Гомогенный реактор в одногрупповом приближении

Диффузионно-возрастная теория

Рассмотренное диффузионное приближение позволяет вычислить пространственное распределение потока нейтронов без учета их энергетической зависимости. Мы полагали, что все нейтроны в реакторе являются моноэнергетическими, при этом энергия соответствовала тепловой.

Очевидно, что реальная ситуация с энергетическим распределением нейтронов в реакторе более сложная:

1. Нейтроны рождаются в реакции деления и имеют среднюю энергии около 2 МэВ.
2. В тепловом реакторе всегда присутствуют нейтроны, которые находятся в состоянии замедления.
3. В процессе замедления нейтроны теряются за счет резонансного поглощения.
4. В реакторе конечных размеров замедляющиеся нейтроны будут теряться за счет утечки.

Диффузионно-возрастное приближение

Цель раздела: дополнить диффузионную одногрупповую модель влиянием утечки в процессе замедления нейтронов от энергии нейтронов деления до тепловой.

Для построения расширенной модели необходимо уточнить физические приближения, положенные в ее основу:

1. Среда по-прежнему является изотропной и гомогенной.
2. Макроскопические сечения поглощения среды много меньше макроскопических сечений рассеяния.
3. Размеры системы много больше характерных нейтронных длин, например длины диффузии и длины замедления.
4. Рассеяние нейтронов изотропно в системе центра масс.
5. Массовая доля замедлителя существенно больше массовой доли топлива.

Что мы знаем о замедлении нейтронов?

1. Быстрый нейтрон с энергией E и скоростью v в течении некоторого промежутка времени t движется прямолинейно и равномерно.

Так нейтрон движется до какого-либо столкновения с ядром одного из атомов среды.

Будем полагать, что вероятность испытать рассеяние существенно выше вероятности поглотится. И вообще пусть нейтроны пока не поглощаются.

В результате столкновения (упругое рассеяние) нейтрон теряет часть энергии и изменяет направление движения.

Что мы знаем о замедлении нейтронов?

2. Упругое рассеяние нейтрона на ядре в системе центра масс является **изотропным**.

Хотя само рассеяние и его результат имеет статистический характер но энергия, которую потеряет нейтрон при столкновении **зависит только от массы ядра** (A) и от **угла рассеяния** (φ)

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{A^2 + 2A\cos\varphi + 1}{(A+1)^2}$$

где E_0 и E_1 – энергии нейтрона до и после столкновения соответственно.

Очевидно, что максимальная энергия, которую может потерять нейтрон соответствует углу рассеяния $\varphi = \pi$. Тогда

$$r = \frac{E_1}{E_0} = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$$

Что мы знаем о замедлении нейтронов?

При каждом акте рассеяния нейтрона на ядре случайным является только угол φ. Так как каждому углу соответствует свое значение энергии E_1, то вероятность $P(E)dE$ попадания нейтрона после столкновения в интервал энергий между E и $E+ dE$ (при изотропном рассеянии) равна

$$P(E)dE = -\frac{d(\cos\varphi)}{2} = -\frac{d(\cos\varphi)}{dE}\frac{dE}{2}$$

Из соотношения для изменения энергии в результате столкновения нейтрона с ядром

$$\cos\varphi = \frac{1}{2A}\left[\frac{E}{E_0}(A+1)^2 - 1 - A^2\right]$$, тогда $$\frac{d(\cos\varphi)}{dE} = \frac{(A+1)^2}{2AE_0}$$

Рассчитаем $$1 - r = \frac{4A}{(A+1)^2}$$

Окончательно получим $$P(E)dE = -\frac{dE}{(1-r)E_0}$$

Что мы знаем о замедлении нейтронов?

Так как dE отрицательно (энергия при столкновении уменьшается), то $P(E)$ положительна и равна

$$P(E) = \frac{1}{(1-r)E_0}$$

Таким образом, нейтрон может иметь после столкновения энергию в интервале между $E_{\max} = E_0$ и $E_{\min} = rE_0$. Любое значение в этом интервале **равновероятно**.

Средняя энергия нейтрона, возникающая после столкновения, по определению равна

$$\overline{E_1} = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} EP(E)dE = \int_{rE_0}^{E_0} E\frac{dE}{(1-r)E_0} = (1+r)\frac{E_0}{2}$$

Тогда

$$\overline{E_0/E_1} = \frac{2}{1+r}$$

Что мы знаем о замедлении нейтронов?

