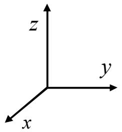
ЛЕКЦИЯ 4

Задачи теплопроводности в различных системах координат.

Декартова система координат



$$T=T(x,y,z,t) \qquad \vec{q}=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{k}\right) \qquad (1)$$

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_V \qquad (2)$$

$$\boxed{c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_V} \qquad (3)$$

В практике часто встречаются такие условия, которые приводят к необходимости записи уравнения теплопроводности в иной форме, более удобной для представления решения и его физической трактовки.

Зависимость вида уравнения от используемой системы координат можно исключить, используя операторную запись

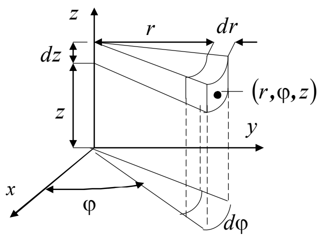
$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\Delta T+\frac{q_V}{\lambda} \qquad \boxed{\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

$$a=\lambda/(c\rho)$$

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=div(\lambda gradT)+q_V \quad \text{или} \quad c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\cdot(\lambda\nabla T)+q_V \qquad (4)$$

Слагаемые, выражающие тепловыделение и аккумулирование энергии, инвариантны относительно системы координат (т.е., неизменны); но слагаемые, выражающие результирующий кондуктивный тепловой поток, зависят от геометрии и, следовательно, от системы координат.

Цилиндрическая система координат r,φ,z

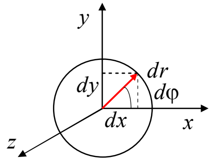


$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=div(\lambda\mathbf{q})\equiv\nabla\cdot(\lambda\mathbf{q}) \qquad (5)$$

$$\mathbf{q}=-\lambda\nabla T$$

$$x=r\cos\varphi \qquad y=r\sin\varphi \qquad (6)$$

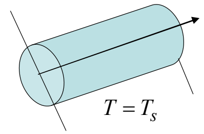
$$\boxed{\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$



$$q_r=-\frac{\partial T}{\partial r};q_\varphi=-\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi};q_z=-\frac{\partial T}{\partial z} \qquad (7)$$

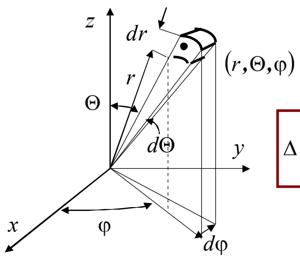
$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q_V}{\lambda} \qquad (8)$$

$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q_V} \qquad (9)$$



$$a=\frac{\lambda}{c\rho}$$

Сферическая система координат r,θ,φ



$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=div(\lambda\mathbf{q})\equiv\nabla\cdot(\lambda\mathbf{q})$$

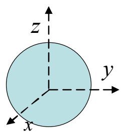
$$\mathbf{q}=-\lambda\nabla T$$

$$\boxed{\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial}{\partial\Theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}$$

$$q_r=-\frac{\partial T}{\partial r};q_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta};q_\theta=-\frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial T}{\partial\varphi} \qquad (10)$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial T}{\partial\Theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{q_V}{\lambda} \qquad (11)$$

$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q_V}{\lambda}} \qquad (12)$$



$$x=r\sin\theta\cos\varphi \qquad y=r\sin\theta\sin\varphi \qquad z=r\cos\theta$$

Уравнения теплопроводности для тел канонической формы

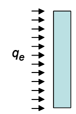
Запись уравнений в различных системах координат особенно удобна, когда нужно найти распределение температуры в телах канонической формы – в цилиндре или шаре. В этих случаях уравнения существенно упрощаются при задании особых условий, когда поле температуры зависит только от одной координаты.

параллелепипед

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_V$$

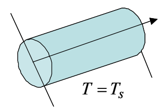
пластина

$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q_V}{\lambda}}$$



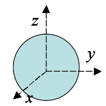
цилиндр

$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q_V}{\lambda}}$$



сфера

$$\boxed{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q_V}{\lambda}}$$



Три последних уравнения вместе:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q_V}{\lambda} \qquad (13)$$

$n=0$ плоскость $\qquad$ $n=1$ цилиндр $\qquad$ $n=2$ сфера

$$\theta=\frac{T-T_0}{T_*-T_0} \qquad \tau=\frac{t}{t_*} \qquad \xi=\frac{r}{r_*}$$

На доске

$$\frac{1}{Fo}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{1}{\xi^n}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^n\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)+\bar{q}_V \qquad (14)$$

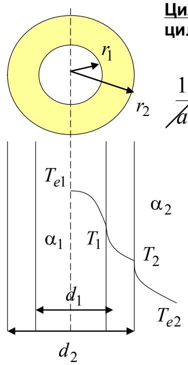
$$\boxed{Fo=\frac{at_*}{r_*^2}} \qquad \bar{q}_V=\frac{q_V r_*^2}{\lambda(T_*-T_0)}$$

$$\bar{q}_V=1: \longrightarrow T_*=T_0+\frac{q_V}{\lambda}r_*^2$$

$$\frac{at_*}{r_*^2}=1:\ \tau=\frac{at}{r_*^2} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial Fo}=\frac{1}{\xi^n}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^n\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)+1$$

Стационарные задачи теплопроводности в различных системах координат

<u>Цилиндрическая стенка:</u> стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке (трубе) с внутренним радиусом r_1; $d_1=2r_1$



$$\cancel{\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}+\cancel{\frac{q_V}{\lambda}} \qquad \frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=0 \qquad (15)$$

$$\frac{dT}{dr}=u \longrightarrow \frac{du}{dr}+\frac{1}{r}u=0 \longrightarrow \ln u=-\ln r+\ln C_1 \longrightarrow \qquad (16)$$

$$T=C_1\ln r+C_2 \qquad (17)$$

$$\Rightarrow q=-\lambda\frac{dT}{dr}=-\lambda\frac{C_1}{r} \qquad (18)$$

Удельный тепловой поток не постоянен по толщине и убывает по направлению к внешней поверхности

В стационарных условиях постоянным должен быть <u>полный тепловой</u> поток проходящий через участок цилиндрической трубы длиной l и равный

$$Q=q\cdot F\equiv q\cdot 2\pi rl \qquad (19)$$

Удельный тепловой поток убывает с радиусом

Площадь поверхности увеличивается с радиусом

!!! Температура по толщине трубы изменяется нелинейно даже при постоянном коэффициенте теплопроводности

Постоянные интегрирования могут быть найдены из граничных условий.

