МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Маятник Максвелла представляет собой массивный диск, ось которого подвешена на двух накрученных на нее нитях (рис. 1). При наматывании нитей на маятник, маятник поднимается вверх. Если маятник отпустить, то он будет совершать возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном вращении диска маятника вокруг горизонтальной оси.

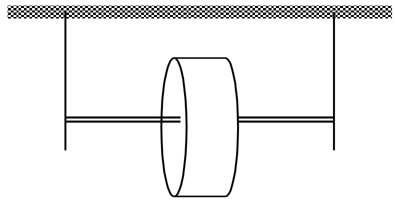

Рис. 1

Цель работы: на примере маятника Максвелла познакомиться с вычислением и экспериментальным измерением момента инерции цилиндрического твердого тела относительно оси симметрии.

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ СИММЕТРИИ

Моментом инерции материальной точки массой m относительно некоторой оси вращения называют величину $J = mr^2$, где r – расстояние от материальной точки до оси вращения. Для твердого тела момент инерции относительно некоторой оси можно вычислить как сумму моментов инерции всех материальных точек, составляющих материальное тело, т.е.

$$\boldsymbol{J = \sum_i m_i r_i^2}. \qquad (1)$$

где m_i – массы материальных точек, составляющих тело, r_i – расстояние их от оси вращения.

Если вещество в твердом теле распределено непрерывно, то вычисление момента инерции сводится к вычислению интеграла

$$\boldsymbol{J = \int r^2 dm}, \qquad (2)$$

где r – расстояние от элементарной массы до оси вращения. Интегрирование должно производиться по всей массе тела.

Рассчитаем момент инерции маятника Максвелла. Маятник Максвелла можно представить как совокупность полных цилиндров (диска, надетого на вал и кольца) и сплошного цилиндра (вал маятника).

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ЦИЛИНДРА

Разобьем цилиндр радиуса R на концентрические слои толщиной dr. Пусть радиус какого-то слоя – r, тогда масса частиц, заключенных в этом слое

$$\boldsymbol{dm = pdV = \rho 2\pi r dr h}, \qquad (3)$$

где dV – объем слоя, h – высота цилиндра, ρ – плотность вещества цилиндра. Все частицы слоя находятся на расстоянии r от оси, следовательно момент инерции этого слоя

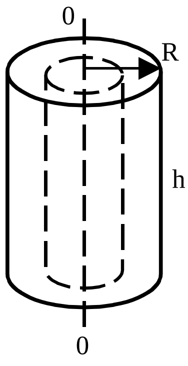

Рис. 2

$$dJ = dmr^2 = \rho 2\pi hr^3 dr. \tag{4}$$

Момент инерции цилиндра найдем, проведя интегрирование по всем слоям:

$$J = \int dJ = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4}. \tag{5}$$

Так как масса цилиндра $m = \pi R^2 h\rho$, то момент инерции сплошного цилиндра будет равен

$$J = \frac{1}{2} mR^2 . \tag{6}$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ПОЛНОГО ЦИЛИНДРА (кольца)

Момент инерции полного цилиндра, имеющего внутренний радиус R_1, а внешний R_2 можно вычислить также по формуле (5), изменив в интеграле пределы интегрирования

$$J = \int dJ = \rho 2\pi h \int_{R1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi\rho h \left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4} \right) \tag{7}$$

Зная, что масса полного цилиндра $m = \pi h\rho\,(R_2^2 - R_1^2)$, запишем момент инерции полного цилиндра следующим образом

$$J = \frac{1}{2} m\left(R_2^2 + R_1^2\right). \tag{8}$$

Следует отметить, что аналитическое вычисление интегралов (5) возможно только в простейших случаях тел правильной геометрической формы. Для тел неправильной геометрической формы такие интегралы находят численно, либо используют экспериментальные методы определения момента инерции тела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО

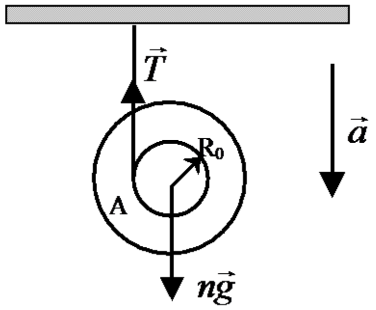

Рис. 3

Рассмотрим один из методов определения момента инерции на примере маятника Максвелла. Запишем уравнение движения маятника. На рис.2 указаны силы, действующие на маятник. Для описания движения маятника удобно выбрать систему отсчета, связанную с центром масс A маятника. Центр масс маятника опускается вниз с линейным ускорением $\vec{a}$. Уравнение движения центра масс маятника

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}, \qquad (9)$$

где $\vec{T}$ – результирующая сила натяжения обеих нитей, m – масса маятника.

Кроме того, маятник совершает вращательное движение вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс под действием момента силы натяжения нитей. $M = R_0T$, где M – момент силы $\vec{T}$, R_0 – плечо этой силы (радиус вала).

