СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (СДУ)

§ Основные понятия. Нормальные системы

Определение системы дифференциальных уравнений	**Системой дифференциальных уравнений** называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные. Всегда предполагается, что число уравнений равно числу неизвестных функций.

Например, система двух дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}) = 0, \\ f_2(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений состоит в нахождении функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$, удовлетворяющих обоим уравнениям системы.

Определение нормальной системы дифференциальных уравнений (НСДУ)	**Нормальной системой дифференциальных уравнений** называется система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно производной: $$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ y_2' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$ где x – независимая переменная, $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ − неизвестные функции.

Определение решения системы дифференциальных уравнений	**Решением** системы дифференциальных уравнений называется совокупность функций $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$, удовлетворяющих каждому уравнению этой системы.

Определение частного решения системы дифференциальных уравнений	**Частным решением СДУ** называется решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}$, где $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ − заданные постоянные числа.

§ Метод исключения неизвестных решения НСДУ

Теорема 1 о связи дифференциального уравнения *n*-го порядка с нормальной СДУ	Одно дифференциальное уравнение ***n***-го порядка, разрешённое относительно старшей производной: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, всегда можно свести к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Теорема 2 о связи дифференциального уравнения *n*-го порядка с нормальной СДУ	Нормальную систему дифференциальных уравнений можно привести **методом исключения неизвестных** к одному уравнению, порядок которого меньше или равен числу уравнений нормальной системы дифференциальных уравнений.

Алгоритм применения метода исключения неизвестных

Дифференцируем первое уравнение системы по переменной x:

$$y_1'' = (f_1)_x' + (f_1)_{y1}' \cdot y_1' + (f_1)_{y2} \cdot y_2' + \dots + (f_1)_{yn}' \cdot y_n'.$$

Производные $y_1', y_2', \dots, y_n'$ в правой части этого равенства заменяем их выражениями
из НСДУ.

Получим уравнение $y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$

↓

$$y_1''' = (y_1'')_x' = (F_2)_x' + (F_2)_{y1}' \cdot y_1' + (F_2)_{y2}' \cdot y_2' + \dots + (F_2)_{yn}' \cdot y_n'.$$

Производные $y_1', y_2', \dots, y_n'$ в правой части этого равенства заменяем их выражениями
из НСДУ.

Получим уравнение $y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$

↓

…….. И так далее …….

↓

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

↓

Полученные таким образом дифференциальные уравнения объединяем в систему:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

↓

Первые $n-1$ уравнений решаем относительно переменных
$y_1, y_2, \dots, y_n$, выражая их через переменные $x, y_1, y_1', y_1'', \dots y_1^{(n-1)}$.
Подставляя полученные выражения в последнее уравнение системы, придём к уравнению порядка n относительно одной неизвестной y_1.

Замечание. Порядок последнего уравнения может быть меньше n, если при его получении были использованы не все уравнения системы.

§ Метод выделения интегрируемых комбинаций

Получают из системы такие уравнения, которые можно проинтегрировать и найти первый интеграл системы. Если найдены n независимых первых интегралов НСДУ, то их совокупность дает общий интеграл этой системы.

Для выделения интегрируемых комбинаций из НСДУ её записывают в так называемой симметрической форме:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dx}{1}$$

и используют следующее свойство равных дробей: если

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = ... = \frac{u_n}{v_n} = \gamma ,$$

то при любых $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ имеет место соотношение

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n} = \gamma \ (*).$$

Значения $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ подбираются таким образом, чтобы числитель в $(*)$ был полным дифференциалом знаменателя или же числитель и знаменатель были равны нулю.

§ Нормальная линейная однородная система n-го порядка (НЛОС).

Тип системы	Вид системы	Признак системы
Нормальная линейная однородная система n-го порядка (НЛОС).	$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n. \end{cases}$ Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций зависят от аргумента x.	Уравнения записаны явно относительно первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.

