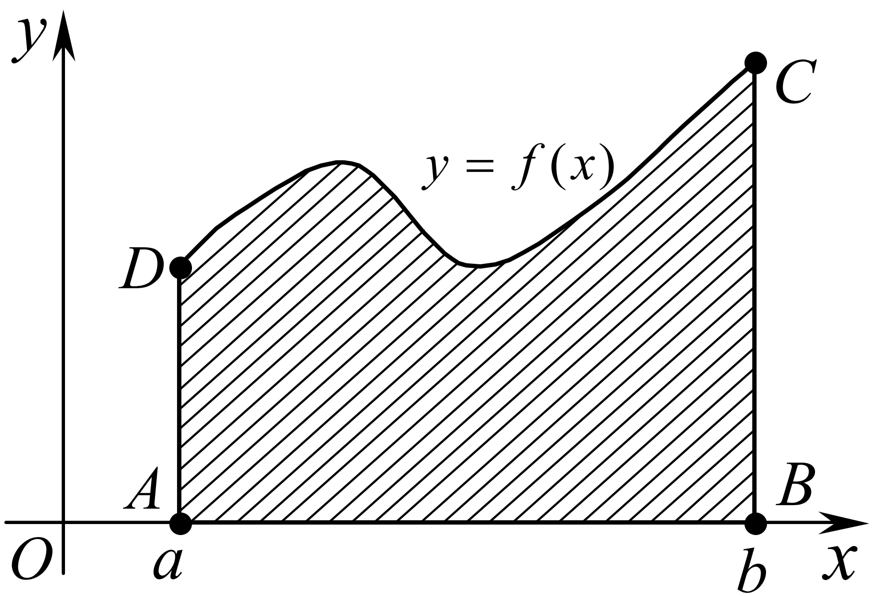
# ГЛАВА II. Определенный интеграл и его приложения

## §1. Определенный интеграл и его свойства

### 1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Область* $(\sigma) \in xOy$ *, ограниченная отрезком* $[a;b]$ *оси* $Ox$, *прямыми* $x = a$, $x = b$ *и кривой* $y = f(x)$, *называется* ***криволинейной трапецией с основанием*** $[a;b]$.

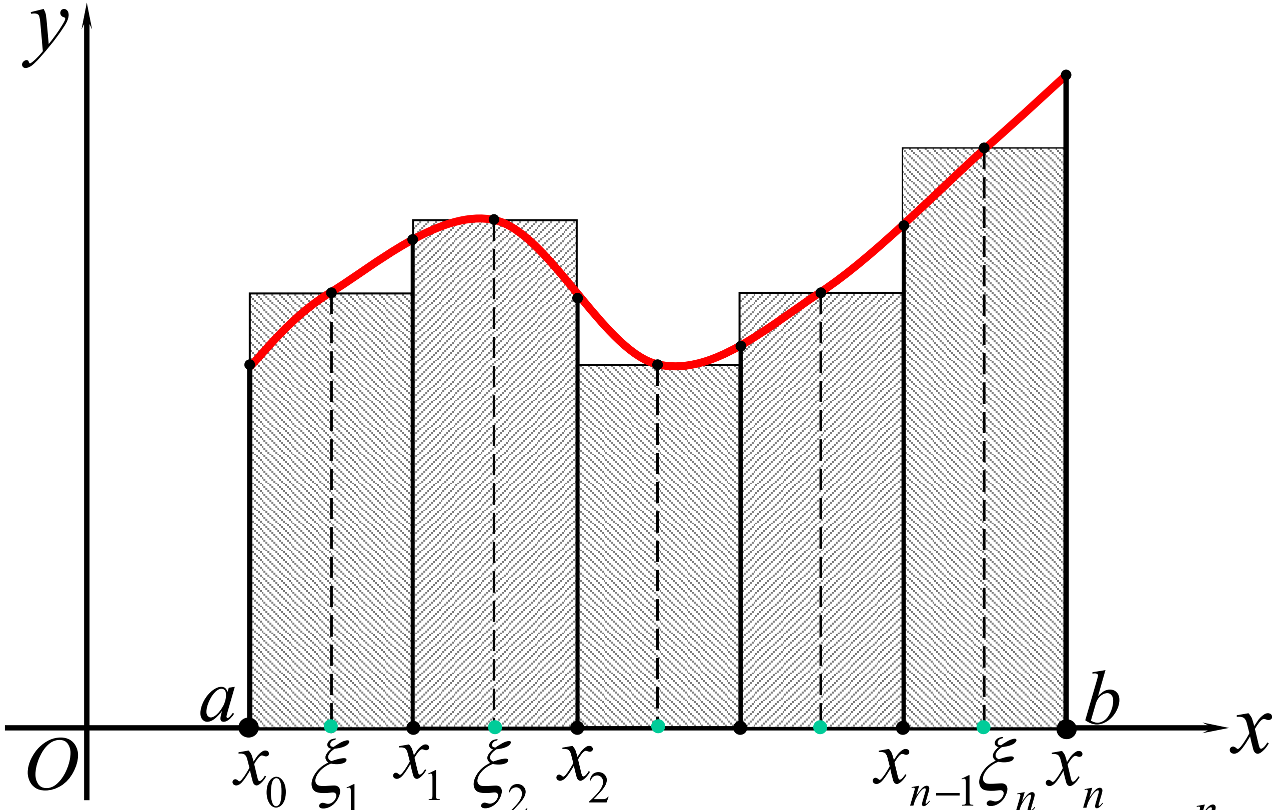



***Замечание***. Прямые $x = a$ и $x = b$ могут вырождаться в точки

ЗАДАЧА 1 (о площади криволинейной трапеции).

Пусть $f(x) \geq 0$ , $\forall x \in [a;b]$ .

Найти площадь $S$ криволинейной трапеции $(\sigma)$ .




Если $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка $[x_{i-1} ; x_i]$ , то $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Пусть $\lambda = \max |\,[x_{i-1} ; x_i]\,|$ . Тогда

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ЗАДАЧА 2 (о пройденном пути).

Пусть точка движется по кривой и ее скорость изменяется по закону $v = f(t)$.

Найти путь $S$, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1\,;\,T_2]$.

РЕШЕНИЕ.

1) Разобьем $[T_1\,;\,T_2]$ на $n$ частей точками

$$t_0 = T_1\,,\ t_1\,,\ t_2\,,\ \ldots\,,\ t_n = T_2 \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$$

2) Выберем на $[t_{i-1}\,;\,t_i]$ $(i = 1,2,\ldots n)$ произвольную точку $\tau_i$.

Если $[t_{i-1};\,t_i]$ мал, то можно считать, что точка двигалась в течение этого времени равномерно со скоростью $f(\tau_i)$.

$\Rightarrow$ пройденное расстояние: $f(\tau_i)\cdot\Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

$$\Rightarrow \quad S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i$$

3) Пусть $\lambda = \max|\,[t_{i-1};\,t_i]\,|$. Тогда

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i$$

# 2. Определенный интеграл: определение и условие его существования

Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1) Разобьем $[a;b]$ на $n$ частей точками

$$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b\ ,$$

где $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ .

2) На каждом отрезке $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$ $(i = 1,2,\ldots n)$ выберем произвольную точку $\xi_i$ и найдем произведение

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i\ ,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка $[x_{i-1}\ ;x_i]$.

Сумма

$$I_n(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ .

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \left| [x_{i-1}; x_i] \right|$

*Число* $I$ *называется* ***пределом интегральных сумм*** $I_n(x_i, \xi_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения отрезка* $[a;b]$ *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* $\xi_i$ *выполняется неравенство*

$$| I_n(x_i, \xi_i) - I | < \varepsilon .$$

*Если существует предел интегральных сумм* $I_n(x_i, \xi_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***определенным интегралом от функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$ (*или* ***в пределах от*** $a$ ***до*** $b$).

