Лекция 3.

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН.
ЗАКОНЫ НЬЮТОНА – РИХМАНА.
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕПЛООБМЕНА
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛООТДАЧИ

Под ***конвекцией*** понимают процесс переноса вещества в среде за счет перемещения макрочастиц жидкости (газа). Перемещение этих частиц можно наблюдать невооруженным глазом, сделав их видимыми с помощью красителей или дыма. Естественно, что конвекция возможна только в текучей среде. Перенос теплоты конвекцией всегда сопровождается теплопроводностью, причем главную роль в совместной передаче теплоты играет конвективный перенос.

Совместный процесс переноса теплоты конвекцией и теплопроводностью называется ***конвективным теплообменом***

Различают свободную и вынужденную конвекцию. Конвекция, создаваемая принудительным способом (мешалкой, вентилятором и т.д.) носит название ***вынужденной***. Если же движение элементов объема среды вызвано наличием в ней температурных разностей, а, следовательно, разных плотностей, то такая конвекция называется ***свободной*** или ***естественной***. Она создается за счет того, что более холодные частицы жидкости или газа, имеющие большую плотность, под действием гравитационного поля Земли опускаются вниз, а более нагретые под действием архимедовой силы поднимаются вверх. Типичными примерами естественной конвекции являются теплоотдача от стен или с крыш здания в безветренный день; конвекция в сосуде с жидкостью, в которую погружена нагревательная спираль (кипятильник); теплоотдача от солнечного коллектора в безветренную погоду. Поскольку скорость жидкости при вынужденной конвекции больше, чем при свободной, то в первом случае может быть передано больше тепла, чем во втором при заданном перепаде температур.

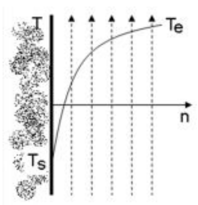
Если жидкость или газ вступают в контакт с поверхностью твердого тела, имеющей другую температуру, процесс обмена тепловой энергией или теплом называют ***теплоотдачей***. Такой процесс часто встречается в жизни, но подробно описать его механизм довольно сложно.

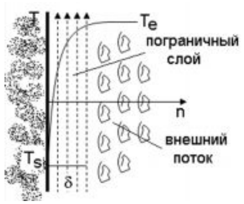
$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_V \quad \text{или} \quad c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\cdot\lambda\nabla T+q_V \qquad (1)$$

$$c\rho\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{w}\nabla T\right]=\nabla\cdot\lambda\nabla T+q_V \qquad c\rho\left[\frac{\partial T}{\partial t}+w_x\frac{\partial T}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_V \qquad (2)$$

О. Рейнольдс в 884 году установил существование двух режимов движения жидкости, один из которых получил название ***ламинарного***, а другой – ***турбулентного***.

<u>При ламинарном течении</u> все частицы жидкости движутся параллельно друг другу, не перемешиваясь по нормали к направлению движения. Следовательно, перенос теплоты в этом направлении осуществляется только теплопроводностью. Из-за сравнительно малых коэффициентов теплопроводности жидкостей (особенно газов) теплота по всему объему жидкости в ламинарном потоке распространяется достаточно медленно .





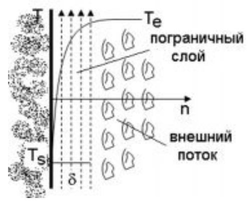
При турбулентном режиме частички жидкости, участвуя в общем поступательном движении, перемещаются хаотично, неупорядоченно, с образованием вихрей и появлением нерегулярной пульсации скорости, давления и других параметров. Чем чаще образуются вихри, тем интенсивнее перемешивание потока, тем больше его турбулентность. Перенос теплоты в возмущенном вихрями потоке осуществляется конвекцией, но вблизи стенки этого не наблюдается из-за «прилипания» частиц жидкости к поверхности тела. На поверхности стенки в результате действия сил вязкости формируется тонкий слой заторможенной жидкости, получивший название ***гидродинамического пограничного слоя***, который движется параллельно стенке

<u>Гипотеза о прилипании жидкости</u> к стенке и образовании пограничного слоя была разработана Л.Прандтлем в 1904 году. Скорость внутри пограничного слоя изменяется от нуля на поверхности тела до скорости внешнего потока, т.е. характеризуется большим поперечным градиентом. В пределах этого слоя перенос тепла осуществляется теплопроводностью. Следовательно, характер движения жидкости предопределяет механизм переноса теплоты (энергии) в потоке.

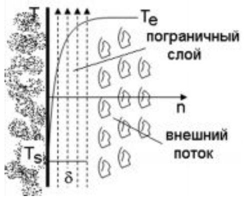
<u>Пограничным слоем</u> называют область течения (вблизи стенки) вязкой теплопроводной жидкости, характеризуемую малой толщиной и большим поперечным градиентом скорости или температуры, изменением которых обусловлены процессы переноса вещества, количества движения и теплоты.

.<u>Под внешним потоком</u> подразумевают область потока жидкости, в которой влияние сил вязкости ничтожно мало по сравнению с силами инерции, в то время как в пограничном слое силы вязкости и инерции соизмеримы.

Толщина пограничного слоя - величина условная, так как переход от пограничного слоя к внешнему потоку не является резким. За толщину пограничного слоя δ принимают расстояние от поверхности стенки до слоя жидкости, скорость которого отличается от скорости внешнего потока на малую, заранее заданную величину.



При теплообмене между стенкой и средой в области, граничащей с поверхностью тела, возникает тепловой пограничный слой, представляющий собой пристенный слой жидкости, в котором температура меняется от температуры стенки T_s до температуры внешнего потока T_e.



