработки материалов высокоэнергетическими источниками являются существенно нестационарными. Поэтому на анализе некоторых нестационарных задач мы остановимся, не прибегая к изучению теоретических основ точных аналитических методов.

Характерный размер тела
 $L = \frac{V}{A} = \frac{\text{объем}}{\text{площадь}}$

для шара $L = \frac{(4/3)\pi r_0^3}{4\pi r_0^2} = \frac{r_0}{3}$

для цилиндра $L = \frac{\pi r_0^2 l}{2\pi r_0 l} = \frac{r_0}{2}, l \gg r_0$

для куба $L = \frac{l^3}{6l^2} = \frac{l}{6}$

Условие применимости
 $\frac{L}{\sqrt{\lambda t^* / (cp)}} \ll 1$ (5)

λ велико или тело мало:

$cpV \frac{dT}{dt} = -\alpha(T - T_e)$ (4)

$T_e = const$

Уравнение теплового баланса

3

Литература:

1. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача, М.: Энергия, 1975. -488 С.
2. Ф. Крейт, У.Блэк Основы теплопередачи /М.: Мир, 1983. – 512 С.
3. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности, М, 1975
4. Теория теплообмена, под ред. Леонтьева А.И., М., 1979
5. Баскаков А.П., Берг Б.В., Витт О.К. и др. Теплотехника, Учебник для ВУЗов / М.: Энергоиздат, 1982. – 264 С.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача /М: Едиториал УРСС, 2003. – 784 С.

2

Простейшая задача в безразмерных переменных

Вводим переменные $\theta = \frac{T - T_e}{T_0 - T_e}; \quad \tau = \frac{t}{t^*}; \quad t^* = L^2/\kappa, \kappa = \lambda/(cp)$

Характерный размер тела
 $L = \frac{V}{A} = \frac{\text{объем}}{\text{площадь}}$

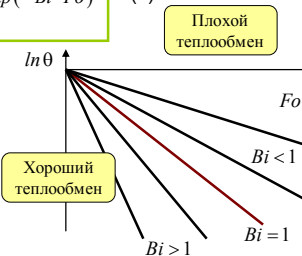
$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\alpha A t^*}{cpV} \theta = -\frac{\alpha L}{\lambda} \theta = -Bi\theta \quad (6)$$

$\theta(0) = 1$

$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda};$ - число Био $\tau = \frac{\kappa t}{L^2} = Fo$ - число Фурье

Разделяем переменные: $\frac{d\theta}{\theta} = -Bi \cdot Fo$ или $\theta = \exp(-Bi \cdot Fo)$ (7)

Использование безразмерных критериев позволяет представить результат для всех тел с любыми коэффициентами теплопроводности на едином графике



4

Пример

При измерении температуры термометром важно знать, насколько быстро термометр реагирует на изменение температуры.

Полупериодом t_{II} называют интервал времени, в пределах которого **начальная разность** между истинной температурой и показаниями термометра **сокращается наполовину** после внезапного изменения истинной температуры.

Определим этот полупериод для ртутного термометра, находящегося в потоке воздуха. Пусть ртутный «шарик» имеет форму цилиндра $r_0 = 3$ мм. Коэффициент теплопроводности ртути $\lambda = 7,45$ ккал/(м ч К). Коэффициент температуропроводности $\kappa = 0,0166$ м²/ч. Термическим сопротивлением тонкой стеклянной стенки пренебрегаем. Коэффициент теплообмена для потока воздуха есть $\alpha = 50$ Ккал/(м²ч К).

находим $L = \frac{\pi r_0^2 l}{2\pi r_0 l} = \frac{r_0}{2}$, $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{50 \cdot 0,003}{7,45 \cdot 2} = 0,01$ $\theta = \exp(-Bi \cdot Fo)$ (7)

отношение $(T - T_e)/(T_0 - T_e) = 0,5$,

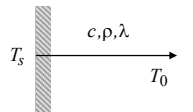
когда численное значение показателя степени в (7) равно 0,693: $Bi \cdot Fo = \frac{\kappa t_{II}}{L^2} \cdot \frac{\alpha L}{\lambda} = 0,693$;

$\Rightarrow \frac{\kappa t_{II}}{L^2} = \frac{0,693}{Bi} = \frac{0,693}{0,01} = 69,3 \Rightarrow t_{II} = \frac{69,3 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{0,0166 \cdot 4} \cdot 3600 = 33,8$ с

Следовательно, можно полагать, что показания термометра правильно отражают изменение истинной температуры, если это изменение происходит более медленным темпом

Простейшие краевые задачи

Пусть на поверхности «полубесконечного» тела поддерживается постоянная температура T_s . Это «выполняется», если размер образца H много больше зоны прогрева, которая формируется в образце за время обработки $H \gg \sqrt{\lambda t^* / (c\rho)}$

I 

Безразмерные переменные $\theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}$; $\tau = \frac{t}{t^*}$; $\xi = \frac{x}{x^*}$

$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{t^* \lambda}{c\rho x^{*2}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$; $\frac{t^* \lambda}{c\rho x^{*2}} = 1$

$t^* = \frac{L^2}{\kappa} = \frac{x^{*2}}{\kappa}$, $\kappa = \lambda / (c\rho)$, $L = x^* = \sqrt{\kappa t^*}$ Характерный размер