ОБОЗНАЧАЮТ: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Называют: $[a;b]$ – ***промежуток интегрирования***,

$a$ и $b$ – ***нижний*** и ***верхний предел интегрирования***,

$f(x)$ – ***подынтегральная функция***,

$f(x)dx$ – ***подынтегральное выражение***,

$x$ – ***переменная интегрирования***.

Функция $f(x)$, для которой на $[a;b]$ существует определенный интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие интегрируемости функции на $[a;b]$).

*Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$ *, то она на этом отрезке ограничена.*

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие интегрируемости функции на $[a;b]$).

*Для того, чтобы функция* $f(x)$ *была интегрируема на* $[a;b]$ *, достаточно чтобы выполнялось одно из условий:*

1) $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$;
2) $f(x)$ *монотонна на* $[a;b]$;
3) $f(x)$ *ограничена на* $[a;b]$ *и имеет на* $[a;b]$ *конечное число точек разрыва.*

***Замечание***. Определяя определенный интеграл, полагали $a < b$ .

Полагаем, что:

1) если $a > b$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

2) если $a = b$ , то

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Такое расширение определения согласуется с определением определенного интеграла и его геометрическим (физическим) смыслом.

## 3. Свойства определенного интеграла

1) Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$ , $\forall x \in [a;b]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

где $S$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ и ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.

2) Физический смысл определенного интеграла

Если функция $v = f(t)$ задает скорость движущейся точки в момент времени $t$ , то

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

определяет путь $S$, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1 ; T_2]$ .

3) $\int_a^b dx = b - a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

4) Постоянный множитель $k$ $(k \neq 0)$ можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

5) Определенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

6) Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разбит точкой $c$ на две части $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (1)$$

***Замечание***. Формула (1) будет иметь место и в том случае, когда точка $c$ лежит не внутри отрезка $[a;b]$, а вне его.

7) Если $f(x) > 0$ $(f(x) \geq 0)$ $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \qquad \left(\int_a^b f(x)dx \geq 0\right)$$

8) Если $f(x) \leq \varphi(x)$ $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

9) Следствие свойств 8 и 3.
Если $m$ и $M$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

10) Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

11) Теорема о среднем.

*Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$, *то в интервале* $(a;b)$ *найдется такая точка* $c$, *что справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

# §2. Вычисление определенных интегралов

## 1. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(t)$ непрерывна на $[a;b]$.

Тогда $f(t)$ непрерывна на $\forall[a;x]$, где $a \leq x \leq b$ .

$\Rightarrow$ $f(t)$ интегрируема на $\forall[a;x]$, где $a \leq x \leq b$ .

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$

Имеем: $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x)$ , $\qquad D(\Phi(x)) = [a;b]$ .

ТЕОРЕМА 1 (о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу).

Функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a;b]$, причем

$$\Phi'(x) = f(x) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 2. Любая непрерывная на $[a;b]$ функция имеет на $[a;b]$ первообразную.

Имеем: $\Phi(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$.
Пусть $F(x)$ – еще одна первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$.
Тогда $F(x)$ и $\Phi(x)$ будут отличаться постоянным слагаемым (см. §1 теорема 2, I глава), т.е.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \qquad (1)$$

где $a \le x \le b$, $C$ – некоторое число.
Полагаем $x = a$. Тогда из (1) получим

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C,$$

$$\Rightarrow \; 0 = F(a) + C,$$

$$\Rightarrow \; C = -F(a).$$

Следовательно, (1) можно переписать в виде

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая $x = b$ получаем:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Формула (2) называется ***формулой Ньютона – Лейбница***.

Разность $F(b) - F(a)$ принято сокращенно записывать в виде

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Символ $\Big|_a^b$ называют *знаком двойной подстановки*.

Используя это обозначение, формулу (2) можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

***Замечание***. В формуле (2) можно взять любую из первообразных функции $f(x)$, так как $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной.

# 2. Замена переменной в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной в определенном интеграле). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ (или $[b;a]$) *и функция* $x = \varphi(t)$ *удовлетворяет условиям*

1) $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке с концами* $\alpha$ *и* $\beta$;
2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *и значения* $\varphi(t)$ *при изменении* $t$ *от* $\alpha$ *до* $\beta$ *не выходят за пределы отрезка с границами* $a$ *и* $b$.

*Тогда функция* $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ *интегрируема на* $[\alpha;\beta]$ (или $[\beta;\alpha]$) *и справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Формула (3) называется ***формулой замены переменной в определенном интеграле***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ .

***Замечание***. Замена переменной в определенном интеграле чаще производится по формуле (3), прочитанной справа налево:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(t)dt,$$

где $t = \varphi(x)$ , $\alpha = \varphi(a)$ , $\beta = \varphi(b)$ .

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{4e^{2x} + 12e^x + 34}$

# 3. Формула интегрирование по частям в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 4.

*Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a;b]$ *. Тогда существуют интегралы*

$$\int_a^b u\,dv \quad \text{и} \quad \int_a^b v\,du$$

*и справедливо равенство*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (4)$$

Формула (4) называется ***формулой интегрирования по частям в определенном интеграле***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

# §3. Геометрические приложения определенных интегралов

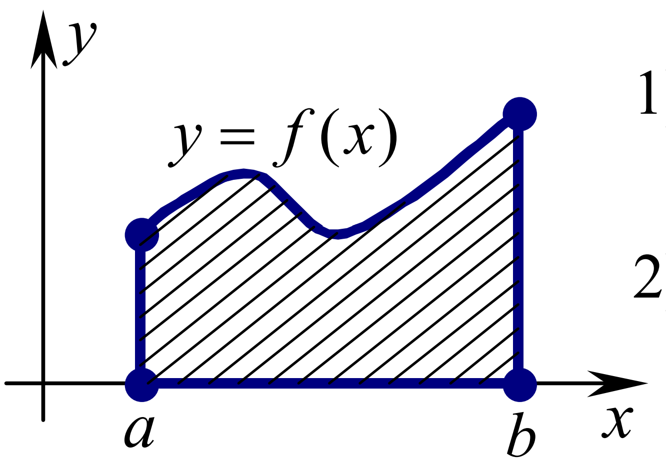
## 1. Площадь плоской области

I) ***Плоская область в декартовой системе координат***

Основная область, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – ***кривой линейная трапеция***.

Возможны 3 случая ее расположения на плоскости:

а)



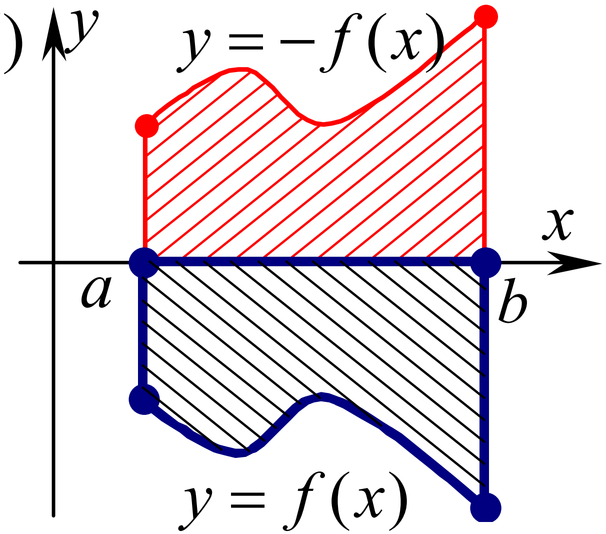

1) $$S = \int_a^b f(x)dx;$$

2) если $y = f(x)$: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то $$S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt,$$

где $x(\alpha) = a, \ x(\beta) = b$ .