Термическое сопротивление (удельное) пограничного слоя во много раз превышает термическое сопротивление турбулентного внешнего потока и является определяющим в процессах конвективного теплообмена. Изменение температуры от T_S до T_e происходит, в основном, в пределах пограничного слоя.

И. Ньютон впервые обратил внимание на то, что разность температур является решающим фактором в процессе теплообмена между телом и средой. В XVIII веке Г. Рихман первым дал обстоятельный анализ процессов охлаждения нагретых тел в воздухе и показал их зависимость не только от разности температур, но и от площади поверхности и объема тела. Последующие исследования выявили большую сложность процессов теплообмена, тесно переплетающихся с гидродинамическими процессами. Было найдено, что в процессе теплообмена *количество теплоты, отдаваемой или получаемой телом от окружающей среды*, прямо пропорционально площади поверхности тела, разности температур и длительности процесса, а также зависит от физических свойств среды, характера ее движения, формы тела и его геометрических размеров.

Для элементарной площадки и элементарного времени процесс описывается уравнением

$$dQ_\tau = \alpha(T_e - T_s)dFd\tau \qquad (3.1)$$

*Это есть основное уравнение конвективного теплообмена или **закон Ньютона-Рихмана**.*

$T_e - T_s$ температурный напор

α коэффициент пропорциональности, названный коэффициентом теплоотдачи, Вт/(м^2.К).

Для стационарного процесса теплообмена при неизменных температуре среды и площади поверхности тепловой поток определяется равенством

$$Q = \alpha(T_e - T_s)F \qquad (3.2)$$

$$q = Q/F = \alpha(T_e - T_s) \qquad (3.3)$$

Коэффициент теплоотдачи равен количеству теплоты, воспринимаемой (или отдаваемой) единицей поверхности в единицу времени при разности температур между поверхностью и движущейся средой в 1 К.

$$\alpha = \frac{dQ_\tau}{(T_e - T_s)dFd\tau} = \frac{q}{(T_e - T_s)}$$

Коэффициент теплоотдачи характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и омывающей средой и учитывает конкретные условия протекания этого процесса. В отличие от коэффициентов теплопроводности и температуропроводности, коэффициент теплоотдачи не является теплофизической характеристикой вещества, и его значения не приводятся в справочниках

Наиболее существенное влияние на величину α оказывают коэффициент теплопроводности λ, удельная теплоемкость c, плотность ρ, вязкость жидкости (динамическая μ или кинематическая $\nu = \mu/\rho$), коэффициент объемного расширения .

Все реальные жидкости обладают вязкостью. ***Вязкость*** – свойство жидкости оказывать сопротивление перемещению (сдвигу) ее слоев. Динамическая вязкость характеризует собой силу, которая возникает на квадратном метре поверхности двух перемещающихся друг относительно друга слоев жидкости при градиенте скорости, равном единице

Соотношение

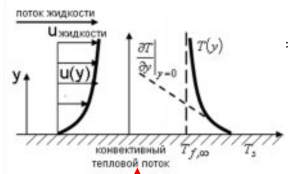
$$\alpha = \frac{dQ_\tau}{(T_e - T_s)dFd\tau} = \frac{q}{(T_e - T_s)}$$

служит для определения коэффициента теплообмена. При кажущейся простоте соотношения, найти α - довольно трудная задача. Аналитическое определение наталкивается на математические трудности, которые иногда оказываются непреодолимыми. Результаты экспериментального определения α справедливы только для данного конкретного случая. В таблице 3.1. указаны некоторые приближенные значения коэффициента конвективной теплоотдачи, включая случаи кипения и конденсации, которые обычно относят к области конвекции

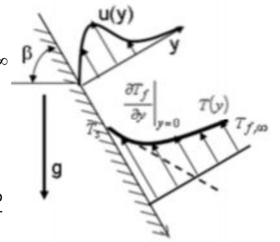
Таблица 3.1

Вид конвекции и среда	α, Вт/(м^2·К)
Свободная конвекция, воздух	5 - 25
Свободная конвекция, вода	20 - 100
Вынужденная конвекция, воздух	10 - 200
Вынужденная конвекция, вода	50 – 10 000
Кипящая вода	3000 – 100 000
Конденсирующийся водяной пар	5000 – 100 000

Основные ***особенности конвективного переноса*** тепла к потоку жидкости видны из. рисунка для нагретой плоской пластины, охлаждаемая обтекающим ее воздушным потоком. Кроме того, показаны профили скорости и температуры. плотность теплового потока (тепловой поток на единицу площади) от стенки к этому слою жидкости определяется только теплопроводностью



$$= q = -\lambda_f \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = \alpha(T_s - T_{f,\infty}$$



Профили скорости и температуры при вынужденной конвекции около нагретой пластины

Профили скорости и температуры при свободной конвекции около нагретой пластины, отклоненной от горизонтали на угол

Хотя передача тепла осуществляется теплопроводностью, градиент температуры на стенке определяется скоростью переноса тепла жидкостью от стенки в основной поток. Поэтому градиент температуры на стенке зависит от поля течения, и чем выше скорость течения, тем больше и градиент температуры, и тепловой поток.

В условиях вынужденной конвекции скорость при удалении от стенки приближается к скорости набегающего потока, обусловленной внешней силой. В условиях свободной конвекции скорость при удалении от пластины сначала возрастает, а затем под действием вязкости довольно быстро снижается до нуля, в то время как разность плотностей меняется медленнее.