Основное уравнение вращательного движения

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \qquad (10)$$

где ε – угловое ускорение вращения маятника, J – момент инерции маятника.

Для решения уравнений (9) и (10) перейдем от векторной формы записи к скалярной. Спроектируем силы на направление движения маятника. Тогда

$$ma = mg - T \qquad (11)$$

и

$$M = J\varepsilon. \qquad (12)$$

Так как центр масс маятника опускается на столько, на сколько раскручивается нить, то перемещение x центра масс связано с углом поворота φ соотношением:

$$x = \varphi R_0. \qquad (13)$$

Дифференцируем это выражение дважды по времени, получим

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = R_0\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R_0\varepsilon, \qquad (14)$$

с учетом (14) уравнение (12) преобразуется

$$R_0T = J\frac{a}{R_0} \qquad (15)$$

или

$$T = J\frac{a}{R_0^{\ 2}}.$$

Решая совместно (11) и (15), получим

$$a = \frac{mg}{m + J/R_0^2}, \qquad (16)$$

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR_0^2}{J}}. \qquad (17)$$

Из уравнений (16) и (17) следует, что ускорение маятника и сила натяжения нити постоянны. Следовательно, если при опускании маятника координату его центра масс отсчитывать от точки его закрепления, то со временем координата меняется по закону:

$$x = \frac{at^2}{2}. \qquad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим для момента инерции маятника Максвелла следующее выражение

$$J = mR_0^2\left(\frac{gt^2}{2x} - 1\right) \qquad (19)$$

или

$$J = \frac{mD_0^2}{4}\left(\frac{gt^2}{2x} - 1\right), \qquad (20)$$

в которое входят величины, которые легко измерить. R_0 (D_0) – внешний радиус (диаметр) вала вместе с намотанной на него нитью, t – время опускания маятника, x – расстояние пройденное центром масс маятника, m – масса маятника.

Масса маятника складывается из массы вала маятника m_0, массы диска маятника $m_Д$, масса кольца m_K, которое может быть надето на диск маятника.

КОНСТРУКЦИЯ ПРИБОРА

Общий вид маятника Максвелла показан на рис.3. Основание 1 оснащено регулировочными ножами 2, которые позволяют произвести выравнивание прибора. В основании закреплена колонка 3, к которой прикреплен неподвижный верхний кронштейн 4 и подвижный нижний кронштейн 5. На верхнем кронштейне находится электромагнит 6, фотоэлектрический датчик 7 и вороток 8 для закрепления и регулирования длины нити 15 подвески маятника. Нижний кронштейн вместе с прикрепленным к нему фотоэлектрическим датчиком 8 можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в нужном положении.

Маятник 10 – это диск, закрепленный на цилиндрическом валу 12, на который надеваются цилиндрические кольца 11, изменяя, таким образом момент инерции системы.

Маятник с надетым кольцом удерживается в верхнем положении электромагнитом. Колонка прибора снабжена миллиметровой шкалой для определения хода x маятника. Фотоэлектрические датчики соединены с миллисекундамером 14.

Вид передней панели миллисекундомера представлен на рисунке 4. На лицевой панели секундомера находятся следующие ручки управления: «сеть» –включатель сети. Нажатие этой клавиши включает напряжение питания. При этом включаются лампочки фотоэлектрических датчиков. «Сброс» – установка нуля миллисекундамера. Нажатие этой клавиши вызывает сброс электронных схем миллисекундамера, на цифровых

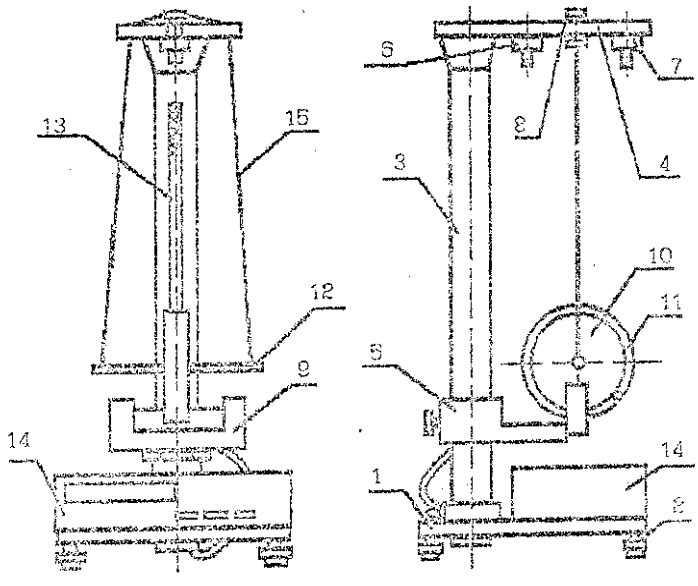

Рис. 4.