б)



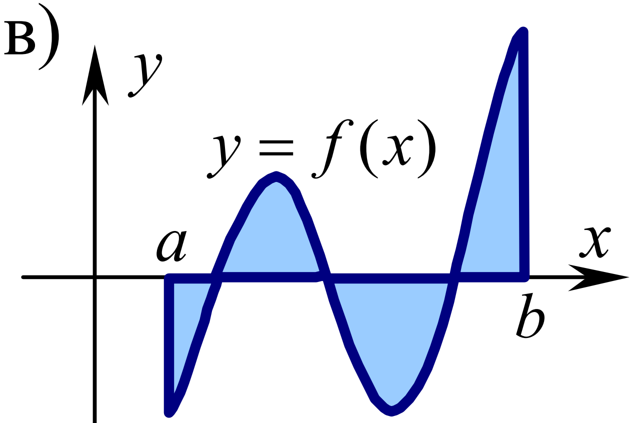

1) $$S = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

2) если $y = f(x)$: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то $$S = -\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)\,dt,$$

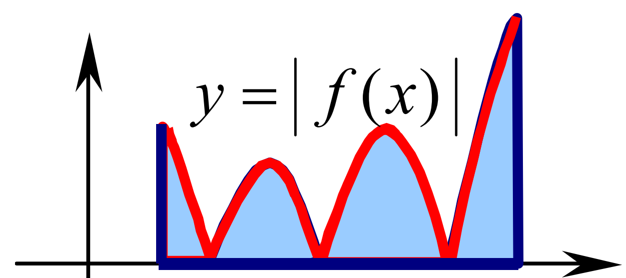
где $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$ .

в)




$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$\Rightarrow$




$$S = \int_a^b |\, f(x)\,|\,dx,$$

Кроме того, с помощью определенного интеграла можно найти площадь области, правильной в направлении оси $Oy$ .

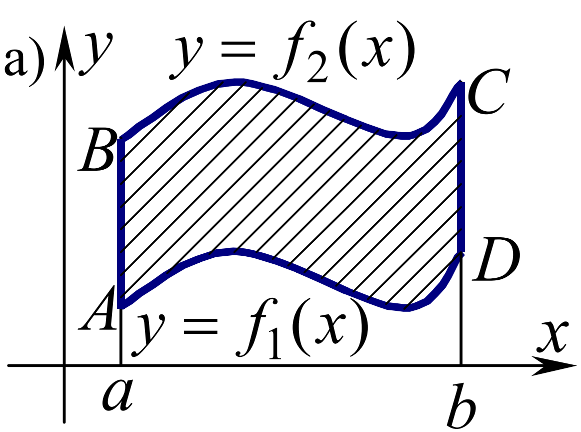
Правильной в направлении оси $Oy$ является область (σ), ограниченная линиями

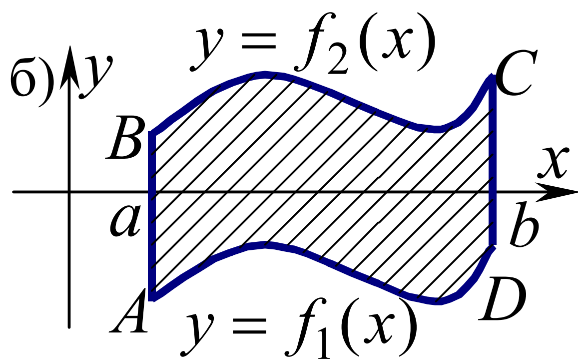
$$x = a\ ,\ x = b\ ,\ y = f_1(x)\ ,\ \ y = f_2(x)\ ,$$

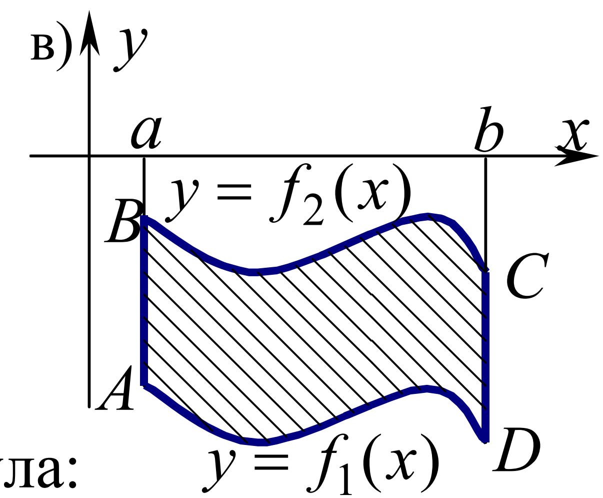
где $a < b$ и $f_1(x) \le f_2(x)$ , $\forall x \in [a;b]$ .

***Замечание***. Прямые $x = a$ и $x = b$ могут вырождаться в точки.

Возможны 3 случая расположения области (σ) на плоскости:



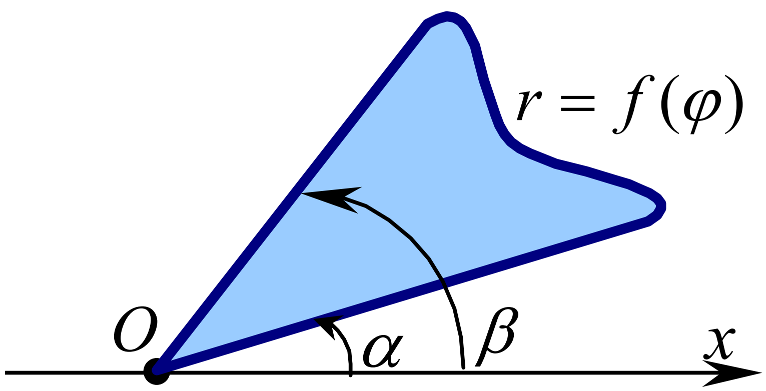

Во всех трех случаях справедлива формула:

$$S = \int_a^b \left[ f_2(x) - f_1(x) \right] dx .$$

II) ***Плоская область в полярной системе координат***

Основная область, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – ***криволинейный сектор***.

***Криволинейным сектором*** называется область, ограниченная двумя лучами $\varphi = \alpha$ , $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$ .




Его площадь находится по формуле: $$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\varphi)\right]^2 d\varphi.$$

# 2. Длина плоской кривой

## I) *Плоская кривая в декартовой системе координат*

Пусть $y = f(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[a;b]$ .
ЗАДАЧА: найти длину $\ell$ кривой $y = f(x)$ , где $x \in [a;b]$.