$\begin{cases} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) & c, \rho, \lambda = const & (10) \\ x = 0: T = T_s \\ x \rightarrow \infty: T = T_0 \\ t = 0: T = T_0 \end{cases}$

$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-y^2} dy$ (12)

$\theta = erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)$

$erfc(0) = 1$ $erfc(\infty) = 0$

$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \\ \xi = 0: \theta = 1; \\ \xi \rightarrow \infty: \theta = 0; \\ \tau = 0: \theta = 0. \end{cases}$ (11)

Для любых теплофизических свойств и любых температур в рамках данной задачи

Пусть теперь **граничные условия – функция времени**. Примем, что температура потока меняется со временем линейно

$T_e = Bt + T_0$

Тогда уравнение теплового баланса принимает вид

$c\rho V \frac{dT}{dt} = -\alpha(T - Bt - T_0)$; $t = 0: T = T_0$ (8)

В переменных $\theta = \left(\frac{T - T_0}{T_s - T_0}\right)$; $\tau = \frac{t}{t^*}$ имеем $\tau = \frac{\kappa t}{L^2} = Fo$

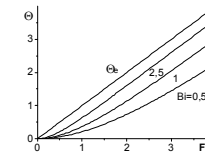
$\frac{d\theta}{d\tau} + Bi\theta = Bi \cdot \beta\tau$, $\beta = \frac{Bt_s}{T_s - T_0}$ $t^* = L^2 / \kappa$

Решение имеет вид $\theta = \beta \cdot Fo - \frac{\beta}{Bi} [1 - \exp(-Bi \cdot Fo)]$ (9) $\theta_e = \frac{T_e - T_0}{T_s - T_0} = \beta Fo$

Температура детали T всегда отстает от температуры потока T_e . При $\tau = Fo \rightarrow \infty$ это отставание становится постоянным

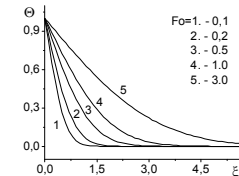
Один из способов решения задачи (8) будет показан дальше: слайд 11

$\beta = 1: T_s = T_0 + \frac{BL^2}{\kappa}$



$\theta = erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{Fo}}\right)$ (13)

$T = T_0 + (T_s - T_0) erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$ (14)



Полезно знать асимптотические разложения

$z \ll 1: erfc(z) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} z \Rightarrow T \approx T_0 + (T_s - T_0) \frac{x}{\sqrt{\pi \kappa t}}$ $x \neq 0, t \neq 0$ (15)

$z \gg 1: erfc(z) \approx \frac{\exp(-z^2)}{z\sqrt{\pi}} \Rightarrow T \approx T_0 + 2\sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \frac{(T_s - T_0)}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$ (16)

Такие задачи удобно решать **операционным методом** (т.е., методом интегральных преобразований по Лапласу). Это один из самых эффективных методов решения нестационарных задач теплопроводности

$\tau \rightarrow p$ $f(\tau) \rightarrow F(p)$ $F(p) = \int_0^\infty f(\tau) \exp(-p\tau) d\tau$ (17)

$f(\tau) \rightarrow \tilde{f}(p)$ $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty f(\tau) \exp(-p\tau) d\tau$ (17,а)

Обозначения и определения

"→" эквивалентно "≐"

Говорят: функция $\bar{f}(p)$ или $F(p)$ является изображением функции $f(\tau)$ или

Функция $f(\tau)$ с помощью преобразования (15) переходит в $\bar{f}(p)$ или в $F(p)$

$$(11) \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}; \\ \xi = 0: \theta = 1; \\ \xi \rightarrow \infty: \theta = 0; \\ \tau = 0: \theta = 0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} p\bar{\theta} - \theta(0, \xi) = \frac{d^2 \bar{\theta}}{d\xi^2}; \\ \xi = 0: \bar{\theta} = \frac{1}{p}; \\ \xi \rightarrow \infty: \bar{\theta} = 0; \end{cases} \quad (18)$$

Общее решение в пространстве изображений имеет вид $\bar{\theta} = Ae^{k_1 \xi} + Be^{k_2 \xi}$, где k_i - корни уравнения $k^2 - p = 0$, $k_1 = -\sqrt{p}$; $k_2 = \sqrt{p}$

В соответствии с граничными условиями $B = 0$ и $A = \frac{1}{p}$

$$\bar{\theta} = \frac{1}{p} \exp(-\sqrt{p}\xi) \quad (19)$$

Обратное преобразование

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{p\tau} dp \quad (20)$$

Лыков А.В. Теория теплопроводности

$$\bar{\theta} \rightarrow \theta = \text{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \quad (12) \quad 9$$

Возвращаемся к простейшей задаче:

$$\beta = 1 \quad \frac{d\theta}{d\tau} + Bi\theta = Bi \cdot \tau, \quad \tau = 0: \theta = 0 \quad (9)$$

В пространстве изображений по Лапласу: $p\bar{\theta} + Bi\bar{\theta} = \frac{Bi}{p^2} \Rightarrow \bar{\theta} = \frac{Bi}{p^2(p+Bi)}$

Раскладываем на множители: $\bar{\theta} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+Bi} \right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{Bi} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+Bi} \right)$