3. Число столкновений (ν) быстрого нейтрона, необходимых для его замедления от начальной энергии (En) до конечной (Ek) будет определятся соотношением

$$\left(\overline{E_0/E_1}\right)^{\nu} = \frac{E_n}{E_k}$$

Тогда

$$\nu = \frac{\ln(E_n/E_k)}{\ln(\overline{E_0/E_1})}$$

Логарифм от среднего значения относительных потерь энергии нейтрона в одном столкновении можно заменить на средне значение логарифма от относительных потерь

$$\ln\left(\overline{E_0/E_1}\right) \equiv \overline{\ln(E_0/E_1)}$$

Что мы знаем о замедлении нейтронов?

Среднее значение логарифма относительных потерь при одном столкновении обозначают символом "ξ" и называют **параметром замедления** или **логарифмическим декриментом энергии**

$$\xi = \overline{\ln E_0 - \ln E_1} = \overline{\ln(E_0 / E_1)}$$

Рассчитаем его значение, используя определение

$$\xi = \int_{rE_0}^{E_0} \ln\left(\frac{E_0}{E}\right) P(E)dE = \frac{1}{1-r} \int_{rE_0}^{E_0} \ln\left(\frac{E_0}{E}\right) \frac{dE}{E_0} =$$

$$= 1 + \frac{r}{1-r} \ln r \; = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A+1}{A-1}$$

Важно то, что параметр замедления ξ , а соответственно и средние потери энергии нейтрона при замедлении, **не зависят от энергии**

Что мы знаем о замедлении нейтронов?

Введя параметр замедления, можно рассчитать число столкновений, необходимых для замедления нейтрона на начальной до конечной энергии

$$\nu = \frac{1}{\xi} \ln\left(\frac{E_n}{E_k}\right)$$

Нетрудно убедится в том, что для замедления нейтрона от энергии 2 МэВ, соответствующей средней энергии нейтронов деления, до энергии тепловых нейтронов (0,025 эВ) **в графите требуется 115 столкновений**.

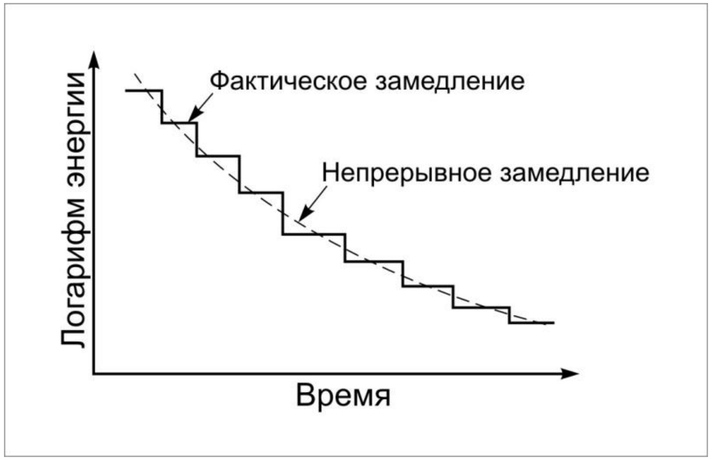
Для такого же замедления **на атомах водорода** необходимо всего **18 взаимодействий**.

Тем не менее, от рождения до тепловой диффузии нейтрон должен проделать достаточно большой путь, сбросив свою энергию в большом числе рассеяний.

Что мы знаем о замедлении нейтронов?

Все выше сказанное позволяет построить некоторую модель.

Можно заменить дискретное замедление нейтрона, возникающее в результате большого числа случайных столкновений (упругих рассеяний), на приближенную интерпретацию, сводящуюся к непрерывному замедлению нейтронов.



По сути мы заменяем ступенчатую функцию изменения энергии нейтрона во времени непрерывным аналогом.

Плотность замедления

Пусть быстрые нейтроны равномерно образуются по всему объему реактора.

В результате столкновений с ядрами они непрерывно замедляются, и в реакторе одновременно существуют нейтроны с различными энергиями – от быстрых до тепловых.

Пусть имеет замедлитель, не поглощающий нейтроны в процессе замедления.