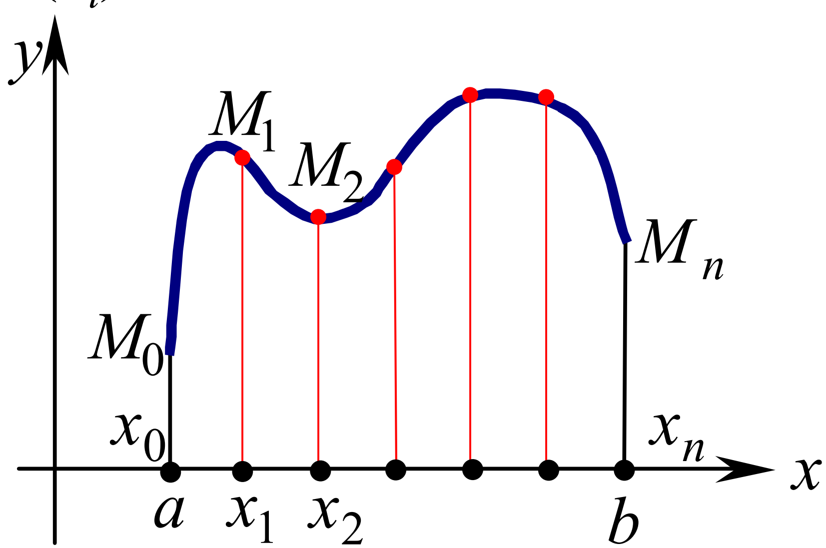
РЕШЕНИЕ

Разобьем $[a;b]$ на $n$ частей точками

$$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$$

$\Rightarrow$ $(\ell)$ разобьется на части $(\ell_1),(\ell_2),\ldots,(\ell_n)$ точками $M_0, M_1,\ldots, M_n$

$\Rightarrow$ $\ell = \sum \ell_i$ , где $\ell_i$ – длина $(\ell_i)$



## II) ***Плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями***

Пусть кривая $(\ell)$ не имеет самопересечений и задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$

где $\varphi(t)$ , $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha;\beta]$ .

ЗАДАЧА. Найти длину $\ell$ кривой $(\ell)$ .

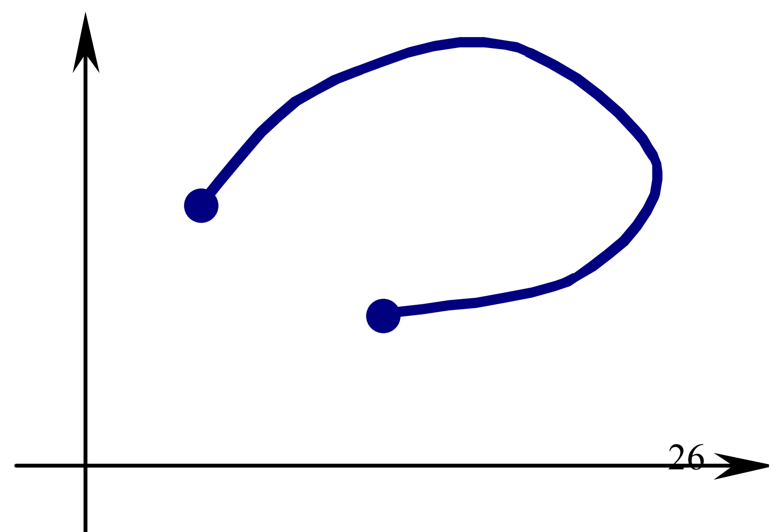
РЕШЕНИЕ

Разобьем $[\alpha;\beta]$ на $n$ частей точками

$$t_0 = \alpha\,,\ t_1\,,\ t_2\,,\ \ldots\,,\ t_n = \beta \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n\ )$$

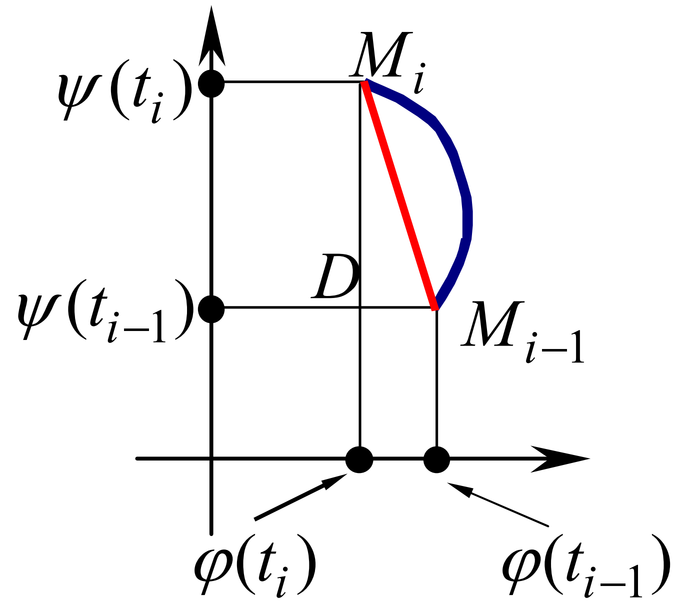
$\Rightarrow$ $(\ell)$ разобьется на части $(\ell_1),(\ell_2),\ldots,(\ell_n)$ точками $M_0, M_1, \ldots M_n$

$\Rightarrow$ $\ell = \sum \ell_i$ , где $\ell_i$ – длина $(\ell_i)$



Рассмотрим дугу $(\ell_i)$.

Если $(\ell_i)$ мала, то




$$\ell_i \approx |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

где $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$,
$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1})$.

По теореме Лагранжа

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i) \cdot \Delta t_i ,$$
$$\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\zeta_i) \cdot \Delta t_i$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} > 0$, $\xi_i$, $\zeta_i$ – точки между $t_{i-1}$ и $t_i$.

$$\Rightarrow \quad \ell_i \approx \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

$$\Rightarrow \quad \ell \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\zeta_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

Рассмотрим
$$\widetilde{s}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\zeta_i)]^2}\cdot\Delta t_i$$

и
$$s=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\xi_i)]^2}\cdot\Delta t_i$$

Доказано, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}(s-\widetilde{s})=0$, где $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta t_i$.

$$\Rightarrow\quad \ell=\lim_{\lambda\to 0}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2+[\psi'(\xi_i)]^2}\cdot\Delta t_i}_{\textit{интегральная сумма для } \sqrt{(x')^2+(y')^2} \textit{ на } [\alpha;\beta]}$$

$$\Rightarrow\quad \ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt \qquad (1)$$

## III) ***Плоская кривая в полярных координатах***

Пусть $r = r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$ .

ЗАДАЧА: найти длину кривой $r = r(\varphi)$ , где $\varphi \in [\alpha;\beta]$.

РЕШЕНИЕ.

Имеем: $x = r \cdot \cos\varphi$ , $y = r \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow$ параметрические уравнения кривой

$$x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi , \quad y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi .$$

Тогда
$$x' = r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi ,$$
$$y' = r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi$$
$$\Rightarrow \quad (x')^2 + (y')^2 = r^2 + (r')^2 .$$

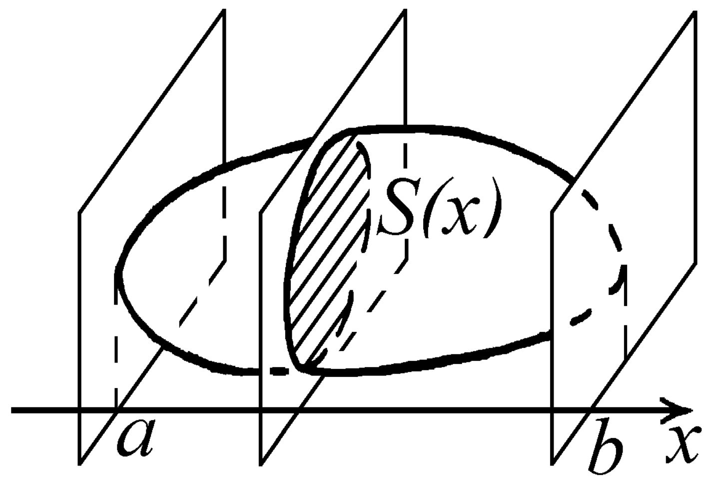
Следовательно, по формуле (1), получаем:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

# 3. Вычисление объема тела

## I) ***По площадям параллельных сечений***

Пусть $(V)$ – замкнутое и ограниченная область в $Oxyz$ (тело). Пусть $S(x)$ $(a \le x \le b)$ – площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси $Ox$.