<u>Граничные условия первого рода</u> $r=r_1: T=T_1;\ r=r_2: T=T_2$

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} T_1=C_1\ln r_1+C_2, \\ T_2=C_1\ln r_2+C_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$T=\frac{T_1\ln(r_2/r)+T_2\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}; \qquad (20)$$

$$q=-\lambda\frac{dT}{dr}=-\lambda\frac{C_1}{r} \Rightarrow$$

$$Q=-\lambda\frac{dT}{dr}\cdot l\cdot 2\pi r\equiv\frac{\lambda\Delta T}{\ln(r_2/r_1)}\cdot 2\pi l, \quad \text{Вт} \qquad (21)$$

Погонный тепловой поток

$$q_п=\frac{Q}{l}=\frac{2\pi\lambda}{\ln(r_2/r_1)}\Delta T,\quad \Delta T=T_1-T_2 \qquad (22)$$

<u>Граничные условия третьего рода</u> (температуры стенок – неизвестны)

Можем поступить аналогично: $T=C_1\ln r+C_2$

$$r=r_1:\ \lambda\frac{\partial T}{\partial r}=\alpha_{1e}(T-T_{e1});\ r=r_2:\ \lambda\frac{\partial T}{\partial r}=\alpha_{2e}(T_{e2}-T)$$

<u>Поступим иначе:</u>

Конвективный тепловой поток на единицу длины трубы должен равняться погонному тепловому потоку вследствие теплопроводности:

$$(23)\quad \begin{cases} q_п=\alpha_1(T_{e1}-T_1)\cdot 2\pi r_1 \\ q_п=\dfrac{2\pi\lambda}{ln(r_2/r_1)}(T_1-T_2) \\ q_п=\alpha_2(T_2-T_{e2})\cdot 2\pi r_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$q_п=\pi K_c(T_{e1}-T_{e2}) \qquad (24)$$

$$K_c=\frac{1}{\dfrac{1}{2\alpha_1 r_1}+\dfrac{1}{2\lambda}ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)+\dfrac{1}{2\alpha_2 r_2}},\quad \text{Вт/(М·К)} \qquad (25)$$

Коэффициент теплопередачи для цилиндрической стенки

$$R_c=\frac{1}{K_c}=\frac{1}{2\alpha_1 r_1}+\frac{1}{2\lambda}ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)+\frac{1}{2\alpha_2 r_2} \qquad (26)$$

плоская стенка

$$R=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{L}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2} \qquad K=\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{L}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}\right)^{-1} \quad \text{Вт/(М}^2\text{·К)}$$

Полное термическое сопротивление трубы

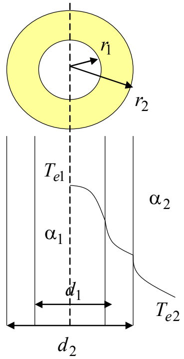
Размерность отличается от размерности *K* для плоской стенки!

Из системы уравнений (23) мы можем найти и температуры стенок и подставить в (20)

$$T=\frac{T_1\ln(r_2/r)+T_2\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)};$$

Можно на доске

В безразмерных переменных $\quad \theta = \dfrac{T - T_{e2}}{T_{e1} - T_{e2}} \quad \xi = \dfrac{r}{r_2}$; $(r_* = r_2)$



$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} = 0 \qquad (27)$$

$$\xi = \delta = r_1/r_2 : \frac{d\theta}{d\xi} = -Bi \cdot \alpha \cdot \theta \qquad (28)$$

$$\xi = 1 : \frac{d\theta}{d\xi} = Bi(\theta - 1) \qquad (29)$$

$$Bi = \frac{\alpha_2 r_2}{\lambda} \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$\theta = C_1 \, ln\, \xi + C_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{\delta} = -Bi \cdot \alpha \cdot (C_1 \, ln\, \delta + C_2) \\ C_1 = Bi(C_2 - 1) \end{cases} \qquad (30)$$

Задание

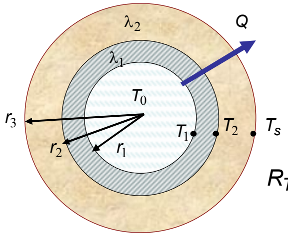
А) Перейти аккуратно к безразмерным переменным

Б) Найти постоянные интегрирования из системы (30)

В) Построить $\theta(\xi)$ для разных значений параметров

Электрическая аналогия

Принципы последовательного и параллельного соединений термических сопротивлений в цепь, справедливые для плоской стенки в прямоугольной системе координат, можно применить и для задачи о теплопроводности в полом цилиндре.



$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot l \cdot 2\pi r \equiv \frac{\lambda \Delta T}{ln(r_2/r_1)} \cdot 2\pi l,$$

$$Q = \frac{\Delta T}{ln(r_2/r_1)/(2\pi l\lambda)},$$

В форме закона Ома

$$R_T = \frac{ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda l}$$

Термическое сопротивление полого цилиндра

Жидкость течет в трубе, покрытой изоляционным материалом

$$R_0 = \frac{1}{\alpha F} = \frac{1}{\alpha 2\pi r_1 l}$$

Конвективное термическое сопротивление жидкости

Имеем последовательное соединение конвективного сопротивления жидкости с двумя кондуктивными термическими сопротивлениями. Если задана температура жидкости и температура внешней поверхности:

А)
$$Q = \left(\frac{\Delta T}{R}\right)_{full} = \frac{T_0 - T_s}{\dfrac{1}{2\pi\alpha_1 r_1 l} + \dfrac{1}{2\pi l\lambda_1} ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) + \dfrac{1}{2\pi l\lambda_2} ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)} \qquad (31)$$

Сопротивление изоляции

Если заданы температуры внутренней и внешней поверхностей

Б)
$$Q = \left(\frac{\Delta T}{R}\right)_{full} = \frac{T_1 - T_s}{\dfrac{1}{2\pi l\lambda_1} ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) + \dfrac{1}{2\pi l\lambda_2} ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)} \qquad (32)$$

Пример

В алюминиевой трубе, имеющей теплопроводность $\lambda_1 = 185$ Вт/(м К), течет водяной пар при температуре 110°С. Внутренний диаметр трубы – 10 см, наружный диаметр – 12 см. Труба расположена в помещении с температурой $T_e =$ 30°С; коэффициент конвективной теплоотдачи от трубы к воздуху α_e равен 15 Вт/(м²К). 1) Требуется найти тепловой поток на единицу длины трубы, если труба не теплоизолирована.

2)Чтобы снизить тепловые потери от трубы, она была покрыта слоем теплоизоляции ($\lambda_2 = 0{,}2$ Вт/(м К)) толщиной 5 см. Найти тепловой поток на единицу длины от тепоизолированной трубы. Предположить, что конвективное термическое сопротивление пара пренебрежимо мало.