Теплопередача через плоскую стенку

Передача теплоты от одной среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их стенку называется теплопередачей. Примерами теплопередачи являются передача теплоты от горячей воды к воздуху помещения через металлические стенки батарей центрального отопления, передача теплоты от горячих паров хладагента к воде или воздуху через стальные стенки труб в конденсаторах водяного или воздушного охлаждения и т.д. В этих случаях стенки не должны препятствовать теплопередаче от одной среды к другой, и поэтому они изготавливаются из материалов, имеющих высокую теплопроводность. Когда же требуется уменьшить теплопритоки (например, в камеры холодильника, к холодным трубопроводам и аппаратам) или уменьшить потери теплоты от горячих поверхностей в окружающую среду, то стенки и аппараты покрывают теплоизоляционными материалами

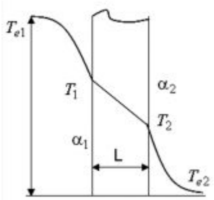


Рис.3.3. Качественное распределение температуры в стенке и в омывающих средах

Удельный тепловой поток, который получает стенка, определяется законом Ньютона-Рихмана

$$q = \alpha_1 (T_{e1} - T_1) \qquad (3.5)$$

Из условия непрерывности он должен равняться потоку тепла, отводимому теплопроводностью вглубь стенки. Как мы уже знаем, этот поток тепла может быть записан в виде

$$q = \frac{\lambda}{L}(T_1 - T_2) \qquad (3.6)$$

Температуры T_1 и T_2 нам неизвестны

Тепловой поток, отводимый тепловоспринимающей средой, в соответствии с тем же законом Ньютона-Рихмана, может быть представлен в виде

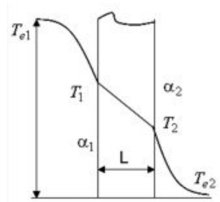
$$q = \alpha_2 (T_2 - T_{e2}) \qquad (3.7)$$

В силу непрерывности потока тепла находим

$$q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right) = T_{e1} - T_{e2}$$

или

$$q = K(T_{e1} - T_{e2}) \qquad (3.8)$$



коэффициент теплопередачи. Его размерность – Вт/(м²·К).

$$K = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)^{-1} \qquad (3.9)$$

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \qquad (3.10)$$

полное термическое сопротивление с размерностью (м²·К)/Вт. Его величина определяется суммой уже известного нам сопротивления теплопроводности и двух сопротивлений теплоотдачи

температуры поверхностей стенок $\quad T_1 = T_{e1} - \dfrac{q}{\alpha_1}; \quad T_2 = T_{e2} - \dfrac{q}{\alpha_2} \qquad (3.11)$

Пример

Кирпичная стена толщиной 0,1 м с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0{,}7$ Вт/(м.К) обдувается холодным ветром с температурой 270 К при коэффициенте конвективной теплоотдачи 40 Вт/(м².К) . С другой стороны стены находится неподвижный воздух с температурой 330 К при коэффициенте конвективной теплоотдачи 10 Вт/(м².К). Требуется рассчитать плотность теплового потока.

Решение. По формулам (3.10) вычисляем три термических сопротивления.

$$R_1 = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{40} = 0{,}025 \qquad R_2 = \frac{L}{\lambda} = \frac{0{,}1}{0{,}7} = 0{,}143 \qquad R_3 = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{10} = 0{,}10 \quad \text{К/Вт}$$

плотность теплового потока

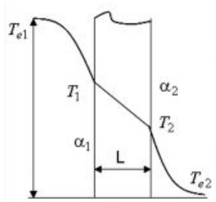
$$q = \frac{330 - 270}{0{,}025 + 0{,}143 + 0{,}10} = 224 \ \text{Вт/м}^2 \qquad q = K(T_{e1} - T_{e2})$$

Строгая математическая постановка задачи

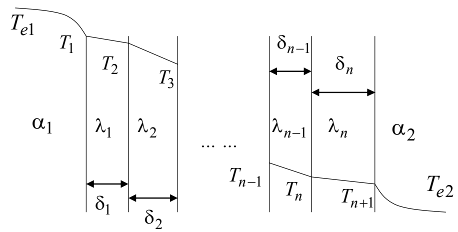
$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$x = 0: -\lambda\frac{dT}{dx} = \alpha_1(T_{1e} - T)$$

$$x = L: -\lambda\frac{dT}{dx} = \alpha_2(T_{2e} - T)$$



Многослойная стенка



$$Q = Fq = FK(T_1 - T_2) \qquad (3.14)$$

$$q = K(T_{e1} - T_{e2}) \qquad (3.15)$$

Полное термическое сопротивление

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \qquad (3.12)$$

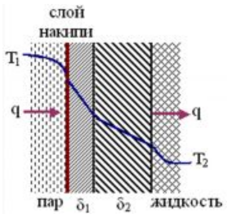
Коэффициент теплопередачи

$$K = \frac{1}{1/\alpha_1 + \sum_{i=1}^{n}\delta_i/\lambda_i + 1/\alpha_2} \qquad (3.13)$$

$$T_{i+1} = T_i - q\left[\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{i}\left(\frac{\delta_k}{\lambda_k}\right)\right] \qquad (3.16)$$

Пример

Теплообменник пар-жидкость с площадью лицевой поверхности 3200 см^2 изготовлен из слоя никеля толщиной 0,635 см и покрыт со стороны пара слоем меди толщиной 0,12 см. Сопротивление слоя накипи воды со стороны пара составляет 0,00205 (м^2 час град)/ккал, а коэффициенты теплоотдачи от пара к стенке и от стенки к жидкости соответственно равны 4700 и 528 ккал/(м^{2}час град).