Метод решения системы
Метод исключения неизвестных (см. НСДУ). Фундаментальной системой решений НЛОС называется совокупность произвольных n линейно независимых решений $Y_k(x) = (y_1^{(k)}(x), y_2^{(k)}(x), \dots, y_n^{(k)}(x)), \quad k = 1,2,...,n$. Если $Y_k(x), \quad k = 1,2,...,n,$ – фундаментальная система частных решений ЛОС, то общее решение имеет вид $Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x)$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

§ Нормальная линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами

Тип системы	Вид системы	Признак системы
Нормальная линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами	$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$ Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций постоянны. $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ A – матрица из коэффициентов при искомых функциях.	Уравнения записаны явно относительно первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.

Метод решения системы
Матричный метод. Из характеристического уравнения $$\det(A - \lambda E) = 0$$ находят различные корни $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$$ и для каждого корня λ (с учетом его кратности) определяют соответствующее ему частное решение $$Y^{(\lambda)}(x).$$ Общее решение имеет вид $$Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y^{(\lambda_k)}(x).$$ При этом, если **а)** $\lambda -$ действительный корень кратности 1 (один), то $$Y^{(\lambda)}(x) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(\lambda)} \\ \xi_2^{(\lambda)} \\ \ldots \\ \xi_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda x},$$ где $Y^{(\lambda)} -$ собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ, то есть $$AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}, Y^{(\lambda)} \neq 0$$ Если **б)** $\lambda -$ комплексный корень кратности 1 (один), тогда корнем характеристического уравнения является также сопряженное с λ число $\bar{\lambda}$. Вместо комплексных частных решений $Y^{(\lambda)}(x)$ и $Y^{(\bar{\lambda})}(x)$ следует взять действительные частные решения $$Y_1^{(\lambda)}(x) = \operatorname{Re} Y^{(\lambda)}(x) \text{ и } Y^{(\lambda)}(x) = \operatorname{Im} Y^{(\lambda)}(x).$$

Если **в)** $\lambda -$ корень кратности $r \geq 2$, то соответствующее этому корню решение системы ищут в виде вектора $Y^{(\lambda)}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}x + ... + \alpha_1^{(r)}x^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}x + ... + \alpha_2^{(r)}x^{r-1} \\ \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}x + ... + \alpha_n^{(r)}x^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda x}$ (**), коэффициенты которого $\alpha_i^{(j)}, i = 1,...,n, j = 1,...,r$ определяются из системы линейных уравнений, получающихся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в результате подстановки вектора (**) в исходную систему.

План решения нормальной линейной однородной системы дифференциальных уравнений (НЛО СДУ) с постоянными коэффициентами

1. Составить характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$;

2. Найти собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ и соответствующие им собственные векторы $Y_1, Y_2, ..., Y_s$;

3. Составить фундаментальную систему частных решений

$$Y^{(\lambda_i)}(x) = Y_i^{(\lambda_i)} e^{\lambda_i x} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(\lambda_i)} \\ \xi_2^{(\lambda_i)} \\ ... \\ \xi_n^{(\lambda_i)} \end{pmatrix} e^{\lambda_i x}, i = 1, 2, ..., n;$$

4. Составить общее решение

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y^{(\lambda_k)}(x)$$

5. Для решения задачи Коши использовать данные начальные условия, в соответствии с которыми найти значения произвольных постоянных $C_k, k = 1, 2, ..., n$;

6. Записать частное решение, подставив в общее решение найденные значения произвольных постоянных.

Определение нормальной линейной неоднородной СДУ	Нормальной линейной неоднородной СДУ называется система ДУ называется система, где по крайней мере одна из функций $f_k(x)$ не равна тождественно нулю ($k = 1, 2, ..., n$): $\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ .... \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_{n,} + f_n(x). \end{cases}$

Замечание. В силу теорем о связи нормальных систем ДУ с линейными ДУ $n -$ го порядка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, о структуре общего решения однородных и неоднородных ДУ остаются справедливыми и для нормальных систем дифференциальных уравнений.