В соответствии с представленной таблицей:

$$\frac{1}{p} \rightarrow 1$$

$$\frac{1}{p+Bi} \rightarrow e^{-Bi\tau}$$

$$\frac{1}{p^2} \rightarrow \tau$$

$$\theta = Fo - \frac{1}{Bi} [1 - \exp(-Bi \cdot Fo)]$$

Мы пользовались правилом: $f'(\tau) \longrightarrow pF(p) - f(+0)$

«Противоположное» правило: $\int_0^{\tau} f(t) dt \longrightarrow \frac{1}{p} F(p)$

11

Для ряда задач такой путь был бы весьма сложным, если бы не имеющиеся в настоящее время таблицы интегральных преобразований и теоремы, существенно упрощающие ход решения

Бейтмен Н.Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований в двух томах. Справочная математическая библиотека. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.1969 г. Т.2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М. 1970

изображение	оригинал	изображение	оригинал
$\frac{1}{p}$	1	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a\tau}$
$\frac{1}{p^2}$	τ	$\frac{p}{p^2+k^2}$	$\cos(k\tau)$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}$	$\frac{1}{p} e^{-k\sqrt{p}} \quad k \geq 0$	$\text{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right)$
$p^{-3/2}$	$2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}$	$(\sqrt{p-a} - \sqrt{p-b})$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau^3}} (e^{b\tau} - e^{a\tau})$

В некоторых случаях перейти к оригиналам все же не удастся. И тогда на помощь приходят разнообразные приближенные методы и асимптотические разложения, позволяющие построить приближенное решение изучаемой задачи, что очень важно для инженерных приложений. Некоторые простые примеры мы далее рассмотрим.

10

II

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ q_0 \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{c, \rho, \lambda} \\ T_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \lambda = const \\ x=0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 \\ x \rightarrow \infty: T = T_0 \\ t=0: T = T_0 \end{array} \quad (21)$$

$$\theta = \left(\frac{T - T_0}{T_* - T_0} \right); \quad \tau = \frac{t}{t_*}; \quad \xi = \frac{x}{x_*} \quad (22)$$

Таким образом мы определяем масштаб температуры

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{q_0 \sqrt{\kappa t_*}}{\lambda(T_* - T_0)} = \frac{q_0 \sqrt{t_*}}{\sqrt{c\rho\lambda}(T_* - T_0)} = 1 \quad (23)$$

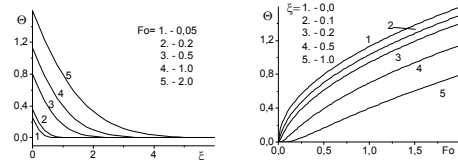
$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}; \\ \xi = 0: -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 1; \\ \xi \rightarrow \infty: \theta = 0; \\ \tau = 0: \theta = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\bar{\theta} - \theta(0, \xi) = \frac{d^2 \bar{\theta}}{d\xi^2}; \\ \xi = 0: \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} = \frac{1}{p}; \\ \xi \rightarrow \infty: \bar{\theta} = 0; \end{cases} \Rightarrow \bar{\theta} = \frac{1}{p\sqrt{p}} \exp(-\sqrt{p}\xi) \quad (24)$$

Решаем на доске!

$$\theta = 2\sqrt{\tau} \text{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \equiv 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) - \xi \text{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \quad (25)$$

12

$$\theta = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) - \xi \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \quad (25)$$

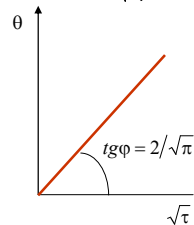


$$\xi = 0: -\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = 1; \theta = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \quad \text{Температура поверхности}$$

(25) в физических переменных:

$$T = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{c\rho\lambda}} \left\{ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) - \frac{x}{\sqrt{\kappa}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right\} \quad (26)$$

На поверхности: $x = 0: T = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{c\rho\lambda}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$ (27)



13

II,а Граничные условия зависят от времени

$$x = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_0 f(t); \quad \xi = 0: -\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = f(\tau); \quad (28)$$

В пространстве изображений решение будет иметь вид

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{f}(p)}{\sqrt{p}} \exp(-\sqrt{p}\xi) \quad (29)$$

$$f(\tau) \rightarrow F(p), \quad \theta(\xi, \tau) = \int_0^\tau \frac{f(y)}{\sqrt{\tau-y}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4(\tau-y)}\right] dy$$

В физических переменных:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{\pi c\rho\lambda}} \int_0^t \frac{f(y)}{\sqrt{t-y}} \exp\left[-\frac{c\rho}{\lambda} \frac{x^2}{4(t-y)}\right] dy \quad (30)$$

Пример 1. Для одиночного импульса имеем

$$f(t) = \eta(t_i - t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_i, \\ 0, & t > t_i, \end{cases}$$

единичная функция Хевисайда

Тогда

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{\pi c\rho\lambda}} \int_0^{t_i} \frac{\eta(t_i - y)}{\sqrt{t-y}} \exp\left[-\frac{c\rho}{\lambda} \frac{x^2}{4(t-y)}\right] dy$$

14

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{\pi c\rho\lambda}} \int_0^t \frac{\eta(t_i - y)}{\sqrt{t-y}} \exp\left[-\frac{c\rho}{\lambda} \frac{x^2}{4(t-y)}\right] dy$$

Введем новую переменную по формуле $z^2 = \frac{x^2}{4a(t-y)}$ $a = \frac{\lambda}{c\rho}$

$$y = t - \frac{x^2}{4az^2} \quad dy = -\frac{x^2}{2az^3} dz$$

Следовательно

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^\infty x \frac{\exp[-z^2]}{z^2} \eta\left(t_i + \frac{x^2}{4az^2} - t\right) dz$$

