ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

3 Лекция

Основные уравнения электрического поля постоянного тока

Электрическое поле постоянного тока как частный случай электромагнитного поля будем рассматривать для тока проводимости в однородных и изотропных проводящих средах

В этих средах удельная проводимость γ (1/Ом·м) постоянна, например, при 20° С:

для меди $\gamma \cong 5{,}8 \cdot 10^7$ 1/Ом·м

для воды $\gamma \cong 0{,}1$ 1/Ом·м

для грунта $\gamma \cong 0{,}01$ 1/Ом·м

для полиэтилена $\gamma \cong 10^{-14}$ 1/Ом·м

Электрический ток проводимости – это упорядоченное движение свободных зарядов под действием электрического поля, характеризующегося напряженностью $\overline{E}$ (В/м)

Электрический ток проводимости – это скорость прохождения свободных зарядов сквозь заданную поверхность:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad A$$

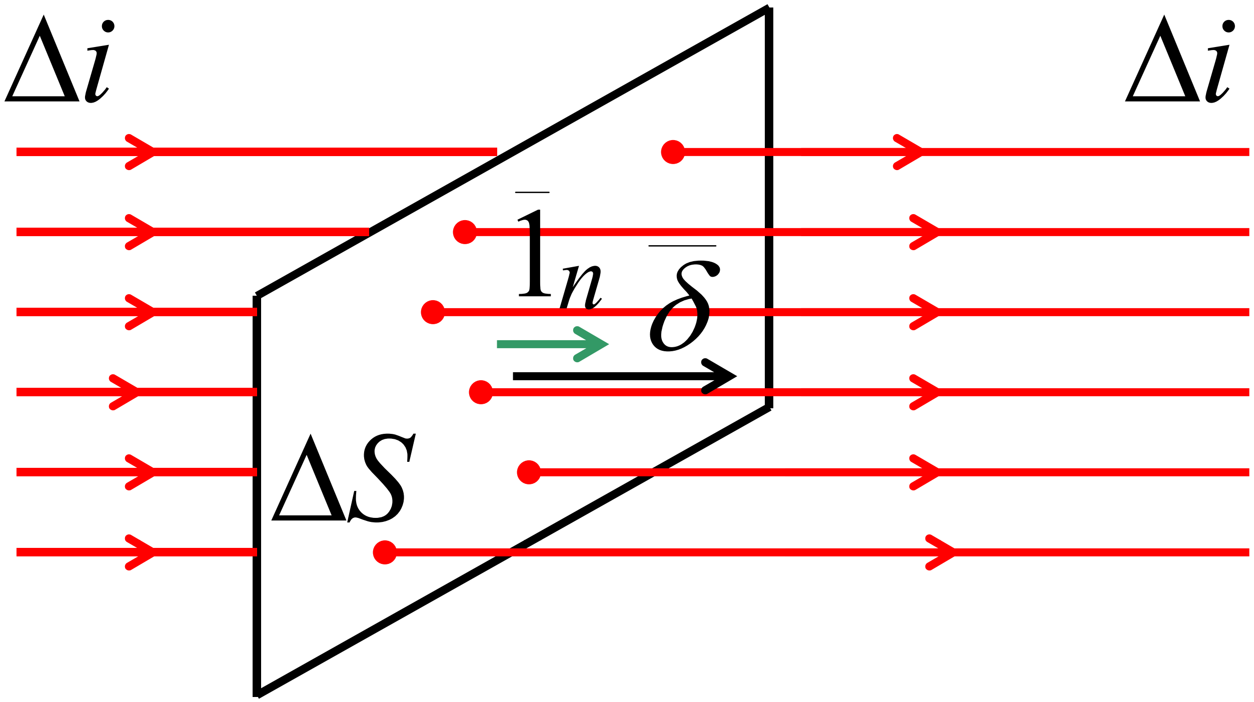
Ток – величина скалярная. Если значение тока не зависит от времени, то такой ток *i*=*I* называется постоянным. При этом заряд, проходящий через заданную поверхность равен:

$$q = q_0 + I \cdot t \ , \quad \text{Кл}$$

Плотностью тока называют векторную величину $\bar{\delta}$, численно равную

$$\delta = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta S} = \frac{di}{dS}, \quad {}^{A}\!/_{м^2}$$