Тогда объем тела $(V)$ :

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

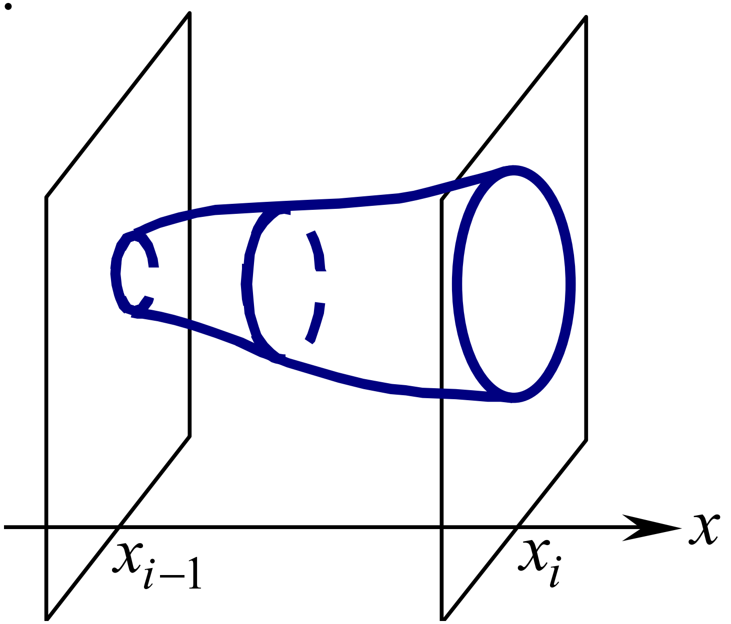
1) Разобьем $[a;b]$ на $n$ частей точками

$$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n\ )$$

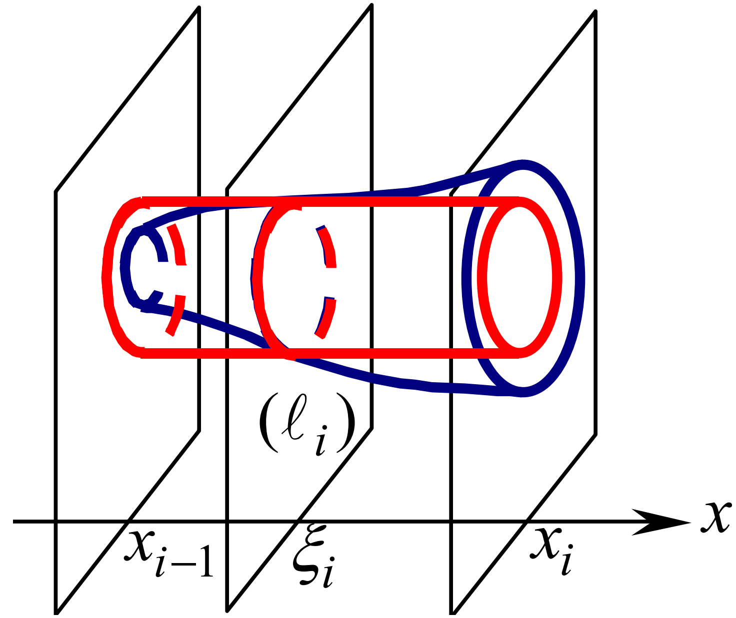
Плоскости $x = x_0$ , $x = x_1$ , $x = x_2$ , … , $x = x_n$ разобьют $(V)$ на части $(V_1)$ , $(V_2)$ , … , $(V_n)$

$$\Rightarrow\ V = \sum V_i\ ,\ \text{где } V_i - \text{объем } (V_i).$$

2) Рассмотрим $(V_i)$.



Выберем $\forall \xi_i \in [x_{i-1}\,;\, x_i]$




Построим цилиндр, с направляющей $(\ell_i)$.
Его объем: $S(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина $[x_{i-1}\,;\, x_i]$.
Если $\Delta x_i$ – мала, то

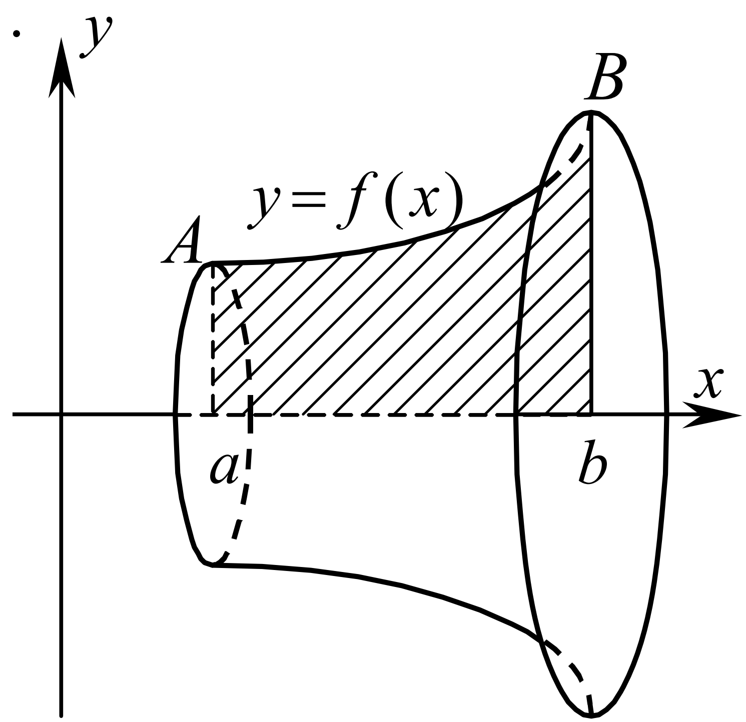
$$V_i \approx S(\xi_i)\cdot\Delta x_i \quad \text{и} \quad V \approx \sum S(\xi_i)\cdot\Delta x_i\,.$$

Следовательно, $V = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} S(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, где $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$.

$$\Rightarrow \quad V = \int_a^b S(x)dx.$$

## II) ***Объем тела вращения***

Пусть ($V$) – тело, которое получается в результате вращения вокруг $Ox$ криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной $y = f(x)$ .



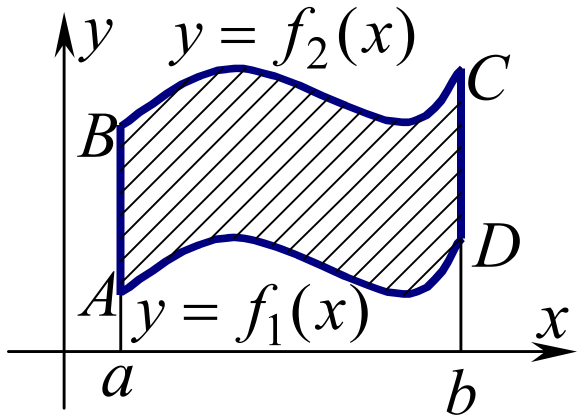

Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Пусть ($V$) – тело, полученное в результате вращения вокруг $Ox$ области ($\sigma$), ограниченной линиями

$$x = a\ ,\ \ x = b\ ,\ y = f_1(x)\ ,\ \ y = f_2(x)\ ,$$

где $0 \le f_1(x) \le f_2(x)\ ,\ \ \forall x \in [a;b]$.




Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b \left( [f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 \right) dx.$$

# 4. Физические приложения определенного интеграла

**I)** ***Пройденный путь***

Пусть точка движется вдоль некоторой кривой со скоростью $v(t)$
Тогда путь $S$, пройденный точкой за время $[T_1 \, ; \, T_2]$ , равен

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt.$$

**II)** ***Масса отрезка***

Пусть $\gamma(x)$ – плотность распределения массы на отрезке $[a;b]$.
Тогда масса отрезка равна

$$m = \int_a^b \gamma(x)dx.$$

## III) *Работа переменной силы*

Пусть под действием силы $\bar{\mathbf{F}}$ тело движется вдоль оси $Ox$ из точки $x_1 = a$ в точку $x_2 = b$ .
Если $F = F(x)$ и $\bar{\mathbf{F}} \upuparrows Ox$ , то работа силы равна

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Таким образом, с помощью определенного интеграла находятся физические и геометрические величины, которые обладают свойством **аддитивности** (т.е. при разбиении $[a;b]$ на части, величина, соответствующая отрезку $[a;b]$, складывается из величин, соответствующих его частям).

# §5. Несобственные интегралы

Для существования $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимы условия:

1) $[a;b]$ – конечен,

2) $f(x)$ – ограничена (необходимое условие существования определенного интеграла).

Несобственные интегралы – обобщение понятия определенного интеграла на случай когда одно из этих условий не выполнено.

# 1. Несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall[a;b]$, где $b \geq a$ .

$\Rightarrow$ существует $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Имеем: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I(b)$, $D(I) = [a;+\infty)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом I рода*** *от функции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ называется предел функции $I(b)$ при $b \to +\infty$* .

Обозначают: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

При этом, если предел в правой части формулы (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(-\infty;b]$, то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** I *рода для функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $(-\infty;b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ , то ***несобственным интегралом*** I *рода для функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $(-\infty;+\infty)$ называют

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (2)$$

где $c$ – любое число.

Несобственный интеграл от $f(x)$ по промежутку $(-\infty;+\infty)$ называется ***сходящимся***, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (2) сходятся.

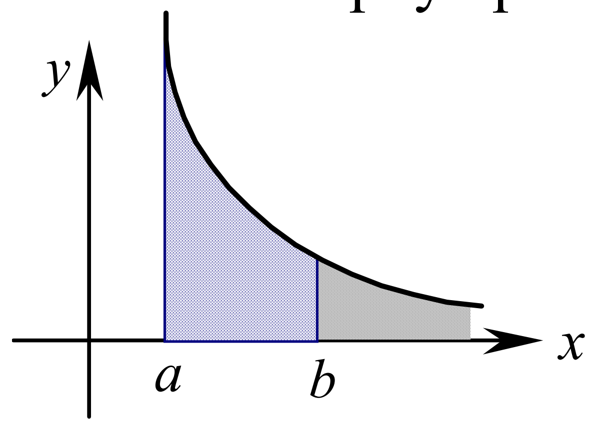
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $(-\infty;+\infty)$ называется ***расходящимся***.

Будем рассматривать несобственные интегралы I рода по промежутку $[a;+\infty)$. Для интегралов по промежутку $(-\infty;b]$ и $(-\infty;+\infty)$ все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов I рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;+\infty)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.




$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;+\infty)$ сходится и равен $S$, то полагают, что область, ограниченная $Ox$, кривой $y = f(x)$ и прямой $x = a$ (криволинейная трапеция с бесконечным основанием) имеет площадь $S$.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы I рода переносятся некоторые свойства определенных интегралов (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;+\infty)$.

Тогда $\forall b \in [a;+\infty)$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\big(F(b) - F(a)\big)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \tag{3}$$

Обозначим $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}$.

Тогда (3) примет вид:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x)-F(a). \qquad (4)$$

Формулу (4) называют ***обобщением формулы Ньютона – Лейбница*** для несобственных интегралов по промежутку $[a;+\infty)$.

Аналогично для несобственных интегралов по промежутку $(-\infty;b]$ доказывается справедливость формулы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b)-\lim_{x\to-\infty} F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx;$ 2) $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{n}} dx;$ $(a > 0)$ 3) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx;$

4) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4 + x^{2}};$ 5) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\alpha x} dx;$ 6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{x} dx.$

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^{2}}.$

# 2. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

ТЕОРЕМА 1 (первый признак сравнения).

*Пусть* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на* $[a;+\infty)$ *и*

$$0 \le f(x) \le \varphi(x)\,,\ \ \forall x \in [c;+\infty)\ \text{(где } c \ge a).$$

*Тогда:*

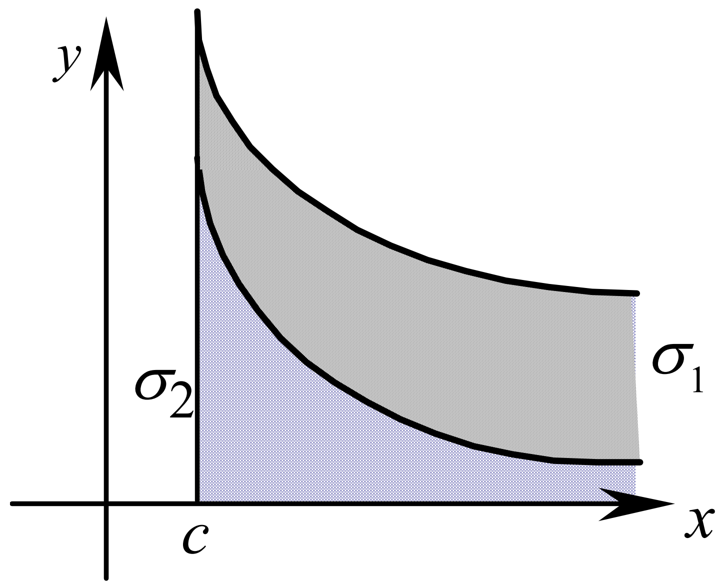
1) *если* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *– сходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *тоже сходится, причем*

$$\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_c^{+\infty} \varphi(x)dx\,;$$

2) *если* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *– расходится, то* $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *тоже расходится.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 1:

Пусть ($\sigma_1$) и ($\sigma_2$) – области в $xOy$ , ограниченные осью $Ox$, прямой $x = c$ и кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = f(x)$ соответственно. Неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ (где $x \in [c;+\infty)$) означает, что область ($\sigma_2$) является частью области ($\sigma_1$).




$\Rightarrow$ 1) если область ($\sigma_1$) имеет площадь, то ее часть ($\sigma_2$) тоже имеет площадь;

2) если говорить о площади области ($\sigma_2$) нельзя, то и для содержащей ее области ($\sigma_1$) тоже нельзя говорить о площади.

ТЕОРЕМА 2 (второй признак сравнения)

*Пусть* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны и неотрицательны на* $[a;+\infty)$.

*Если* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=h$, *где* $h$ *– действительное число, отличное от нуля, то интегралы*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$$

*ведут себя одинаково относительно сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

***Замечания***.

1) Теорема 2 остается справедливой и в том случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и СОХРАНЯЮТ ЗНАК на $[a;+\infty)$.