Подинтегральная функция равна нулю, если $z^2 \leq \frac{x^2}{4a(t_i - t)}$

$$T(x, t) = T_0 + \frac{q_0}{\lambda\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{at}}^{x/2\sqrt{at_i}} x \frac{\exp[-z^2]}{z^2} dz$$

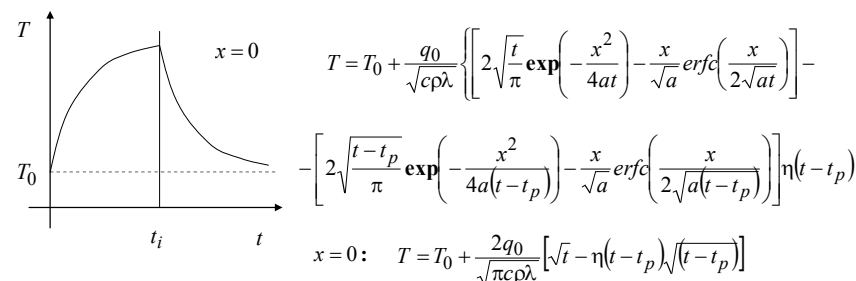
Интегрируем по частям

$$u = \exp(-z^2)$$

$$dv = dz/z^2$$

$$\int_A^B u dv = uv \Big|_A^B - \int_A^B v du$$

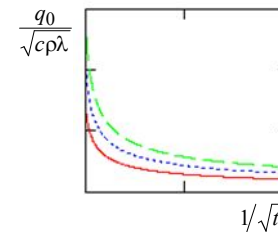
15



$$x = 0: T = T_0 + \frac{2q_0}{\sqrt{\pi c\rho\lambda}} \left[\sqrt{t} - \eta(t-t_p) \sqrt{(t-t_p)} \right]$$

Найти область параметров (q_0, t_i) , в которой $T(0, t_i) < T_s$

$$\frac{q_0}{\sqrt{c\rho\lambda}} = \frac{\sqrt{\pi} T_s - T_0}{2 \sqrt{t_i}}$$

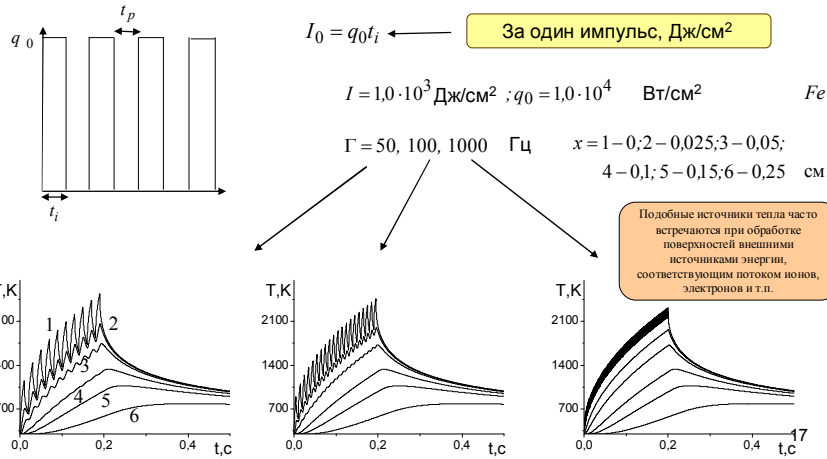


16

Пример 2

$$T(t, x) = T_0 + \frac{q_0}{\sqrt{\pi c \rho \lambda}} \int_0^t \frac{f(y)}{\sqrt{t-y}} \exp\left[-\frac{c\rho}{\lambda} \frac{x^2}{4(t-y)}\right] dy \quad (30)$$

$$q(t) = q_0 f(t) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & (t_i + t_p)(k-1) \leq t < t_i + (t_i + t_p)(k-1) \\ 0, & t_i + (t_i + t_p)(k-1) \leq t < (t_i + t_p)k \end{cases} \quad (31)$$



III. Задача с граничными условиями третьего рода

Задача с граничными условиями третьего рода соответствует нагреву или охлаждению полупространства или теплоизолированного с боковой поверхности стержня (слоя) бесконечной длины в потоке газа или жидкости. На границе задается теплообмен с потоком по закону Ньютона.

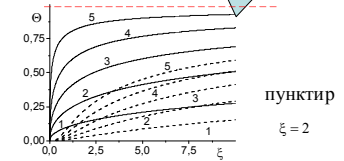
$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \\ x=0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T_e - T) \\ x \rightarrow \infty: T = T_0 \\ t=0: T = T_0 \end{cases} \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_e - T_0} \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}; \\ \xi=0: -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = Bi(1-\theta) \\ \xi \rightarrow \infty: \theta = 0; \\ \tau=0: \theta = 0. \end{cases}$$

Решение задачи в пространстве изображений

$$\theta = \text{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) - \exp(Bi\xi + Bi^2\tau) \text{erfc}\left(Bi\sqrt{\tau} + \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

$$\xi=0 \quad \theta = 1 - \exp(Bi^2\tau) \text{erfc}(Bi\sqrt{\tau})$$

$$\bar{\theta} = \frac{Bi}{\rho(Bi + \sqrt{\rho})} \exp(-\xi\sqrt{\rho})$$



В размерных переменных:

$$T = T_0 + (T_e - T_0) \left[\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{\alpha^2}{c\rho\lambda} t\right) \cdot \text{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right]$$

$$T(0, t) = T_0 + (T_e - T_0) \left[1 - \exp\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \frac{x}{\sqrt{a}}\right) \text{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{t}\right) \right]$$