Причем $\overline{\delta} = \delta \cdot \overline{1}_n$, где $\overline{1}_n$ - единичный вектор, перпендикулярный площадке ΔS и совпадающий с направлением движения зарядов, образующий ток Δi



Δi
Δi
$\bar{1}_n$
$\bar{\delta}$
ΔS

Таким образом ток i через некоторую поверхность S равен потоку вектора плотности тока через эту же поверхность

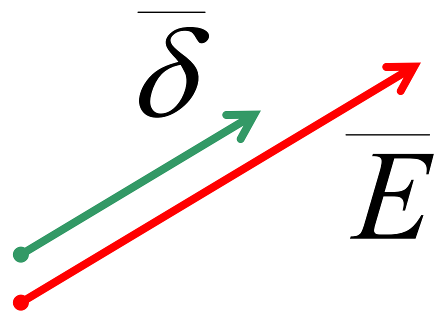
$$i = \int\limits_S \overline{\delta}\,\overline{dS}$$

Запишем законы для электрического тока проводимости:

1. Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\boxed{\overline{\delta} = \gamma\,\overline{E}}$$

Векторы $\overline{E}$ и $\overline{\delta}$ совпадают по направлению:



2. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$\boxed{dP = \gamma E^2}$$

где dP – мощность тепловых потерь в объеме dV

3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме для постоянного тока:

$$\boxed{div\,\overline{\delta} = 0}$$

т.е. постоянный ток непрерывен и линии вектора $\overline{\delta}$ замкнуты:

$$\oint_S \overline{\delta}\,\overline{dS} = 0$$

Ограничимся рассмотрением электрического поля постоянного тока в областях, где нет стороннего электрического поля (т.е. ЭДС)

Такое поле аналогично электростатическому полю при отсутствии объемных зарядов (ρ=0), так как

$$div\,\overline{D} = 0$$

Поэтому для определения потенциала φ при напряженности $\overline{E} = \overline{\delta}/\gamma$ можно использовать уравнения