Решение. Для трубы без теплоизоляции наиболее существенными являются кондуктивное термическое сопротивление самой трубы и конвективное термическое сопротивление комнатного воздуха. Поскольку конвективным термическим сопротивлением пара можно пренебречь, температура внутренней поверхности трубы равна температуре пара. Тепловой поток на единицу длины трубы следует из соотношения

$$q = \frac{T_0 - T_e}{\dfrac{ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_1} + \dfrac{1}{2\pi r_2 \alpha_e}} = \frac{110 - 30}{\dfrac{ln(6/5)}{2\pi \cdot 185} + \dfrac{1}{2\pi \cdot 0{,}06 \cdot 15}} = \frac{80}{1{,}57 \cdot 10^{-4} + 0{,}177} = 452 \text{ Вт/м.}$$

Для трубы с теплоизоляцией нужно добавить термическое сопротивление теплоизоляции, и соотношение для теплового потока примет вид

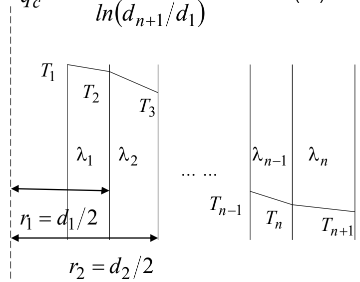
$$q = \frac{T_0 - T_e}{\dfrac{ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_1} + \dfrac{1}{2\pi r_3 \alpha_e} + \dfrac{ln(r_3/r_2)}{2\pi\lambda_2}} = \frac{80}{1{,}57 \cdot 10^{-4} + 0{,}096 + 0{,}482} = 138 \text{ Вт/м.}$$

Многослойная цилиндрическая стенка

$$q_c = \frac{(T_n - T_{1+1})\pi}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2\lambda_i} ln \dfrac{d_{i+1}}{d_i}}, \; d_i = 2r_i \qquad q_c = \frac{2\pi\lambda_{экв}(T_1 - T_{n+1})}{ln(d_{n+1}/d_1)} \qquad (33)$$

Остается справедливым понятие эквивалентного коэффициента теплопроводности

$$\lambda_{экв} = \frac{ln(d_{n+1}/d_1)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda_i} ln\left(\dfrac{d_{i+1}}{d_i}\right)} \qquad (34)$$



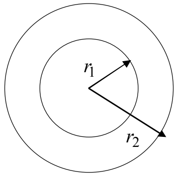
Температура T_{i+1} на границе между *i*-м и *i+1*-слоями

$$T_{i+1} = T_i - \frac{q_c}{2\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1} ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} ln \frac{d_3}{d_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_i} ln \frac{d_{i+1}}{d_i}\right) \qquad (35)$$

Коэффициент теплопередачи:

$$K_c = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2\lambda_i} ln\left(\dfrac{d_{i+1}}{d_i}\right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}} \qquad (36)$$

Критический диаметр теплоизоляции



Радиальный тепловой поток в трубе обратно пропорционален логарифму наружного радиуса (возрастает сопротивление радиальной проводимости);

Рассеяние тепла от наружной поверхности прямо пропорционально этому радиусу (увеличивается площадь охлаждающей поверхности).

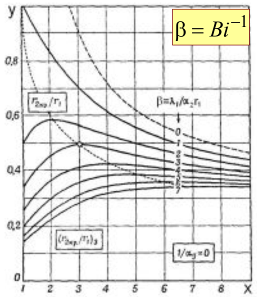
Следовательно, существует определенный радиус, при котором потери тепла максимальны!

Если при фиксированном (малом) внутреннем радиусе увеличивать толщину стенки трубы (т.е., увеличивать внешний радиус r_2), то действие логарифма в формуле для термического сопротивления

$$q_c = \pi K_c (T_{e1} - T_{e2}) \qquad K_c = \frac{1}{\dfrac{1}{2\alpha_1 r_1} + \dfrac{1}{2\lambda} ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) + \dfrac{1}{2\alpha_2 r_2}},$$

Окажется более сильным, чем при большем внутреннем радиусе

$$\frac{dq_c}{dr_2} = 0 \quad \text{дает} \quad \boxed{(r_2)_* = \frac{\lambda_1}{\alpha_2}} \quad \text{— Критический радиус} \qquad (37)$$



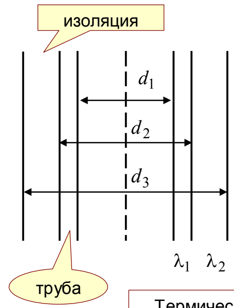
Частный случай нулевого внутреннего сопротивления, $1/\alpha_1 = 0$

$$y = \frac{q}{2\pi\lambda(T_{e1} - T_{e2})} = \frac{1}{\ln x + \beta/x}, \; x = \frac{r_2}{r_1}, \; \beta = \frac{\lambda}{\alpha_2 r_1} \qquad (38)$$

$\beta = 0$ Внешнее сопротивление также равно нулю

$r_1 = r_2$ Толщина стенки равна 0 $\qquad \beta = 1: \beta/x = \lambda/(\alpha_2 r_2)$

Для заданного внутреннего радиуса величина критического внешнего радиуса увеличивается, если увеличивается теплопроводность трубы или если понижается коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности



Существование критического наружного радиуса приводит к тому, что при некоторых реальных условиях, вопреки привычным представлениям, потеря тепла изолированной трубой фактически может быть снижена путем уменьшения толщины изоляции

Полное термическое сопротивление **для двухслойной трубы**, сечение которой изображено на рисунке, определяется по формуле

$$R_c = \frac{1}{K_c} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \underbrace{\frac{1}{2\lambda_2} ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right)}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_2 d_3}}_{(II)} \qquad (39)$$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \qquad d_3 - d_2$ - толщина изоляции

Термическое сопротивление теплопроводности изоляции (I) растет с увеличением толщины изоляционного покрытия; термическое сопротивление теплоотдачи изоляции (II) – падает (так как увеличивается поверхность теплоотдачи)

Условие экстремума:

$$\frac{dR_c}{dd_3} = \frac{1}{2\lambda_2 d_3} - \frac{1}{\alpha_2 d_3^{\,2}} = 0 \;\Rightarrow\; (d_3)_* = \frac{2\lambda_2}{\alpha_2} \qquad (40)$$

не зависит от d_2

(т.е., не зависит от диаметра самого трубопровода)

$$(R_c)''\Big|_{(d_3)_*} = \frac{\alpha_2^2}{8\lambda_2^3} > 0 \;\Rightarrow$$

В критической точке полное термическое сопротивление – минимально!