Греющий пар имеет температуру 110°С, а подогретая жидкость температуру 74°С. Определить: общую теплоотдачу от пара к жидкости; падение температуры в слое накипи и температуру границы раздела «медь-никель», если их коэффициенты теплопроводности равны соответственно 334 и 50,6 ккал/(м час град).

коэффициент теплопередачи

$$K=\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+R+\frac{\delta_1}{\lambda_1}+\frac{\delta_2}{\lambda_2}+\frac{1}{\alpha_2}}=\frac{1}{\frac{1}{4700}+0{,}00205+\frac{0{,}0012}{334}+\frac{0{,}00635}{50{,}6}+\frac{1}{528}}=\frac{1}{0{,}0042819}=234 \text{ ккал/(м}^2\text{час град)}$$

тепловой поток через стенку заданной площади $Q=234\times 0{,}32\times(110-74)\approx 2700$ ккал/час

перепад температуры

$$\Delta T=2700\times\frac{0{,}00205}{0{,}32}=17{,}3^\circ C$$

F

температура на границе раздела «медь-никель»

$$T_{i+1}=T_i-q\left[\frac{1}{\alpha_1}+\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{\delta_k}{\lambda_k}\right)\right]$$

$$T_{Cu-Ni}=110-\frac{2700}{0{,}32}(0{,}000213+0{,}00205+0{,}0000036)=110-19{,}2=90{,}8^\circ C$$

В заключение раздела еще раз подчеркнем, что соотношения (3.1) – (3.4) не представляют собой закон передачи тепла, а дают лишь формулу для определения коэффициента теплоотдачи, если известны разность температур и поток тепла. Величина α зависит от свойств жидкости, геометрии и шероховатости поверхности обтекания, характера течения и т.п., т.е. от всех параметров, характеризующих гидродинамику течения и теплообмен. В экспериментальных методах исследования теплоотдачи и технических расчетах эти формулы являются ключевыми для оценки величины ,α ,а точнее, ее безразмерного аналога – числа Нуссельта

$$dQ_\tau=\alpha(T_e-T_s)dFd\tau$$

$$Q=\alpha(T_e-T_s)F$$

$$q=Q/F=\alpha(T_e-T_s)$$

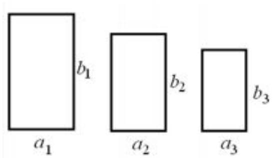
$$\frac{Q}{F}=q=-\lambda_f\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}=\alpha(T_s-T_{f,\infty})$$

$$Nu=\frac{\alpha L}{\lambda}$$

Экспериментальные исследования по определению числа Нуссельта и составили основу теории теплопереноса как инженерной и научной дисциплины

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Прямоугольники подобны, если отношения линейных размеров сходственных сторон равны между собой, т.е. если для них можно записать



$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=C$$

или

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2}{b_3}=C$$

Величина C есть константа геометрического подобия.

Понятие подобия может быть распространено на любые физические величины, а также на процессы и явления

Для сложных процессов, характеризующихся многими физическими величинами, каждая переменная величина имеет свою константу подобия. Если явления подобны, то константы подобия находятся между собой в определенном соотношении, и для данного физического процесса (или системы) их выбор обусловлен условием подобия физических явлений. Эти безразмерные соотношения представляют собой комплексы, составленные из физических величин, характеризующих это явление и процесс. Называются они критериями или числами подобия. Для всех подобных явлений критерии подобия имеют одинаковые числовые значения

Таким образом, критерием подобия называется безразмерный комплекс, составленный из величин, существенных для данного процесса.

Все критерии подобия имеют определенный физический смысл, а их нулевая размерность может служить проверкой правильности их составления. Обычно их называют именами ученых, внесших большой вклад в изучение процессов теплообмена, гидродинамики и других наук, и обозначают начальными латинскими буквами их фамилий.

Уравнение энергии в форме уравнения теплопроводности

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+w_x\frac{\partial T}{\partial x}+w_y\frac{\partial T}{\partial y}+w_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}=0 \qquad \left(\frac{d\rho}{dt}=0\right)$$

Уравнения движения с учетом силы тяжести

$$\frac{\partial w_x}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}=g\beta(T-T_0)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial t}+w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right)$$

+ УРС

Вдали от тела $T = T_0, w_x = w_0, w_y = w_z = 0$

На поверхности тела $T = T_s = const, w_x = w_y = w_z = 0 \quad (y = 0,\ \ 0 \le x \le l_0)$

Для стационарных процессов все производные от времени равны нулю

Уравнение теплоотдачи:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_s - T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_s$$

Все величины можно разделить на три типа:

Независимые переменные: x, y, z

Зависимые переменные T, w_x, w_y, w_z, p

«Постоянные» величины $w_0, T_0, T_s, \nu, \alpha, \beta, \rho$ и др.