2) При использовании теорем 1 и 2 в качестве «эталонных» интегралов обычно используют следующие несобственные интегралы:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} dx \ - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при} \ \ n > 1, \\ \textit{расходится} & \textit{при} \ \ n \le 1. \end{cases}$$

$(a > 0)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \ - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при} \ \ \alpha > 0, \\ \textit{расходится} & \textit{при} \ \ \alpha \le 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость интегралы

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}$;  2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$;  3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.
Тогда определены несобственные интегралы

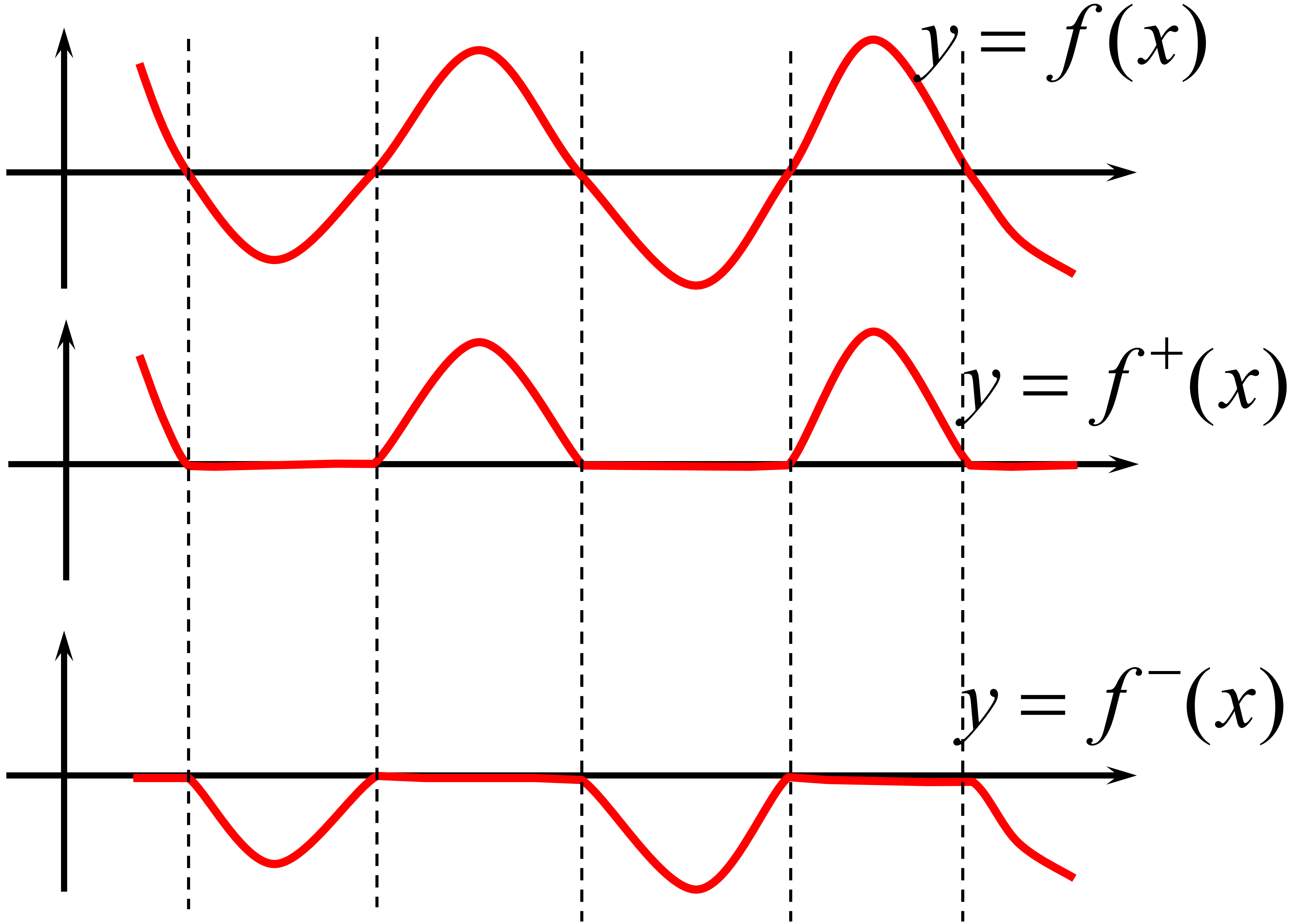
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

ТЕОРЕМА 3 (признак абсолютной сходимости).

*Если сходится интеграл* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, *то и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *тоже будет сходиться.*

*При этом интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***абсолютно сходящимся***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО


$y = f(x)$
$y = f^{+}(x)$
$y = f^{-}(x)$

ПРИМЕР. Абсолютно сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2} \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+x^2}.$$

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, то об интеграле $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ничего сказать нельзя. Он может расходиться, а может и сходиться.

*Если* $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ *расходится, а* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *– сходится, то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *называют* ***условно сходящимся***.

ПРИМЕР. Условно сходится интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

# 3. Несобственные интегралы II рода (от неограниченных функций)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +(-)\infty$

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall [a;b_1]$, где $a \le b_1 < b$ .

$\Rightarrow$ существует $\displaystyle\int_a^{b_1} f(x)dx$

Имеем: $\displaystyle\int_a^{b_1} f(x)dx = I(b_1)$, $D(I) = [a;b)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом* II *рода*** *по промежутку* $[a;b]$ *от функции* $f(x)$, *неограниченной в точке* $b$, *называется предел функции* $I(b_1)$ *при* $b_1 \to b-0$ .

Обозначают: $\displaystyle\int_a^{b} f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx \qquad (5)$$

При этом, если предел в правой части формулы (5) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(a;b]$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +(-)\infty$ ,

то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** II *рода* ***по промежутку*** $[a;b]$ *от функции* $f(x)$, ***неограниченной в точке a*** **:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^b f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]\backslash\{c\}$ и $x = c$ – точка бесконечного разрыва функции, то ***несобственным интегралом*** II *рода от функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $[a;b]$ называют

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (6)$$

Несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ от функции $f(x)$, неограниченной внутри этого отрезка, называется ***сходящимся***, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (6) сходятся.

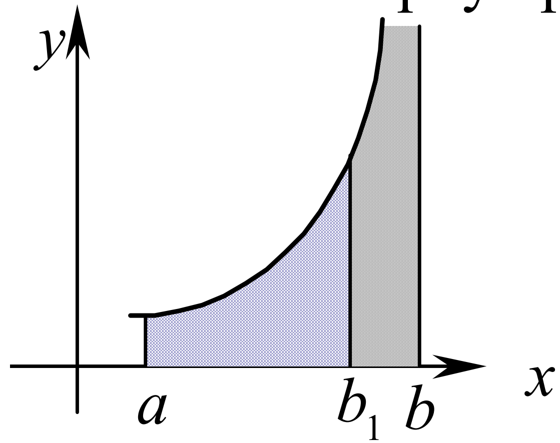
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ называется ***расходящимся***.

Будем рассматривать несобственные интегралы II рода по промежутку $[a;b]$ от функции, неограниченной в точке $b$ . Для других несобственных интегралов II рода все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов II рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $f(x) \geq 0$ , $\forall x \in [a;b)$ .

Тогда $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b_1]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.




$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;b]$ сходится и равен $S$ , то полагают, что область, ограниченная $Ox$, кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (неограниченная криволинейная трапеция) имеет площадь $S$.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы II рода переносятся те же свойства определенных интегралов, что и для сходящихся интегралов I рода (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов II рода также существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;b)$ .

Тогда $\forall b_1 \in [a;b)$ имеем

$$\int_a^{b_1} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b_1} = F(b_1) - F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} \left(F(b_1) - F(a)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{b} f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} F(b_1) - F(a) \qquad (7)$$

Ранее вводили обозначение: $F(b-0)=\lim\limits_{b_1\to b-0}F(b_1)$

$$\Rightarrow \lim_{b_1\to b-0}F(b_1)-F(a)=F(b-0)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b-0}.$$

Тогда (7) примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^{b-0}=\lim_{x\to b-0}F(x)-F(a). \qquad (8)$$

Формулу (8) называют ***обобщением формулы Ньютона – Лейбница*** для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке $b$.

Аналогично для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке $a$, доказывается справедливость формулы

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_{a+0}^{b}=F(b)-\lim_{x\to a+0}F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1)\ \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}dx; \qquad 2)\ \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}dx; \qquad 3)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Сформулированные в п.2 признаки сходимости несобственных интегралов (теоремы 1, 2 и 3) останутся справедливы и для несобственных интегралов II рода.