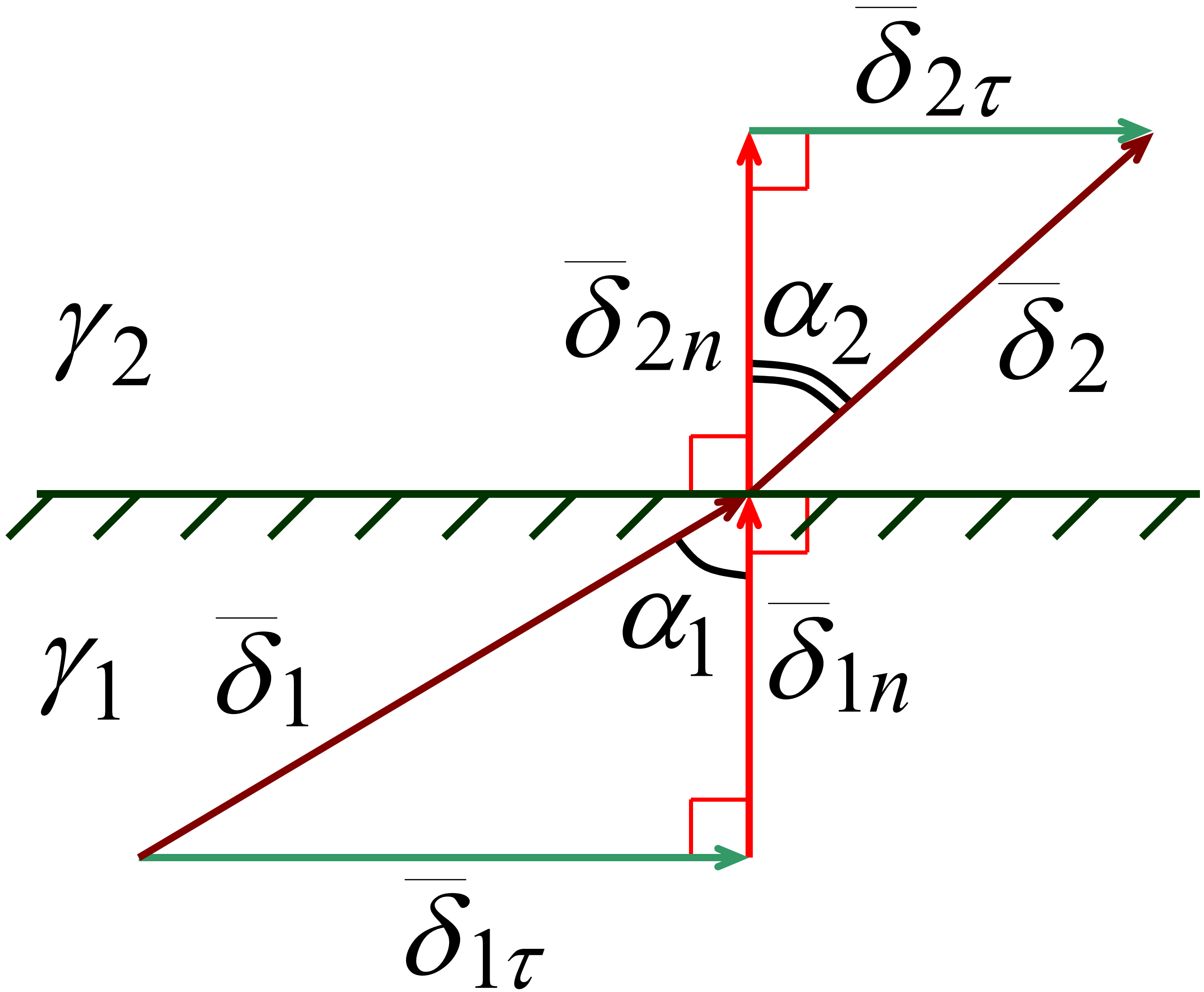
$$\overline{E} = -grad\,\varphi$$

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

При этом граничные условия для электрического поля постоянного тока при отсутствии сторонних сил (ЭДС) будут следующими

1. На границе двух разных проводников равны нормальные составляющие векторов плотности тока:

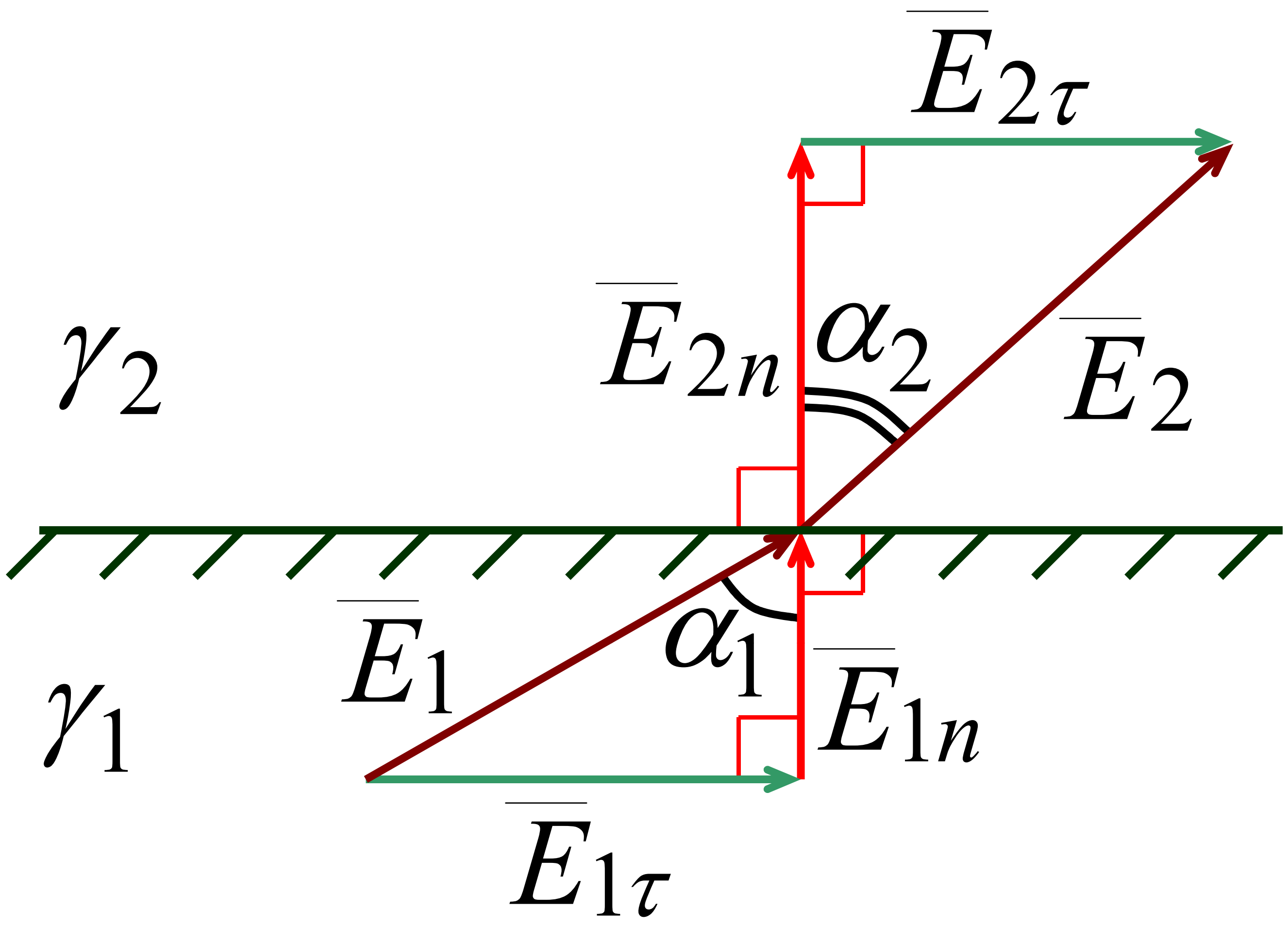
$$\boxed{\delta_{1n} = \delta_{2n}}$$



$\overline{\delta}_{2\tau}$
$\overline{\delta}_{2n}$
α_2
$\overline{\delta}_2$
γ_2
γ_1
$\overline{\delta}_1$
α_1
$\overline{\delta}_{1n}$
$\overline{\delta}_{1\tau}$

2. На границе двух разных проводников равны касательные составляющие векторов напряженности:

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$$


$\overline{E}_{2\tau}$
$\overline{E}_{2n}$
α_2
$\overline{E}_2$
γ_2
γ_1
$\overline{E}_1$
α_1
$\overline{E}_{1n}$
$\overline{E}_{1\tau}$

3. Для углов входа (α_1) и выхода (α_2) векторов плотности тока и напряженности на границе выполняется условие:

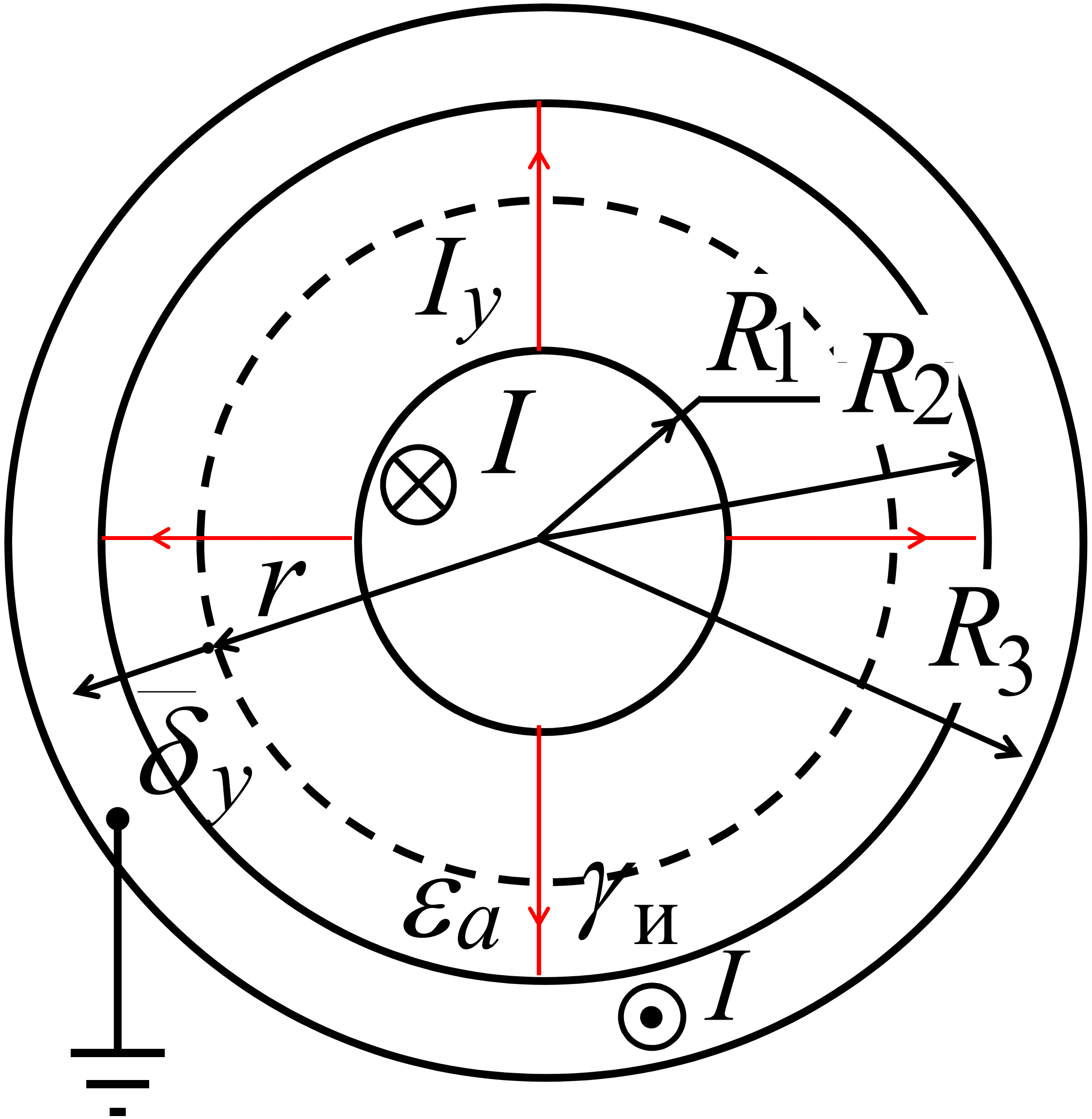
$$\boxed{\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$$

Задачами расчета электрического поля постоянного тока являются определение сопротивлений проводников, вычисление проводимости токов утечки через изоляцию и расчет сопротивления и шагового напряжения заземления

Вычисление проводимости токов утечки через изоляцию линий

Будем считать ток утечки $I_у$ через изоляцию линии постоянным во времени, а изоляцию неидеальной с удельной проводимостью $\gamma_и$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_а$

1. Линия в виде коаксиального кабеля, по которой проходит ток I при напряжении U



I_y
R_1
R_2
I
r
R_3
$\overline{\delta}_y$
ε_a
$\gamma_и$
I

Примем потенциал центральной жилы равным φ_1 , а внешней - $\varphi_2=0$, тогда

$$U=\varphi_1-\underset{0}{\varphi_2}=\varphi_1$$

Охватим центральную жилу цилиндрической поверхностью радиуса r и длиной l, тогда в силу симметрии можно определить ток утечки

Следующим образом:

$$I_y = \int_S \overline{\delta_y}\,\overline{dS} = \int_S \delta_y\,dS =$$

$$= \delta_y \int_S dS = \delta_y \cdot 2\pi r l$$

Тогда

$$\delta_{y}=\frac{I_{y}}{2\pi rl}$$

$$E=\frac{\delta_{y}}{\gamma_{\text{и}}}=\frac{I_{y}}{2\pi\gamma_{\text{и}}rl}$$

Используя уравнение

$$\overline{E} = E \cdot \overline{1}_r = -grad\varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \cdot \overline{1}_r$$

находим потенциал

$$\varphi = -\int E\,dr + A = -\frac{I_y}{2\pi\gamma_\text{и} l} \cdot \ln r + A$$

На основании граничного условия имеем при $r = R_2$

$$\varphi = \varphi_2 = 0 = -\frac{I_y}{2\pi\gamma_{\text{и}} l}\cdot \ln R_2 + A$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{I_y}{2\pi\gamma_{\text{и}} l}\cdot \ln R_2$$