$d_2 > (d_3)_*$ увеличение толщины изоляции уменьшает теплоотдачу

$d_2 < (d_3)_*$ нанесение выбранного покрытия первоначально приведет к возрастанию теплоотдачи, и лишь при достижении критического диаметра тепловой поток будет убывать; затем достигнет той величины, которая была без изоляции и лишь потом приведет к желаемому эффекту

Задача для полого шара (шаровая стенка)

Рассматриваем пространственно одномерную стационарную задачу теплопроводности в шаровой стенке с заданными радиусами внутренней и внешней поверхности. Одномерность задачи означает, что распределение температуры в стенке зависит только от радиуса

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \qquad (41)$$

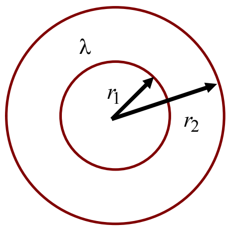
С помощью замены переменных

$$\frac{dT}{dr} = u \qquad \frac{du}{dr} = -\frac{2u}{r}$$

$$\ln u = -2\ln r + \ln C_1$$

Общее решение

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \qquad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$



Граничные условия первого рода

$$r = r_1: T = T_1 \qquad r = r_2: T = T_2 \qquad (42) \qquad T_1 = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 \qquad T_2 = -\frac{C_1}{r_2} + C_2 \qquad (43)$$

$$\boxed{T(r) = \frac{T_1(1/r - 1/r_2) + T_2(1/r_1 - 1/r)}{1/r_1 - 1/r_2}} \qquad (44)$$

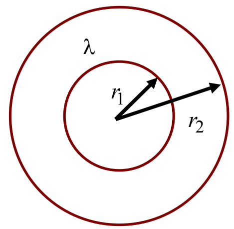
Плотность потока тепла $\quad q = -\lambda\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{\lambda}{r^2}C_1 = \dfrac{\lambda/r^2}{1/r_1 - 1/r_2}(T_1 - T_2) \qquad (45)$

Полный тепловой поток $\quad Q = -\lambda\dfrac{dT}{dr}\cdot 4\pi r^2 = -4\pi\lambda C_1 = \dfrac{4\pi\lambda}{1/r_1 - 1/r_2}(T_1 - T_2) \qquad (46)$

Задача для полого шара

Граничные условия третьего рода

Общее решение $\quad T(r) = -\dfrac{C_1}{r} + C_2 \qquad \dfrac{dT}{dr} = \dfrac{C_1}{r^2}$



$$\begin{cases} r = r_1: & -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial r} = \alpha_1(T - T_{e1}) \\ r = r_2: & -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial r} = \alpha_2(T_{e2} - T) \end{cases} \qquad (47)$$

$$\begin{cases} (\alpha_1 r_1 - \lambda)C_1 - \alpha_1 r_1^2 C_2 = -\alpha_1 r_1^2 T_{e1} \\ (\alpha_2 r_2 + \lambda)C_1 + \alpha_2 r_2^2 C_2 = \alpha_2 r_2^2 T_{e2} \end{cases} \qquad (48)$$

Полный тепловой поток Q не зависит от текущего радиуса

$$C_1 = \frac{\alpha_1 r_1^2 (T_{e2} - T_{e1})}{(\alpha_1 r_1 - \lambda) + \dfrac{\alpha_1 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2}(\alpha_2 r_2 + \lambda)} \qquad C_2 = \frac{\dfrac{(\alpha_1 r_1 - \lambda)}{(\alpha_2 r_2 + \lambda)} T_{e2} + \dfrac{\alpha_1 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2} T_{e1}}{\dfrac{(\alpha_1 r_1 - \lambda)}{(\alpha_2 r_2 + \lambda)} + \dfrac{\alpha_1 r_1^2}{\alpha_2 r_2^2}} \qquad (49)$$

В пределе при идеальном теплообмене сред с заданными температурами и шаровой стенки (т.е., при бесконечных коэффициентах теплоотдачи) решение задачи с граничными условиями третьего рода переходит в решение задачи с граничными условиями первого рода.

$Q = \dfrac{4\pi\lambda}{\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}}(T_1 - T_2)$ = тепловому потоку, приходящему к внутренней стенке $4\pi r_1^2 \alpha_1 (T_{e1} - T)$ = тепловому потоку, покидающему внешнюю стенку $4\pi r_2^2 \alpha_2 (T - T_{e2})$

Распределение температуры в шаровой стенке для граничных условий третьего рода

Дома: воспроизвести все решение

$$T(r)=\frac{T_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)+T_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

Температуры стенок:

$$T_1=\frac{r_1^2\alpha_1 T_{e1}+\Lambda_s\left(T_{e2}+\frac{r_1^2\alpha_1}{r_2^2\alpha_2}T_{e1}\right)}{\Lambda_s\left(1+\frac{r_1^2\alpha_1}{r_2^2\alpha_2}\right)+r_1^2\alpha_1}\qquad T_2=\frac{r_1^2\alpha_1 T_{e2}+\Lambda_s\left(T_{e2}+\frac{r_1^2\alpha_1}{r_2^2\alpha_2}T_{e1}\right)}{\Lambda_s\left(1+\frac{r_1^2\alpha_1}{r_2^2\alpha_2}\right)+r_1^2\alpha_1}$$

Проводимость шаровой стенки:

$$\Lambda_s=\frac{\lambda}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}\equiv\frac{\lambda r_1 r_2}{r_2-r_1}$$

Решения простейших задач в безразмерной форме

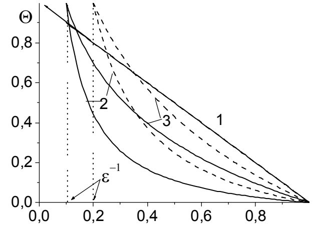
Соберем решения стационарных задач для тел канонической формы ***с граничными условиями первого рода*** вместе

$$T_p=T_1-(T_1-T_2)\frac{r}{r_2}\qquad T_c=\frac{T_1 \ln(r_2/r)+T_2 \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}\qquad T_s=\frac{T_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)+T_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

Дома: воспроизвести!

$$\theta=\frac{T-T_2}{T_1-T_2}\qquad \xi=\frac{r}{r_2}$$

$$\begin{cases}\theta_p=1-\xi & 0\le\xi\le 1\\ \theta_c=-\dfrac{\ln\xi}{\ln\varepsilon} & \varepsilon^{-1}\le\xi\le 1\\ \theta_p=\dfrac{(1-\xi)}{\xi(\varepsilon-1)} & \varepsilon^{-1}\le\xi\le 1\end{cases}\qquad \varepsilon=\frac{r_2}{r_1}>1$$



В плоской стенке качественное распределение температуры не зависит от ее толщины. А вот в цилиндрической и шаровой – нелинейно меняется с радиусом; характер распределения (кривизна кривой) зависит от соотношения внешнего и внутреннего радиусов.

Распределение температуры в плоской (1), цилиндрической (2) и шаровой (3) стенке. Сплошные линии $\varepsilon=10$; *пунктирные линии -.* $\varepsilon=5$

В случае ***граничных условий третьего рода*** решения простейших задач зависят от параметров, характеризующих теплообмен.