Асимптотические свойства:

При больших значениях коэффициента теплообмена

$$\text{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{t}\right) \approx \frac{\exp\left(-\frac{\alpha^2}{c\rho\lambda} t\right)}{\alpha^3 \sqrt{\pi t}} \sqrt{c\rho\lambda} \quad \text{и} \quad T \approx T_0 + (T_e - T_0) [1 - O(\alpha^{-3})]$$

Почти постоянная температура поверхности

В противоположном случае

$$T = T_0 + (T_e - T_0) \left[1 - \left(1 + \frac{\alpha^2}{c\rho\lambda} t + \dots\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{t} + \dots\right) \right] \approx T_0 + 2(T_e - T_0) \frac{\alpha}{\sqrt{c\rho\lambda}} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

Нагрев потоком величинны $q_0 \approx \alpha(T_e - T_0)$

1. Задача на дом:

Найти решение задачи, используя операционный метод

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + At \\ x=0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ x \rightarrow \infty: T = T_0 \\ t=0: T = T_0 \end{cases}$$

Для целого ряда нестационарных задач весьма удобным оказывается **метод Дюамеля**

$$\text{ср } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$t = 0: T = T_0 \quad x \geq 0 \quad (32)$$

$$\begin{cases} x = 0: T = f(t); \\ x \rightarrow \infty: T = T_0 \end{cases} \quad t > 0$$

Полагаем $T = u + v$ Введенные функции должны удовлетворять дифференциальному уравнению той же формы, но более простым краевым условиям

$$\begin{cases} u = T_0, & t = 0, x \geq 0; \\ u = 0, & x = 0, t > 0 \end{cases} \quad (33) \quad \text{и} \quad \begin{cases} v = 0, & t = 0, x \geq 0; \\ v = f(t), & x = 0, t > 0 \end{cases} \quad (34)$$

Решение задачи для u с граничными условиями (33) нам известно, вернее, легко может быть получено из решения задачи (10) с г.у. I рода, записанного в размерных переменных:

$$T = T_0 + (T_s - T_0) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right), \quad \kappa = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (35)$$

Следовательно,

$$u = T_0 \left[1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right] = T_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy \quad (36)$$

21

В результате решение для функции v принимает вид:

$$v(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t f(y) \frac{\exp(-x^2/(4\kappa(t-y)))}{(t-y)^{3/2}} dy \quad (38)$$

Если мы введем новую переменную $z^2 = x^2/4\kappa(t-y)$, то найдем $\frac{dy}{(t-y)^{3/2}} = \frac{4\sqrt{\kappa}}{x} dz$ и

$$v(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\kappa t})}^{\infty} f \left(t - \frac{x^2}{4\kappa z^2} \right) e^{-z^2} dz \quad (39)$$

Полное решение дается суммой величин $u + v$

Пример

Найдем решение для линейного изменения температуры поверхности $f(t) = T_0 + Ct$ (40)

Мы должны проинтегрировать уравнение (39)

$$v(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{\kappa t})}^{\infty} \left(T_0 + C \left(t - \frac{x^2}{4\kappa z^2} \right) \right) e^{-z^2} dz =$$

$$= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_X^{\infty} e^{-z^2} dz + \frac{2Ct}{\sqrt{\pi}} \int_X^{\infty} e^{-z^2} dz - \frac{Cx^2}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int_X^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz, \quad X = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}$$

23

Для нахождения функции v нам потребуется теорема Дюамеля

Теорема Дюамеля гласит

Если $\varphi(x, t)$ есть решение для изменения температуры в твердом теле, начальная температура которого равна нулю, а поверхность поддерживается при температуре, равной единице, то решение $v(x, t)$ для случая, когда температура поверхности тела меняется со временем, т.е., $v = f(t)$, $x = 0$, дается формулой

$$v(x, t) = \int_0^t f(y) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t-y) dy \quad (37)$$

Теорема Дюамеля может быть применена и к случаям конвективного теплообмена на поверхности, когда твердое тело, имеющее однородную начальную температуру, внезапно подвергается воздействию окружающей жидкости (газа), температура которой меняется со временем по заданному закону.

Чтобы применить теорему Дюамеля, найдем решение $\varphi(x, t)$, которое также содержится в (35)

$$T = T_0 + (T_s - T_0) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right), \quad \kappa = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (35) \quad \varphi = \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right] = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right)$$

Следовательно,

$$\varphi(x, t-y) = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa(t-y)}} \right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t-y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi\kappa}} \frac{\exp(-x^2/(4\kappa(t-y)))}{(t-y)^{3/2}}$$

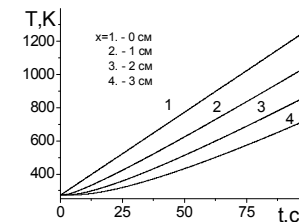
22

В третьем слагаемом проинтегрируем по частям $p = e^{-z^2}; dq = \frac{dz}{z^2} \implies dp = -2ze^{-z^2} dz; q = -\frac{1}{z}$

$$\implies \int_X^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz = pq \Big|_X^{\infty} - \int_X^{\infty} q dp = -\frac{e^{-z^2}}{z^2} \Big|_X^{\infty} - 2 \int_X^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{e^{-X^2}}{X^2} - \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(X)$$