В результате

$$\varphi = \frac{I_y}{2\pi\gamma_u l} \cdot \ln\frac{R_2}{r}$$

и при $r = R_1$ получаем

$$\varphi = \varphi_1 = U = \frac{I_y}{2\pi\gamma_{\text{и}} l} \cdot \ln\frac{R_2}{R_1}$$

Таким образом проводимость тока утечки на единицу длины такой линии составит

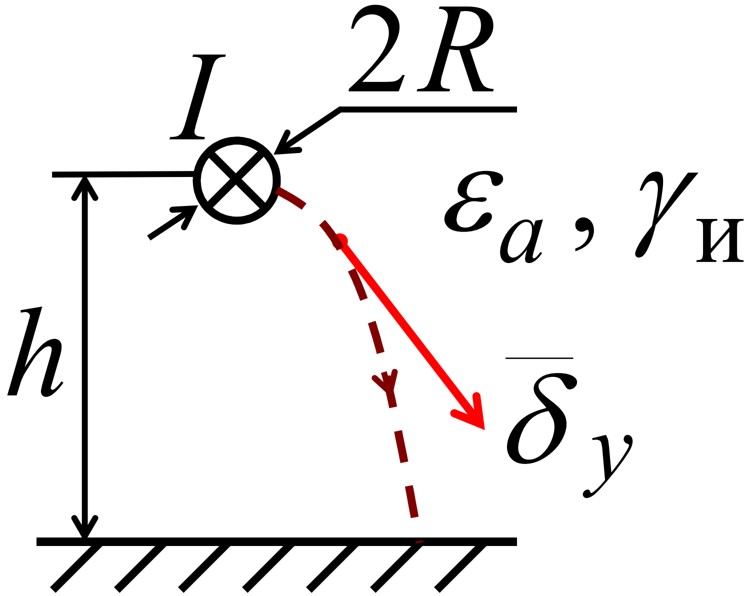
$$G_0 = \frac{I_У}{U\,l} = \frac{2\pi\gamma_и}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}\;, \qquad 1/Ом \cdot м$$

Если сравнить G_0 с

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\ln\left(R_2 / R_1 \right)}, \qquad Ф/м$$

то можно сделать вывод о том, что в известной формуле для C_0 замена $\varepsilon_{а}$ на $\gamma_{и}$ дает формулу для G_0

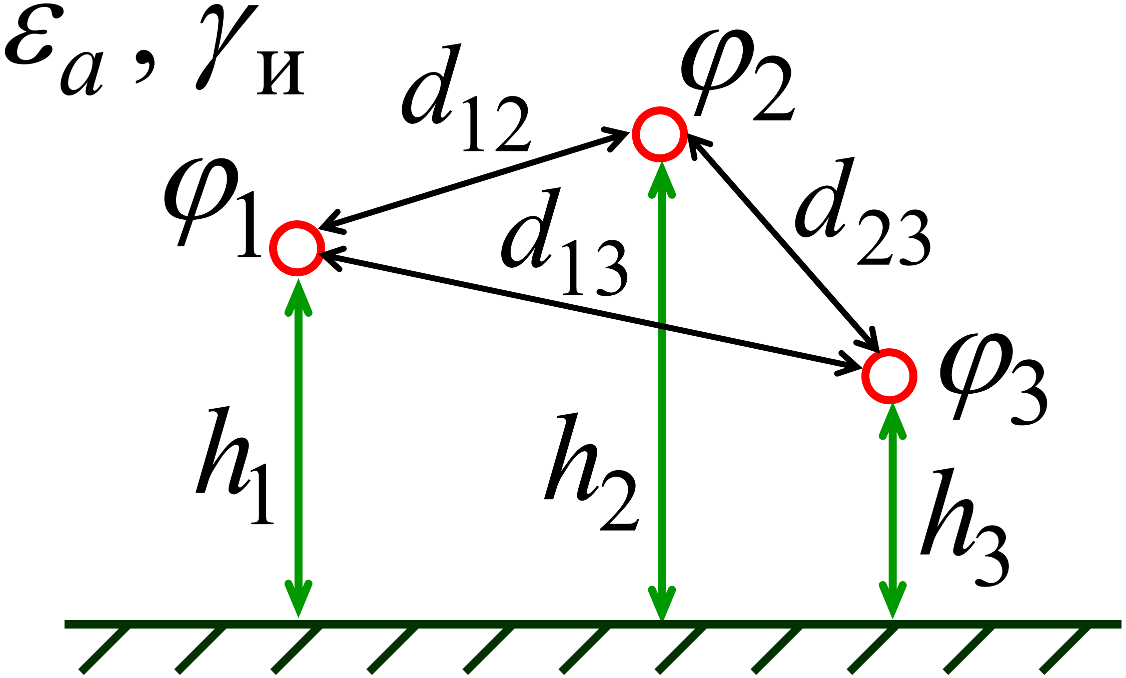
2. Линия в виде цилиндрического провода и проводящей поверхности:



при $R \ll h$ имеем

$$G_0 = \frac{2\pi\gamma_и}{\ln\frac{2h-R}{R}} \approx \frac{2\pi\gamma_и}{\ln\left(2h/R\right)}, \quad 1/Ом \cdot м$$

3. Трехпроводная линия около проводящей поверхности:



причем

$$R << d_{km}$$

$$R << h_k$$

Используя аналогию между электростатическим полем и электрическим полем постоянного тока, на основании третьей группы формул Максвелла можно получить уравнения для токов утечки $I_{y1,2,3}$ с проводов линии

Эти уравнения следующие:

$$I_{y1} = G_{11} \cdot \varphi_1 + G_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + G_{13}(\varphi_1 - \varphi_3)$$

$$I_{y2} = G_{21} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + G_{22} \cdot \varphi_2 + G_{23}(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$I_{y3} = G_{31} \cdot (\varphi_3 - \varphi_1) + G_{32} \cdot (\varphi_3 - \varphi_2) + G_{33}\varphi_3$$

Где:

$$G_{km} = \frac{\gamma_{и}}{\varepsilon_a} \cdot C_{km}$$ – собственные ($k = m$)

и взаимные ($k \neq m$) проводимости изоляции проводов линии $\left({}^{1}\!/\!{}_{Ом \cdot м} \right)$

C_{km} – частичные емкости $\left({}^{Ф}\!/\!{}_{м} \right)$

Проводящая поверхность (земля) усиливает токи утечки и потери энергии, обусловленные этими токами

Мощность активных потерь от токов утечки (Вт/м):

$$P_У = G_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + G_{13}(\varphi_1 - \varphi_3)^2 + G_{23}(\varphi_2 - \varphi_3)^2 +$$