Безразмерные переменные:

$$W_x = \frac{w_x}{w_0}, W_y = \frac{w_y}{w_0}, W_z = \frac{w_z}{w_0}, \quad X = \frac{x}{l_0}, Y = \frac{y}{l_0}, Z = \frac{z}{l_0}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_s - T_0}$$

Примеры преобразований:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_s - T_0}\left(\frac{\partial (T_s - T_0)\theta}{\partial (l_0 Y)}\right)_{Y=0} = -\frac{\lambda}{l_0}\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_{Y=0} \quad \text{или} \quad \frac{\alpha l_0}{\lambda} = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_{Y=0}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2[\theta(T_s - T_0)]}{\partial (Y l_0)^2} = \frac{(T_s - T_0)}{l_0^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}$$

$$\frac{c_p \rho}{\lambda} w_0 l_0 \left(W_x \frac{\partial \theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y} + W_z \frac{\partial \theta}{\partial Z}\right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}$$

Аналогично поступим с уравнениями движения:

$$\frac{w_0 l_0}{\nu}\left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} + W_z \frac{\partial W_x}{\partial z}\right) = \frac{g\beta(T_s - T_0) l_0^2}{\nu w_0}\theta - \frac{l_0}{\rho \nu w_0}\frac{\partial p}{\partial X} + \left(\frac{\partial^2 W_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial Z^2}\right)$$

Тождественные преобразования

$$\frac{g\beta(T_s - T_0) l_0^2}{\nu w_0}\theta = \frac{g\beta(T_s - T_0) l_0^3}{\nu^2}\frac{\nu}{w_0 l_0}\theta$$

$$\frac{l_0}{\rho \nu w_0}\frac{\partial p}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{p}{\rho w_0^2}\frac{w_0 l_0}{\nu}\right)$$

Аналогично поступаем с остальными уравнениями. Уравнения и граничные условия будут содержать комплексы:

$$\mathbf{Re} = \frac{w_0 l_0}{\nu}, \quad \mathbf{Pe} = \frac{w_0 l_0}{a}, \quad \mathbf{Eu} = \frac{p}{\rho w_0^2}, \quad \mathbf{Gr} = \frac{g\beta(T_s - T_0) l_0^3}{\nu^2}, \quad \mathbf{Nu} = \frac{\alpha l_0}{\lambda}$$

«Постоянные» величины: $\mathbf{Pe}, \mathbf{Re}, \mathbf{Gr}$

Зависимые переменные: $\mathbf{Nu}, \theta, W_x, W_y, W_z, \mathbf{Eu}$

Критериальные уравнения

$$\theta = \theta(X, Y, Z; \mathbf{Pe}, \mathbf{Re}, \mathbf{Gr})$$

$$\mathbf{Nu} = \mathbf{Nu}(X, Y, Z; \mathbf{Pe}, \mathbf{Re}, \mathbf{Gr})$$

. . . .

Система безразмерных уравнений, как и исходная система, описывает **класс явлений**, т.е. совокупность физических процессов, характеризующихся одинаковым механизмом. Явления, принадлежащие к одному классу, описываются одними и теми же уравнениями. Это – качественно одинаковые явления. Внутри класса можно выделить **группы явлений**: совокупность физических процессов, которые описываются одинаковыми по форме и содержанию **одинаковыми условиями однозначности**. Различие отдельных явлений в группе будет состоять только в том, что величины, входящие в размерные условия однозначности, могут иметь различные численные значения.

Физические явления подобны, если выполняются определенные правила:

1.Подобные процессы должны быть качественно одинаковыми
2.Условия однозначности подобных процессов одинаковы во всем, кроме численных значений постоянных физических величин
3.Одноименные определяющие критерии подобных процессов должны иметь одинаковую численную величину

Эти правила формулируются в виде трех теорем теория подобия

1. Теорема подобия. *Подобные между собой явления имеют одинаковые критерии подобия.*

Эта теорема позволяет вывести уравнения для критериев подобия и указывает, что в опытах нужно измерять лишь те величины, которые содержатся в критериях подобия изучаемого процесса.

2. Теорема подобия. *Исходные математические уравнения, характеризующие данное физическое явление, всегда могут быть представлены в виде зависимости между критериями подобия, характеризующими это явление.*

Эти функциональные зависимости между критериями подобия называются уравнениями подобия или критериальными уравнениями. Из теоремы следует, что результаты опытов необходимо обрабатывать и представлять в виде критериальных уравнений.

3. Теорема подобия. *Подобны те явления, условия однозначности которых подобны и для которых критерии подобия, составленные из условия однозначности, численно равны.*

Третья теорема устанавливает признаки, по которым определяют, какие явления подобны друг другу, т.е. она позволяет выявить те явления, на которые могут быть распространены результаты эксперимента, полученные на модельной системе.

Все основные критерии подобия тепловых, механических и гидромеханических явлений получаются из математических уравнений, описывающих соответствующий процесс.

Соотношение сил инерции F_i и массовых сил F_m (сил тяжести) в потоке жидкости характеризуется безразмерным комплексом, который называется ***критерием Фруда***

$$F_i = ma = \frac{\rho l^3 w}{\tau}$$

$$F_m = mg = \rho l^3 g$$

$$\frac{F_m}{F_i} = \frac{\rho l^3 g}{(\rho l^3 w)/\tau} = \frac{gl}{w(l/\tau)} = \frac{gl}{w^2} \qquad \boxed{Fr = \frac{g l_0}{w^2}} \qquad (3.17)$$

g ускорение свободного падения

ρ плотность жидкости

l_0 характерный линейный размер

w скорость

τ время (или масштаб времени)

Критерий Фруда характеризует соотношение массовых сил (сил тяжести) и сил инерции при вынужденном движении жидкости.