При использовании теорем 1 и 2 в роли «эталонных» интегралов используют интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}dx \quad - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при}\ \ n<1, \\ \textit{расходится} & \textit{при}\ \ n\geq 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}dx \quad - \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{при}\ \ n<1, \\ \textit{расходится} & \textit{при}\ \ n\geq 1. \end{cases}$$

***Замечание.***

Некоторым расходящимся несобственным интегралам можно приписать определенное числовое значение. А именно:

1) Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, но $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{+N} f(x)dx = A$ ,

то число $A$ называют ***главным значением*** этого ***несобственного интеграла***.

2) ***Главным значением*** расходящегося интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке $c\in[a;b]$ называют число $A$, равное

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_{a}^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right) = A.$$

Обозначают соответствено: $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, $v.p.\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

# §6. Интегралы, зависящие от параметра

## 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , $D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid a \le x \le b\ ,\ c_i \le y_i \le d_i\}$,

$z = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – определена и непрерывна в $D$ .

Придадим переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ конкретные значения:

$y_1 = y_{10}\ ,\ y_2 = y_{20}\ ,\ \ldots,\ y_n = y_{n0}$ (где $c_i \le y_{i0} \le d_i$ )

Рассмотрим функцию $z = f(x, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) = \varphi(x)$

Имеем: $\varphi(x)$ – непрерывна на $[a;b]$ ,

$\Rightarrow$ $\varphi(x)$ – интегрируема на $[a;b]$.

Пусть $\forall \alpha, \beta \in [a;b]$ . Вычислим

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)dx = \underbrace{\int_\alpha^\beta f(x, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})dx}_{\textit{зависит от } y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}}$$

$\Rightarrow$ *функция, заданная на* $D_1 = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid c_i \le y_i \le d_i\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Заданная на множестве

$$D_1 = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid c_i \le y_i \le d_i\} \subset \mathbb{R}^n$$

функция *n* переменных

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_\alpha^\beta f(x, \underbrace{y_1, y_2, \ldots, y_n}_{const})dx$$

называется ***интегралом***, ***зависящим от параметров***.

Переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются ***параметрами***.

Для простоты изложения будем далее рассматривать интегралы, зависящие от одного параметра.

Получившиеся результаты естественным образом будут переноситься на случай интегралов от любого конечного числа параметров.

ТЕОРЕМА 1 (о непрерывности интеграла, зависящего от параметра).

*Пусть* $z = f(x,y)$ *непрерывна в прямоугольнике*

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\ \}$$

*и* $\forall \alpha, \beta \in [a;b]$.

*Тогда функция* $F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dx$ *непрерывна на* $[c;d]$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 2 (о предельном переходе по параметру под знаком интеграла).

*Пусть* $z = f(x,y)$ *непрерывна в прямоугольнике*

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\ \}$$

*и* $\forall \alpha, \beta \in [a;b]$, $\forall y_0 \in [c;d]$ .

*Тогда*

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx .$$

ТЕОРЕМА 3 (о дифференцировании интеграла по параметру).

*Пусть функции* $z = f(x,y)$ *и* $f'_y(x,y)$ *непрерывны в прямоугольнике* $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\ \}$ и $\forall \alpha, \beta \in [a;b]$.

*Тогда функция* $F(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx$ *дифференцируема на* $[c;d]$, *причем*

$$F'(y) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f'_y(x,y)dx \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***правилом Лейбница***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 4 (о непрерывности интеграла, зависящего от параметра в случае переменных пределов интегрирования).

*Пусть* $z = f(x,y)$ *непрерывна в прямоугольнике*

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b \ , \ c \le y \le d \ \} \ ,$$

$\alpha(y)$ *и* $\beta(y)$ *непрерывны на* $[c;d]$ , *причем*

$$a \le \alpha(y) \le b \ , \quad a \le \beta(y) \le b \ , \quad \forall y \in [c;d] \ .$$

*Тогда функция* $F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx$ *непрерывна на* $[c;d]$ .

ТЕОРЕМА 5 (о дифференцировании интеграла по параметру в случае переменных пределов интегрирования).

*Пусть функции* $z = f(x,y)$ *и* $f'_y(x,y)$ *непрерывны в прямоугольнике* $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b\ ,\ c \le y \le d\ \}$ ,

$\alpha(y)$ *и* $\beta(y)$ *дифференцируемы на* $[c;d]$ *, причем*

$$a \le \alpha(y) \le b\ , \quad a \le \beta(y) \le b\ , \quad \forall y \in [c;d]\ .$$

*Тогда функция* $F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$ *дифференцируема на* $[c;d]$ *, причем*

$$F'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y).$$

## 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть $z = f(x,y)$ непрерывна в области

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le +\infty\ ,\ c \le y \le d\ \}$$

и $\forall \alpha \in [a;+\infty)$.

Функция

$$F(y) = \int_{\alpha}^{+\infty} f(x, y)dx \qquad (2)$$

называется ***несобственным интегралом, зависящим от параметра***.

$F(y)$ определена на некотором подмножестве $Y \subseteq [c;d]$, состоящем из значений $y$ , при которых интеграл (2) – сходится.

D[$F(y)$] называют ***областью сходимости интеграла*** (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Несобственный интеграл* (2) *называют* ***правильно сходящемся*** *на множестве* $Y \subseteq [c;d]$ , *если существует такая функция* $\varphi(x)$ , что

1) $|f(x,y)| \le \varphi(x)$ , $\forall y \in Y$ , $\forall x \in [\alpha;+\infty)$ ;

2) $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} \varphi(x)dx$ – сходится.

Говорят: «интеграл (2) мажорируется сходящимся несобственным интегралом».

ТЕОРЕМА 6 (о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра).

Пусть $z = f(x,y)$ непрерывна в области

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le +\infty , \ c \le y \le d \}$$

и $\forall \alpha \in [a;+\infty)$.

Если интеграл (2) сходится правильно на множестве $Y \subseteq [c;d]$ , то он является на $Y$ непрерывной функцией.

ТЕОРЕМА 7 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру).

Пусть функции $z = f(x,y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в области

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le +\infty\ ,\ c \le y \le d\ \}$$

и $\forall \alpha \in [a;+\infty)$.

Если несобственный интеграл $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f'_y(x, y)dx$ сходится правильно на множестве $Y \subseteq [c;d]$ , то функция $F(y) = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x, y)dx$ дифференцируема на $Y$ и справедлива формула

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(x, y)dx\right) = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f'_y(x, y)dx\,.$$

# 3. Эйлеровы интегралы

Эйлеровы интегралы – два интеграла зависящих от параметра, специального вида.

1) Эйлеровым интегралом II рода (***γ-функцией***) называется интеграл вида

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$

СВОЙСТВА γ-функции:

а) $\Gamma(x)$ определена при $x > 0$ .

б) $\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$ – ***формула понижения*** (или ***функциональное уравнение***).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

в) если $0 < x < 1$ , то справедлива ***формула дополнения***:

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Из формулы дополнения, при $x=\frac{1}{2}$, получаем: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

г) если $n\in\mathbb{N}$ , то справедливы равенства:

$$\Gamma(n)=n\,! \quad \text{и} \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2) Эйлеровым интегралом I рода (β-***функцией***) называется интеграл вида

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}dt.$$

СВОЙСТВА β-функции:

а) B($x$,$y$) определена в полуплоскости $x>0$ , $y>0$ .

б) B($x$,$y$) = B($y$,$x$) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

в) Справедливо равенство:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}}dz.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

г) связь β-функции и γ-функции:

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что при $0 < x < 1$

$$\mathrm{B}(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$