Обозначим q_0 число быстрых нейтронов с энергиями E_0 (например, $E_0 = 2$ МэВ), образующихся в 1 см^3 за 1 сек, а $q(E)$ – число нейтронов (также в 1 см^3 за 1 сек) величина энергии которых при замедлении проходит через значение энергии E.

Величина $q(E)$ называется плотностью замедления

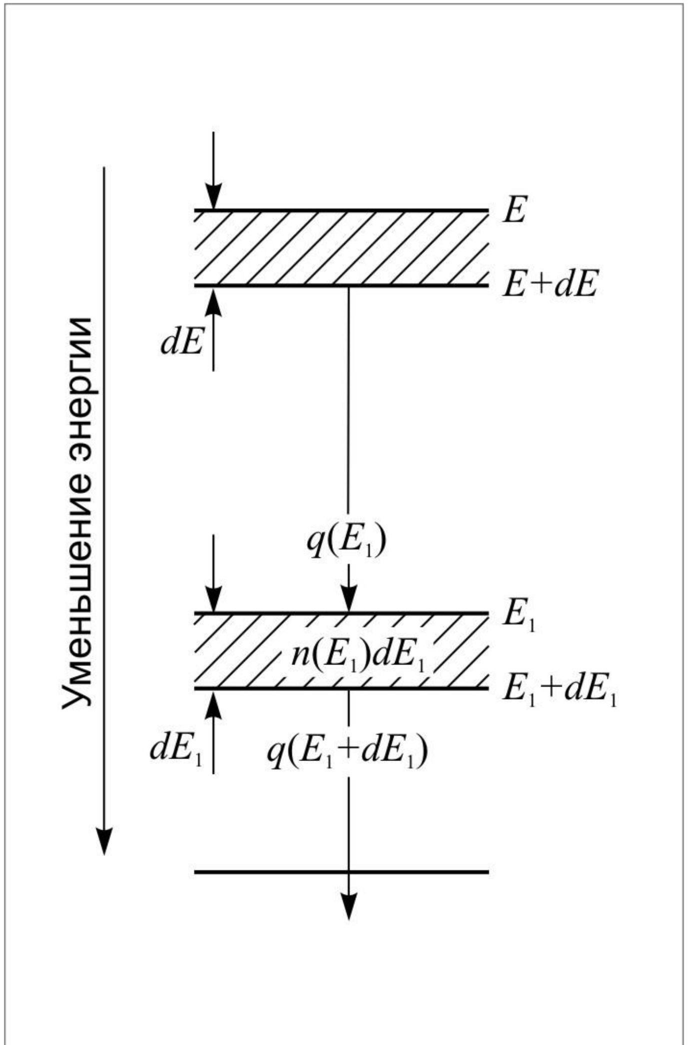
Плотность замедления

Имеется $n(E)$ нейтронов в 1 см^3 с энергией E, а $\Phi(E) = vn(E)$ поток нейтронов с этой энергией.

При бесконечно малом изменении энергии dE общее число нейтронов в 1 см^3, энергия которых попадает в интервал от E до $E+dE$ будет равна $n(E)dE$.

Требуется установить соотношение, связывающее $n(E)dE$ или $\Phi(E)dE$ с плотностью замедления $q(E)dE$.