Связь между силами инерции и силами давления при вынужденном движении жидкости характеризует ***критерий (или число) Эйлера***

$$F_i = ma = \frac{\rho l^3 w}{\tau}$$

$$F_p = \Delta p l^2$$

$$\frac{F_p}{F_i} = \frac{\Delta p l^2}{(\rho l^3 w)/\tau} = \frac{\Delta p}{(\rho l w)/\tau} = \frac{\Delta p}{\rho w^2} \qquad \boxed{Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}} \qquad (3.18)$$

Δp - перепад давления

Число Эйлера является мерой отношения перепада статических давлений в потоке (гидравлического сопротивления) к кинетической энергии потока

Уильям Фруд (William Froude) (28 ноября 1810 — 4 мая, 1879) — английский инженер, основоположник корабельной гидродинамики. Получил образование в Оксфорде. Разработал теорию, позволяющую рассчитать сопротивление воды движению судна по результатам испытаний модели. Ввел число Фруда в 1870 году

Леона́рд Э́йлер (нем. *Leonhard Euler*; 4 (15) апреля 1707), Базель, Швейцария — 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург, Российская империя) — российский и швейцарский математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Эйлер — автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др. Многие его работы оказали значительное влияние на развитие науки. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки.

Очень важным для решения задач гидродинамики и вынужденной конвекции является безразмерный комплекс, показывающий связь между силами инерции и силами вязкости. Комплекс назван ***критерием Рейнольдса***

$$F_i = ma = \frac{\rho l^3 w}{\tau}$$

$$F_\mu = \frac{\mu l^2 \Delta w}{\Delta l}$$

$$\frac{F_i}{F_\mu} = \frac{\rho l^3}{\mu l^2}\frac{\Delta w/\Delta\tau}{\Delta w/\Delta l} = \frac{\rho l\,\Delta l/\Delta\tau}{\mu} = \frac{\rho w l}{\mu} \qquad \boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho w l_0}{\mu} = \frac{w l_0}{\nu}} \qquad (3.19)$$

ν кинематическая вязкость

Число Рейнольдса характеризует соотношение между силами инерции и молекулярного трения (вязкости), которое определяет гидродинамический режим вынужденного движения среды

При свободном движении среды (естественная конвекция), когда движение осуществляется только за счет разности плотностей, вызванной неравномерностью температурного поля, критерием подобия, определяющим распространение теплоты в среде, является ***критерий Грасгофа.*** Он находится как произведения числа Рейнольдса на отношение подъемной силы к силе вязкости

$$F_\rho = \rho g \beta \Delta T l^3$$

$$F_\mu = \frac{\mu l^2 \Delta w}{\Delta l}$$

$$Re\frac{F_\rho}{F_\mu} = \frac{\rho w l}{\mu}\frac{\rho g \beta \Delta T l^3}{\mu l^2 w/l} = \frac{g l^3}{(\mu/\rho)^2}\beta\Delta T \qquad \boxed{Gr = \frac{g l_0^3 \beta \Delta T}{\nu^2}} \qquad (3.20)$$

β -температурный коэффициент объемного расширения,

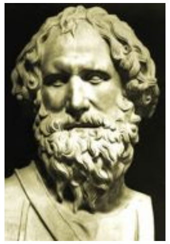
Число Грасгофа характеризует соотношение между подъемной силой, возникающей в среде вследствие разности плотностей, и силой молекулярного трения (вязкости).

Это были критерии гидродинамического подобия

РЕЙНОЛЬДС, ОСБОРН (Reynolds, Osborne) (1842–1912), английский инженер и физик. Родился в Белфасте 23 августа 1842 в семье священнослужителя. С 18 лет работал в механической мастерской, поступил в Кембриджский университет, где изучал математику и механику. Окончил университет в 1867. С 1868 по 1905 – профессор кафедры строительной механики Манчестерского университета. С 1888 возглавлял Витвортовскую инженерную лабораторию. Работы Рейнольдса посвящены механике, гидродинамике, теплоте, электричеству, магнетизму. В 1883 Рейнольдс установил, что ламинарное течение переходит в турбулентное, когда введенная им безразмерная величина (число Рейнольдса) превышает критическое значение.

Грасгоф Франц (Grashof) — немецкий инженер. Род. в 1826 г.; состоит с 1863 г. профессором прикладной математики и машиностроительного искусства в Карлсруэ. Г. особенно известен своими работами по теории машиностроения, написал: "Festigkeitslehre mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des Maschinenbaues" (1866 г., 2-е изд. в 1878 г. под заглавием: "Theorie der Elastizität u. Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik"), "Theoretische Maschinenlehre" (1875-88). Он обработал также 5 и 6 вып. "Resultate für Maschinenbau" Редтенбахера.





Архиме́д (Ἀρχιμήδης; 287 до н. э. — 212 до н. э.) — древнегреческий математик, физик, механик и инженер из Сиракуз. Сделал множество открытий в геометрии. Заложил основы механики, гидростатики, автор ряда важных изобретений.

Важнейшие критерии теплового подобия могут быть получены из основных уравнений передачи теплоты

Количество теплоты, переданной теплопроводностью $Q_\lambda = [(T_1 - T_2)/(\delta/\lambda)]F\tau = \lambda(\Delta T/l)l^2\tau$ (3.21)

Количество теплоты, переданной в процессе теплоотдачи $Q_\alpha = \alpha(T_1 - T_2)dFd\tau = \alpha\Delta T l^2\tau$ (3.22)

Теплота, воспринятая телом массой M $Q = Mc(T_2 - T_1) = c\rho l^3 \Delta T$ (3.23)

$$\frac{Q_\lambda}{Q} = \frac{\lambda}{c\rho}\frac{\Delta T l^2 \tau(1/l)}{l^3 \Delta T} = \frac{a\tau}{l^2} \qquad \boxed{Fo = a\tau/l_0{}^2} \qquad (3.24)$$

$a = \lambda/(c\rho)$ коэффициент температуропроводности

Число Фурье Fo представляет собой безразмерное время и характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими характеристиками и размерами тела.