Для одинаковых коэффициентов теплоотдачи. $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$

$$\theta=\frac{T-T_{e2}}{T_{e1}-T_{e2}}\qquad \xi=\frac{r}{r_2}$$

для пластины

$$\theta_p=\theta_1-(\theta_1-\theta_2)\xi\qquad \theta_1=1-\frac{1}{2+Bi}\qquad \theta_2=\frac{1}{2+Bi}$$

для цилиндра:

$$\theta_c=\frac{-(\theta_1-\theta_2)\ln\xi+\theta_2\ln\varepsilon}{\ln\varepsilon}$$

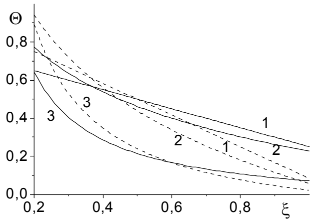
$$\theta_1=1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+\varepsilon Bi\ln\varepsilon}\qquad \theta_2=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon+\varepsilon Bi\ln\varepsilon}$$

для сферы:

$$\theta_s=\frac{(1-\xi)\theta_1+(\xi\varepsilon-1)\theta_2}{\xi(\varepsilon-1)}$$

$$\theta_1=\frac{(\varepsilon-1)Bi+1}{1+\varepsilon+(\varepsilon-1)Bi}\qquad \theta_2=\frac{1}{1+\varepsilon+(\varepsilon-1)Bi}$$

$$Bi=\frac{\alpha r_1}{\lambda}$$



Распределение температуры вдоль координаты в плоской (1), цилиндрической (2) и сферической (3) стенках в условиях конвективного теплообмена. Сплошные линии - $Bi=2$; *пунктирные -* $Bi=10$

Примеры: сосуд Дьюара (Dewar bottle)
Частица металла, покрытая пленкой окисла

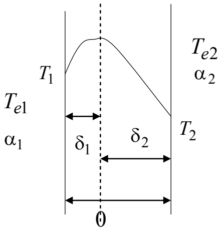
Дома (или на практике):

1. Сформулировать задачу о распределении температуры в двухслойной шаровой оболочке при ее конвективном охлаждении, пользуясь материалом лекции. Тепловой контакт между слоями считать идеальным. Привести задачу к безразмерной форме. Построить точное аналитическое решение этой задачи.

2.*(**Для любознательных**). Рассчитать температуры внутренней и внешней поверхностей шаровой оболочки в задаче 1, а также температуру на контакте; определить полный тепловой поток, уходящий с поверхности шара, принимая, что температуры среды внутри оболочки – 175 С, температура окружающей среды – 25 С; коэффициенты теплоотдачи одинаковы и равны – 28,8 ккал/(м2·час·град); внутренний, и внешний радиусы оболочки – 3 см и 5 см, толщина внутренней оболочки – 25 мм. Внутренняя оболочка изготовлена из материала с теплопроводностью 1,45 ккал/(м час град); внешняя из материала с коэффициентом теплопроводности 0,137 ккал/(м·час·град). Как будет изменяться тепловой поток при изменении толщины внешней оболочки в пределах от 25 мм до 300 мм?

Задачи с внутренними источниками тепла

ТЕПЛОПРОВОДЯЩАЯ ПЛОСКАЯ СТЕНКА С ОБЪЕМНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ



$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{q_V}{\lambda}=0 \quad (50)$$ (Решается задача элементарным интегрированием)

Первый «способ» решения:

$$T(x)=-\frac{q_V}{\lambda}\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2 \quad (51)$$

общее решение

Подставляя общее решение в г.у., найдем постоянные интегрирования

Максимум находится на некотором расстоянии от поверхностей.
Положение максимума можно найти из условия (условие экстремума) $\frac{dT}{dx}=0$

$$\frac{dT}{dx}=-\frac{q_V x}{\lambda}+C_1=0$$

$$C_1=0$$

Второй «способ» решения

Поместим начало координат в точку, где температура максимальна

Г.У.: $$x=\delta_2:-\lambda\left.\frac{dT}{dx}\right|_{\delta_2}=\alpha_2\left(T|_{\delta_2}-T_{e2}\right)\Rightarrow\alpha_2\left(C_2-\frac{q_V\delta_2^2}{2\lambda}-T_{e2}\right)=q_V\delta_2 \quad (52)$$

Так как плоскость x=0 можно считать теплоизолированной, все тепло, выделившееся в пластине справа в единицу времени, должно быть отведено в окружающую среду посредством теплоотдачи с правой стенки. В противном случае будет нарушено условие стационарности

$q_V\delta_2$ - количество тепла, выделяющееся в объеме пластины толщиной =1 в единицу времени

Слева – выражение для потока теплоотдачи с единицы площади поверхности пластины

Аналогичные рассуждения для левого слоя пластины толщиной $\delta_1=\delta-\delta_2$ приводят к выражению

$$\alpha_1\left(C_2-\frac{q_V(\delta-\delta_2)^2}{2\lambda}-T_{e1}\right)=q_V(\delta-\delta_2) \quad (53)$$

С помощью равенств (52), (53) находим положение максимума

$$\delta_2=\frac{2\lambda\alpha_1\alpha_2(T_{e1}-T_{e2})+q_V\delta\alpha_2(\delta\alpha_1+2\lambda)}{2q_V[\delta\alpha_1\alpha_2+\lambda(\alpha_1+\alpha_2)]} \quad (54)$$

Определяя постоянную C_2, (подходит любое из равенств (52) или (53) совместно с (54)) , находим общее решение. Наиболее простой вид оно принимает, если

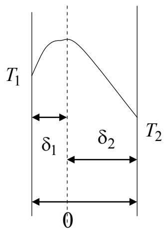
$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha; T_{e1}=T_{e2}=T_e$$
$$\delta_1=\delta_2=\delta/2 \quad (55)$$

тогда

$$C_2=\frac{q_V\delta}{2\alpha}+\frac{q_V\delta^2}{8\lambda}+T_e \qquad T(x)=\frac{q_V}{2\lambda}\left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2-x^2\right]+\frac{q_V\delta}{2\alpha}+T_e \quad (56)$$

$$\boxed{T_{max}=T|_{x=0}=\frac{q_V\delta^2}{8\lambda}+\frac{q_V\delta}{2\alpha}+T_e}$$ — Тем ниже, чем выше теплопроводность пластины

Температура стенки $T_s=T_1=T_2=\frac{q_V\delta}{2\alpha}+T_e$ растет с ухудшением теплоотдачи



Граничные условия первого рода $T(x)=-\frac{q_V}{\lambda}\frac{x^2}{2}+C_1x+C,\ C_1=0$

$$\begin{cases}-\frac{q_V}{\lambda}\frac{\delta_2^2}{2}+C_2=T_2\\ -\frac{q_V}{\lambda}\frac{(\delta-\delta_2)^2}{2}+C_2=T_1\end{cases} \quad (57) \Rightarrow \delta_2=\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{2\lambda(T_1-T_2)}{q_V\delta^2}\right)$$

$$T(x)=T_2+\frac{q_V}{2\lambda}\left\{\left[\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{2\lambda(T_1-T_2)}{q_V\delta^2}\right)\right]^2-x^2\right\} \quad (58)$$

При очень больших значениях α — Граничные условия третьего рода переходят в граничные условия первого рода

$$x=\delta_2:-\lambda\left.\frac{dT}{dx}\right|_{\delta_2}=\alpha_2\left(T|_{\delta_2}-T_{e2}\right)\Rightarrow T|_{x=\delta_2}=T_2=T_{2e}$$

Следовательно, из симметричной задачи с граничными условиями третьего рода находим

$$T(x)=\frac{q_V}{2\lambda}\left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2-x^2\right]+T_s$$

$$\boxed{T_{max}=T|_{x=0}=\frac{q_V\delta^2}{8\lambda}+T_s} \quad (59)$$

Температура стенок

Это же равенство следует из (58) при условии равенства температур стенок

Цилиндр с объемным тепловыделением

Рассмотрим бесконечный сплошной цилиндр, равномерно нагреваемый (или охлаждаемый) с боковой поверхности. В объеме цилиндра находится источник тепла постоянной интенсивности . Требуется найти распределение температуры для установившегося режима.