Плотность замедления

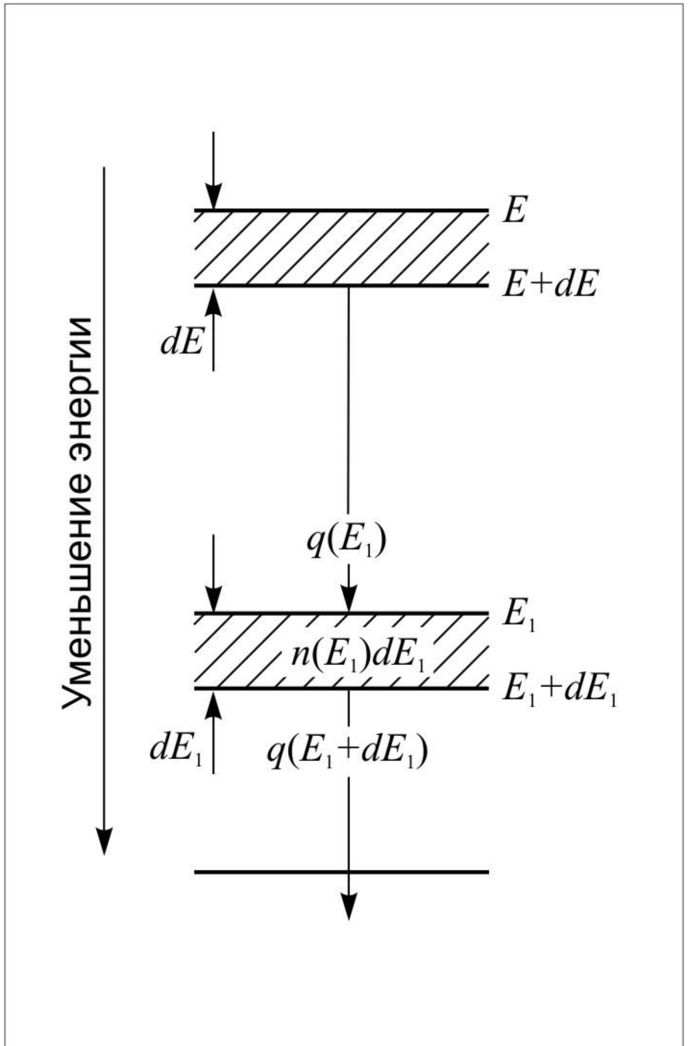


Рассмотрим некоторый промежуточный интервал энергий dE_1 (здесь dE_1 отрицательно).

В результате замедления новые нейтроны непрерывно будут попадать в этот интервал, а нейтроны, находящиеся в этом интервале, будут его покидать.

Так как поглощения нейтронов нет, то число нейтронов, замедляющихся до энергии от E_1 до $E_1 + dE_1$, равно числу нейтронов, уходящих из этого интервала.

Плотность замедления



Число нейтронов, выбывающих вследствие рассеяния из интервала dE_1 равно

$$n(E_1)v_1\Sigma_s dE_1 \text{ или } \Phi(E_1)\Sigma_s dE$$

В интервал dE_1 попадут только те нейтроны, энергия которых до рассеяния была больше, чем E_1, но меньше, чем E_1/r.

Соответственно, число нейтронов, приходящих в интервал dE_1 определится как

$$\int_{E_1}^{E_1/r} n(E)vP(E_1)dE \text{ или } \int_{E_1}^{E_1/r} \Phi(E)P(E_1)dE$$

Плотность замедления

Так как число нейтронов, попадающих в интервал, равно число нейтронов, уходящих из него, то получим

$$\Phi(E_1)\Sigma_s dE_1 = \int\limits_{E_1}^{E_1/r} \frac{dE_1}{(1-r)E}\Phi(E)\Sigma_s dE$$

или

$$\Phi_1\Sigma_s = \frac{1}{1-r}\int\limits_{E_1}^{E_1/r} \Phi\Sigma_s \frac{dE}{E}$$

Это тождество будет являться истинным, если $\Phi(E)\Sigma_s$ будет обратно пропорционально энергии

$\Phi(E)\Sigma_s = \dfrac{C}{E}$, где C – произвольная константа.

В тождестве можно убедится простой подстановкой

$$\frac{1}{1-r}\int\limits_{E_1}^{E_1/r} \frac{C}{E}\frac{dE}{E} = \frac{C}{1-r}\int\limits_{E_1}^{E_1/r} \frac{dE}{E^2} = \frac{C}{1-r}\left(-\frac{1}{E}\right)\Bigg|_{E_1}^{E_1/r} = \frac{C}{1-r}\left(\frac{1}{E_1} - \frac{r}{E_1}\right) = \frac{C}{E_1} = \Phi_1\Sigma_s$$

Плотность замедления

Теперь можно вычислить плотность замедления q. Вероятность того, что в результате одного соударения энергия нейтрона упадет ниже E_1 равны отношению $(E_1 - rE)$ к $(E - rE)$. Тогда

$$q_1 = \int_{E_1}^{E_1/r} \Phi(E)\Sigma_s \left(\frac{E_1 - rE}{E - rE}\right) dE = \int_{E_1}^{E_1/r} \frac{C}{E} \left(\frac{E_1 - rE}{E - rE}\right) dE$$

$$q_1 = C\left(1 + \frac{1}{1-r}\ln r\right) = C\xi$$

Выводы:

1. Плотность замедления является величиной постоянной, то есть $q_1 = q = q_0$.
2. Связь между потоком нейтронов, плотность нейтронов и плотностью замедления определяется как

$$\Phi(E) = n(E)v = \frac{C}{\xi\Sigma_s} = \frac{q}{\xi\Sigma_s E}$$

Уравнение возраста

Из полученного соотношения следует, что при отсутствии поглощения (здесь пока утечки то же нет) плотность замедления равна

$$q = \xi \Sigma_s \Phi E$$

Для 1 см^3 замедлителя, в котором замедляются быстрые нейтроны, без их образования и захвата, уравнение баланса нейтронов принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta\Phi$$

Тогда

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{v\xi\Sigma_s E}\frac{\partial q}{\partial t} = D\Delta\Phi = \frac{D}{\xi\Sigma_s E}\Delta q$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial t} = vD\Delta q$$

Уравнение возраста

Пусть нейтрон с энергией E и скоростью v в течении некоторого малого времени dt двигался в замедлителе.

За время dt этот нейтрон пройдет расстояние vdt и в среднем претерпит vdt/λ_s соударений, где λ_s – длина рассеяния.

Логарифм отношения энергий до и после одного столкновения равен ξ. Если считать процесс замедления непрерывным, то уменьшение $\ln E$ будет равно числу столкновений, умноженному на ξ

$$-d(\ln E) = \frac{\xi v dt}{\lambda_s} \quad \text{или} \quad -\frac{dE}{E} = \frac{\xi v}{\lambda_s} dt$$

В последнем полученном уравнении $\frac{\partial q}{\partial t} = vD\Delta q$ заменим dt на dE,

получим

$$\frac{\partial q}{\partial E} = -\frac{\lambda_s D}{\xi E} \Delta q$$

Уравнение возраста

Ведем новую переменную τ, определяемую соотношением

$$d\tau = -\frac{\lambda_s D}{\xi E} dE$$

Тогда окончательно имеем

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial \tau} = \Delta q}$$

Полученное уравнение называется **уравнение возраста**.

Введенная переменная τ называется **возрастом нейтронов**. Другие названия **возраст Ферми** или **символический возраст.**

Интегрирование соотношения, введенное при замене переменных получим

$$\tau(E) = -\int_{E}^{E_0} \frac{\lambda_s D}{\xi E} dE = D\left[\frac{\lambda_s}{\xi} \ln \frac{E_0}{E}\right]$$

Уравнение возраста

Возраст нейтронов τ имеет размерность **квадрата длины**.

Физический смысл возраста нейтрона – **1/6 среднего квадрата расстояния, пройденного нейтроном при замедлении от энергии E_0 до E**.

Возраст нейтронов, соответствующий энергии деления равен **нулю**

Время замедления и время диффузии

Если определить время замедления, как среднее время, затрачиваемое нейтроном на замедление от энергии деления (E_0) до тепловой энергии (E_{th}), то из полученного уравнения

$$dt = -\frac{1}{v\Sigma_s\xi}\frac{dE}{E}$$

можно определить

$$\overline{t_{\text{mod}}} = -\int_{E_0}^{E_{th}} \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E}\xi\Sigma_s}\frac{dE}{E} = \frac{\sqrt{2m}}{\xi\Sigma_s}\left(\frac{1}{\sqrt{E_{th}}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}}\right)$$

Время замедления и время диффузии

Время диффузии, или среднее время жизни теплового нейтрона, по сути среднее время, затрачиваемое нейтроном на диффузию в качестве теплового до поглощения, можно определить как

$$\overline{t_{\text{dif}}} = \frac{\lambda_a}{v} = \frac{1}{v\Sigma_a}$$

где $v = 2{,}2 \cdot 10^5$ см/с – средняя скорость тепловых нейтронов; λ_a и Σ_a – длина и сечение поглощения соответственно.

Замедлитель	Возраст теплового нейтрона, см^2	Σ_S, см$^{-1}$	Время замедления, 10^{-5} с	Время диффузии, 10^{-3} с
H_2O	31,4÷31,8	0,90	1	0,23
D_2O	120÷125	0,43	2,9	50
Be	97,2÷102	0,55	7,8	5,0
C	364	0,30	1,9	1,3