Объединяем все результаты $T = T_0 + Ct \left[\left(1 + 2X^2 \right) \operatorname{erfc}(X) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} X e^{-X^2} \right]$ (41)

Распределение температуры вблизи нагреваемой поверхности в различные моменты времени показано на рисунке. В расчетах использованы свойства, близкие к свойствам железа



Даже при линейном изменении температуры поверхности в точках, отличных от $x = 0$, температура меняется со временем нелинейно, что, естественно, связано с процессом теплопроводности

24

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$T(0,t) - T_0 = (T_s - T_0) \cos(\omega t) \quad (42)$$

$$x \rightarrow \infty: T = T_0$$

$$t = 0: T = T_0$$

$$\xi = 0: \theta = \cos[\omega\tau]; \quad \rightarrow$$

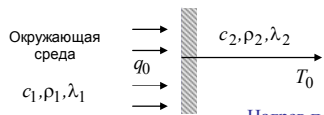
$$\bar{\theta} = \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$\theta = \int_0^\tau \frac{\xi \cos(\omega y)}{2\sqrt{\pi(\tau-y)^3}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\tau-y)}\right) dy$$

Граничные условия такого вида встречаются в поршневых двигателях внутреннего сгорания, циклических регенераторах и наблюдаются в верхнем слое земной поверхности в результате ежедневно и ежегодно повторяющихся вариаций температуры

2. Задание на дом (или лаб.): Используя теорему Дюамеля, найти решение задачи (42) в физических переменных и построить зависимость температуры от времени в разных точках и для разных теплофизических свойств в различные моменты времени

25



Нагрев потоком, уменьшенный в $1 + K_\varepsilon$ раз:

$$T_2 = T_0 + \frac{q_e}{\sqrt{c_2 \rho_2 \lambda_2}} \left\{ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa_2 t}\right) - \frac{x}{\sqrt{\kappa_2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 t}}\right) \right\} \quad (58)$$

$$q_e = \frac{q_0}{1 + K_\varepsilon}$$

$$K_\varepsilon = \sqrt{\frac{c_1 \rho_1 \lambda_1}{c_2 \rho_2 \lambda_2}}$$

(59)

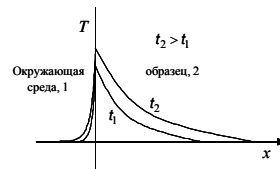
$K_{\varepsilon,1} \approx 0,093$ вода-железо

$K_{\varepsilon,2} \approx 3,19 \cdot 10^{-4}$ воздух-железо

Качественное распределение температуры

	c	ρ	λ
железо	452 Дж/(кг К)	7870 Кг/м³	81,1
вода	4182	998,2	0,597
воздух	1012	1,163	0,025 Вт/(м К)

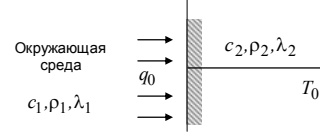
$T = 293K$



27

Примеры сопряженных задач

Предположим, что термическая обработка материала тепловым потоком постоянной величины осуществляется в среде, свойства которой отличны от свойств обрабатываемого материала. Требуется оценить влияние среды на величину температуры материала по сравнению с его обработкой в вакууме.



$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right), \quad x < 0 \quad (50)$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right), \quad x > 0 \quad (51)$$

$$x = 0: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = q_0, \quad T_1 = T_2 \quad (52)$$

$$x \rightarrow \pm \infty: T_i = T_0, i = 1, 2 \quad (53)$$

$$t = 0: T_i = T_0, i = 1, 2 \quad (54)$$

Решаем задачу операционным методом

$$p\bar{T}_1 - T_0 = \kappa_1 \frac{d^2 \bar{T}_1}{dx^2}; \quad (55) \quad x = 0: \lambda_1 \frac{d\bar{T}_1}{dx} - \lambda_2 \frac{d\bar{T}_2}{dx} = \frac{q_0}{p}$$

$$p\bar{T}_2 - T_0 = \kappa_2 \frac{d^2 \bar{T}_2}{dx^2}; \quad (56) \quad \bar{T}_1 = \bar{T}_2$$

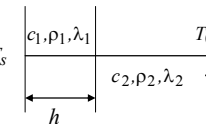
$$\bar{T}_1 - \frac{T_0}{p} = A_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\kappa_1}} x\right); \quad \bar{T}_2 - \frac{T_0}{p} = A_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\kappa_2}} x\right) \quad (57)$$

$$A_1 = A_2 = A = \frac{q_0}{p\sqrt{p}} \frac{1}{\sqrt{c_1 \rho_1 \lambda_1} + \sqrt{c_2 \rho_2 \lambda_2}} = \frac{q_e}{p\sqrt{p} \sqrt{c_2 \rho_2 \lambda_2}}, \quad q_e = \frac{q_0}{1 + K_\varepsilon} \quad 26$$