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{q_V}{\lambda}=0 \quad (60)$$

$$u=dT/dr \qquad r\frac{du}{dr}+u+\frac{q_V r}{\lambda}=0 \quad \text{или} \quad \frac{d(ru)}{dr}+\frac{q_V r}{\lambda}=0 \quad (61)$$

$$ru=-\frac{q_V r^2}{2\lambda}+C_1 \quad (62)$$

Первый интеграл

$$\frac{dT}{dr}=-\frac{q_V r}{2\lambda}+\frac{C_1}{r}$$

Общее решение $$T=-\frac{q_V r^2}{4\lambda}+C_1\ln r+C_2 \quad (63)$$

Для сплошного цилиндра $dT/dr=0 \quad r=0 \Rightarrow C_1=0$

Цилиндр с объемным тепловыделением

$$r = R \qquad -\lambda\frac{dT}{dr} = \alpha(T - T_e) \qquad (64)$$

$$C_2 = \frac{q_V R}{2\alpha} + \frac{q_V R^2}{4\lambda} + T_e \qquad T = \frac{q_V}{4\lambda}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{q_V R}{2\alpha} + T_e \qquad (65)$$

$$\boxed{T_{max} = \frac{q_V}{4\lambda}R^2 + \frac{q_V R}{2\alpha} + T_e} \qquad T_s = \frac{q_V R}{2\alpha} + T_e \qquad (66)$$

плотность теплового потока на поверхности цилиндра: $q = \alpha(T_s - T_e) = \dfrac{q_V R}{2}$

полный тепловой поток с поверхности цилиндра: $Q = qF = \dfrac{q_V R}{2} 2\pi R l = q_V \pi R^2 l$

Задача об охлаждении цилиндра с объемным тепловыделением представляет, в частности, интерес для нахождения распределения температуры в катодах, используемых в плазмотронах для генерации потоков ионов. ***В практическом приложении*** эта задача может быть переформулирована так: найти мощность источника, достаточную для распыления катода при условии, что для этого нужно достичь температуру плавления материала катода

Используя общее решение (63), можно найти распределение температуры по толщине стенки полого цилиндра или по толщине цилиндра, покрытого защитным слоем (рассмотрим далее). В первом случае нужно задать условия на внутренней поверхности цилиндра. ***Во втором случае*** потребуется дополнительное условие на границе раздела двух материалов с разными свойствами, т.е. граничное условие четвертого рода.

Шар с объемным тепловыделением

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{q_V}{\lambda} = 0 \qquad (67) \qquad T = -\frac{q_V r^2}{6\lambda} + \frac{C_1}{r_1} + C_2 \qquad (68)$$

Условие теплообмена с окружающей средой $-\lambda\dfrac{dT}{dr} = \alpha(T - T_e)$ при $r = R$ дает

$$C_2 = T_e + \frac{q_V}{3\alpha}R + \frac{q_V}{6\lambda}R^2$$

$$T = T_e + \frac{q_V}{3\alpha}R + \frac{q_V}{6\lambda}R^2\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (69)$$

максимальная температура $\boxed{T_{max} = T_e + \dfrac{q_V}{3\alpha}R + \dfrac{q_V}{6\lambda}R^2}$ (70)

Температура поверхности $T_s = T_e + \dfrac{q_V}{3\alpha}R + \dfrac{q_V}{6\lambda}R^2$

полный поток тепла через поверхность шара $Q = -\pi\dfrac{R^2}{4}\lambda\left(\dfrac{dT}{dr}\right)_{r=R} = \dfrac{1}{3}\pi R^3 q_V$

цилиндр $\quad T_{max} = \dfrac{q_V}{4\lambda}R^2 + \dfrac{q_V R}{2\alpha} + T_e \qquad T_s = \dfrac{q_V R}{2\alpha} + T_e$

Плоский слой $\quad T_{max} = \dfrac{q_V\delta}{2\alpha} + \dfrac{q_V\delta^2}{8\lambda} + T_e \qquad T_s = \dfrac{q_V\delta}{2\alpha} + T_e$

Сравнить с (70)

Пример 1. Найти максимальную силу тока, который можно пропускать по алюминиевой проволоке (λ=204 Вт/(м·К)) диаметром 1 мм, чтобы ее температура не превышала 200 С. Проволока подвешена в воздухе с температурой 25 С. Коэффициент конвективной теплоотдачи от проволоки к воздуху равен 10 Вт/(м²·К). Электрическое сопротивление R_e/l на единицу длины проволоки есть 0,037 Ом/м.

Решение. Воспользуемся формулой (66), из которой следует

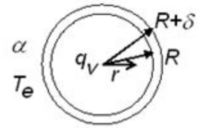
$$q_V = \frac{R_e I^2}{\pi R^2 l} \qquad T_{\max} = T_e + \frac{q_V}{2}\frac{R}{\alpha}\left[1 + \frac{R\alpha}{2\lambda}\right] = T_e + \frac{I^2}{2\pi R\alpha}\frac{R_e}{l}\left[1 + \frac{R\alpha}{2\lambda}\right]$$

Подставляем заданные значения физических величин:

$$200 = 25 + \frac{I^2}{2\cdot\pi\cdot\left(10^{-3}/2\right)\cdot 10}\cdot 0{,}037\left[1 + \frac{\left(10^{-3}/2\right)\cdot 10}{2\cdot 204}\right]$$

Отсюда находим силу тока: $I = 12{,}2$ А

Провод с изоляцией



Строгая математическая постановка задачи:

$$\frac{d^2T_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_1}{dr} + \frac{q_V}{\lambda_1} = 0 \qquad r < R$$

$$\frac{d^2T_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_2}{dr} = 0 \qquad R < r < R + \delta$$

Первое условие есть условие симметрии; второе говорит о том, что тепловой контакт между проводом и изоляцией – идеальный, а третье соответствует конвективному теплообмену провода с изоляцией с окружающей средой.

$$r = 0: \quad dT/dr = 0$$

$$r = R: \quad \lambda_1\frac{dT_1}{dr} = \lambda_2\frac{dT_2}{dr}; \qquad T_1 = T_2$$

$$r = R + \delta: \quad \lambda_2\frac{dT_2}{dr} = \alpha\left(T_2 - T_e\right)$$