$$+ G_{11}\varphi_1{}^2 + G_{22}\varphi_2{}^2 + G_{33}\varphi_3{}^2$$

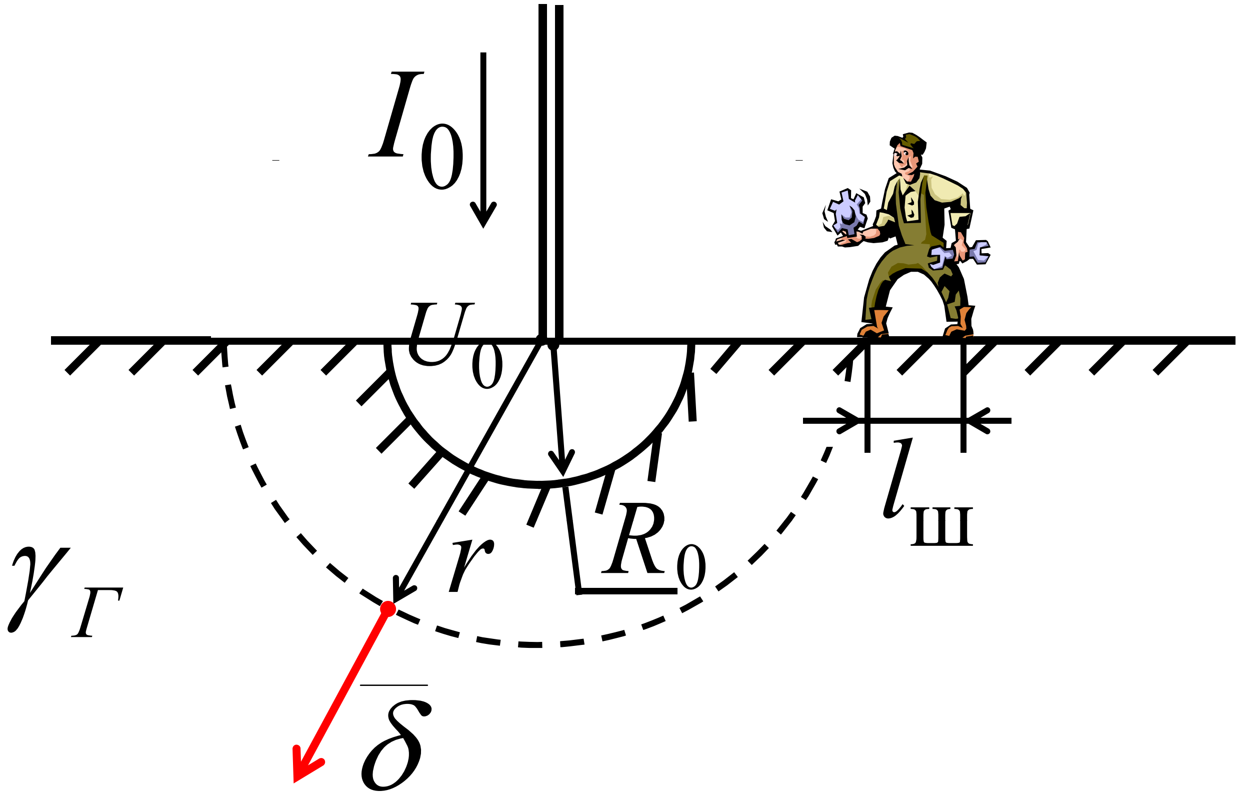
$$P_У = I_{У1}\varphi_1 + I_{У2}\varphi_2 + I_{У3}\varphi_3$$

причем $I_{УК} = (\gamma_И / \varepsilon_a)\tau_К$

$\tau_К$ - линейный заряд провода (Кл/м)

Расчет сопротивления и шагового напряжения заземления

Пусть полусферический заземлитель радиусом R_0, расположенный в грунте с удельной проводимостью γ_{Γ}, находится под известным напряжением U_0 и с него стекает ток I_0



I_0
U_0
r
R_0
$l_ш$
$\gamma_Г$
$\overline{\delta}$

Находим плотность тока в грунте

$$\delta = \frac{\boldsymbol{I}_0}{2\pi \boldsymbol{r}^2}$$ при $r \geq R_0$, тогда

напряженность электрического поля составит

$$E = \delta / \gamma_{\Gamma} = \frac{I_0}{2\pi \gamma_{\Gamma} r^2}$$

Используя уравнение

$$\overline{E} = E\overline{1}_r = -grad\varphi = -\frac{d\varphi}{dr}\cdot\overline{1}_r$$

определим потенциал

$$\varphi = -\int E\,dr + A = \frac{I_0}{2\pi\gamma_\Gamma r} + A$$

Причем при $r = \infty$ примем $\varphi = 0$, тогда $A = 0$

Однако при $r = R_0$ имеем

$$\varphi = U_0 = \frac{I_0}{2\pi\gamma_{\Gamma} R_0}$$

т.е.

$$I_0 = 2\pi\gamma_{\Gamma} R_0 U_0$$

В результате сопротивление полусферического заземления составит

$$R_з = {U_0}/{I_0} = \frac{1}{2\pi\gamma_{\Gamma} R_0}, \; Ом$$

При этом шаговое напряжение будет равно

$$U_{\text{ш}} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I_0}{2\pi\gamma_{\text{г}} r} - \frac{I_0}{2\pi\gamma_{\text{г}}(r + l_{\text{ш}})} =$$

$$= U_0 \frac{R_0}{r}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{l_{\text{ш}}}{r}}\right], \ B$$

где $l_{\text{ш}} \cong 0{,}7$ м – длина шага

Например, при $U_0 = 10^6 \ В$

$$\gamma_Г = 0{,}01 \ {}^1\!/_{Ом \cdot м}, \ R_0 = 1 \ м, \ r = 10 \ м$$

получаем

$$R_з \approx 16 \ Ом, \quad U_ш \cong 6542 \ В,$$

$$I_0 \cong {}^{U_0}\!/_{R_з} = 62500 \ А$$