Для сопряженных задач операционный метод практически незаменим

Термическая обработка материала с покрытием

Теплообмен между нагреваемой средой $T = T_s$ и поверхностью - идеальный



Перейдем к безразмерным переменным (60)

$$\theta = \left(\frac{T - T_0}{T_s - T_0} \right); \quad \tau = \frac{t}{t^*} = Fo; \quad \xi = \frac{x}{x^*}$$

$$K_c \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = K_\lambda \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2}; \quad 0 < \xi < \delta$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2}; \quad \xi > \delta$$

$$\xi = 0: \theta_1 = 1; \quad (61)$$

$$\xi = \delta: K_\lambda \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi}; \quad \theta_1 = \theta_2$$

$$\xi \rightarrow \infty: \theta_2 = 0;$$

$$\tau = 0: \theta_i = 0; \quad i = 1, 2$$

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right), \quad 0 < x < h$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right), \quad x > h$$

$$x = h: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}; \quad T_1 = T_2$$

$$x = 0: T_1 = T_s$$

$$x \rightarrow \infty: T_2 = T_0;$$

$$t = 0: T_i = T_0, i = 1, 2$$

$$K_c = \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2};$$

$$K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (62)$$

$$\delta = \frac{h}{x^*}$$

28

Ход решения

1. Задача в пространстве изображений

$$K_c p \bar{\theta}_1 = K_\lambda d \frac{d^2 \bar{\theta}_1}{d\xi^2}; \quad 0 < \xi < \delta; \quad p \bar{\theta}_2 = \frac{d^2 \bar{\theta}_2}{d\xi^2}; \quad \xi > \delta \quad (63)$$

$$\xi = 0: \quad \bar{\theta}_1 = 1/p; \quad (64)$$

$$\xi = \delta: \quad K_\lambda \frac{d\bar{\theta}_1}{d\xi} = \frac{d\bar{\theta}_2}{d\xi}; \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2$$

$$\xi \rightarrow \infty: \quad \bar{\theta}_2 = 0;$$

2. Общее решение имеет вид $\bar{\theta}_1 = A_1 \exp(-k_1 \xi) + B_1 \exp(k_1 \xi)$ (65)

$$\bar{\theta}_2 = A_2 \exp(-k_2 \xi) + B_2 \exp(k_2 \xi)$$

$$B_2 = 0$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p}$$

$$k_2 = \sqrt{p}$$

3. Используя условия в нуле и на границе раздела, находим систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$(66) \quad \begin{cases} A_1 + B_1 = \frac{1}{p} \\ A_1 e^{-k_1 \delta} + B_1 e^{k_1 \delta} = A_2 e^{-k_2 \delta} \\ K_\lambda (-A_1 k_1 e^{-k_1 \delta} + B_1 k_1 e^{k_1 \delta}) = -A_2 k_2 e^{-k_2 \delta} \end{cases}$$

$$(67) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{p} \frac{e^{k_1 \delta}}{e^{k_1 \delta} - \varepsilon e^{-k_1 \delta}}; \quad B_1 = -\frac{\varepsilon}{p} \frac{e^{-k_1 \delta}}{e^{k_1 \delta} - \varepsilon e^{-k_1 \delta}} \\ A_2 = \frac{1-\varepsilon}{p} \frac{1}{e^{k_1 \delta} - \varepsilon e^{-k_1 \delta}} \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения

Часто требуется знать решение в отдельных точках для ограниченных значений времени. В этом случае можно получить приближенное решение в простой форме, что удобно для использования

$$\xi = \delta: \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \frac{1-\varepsilon}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon^n \exp \left[-(2n+1)\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] \right\}; \quad |\varepsilon| < 1$$

$$\theta_1 = \theta_2 = (1-\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon^n \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n+1)\delta \sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] \right\} \quad (73)$$

Ряд быстро сходится

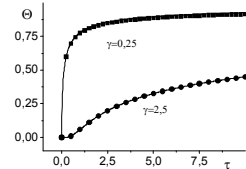
$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \frac{1-\varepsilon}{p} \left\{ \exp \left[-\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] + \varepsilon \exp \left[-3\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] + \dots \right\}; \quad (74)$$

Следовательно,

$$\theta_1 = \theta_2 = (1-\varepsilon) \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{\delta \sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] + \varepsilon \operatorname{erfc} \left[\frac{3\delta \sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] + \dots \right\}; \quad (75)$$

Быструю сходимость ряда в решении иллюстрирует рисунок

$$\gamma = \delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} = \frac{h}{\sqrt{\kappa_1 t_*}}$$



Сплошные линии соответствуют расчету по формуле (73) с удержанием 25 членов ряда, а символы – расчету по формуле (75). Видно, что результаты практически совпадают.

В результате *решение задачи в пространстве изображений* примет вид

$$\bar{\theta}_1 = \frac{1}{p} \frac{e^{-k_1(\xi-\delta)} - \varepsilon e^{k_1(\xi-\delta)}}{e^{k_1 \delta} - \varepsilon e^{-k_1 \delta}}; \quad \bar{\theta}_2 = \frac{1}{p} \frac{(1-\varepsilon)e^{-k_2(\xi-\delta)}}{e^{k_1 \delta} - \varepsilon e^{-k_1 \delta}}; \quad (68)$$

$$\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{K_c K_\lambda}}{1 + \sqrt{K_c K_\lambda}}; \quad |\varepsilon| < 1 \quad (69)$$