Общее решение задачи:

$$T_1 = -\frac{q_V r^2}{4\lambda_1} + C_1 \ln r + C_2$$

$$T_2 = C_3 \ln r + C_4$$

Из первого условия имеем: $C_1 = 0$

Второе условие дает: $\lambda_1\left(-\dfrac{q_V R}{2\lambda_1}\right) = \lambda_2\dfrac{C_3}{R} \Longrightarrow C_3 = -\dfrac{q_V R^2}{2\lambda_2}$

$$-\frac{q_V R^2}{4\lambda_1} + C_2 = -\frac{q_V R^2}{2\lambda_2}\ln R + C_4$$

Из третьего условия следует: $-\lambda_2\dfrac{C_3}{R} \equiv \dfrac{\lambda_2}{R}\cdot\dfrac{q_V R^2}{2\lambda_2} = \alpha\left[-\dfrac{q_V R^2}{2\lambda_2}\ln(R + \delta) + C_4 - T_e\right]$

Находим:

$$C_4 = T_e + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln(R+\delta) + \frac{q_V R}{2\alpha}$$

$$C_2 = T_e + \frac{q_V R^2}{4\lambda_1}\left(1+\frac{2\lambda_1}{\alpha R}\right) + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right)$$

Следовательно, распределение температуры в проводе с изоляцией описывается формулами

$$T_1 = T_e + \frac{q_V R^2}{4\lambda_1}\left(1+\frac{2\lambda_1}{\alpha R}\right) + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right) - \frac{q_V r^2}{4\lambda_1} \quad \text{и} \quad T_2 = T_e + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2}\frac{\lambda_2}{\alpha R} + \frac{q_V R^2}{2\lambda_2} \ln\left(\frac{R+\delta}{r}\right)$$

Окончательное решение представим в виде: (Можно на практике или дома)

$$\theta_i = \frac{T_i - T_e}{T_* - T_e} \qquad \xi = \frac{r}{R} \qquad T_* = T_e + \frac{q_V R^2}{\lambda_1}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\frac{Bi}{K_\lambda}\right) + \frac{K_\lambda}{2} \ln(1+\varepsilon) - \frac{\xi^2}{4} \qquad 0 \le \xi \le 1$$

$$\theta_2 = \frac{K_\lambda}{2Bi} + \frac{K_\lambda}{2} \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{\xi}\right) \qquad 1 \le \xi \le 1+\varepsilon$$

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_2} \qquad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{R}$$

Определим поток тепла с поверхности проводника

$$q = \alpha\left(T_2(R+\delta) - T_e\right)$$

$$Q = \pi R^2 l \alpha\left(T_2(R_2) - T_e\right)$$

$$\boxed{\frac{Q}{\left(\pi R^2/2\right) l \alpha (T_* - T_e)} = \frac{K_\lambda}{Bi}}$$

$K_\lambda / Bi < 1$ - изоляция не отводит тепло от проводника с током

$K_\lambda / Bi > 1$ - возможно остывание проводника за счет потерь тепла в окружающую среду

Пример 2. Пусть по длинной алюминиевой проволоке диаметром 1 см течет электрический ток силой тока 1000 А. Проволока покрыта слоем резиновой изоляции толщиной 3 мм (λ_2=0,15 Вт/(м·К)). Температура наружной поверхности изоляции 30 С. Найти температуру внутренней поверхности изоляции. Омическое сопротивление проволоки на единицу длины 3,7·10^{-4} Ом/м.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся второй формулой для T_2 рассмотренной сопряженной задачи. С учетом того, что задана температура внешней поверхности изоляции, т.е. $\alpha_2 \to \infty$

$$q_V = \frac{R_e I^2}{\pi R^2 l} \Longrightarrow T_2(r=R) = T_e + \frac{R_e}{l}\cdot\frac{I^2}{2\pi\lambda_2}\ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right) =$$

$$= (273+30) + 3.7\cdot 10^{-4} \cdot \frac{(1000)^2}{2\cdot 3.14 \cdot 0.15} \ln\left[\frac{0.005+0.003}{0.005}\right] \approx 477.6$$

Используя значение коэффициента теплопроводности алюминиевой проволоки $\lambda_1 \approx 232$ Вт/(м·К) и формулу для T_1, можем рассчитать температуру в центре провода. В рассматриваемых условиях имеем

$$T_1(r=R) = T_e + \frac{R_e}{l}\frac{I^2}{2\pi\lambda_2}\ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right) + \frac{R_e}{l}\frac{I^2}{4\pi\lambda_1} = T_2(r=R) + \frac{R_e}{l}\frac{I^2}{4\pi\lambda_1} =$$

$$= 477.6 + \frac{3.7\cdot 10^{-4}(1000)^2}{4\cdot 3.14\cdot 232} \approx 477.7$$

Задание на дом. 1.Ток силой *I*=200А пропускается через проволоку из нержавеющей стали диаметром 2 мм и длиной 1 м. Электрическое сопротивление проволока – 0.125 Ом, коэффициент теплопроводности 17Вт/(м·К). Температура поверхности проволоки 150 С. Требуется рассчитать температуру на оси проволоки.

2.Предположить в этой же задаче, что проволока покрыта слоем изоляции (коэффициент теплопроводности изоляции 0,15 Вт/(м·К)), а коэффициент теплоотдачи на поверхности изоляции равен 60 Вт/(м²К). Как нужно изменить силу тока (увеличить или уменьшить), чтобы температура поверхности проволоки осталась равной 150 С.

Задача об ошибках термопары

Если тепло выделяется или поглощается в одной или более локальных областях («точках»), то говорят, что система содержит местные или сосредоточенные источники тепла. К таким системам относятся системы с термопарами.

Рассмотрим стационарное распределение температуры в неизолированной бесконечной плоской пластине с помещенным в ней цилиндрическим источником тепла

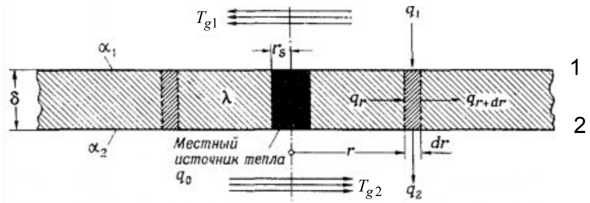
q_0 общее количество тепла, выделяемое источником тепла в цилиндрическом объеме $\pi r_s^2 \delta$

Дополнительно платина получает тепло через поверхность 1 и отдает через поверхность 2 (или наоборот)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (71)$$

пластина тонкая Это существенно упрощает задачу

Требуется найти распределение температуры по радиусу $T(r)$ в стационарном состоянии для $r_s < r < \infty$