индикаторах высвечиваются нули. «Пуск» – управление электромагнитом. При нажатии этой клавиши выключается электромагнит, в схеме миллисекундамера генерируется импульс разрешения на измерение времени.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Нижний кронштейн прибора должен быть зафиксирован в крайнем нижнем положении.

1. На диск маятника надеть одно из колец, прижимая его до упора.
2. Подобрать длины нити подвеса маятника таким образом, чтобы край стального кольца после опускания маятника в нижнее положение находился на два миллиметра ниже фотоэлектрического датчика. Одновременно произвести корректировку установки маятника, обращая внимание на то, чтобы вал его был параллелен основанию прибора. Регулировку длины нити произвести используя вороток 8 (рис.3).
3. Нажать клавишу «сеть».
4. Намотать на ось маятника нить подвески, обращая внимание на то, чтобы она намоталась равномерно, виток к витку.
5. Зафиксировать маятник при помощи электромагнита, повернуть маятник на угол около 5^o.
6. Нажать клавишу «сброс».
7. Нажать клавишу «пуск».
8. Записать в таблицу измеренное значение времени падения маятника t.
9. Повторить изменения десять раз для определения среднего времени падения маятника $t_{ср}$.
10. По шкале колонке прибора определить расстояние x, пройденное маятником (длину нити).
11. Измерить диаметр нити и вала маятника в различных сечениях, найти среднее значение. Определить диаметр вала маятника вместе с намотанной на него нитью $D_0 = D + 2D_H$.
12. Определить массу маятника вместе с надетым на него кольцом. (Массы отдельных частей маятника указаны на них).
13. Дальнейшее выполнение работы продолжается по одному из вариантов (по усмотрению преподавателя).

Вариант 1. Определение момента инерции маятника Максвелла

1. Вычислить момент инерции маятника Максвелла теоретически, используя формулы (6) и (8). Момент инерции маятника складывается из момента инерции вала $J_{вал}$, момента инерции диска маятника, надетого на вал, $J_{диск}$ и момента инерции кольца, надетого на диск $J_{кольца}$. По формулам (6) и (8)

$$J_{вала} = \frac{1}{2} m_B R_0^2 ,$$

где $m_в$ – масса вала, R_0 – радиус его.

$$J_{диска} = \frac{1}{2} m_Д \left(R_1^2 + R_0^2\right),$$

где $m_Д$ –масса диска (указана на диске), R_0 – внутренний радиус диска, R_1 – внешний радиус диска.

$$J_{кольца} = \frac{1}{2} m_К \left(R_1^2 + R_2^2\right),$$

где $m_К$ – масса кольца (указана на кольце), R_1 и R_2 –внутренний и внешний радиусы кольца.

2. Определить момент инерции маятника экспериментально (по формуле (19)).

3. Сравнить полученные результаты.

Вариант 2. Определение момента инерции кольца

1. По формуле (8) вычислить момент инерции кольца, надетого на диск

$$J_{кольца} = \frac{1}{2} m_k \left(R_1^2 + R_2^2\right),$$

где m_k – масса кольца (указана на кольце), R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы кольца.

2. Определить экспериментально момент инерции маятника Максвелла без кольца J_1 (согласно пунктам 4-10).

3. Определить момент инерции J_2 маятника Максвелла с надетым на диск кольцом (согласно пунктам 4-12).

4. Определить момент инерции кольца.

5. Сравнить теорию и эксперимент.

14. Определить погрешность измерений момента инерции маятника Максвелла следующим образом:

$$\frac{\Delta J}{J} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta D}{D + 2D_H}\right)^2 + \left(\frac{4\Delta D_H}{D + 2D_H}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t \cdot t}{gt^2 - 2x}\right)^2 + \left(\frac{2}{gt^2 - 2x} + \frac{1}{x}\right)^2 \Delta x^2}$$

где ΔD, ΔD_H, Δt, Δx – доверительные интервалы для прямых измерений величин D, D_H, t, x, учитывающие как случайные, так и систематические погрешности.

Таблица

№ П/П	m_B *(кг)*	$m_Д$ *(кг)*	$m_К$ *(кг)*	R_0 *(м)*	R_1 *(м)*	R_2 *(м)*	x *(м)*	t *(с)*	$t_{ср}$ *(с)*

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте теорему о движении центра масс системы материальных точек.
2. Дайте определение момента инерции одной материальной точки, системы материальных точек.
3. Запишите уравнение движения маятника Максвелла.
4. Как изменяются ускорение, скорость и сила натяжения нитей при движении маятника.
5. Как меняется механическая энергия маятника Максвелла при его движении.

Литература

1. С.Э.Хайкин Физические основы механики. М., Наука, 1971.
2. С.П.Савельев. Механика. Наука, 1975.
3. И.В.Савельев. Курс общей физики. т.1. – М., Наука, 1982.
4. А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности. – М., Высшая школа, 1986.