Критерий Фурье вместе с ***критерием Био*** характеризуют нестационарные процессы распространения теплоты.

$$\boxed{Bi = \alpha l_0/\lambda_f} \qquad (3.25)$$

λ_f теплопроводность стенки

Физический смысл числа Био заключается в установлении соотношения между интенсивностями теплоотдачи с поверхности тела и подвода теплоты теплопроводностью из внутренних слоев тела к поверхности.

Отношение (3.23) к (3.21) дает ***критерий Пекле***

$$\frac{Q}{Q_\lambda} = \frac{c\rho}{\lambda}\frac{l^3\Delta T}{l^2\Delta T(\tau/l)} = \frac{c\rho w\Delta T}{\lambda(\Delta T/l)} = \frac{wl}{a} \qquad \boxed{Pe = \frac{w l_0}{a}} \qquad (3.26)$$

Критерий Пекле есть отношение плотности теплового потока, передаваемого конвекцией, к плотности теплового потока, передаваемого теплопроводностью, т.е. число Пекле характеризует соотношение между переносом теплоты конвекцией и теплопроводностью в потоке

Важный в теории конвективного теплообмена ***критерий Нуссельта*** может быть найден из соотношения выражений (3.21) и (3.22):

$$\frac{Q_\alpha}{Q_\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}\frac{l^2\Delta T\tau}{l^2\Delta T\tau(1/l)} = \frac{\alpha l}{\lambda} \qquad \boxed{Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda}} \qquad (3.27)$$

Число Нуссельта является безразмерным коэффициентом теплоотдачи и характеризует интенсивность теплообмена на границе «твердое тело – жидкость». Число Нуссельта является определяемым, так как в него входит коэффициент теплоотдачи, который при исследовании конвективного теплообмена является обычно искомой величиной

По внешнему виду критерий ***Нуссельта*** совпадает с критерием ***Био,*** но между ними существует принципиальное различие. В критерий Био входит теплопроводность стенки, а в критерий Нуссельта – теплопроводность среды, омывающей стенку. Критерий Био используют для описания внутреннего теплообмена, а критерий Нуссельта – для описания внешнего теплообмена.

Пекле, Жан Клод Эжен

Нуссельт, Вильгельм

Жан-Батист Био́ (фр. *Jean-Baptiste Biot*; 21 апреля 1774, Париж — 3 февраля 1862, *там же*) — знаменитый французский учёный, физик, геодезист и астроном, член Парижской Академии наук (1803).

Людвиг Прандтль (нем. *Ludwig Prandtl*, 4 февраля 1875, Фрейзинг — 15 августа 1953, Гёттинген) — немецкий физик. Он внёс существенный вклад в основы гидродинамики и разработал теорию пограничного слоя. В честь его было названо число Прандтля; а также ставшее классическим приёмником воздушного давления для многих самолётов и вертолётов гидроаэрометрическое устройство «трубка Прандтля», предназначенное для совместного съёма абсолютного и динамического давления. Был профессором в Ганновере и с 1 сентября 1904 в Гёттингене.

Из критериев Пекле и Рейнольдса можно образовать еще один критерий – ***критерий Прандтля:***

$$\boxed{\frac{Pe}{\mathbf{Re}}=\frac{wl}{a}\left(\frac{wl}{\nu}\right)^{-1}=\frac{\nu}{a}=\mathbf{Pr}} \qquad (3.28)$$

Критерий Прандтля, содержащий только физические параметры жидкости, характеризует влияние теплофизических свойств среды на конвективный теплообмен и является мерой подобия полей температур и скоростей. Кинематическая вязкость существенно влияет на характер поля скоростей, а температуропроводность - на процесс теплообмена.

При тепловом подобии систем их критерии подобия Fo, Pe (или Re), Nu должны иметь одинаковые числовые значения.

Для подобных систем и процессов, кроме теплового подобия, должно соблюдаться также гидродинамическое и геометрическое подобие.

При изучении конвективного теплообмена наибольший практический интерес представляет определение коэффициента теплоотдачи α, который входит только в критерий Nu.

Теория подобия позволяет в общем виде установить критериальные зависимости, достаточно полно характеризующие процесс конвективного теплообмена. Обобщенное уравнение конвективного теплообмена имеет вид

$$Nu=f\left(Ho, Fo, Re, Pr, Gr, l/l_0\right) \qquad (3.29)$$

$Ho=w\tau/l_0$ ***критерий гидродинамической гомохронности***, характеризующий скорость изменения поля скоростей движущейся среды во времени.

Критерии подобия Fo и Ho являются основными критериями **нестационарных процессов.**

Так как эксперименты по определению коэффициентов теплоотдачи проводят при стационарном режиме, то уравнение конвективного теплообмена запишется в виде

$$Nu=f\left(Re, Pr, Gr, l/l_0\right) \qquad (3.30)$$

При необходимости учета влияния температуры на теплофизические свойства среды (в умеренном диапазоне их изменения), а также направления теплового потока, в уравнение подобия вводится отношение чисел Прандтля для жидкости, вычисленных при температуре потока и стенки

$$Nu=f\left(Re, Pr, Gr, \left(\frac{Pr_L}{Pr_S}\right), l/l_0\right)$$

или

$$Nu=C\,Re^m\,Pr^n\,Gr^p\left(\frac{Pr_L}{Pr_S}\right)^{0,25}\left(l/l_0\right)^q$$

Теория подобия устанавливает только общий вид критериального уравнения. Действительная зависимость критерия Nu от определяющих критериев находится экспериментально, и константы в последнем соотношении m, n, p, q, C являются экспериментально определяемыми.