Местный источник тепла в неадиабатической пластине

Задача об ошибках термопары

В направлении z нет распределения температуры:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \qquad (71)$$

$$\int_0^\delta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)dz+\int_0^\delta \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}dz=0 \quad \text{или} \quad \delta\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=\delta}-\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}=0$$

$$\begin{cases} z=\delta & -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial z}=\alpha_1\left(T_{g1}-T\right) \\ z=0 & -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial z}=\alpha_2\left(T-T_{g2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\lambda\delta}\left(T-\frac{\alpha_1 T_{g1}+\alpha_2 T_{g2}}{\alpha_1+\alpha_2}\right)=0 \qquad (72)$$

$$r>>r_s \qquad T_{r\to\infty}=\varsigma=\frac{\alpha_1 T_{g1}+\alpha_2 T_{g2}}{\alpha_1+\alpha_2} \qquad (73)$$

По смыслу ς равна температуре всей платины при $q_0=0$

Задача об ошибках термопары

Перейдем к новой переменной

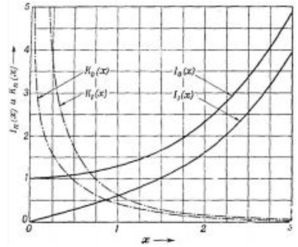
$$\Phi=T-\varsigma \qquad \frac{d^2\Phi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}-\varepsilon^2\Phi=0 \qquad (74)$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\lambda\delta}} \qquad (75)$$

Это есть уравнение Бесселя нулевого порядка, общее решение которого имеет вид

$$\Phi=T-\varsigma=C_1 I_0(\varepsilon r)+C_2 K_0(\varepsilon r) \qquad (76)$$

I_0 и K_0 модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка соответственно



Модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков

$I_0(\varepsilon r)$ неограниченно возрастает по мере того, как ее аргумент $\varepsilon r\to\infty$

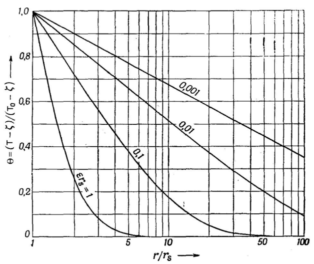
$$C_1=0$$

Задача об ошибках термопары

Вследствие наличия источника тепла при $r=r_s$ пластина является неизотермической.

$$r=r_s \qquad q_0=-\lambda F_s\left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=r_s}=-2\pi\lambda\delta r_s\left(\frac{d}{dr}\left[C_2 K_0(\varepsilon r)\right]\right)_{r=r_s}=2\pi\lambda\delta r_s C_2\varepsilon K_1(\varepsilon r_s)$$

$$\Rightarrow \qquad C_2=\frac{q_0}{2\pi\lambda\delta r_s\varepsilon K_1(\varepsilon r_s)}$$



Радиальное распределение температуры вокруг локального источника тепла в неадиабатической пластине

$$T=\varsigma+\frac{q_0}{2\pi\lambda\delta\varepsilon r_s}\frac{K_0(\varepsilon r)}{K_1(\varepsilon r_s)} \qquad (77)$$

или

$$\theta=\frac{T-\varsigma}{T_0-\varsigma}=\frac{K_0(\varepsilon r_s\xi)}{K_1(\varepsilon r_s)} \qquad (78)$$

$$T_0=\varsigma+\frac{q_0}{2\pi\lambda\delta\varepsilon r_s}$$

Асимптотическое представление:

$$\varepsilon r_s\xi<<1 \qquad K_0\left[\varepsilon r_s\xi\right]\approx \ln\left(\frac{2}{\varepsilon r_s\xi}\right)-0{,}577$$

Задача об ошибках термопары

Теперь можно перейти к задаче об ошибках термопары непосредственно. Как известно, измерение температуры поверхностей обычной термопарой сопряжено с рядом ошибок электрического, физико-химического и термического происхождения. Возможно, что наиболее серьезной из ошибок, встречающихся при измерении температуры термопарой обычного типа, является так называемая ***ошибка за счет теплопроводности проводов термопары.***

Если температура среды больше измеряемой температуры поверхности , то провода термопары, находящиеся при более высокой температуре, будут подводить тепло к пластине с более низкой температурой, что вызовет местное повышение температуры как раз в той точке, где спай термопары должен измерять температуру поверхности. Следовательно, в этом случае показания термопары дадут завышенное по сравнению с истинным значение температуры.

Если принять, что провода термопары питают источник , то для определения ошибки можно воспользоваться только что полученным решением.

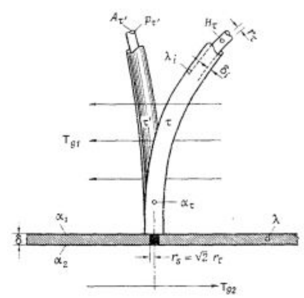
$T_{g_1}>T_{g2}$ термопара становится источником

$$q_{01}=\Lambda_1\left(T_{g1}-T_0\right)$$

$$q_{02}=\Lambda_2\left(T_0-T_{g2}\right)$$

$$q_0=q_{01}-q_{02}=\left(\Lambda_1 T_{g1}+\Lambda_2 T_{g2}\right)-\left(\Lambda_1+\Lambda_2\right)T_0$$

разность между теплом, подводимым проводами к спаю , и теплом, рассеянным на поверхности круглого источника



Воспользовавшись полученным решением, найдем

$$T_0 - \varsigma = \frac{(\Lambda_1 T_{g1} + \Lambda_2 T_{g2}) - (\Lambda_1 + \Lambda_2) T_0}{2\pi\lambda\delta\varepsilon r_s} \frac{K_0(\varepsilon r_s)}{K_1(\varepsilon r_s)}$$

Коэффициенты, как уже известно, рассчитываются через коэффициенты теплопроводности проводов и изоляторов, коэффициенты теплообмена и характерные линейные размеры

$$\boxed{T_0 - \varsigma = \frac{\Lambda_1 (T_{g1} - \varsigma) + \Lambda_2 (T_{g2} - \varsigma)}{(\Lambda_1 + \Lambda_2) + [2\pi\lambda\delta\varepsilon r_s K_1(\varepsilon r_s)]/K_0(\varepsilon r_s)}}$$

абсолютная ошибка для температуры, измеренной термопарой

$$\Lambda_1 >> \Lambda_2 \qquad \theta = \frac{T_0 - \varsigma}{T_{g1} - \varsigma} = \frac{1}{1 + 2\pi(\lambda\delta/\Lambda_1)\varepsilon r_s K_1(\varepsilon r_s)/K_0(\varepsilon r_s)}$$

Если термопары не теплоизолированы, то термическая проводимость

Λ_1 равна коэффициенту теплоотдачи термопары в среде 1

$$\Lambda_1 = \pi l \alpha_1 r_\tau$$

Чем толще пластина, тем больше x, но тем меньше εr_s, так что добиться нулевой ошибки практически невозможно

$$K_1(y) \approx y^{-1}, y < 0{,}05$$

$$\theta = \frac{1}{1 + 2\pi x \frac{1}{\ln(2/y) - 0.577}} \qquad x = \frac{\lambda\delta}{\pi l r_\tau \alpha_1} \qquad y = \varepsilon r_r = \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda\delta}} r_s$$

$r_s = 1.414 r_\tau$ ← радиус проволоки