4. Переходим к оригиналам

Используем $z^{-1} = \frac{1}{e^{k_1 \delta} - \varepsilon e^{-k_1 \delta}} = \frac{e^{-k_1 \delta}}{1 - \varepsilon e^{-2k_1 \delta}} = e^{-k_1 \delta} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n e^{-2k_1 n \delta};$ (70)

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon^n \exp \left[-(\xi + 2n\delta) \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] - \varepsilon^{n+1} \exp \left[-(\delta - \xi + (2n+1)\delta) \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} \right] \right\}; \\ \bar{\theta}_2 = \frac{1-\varepsilon}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \exp \left[-\left[(2n+1)\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} + (\xi - \delta) \right] \sqrt{p} \right]; \end{cases} \quad (71)$$

Это – точное решение задачи

$$\begin{cases} \theta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon^n \operatorname{erfc} \left[\frac{(\xi + 2n\delta) \sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] - \varepsilon^{n+1} \operatorname{erfc} \left[\frac{(\delta - \xi + (2n+1)\delta) \sqrt{K_c/K_\lambda}}{2\sqrt{\tau}} \right] \right\}; \\ \theta_2 = (1-\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \exp \left\{ -\frac{(2n+1)\delta \sqrt{K_c/K_\lambda} + (\xi - \delta)}{2\sqrt{\tau}} \right\}; \end{cases} \quad (72)$$

Параметр γ , входящий в решение, можно трактовать как термическую толщину покрытия. Это отношение реальной толщины покрытия к толщине теплового пограничного слоя, формирующегося в материале покрытия за некоторое характерное время.

$$\gamma = \delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} = \frac{h}{\sqrt{\kappa_1 t_*}}$$

Если покрытие является термически тонким, мы можем воспользоваться асимптотическим представлением известной нам функции.

A $\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} = \frac{h}{\sqrt{\kappa_1 t_*}} \ll 1$ - «термически тонкое» покрытие

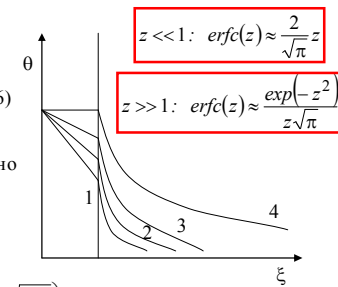
$$\theta_1 = \theta_2 \approx (1-\varepsilon) \left[\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\tau}} \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} \right) + \varepsilon \left(1 - \frac{3\delta}{\sqrt{\tau}} \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} \right) + \dots \right] \quad (76)$$

B Малость параметра можно использовать непосредственно в пространстве изображений

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 \approx \frac{1-\varepsilon}{p} \left[(1+\varepsilon) - \delta(1-3\varepsilon) \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} + \dots \right];$$

$$\theta_1 = \theta_2 = (1-\varepsilon) \left[(1+\varepsilon) - \frac{\delta(1-3\varepsilon)}{\sqrt{\pi \tau}} \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} + \dots \right] \approx \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{\pi \tau}} (1-4\varepsilon) \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda}} \right) \quad (77)$$

$$1 - \varepsilon \approx \frac{1}{1 + \varepsilon}$$



$z \ll 1: \operatorname{erfc}(z) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} z$

$z \gg 1: \operatorname{erfc}(z) \approx \frac{\exp(-z^2)}{z\sqrt{\pi}}$

Задача с неидеальным тепловым контактом

Неидеальный тепловой контакт может быть связан с шероховатостью поверхностей; процессами газификации...

Переход к безразмерным переменным и способ решения – аналогичны предыдущему.

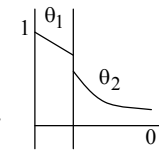
Граничное условие для температур на контакте в безразмерных переменных принимает вид

$$\theta_1 - \theta_2 = -D \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi}, \xi = \delta; \quad D = \frac{h\lambda_2}{\lambda_3 \sqrt{\kappa_2 t^*}}$$

Решение в пространстве изображений по Лапласу, $\xi = \delta$

$$\bar{\theta}_2 = \frac{2K_\varepsilon \exp\left[-\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p}\right]}{1 + K_\varepsilon(1 + D\sqrt{p}) - \beta \exp\left[-2\sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p}\right]}; \quad \beta = \frac{1 - K_\varepsilon(1 + D\sqrt{p})}{1 + K_\varepsilon(1 + D\sqrt{p})} \quad (79)$$

$$D \ll 1: \beta \approx \varepsilon - \frac{2DK_\varepsilon \sqrt{p}}{(1 + K_\varepsilon)^2}; \quad \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2|_{D=0} - \frac{D}{\sqrt{p}} \frac{K_\varepsilon^2}{\left(\delta \sqrt{\frac{K_c}{K_\lambda} p} + K_\varepsilon\right)^2}; \dots$$



$$1 - \varepsilon \approx \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

$$1 - \varepsilon \approx \frac{2K_\varepsilon}{1 + K_\varepsilon}$$

Различие между температурами с течением времени убывает

$$\Rightarrow \theta_2 \approx \theta_2|_{D=0} - \frac{D}{\sqrt{\pi t}} + \dots \quad (80) \quad \gamma \ll 1$$

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right), \quad 0 < x < h$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right), \quad x > h$$

$$x = h: \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x};$$

$$(78) \quad T_1 - T_2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3} \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=h}$$

$$x = 0: T_1 = T_s$$

$$x \rightarrow \infty: T_2 = T_0;$$

$$t = 0: T_i = T_0, i = 1, 2$$