Основная идея теории подобия заключается в том, что первое частное описание явления (искомую закономерность) получают экспериментально на основе модельной системы (или «модельного явления»), а результаты представляют в критериальном виде, что позволяет легко и быстро получать данные для других явлений, подобных модельному. Теория подобия дает методические указания по выбору величин, измеряемых в опыте, по обработке полученных результатов, по обобщению результатов эксперимента на другие явления, подобные исследованному, а также позволяет рассчитать и построить модель, подобную натуре. Это легко понять на конкретных примерах.

Примеры

Необходимо опытным путем определить распределение температуры в длинном стальном вале диаметром d=100 мм через t= 2,5 часа после загрузки его в печь. Для стали коэффициент теплопроводности и коэффициент температуропроводности соответственно равны λ=42 Вт/(м·К), a=1,18·10^{-5}м^2/с. Коэффициент теплоотдачи к валу в печи – α=116 Вт/ (м^2·К).

Эксперимент проводили в небольшой печи на геометрически подобной модели вала, выполненной из легированной стали.

Для модели имеем: λ_M=16 Вт/(м·К), a_M=0,53·10^{-5}м^2/с; α_M=150 Вт/ (м^2·К).

Требуется определить диаметр d_M модели вала и промежуток времени, через который после загрузки модели в печь необходимо измерить распределение температуры в модели, чтобы результаты можно было перенести на натурные испытания

Решение:
Подобие температурных полей вала и модели будет иметь место при равенстве критериев для образца и модели

$$Bi_M=Bi \quad \text{и} \quad Fo_M=Fo$$

Критерии Био и Фурье для вала равны:

$$Bi=\frac{\alpha r}{\lambda}=\frac{116\cdot 0,2}{42}=0,552$$

$$Fo=\frac{\alpha t_0}{r^2}=\frac{1,18\cdot 10^{-5}\cdot 9\cdot 10^3}{0,2^2}=2,66$$

Из условия $Bi_M = Bi$ находим диаметр модели вала

$$d_M = 2r_M = 2\frac{\lambda_M}{\alpha_M}Bi = 2\frac{16}{150}0{,}552 = 0{,}1175\ M$$

Из условия $Fo_M = Fo$ находим искомый промежуток времени

$$t_{0M} = \frac{r_M^2}{a_M}Fo = \frac{(0{,}05875)^2}{0{,}53\cdot 10^{-5}}2{,}66 = 1735\ c$$

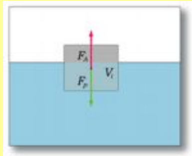
Задача дома: Определить диаметр модели вала d_M и необходимое значение коэффициента теплоотдачи α_M , при которых в условиях уже решенной задачи подобие температурных полей наступит через t_{0M}=15 мин после загрузки модели в печь.

Определить также соотношения между линейными размерами, временем и температурами для вала и модели, если известно, что их температуры при загрузке и температуры среды в печах были равны соответственно T_0=10°C, T_{0M}=20°C; T_L=1000°C; $T_{L,M}$=200°C

Зако́н Архиме́да: на тело, погружённое в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила (называемая **силой Архимеда**)

$$\mathbf{F}_A = -\rho \mathbf{g} V,$$

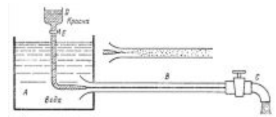
где ρ — плотность жидкости (газа), — ускорение свободного падения, а V — объём погружённого тела (или часть объёма тела, находящаяся ниже поверхности). Выталкивающая сила (называемая также архимедовой силой) равна по модулю (и противоположна по направлению) силе тяжести, действовавшей на вытесненный телом объём жидкости (газа), и приложена к центру тяжести этого объёма.



Тело, помещённое в воду, плавает, если сила Архимеда уравновешивает силу тяжести тела

Потери энергии (уменьшение гидравлического напора) можно наблюдать в движущейся жидкости не только на сравнительно длинных участках, но и на коротких. В одних случаях потери напора распределяются (иногда равномерно) по длине трубопровода - это линейные потери; в других - они сосредоточены на очень коротких участках, длиной которых можно пренебречь, - на так называемых местных гидравлических сопротивлениях: вентили, всевозможные закругления, сужения, расширения и т.д., короче всюду, где поток претерпевает деформацию. Источником потерь во всех случаях является вязкость жидкости.

При наблюдении за движением жидкости в трубах и каналах, можно заметить, что в одном случае жидкость сохраняет определенный строй своих частиц, а в других - перемещаются бессистемно. Однако исчерпывающие опыты по этому вопросу были проведены Рейнольдсом в 1883 г. На рисунке изображена установка, аналогичная той, на которой Рейнольдс производил свои опыты.



Вопросы:
1.Какие основные механизмы теплопереноса Вы знаете?
2.Что такое «изотерма» ?
3.В чем измеряется коэффициент теплопроводности?
4.Запишите уравнение теплопроводности для неподвижной среды
5.Сформулируйте основной закон теории теплопроводности
6.Нарисуйте стационарное распределение температуры в двухслойной пластине с различными коэффициентами теплопроводности слоев и заданными температурами на свободных поверхностях
7.Сформулируйте граничные условия четвертого рода
8.В чем заключается электрическая энергия для теплопроводности ?
9.Что называют контактным термическим сопротивлением?
10.Что задано на поверхностях в случае граничных условий первого и второго рода?