Федеральное агентство по образованию
Томский политехнический университет

И.Л. Бухбиндер, И.Б. Самсонов

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Издательство ТПУ
Томск 2007

УДК 530.145:530.12:531.18

Бухбиндер И.Л., Самсонов И.Б. Релятивистские волновые уравнения: учебное пособие. - Томск: Изд. ТПУ, 2007. - 97 с.

В настоящем учебном пособии изложены основные свойства группы Лоренца и группы Пуанкаре, описано построение неприводимых представлений этих групп на спин-тензорных функциях. Показано, что все релятивистские волновые уравнения могут быть получены на основе анализа неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре. Изучены основные свойства уравнений Клейна-Гордона, Дирака, Максвелла и Прока, а также приведен вывод уравнения Паули-Фирца. Данное учебное пособие рекомендуется в качестве вводного раздела по курсу современной квантовой теории поля.

Пособие подготовлено на кафедре высшей математики и математической физики ЕНМФ ТПУ и предназначено для студентов, обучающихся по магистерской программе 510417 – теоретическая и математическая физика.

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор, зав. лаб. математической физики ЕНМФ ТПУ
А.В. Галажинский
д.ф.-м.н., профессор каф. квантовой теории поля ФФ ТГУ
В.А. Бордовицин

Оглавление

Введение

Специальная теория относительности, выражающая принцип релятивистской инвариантности, лежит в основе всей современной физики. Этот принцип был сформулирован А. Эйнштейном в начале XX века и в настоящее время принимается как один из важнейших физических постулатов.

Специальная теория относительности является физической теорией пространства и времени (если отвлечься от гравитации) и трактует все физические явления как события в четырехмерном пространстве-времени, называемом пространством Минковского. Физическое пространство-время обладает замечательной математической структурой, которая проявляет себя в том, что наблюдаемые величины оказываются связанными между собой с помощью определенных преобразований пространственно-временных координат, формирующих группу Ли. Изучение свойств этой группы проливает свет на многие важные свойства физических систем. В частности, все элементарные физические системы (элементарные частицы) должны соответствовать неприводимым представлениям группы неоднородных преобразований Лоренца (группы Пуанкаре). Классификация неприводимых унитарных представлений показывает, что все элементарные частицы описываются двумя вещественными параметрами, называемыми массой и спином частицы, а в случае, если параметр массы равен нулю, то допустимые физические системы отличаются значением параметра спиральности. Кроме того, анализ неприводимых представлений группы Пуанкаре позволяет сформулировать уравнения, описывающие динамику соответствующих элементарных частиц. Данные уравнения принято называть релятивистскими волновыми уравнениями.

В данном учебном пособии производится последовательное изложение базовых принципов релятивистской симметрии. В первой главе подробно описываются основные свойства однородной и неоднородной группы Лоренца, формулируется процедура построения неприводимых представлений этих групп. Показывается, что все неприводимые представления группы Пуанкаре классифицируются собственными значениями операторов Казимира, которые связаны с массой и спином элементарной частицы, а в безмассовом случае неприводимые представления специфицирутся параметром спиральности. Во второй главе вводятся понятия релятивистских полей и релятивистских волновых уравнений. Показывается, что релятивистские волновые уравнения получаются в результате анализа неприводимых представлений группы Пуанкаре. Подробно рассматриваются релятивистские волновые уравнения для полей с низшими спинами, в частности, уравнения Клейна-Гордона, Дирака, Максвелла и Прока, а также уравнение Паули-Фирца. Описываются основные свойства этих уравнений. Важно отметить, что все релятивистские волновые уравнения являются прямыми следствиями релятивистской симметрии.

Материал, вошедший в данное пособие, основывается на современных курсах теории групп и квантовой теории поля. Все необходимые сведения, касающиеся элементов теории групп Ли, можно найти, например, в книгах [1–5]. Описание свойств групп Лоренца и Пуанкаре и их представлений содержится в [5–11]. Требования релятивистской инвариантности в квантовой теории поля и свойства уравнений Клейна-Гордона и Дирака подробно исследуются в [8]. Вывод релятивистских волновых уравнений на основе анализа неприводимых представлений группы Пуанкаре приводится в монографиях [8, 10]. Базовые аспекты квантовой теории поля сформулированы в [9, 12].

Данное учебное пособие предназначено, главным образом, для студентов старших курсов, специализирующихся по теоретической физике, а также для специалистов, работающих в области квантовой теории поля. Оно может быть рекомендовано в качестве вводного раздела по курсу современной квантовой теории поля. Излагаемый материал основан на лекциях И.Л. Бухбиндера, прочитанных в различных университетах России и за рубежом.

Глава 1

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИММЕТРИЯ

1.1. Группа Лоренца и группа Пуанкаре

Все физические явления происходят в пространстве и во времени, поэтому пространство и время сами по себе являются объектами изучения физики. В отсутствии гравитации свойства пространства и времени формулируются в рамках специальной теории относительности.

В релятивистской теории физические пространство и время объединяются в четырехмерное пространство Минковского, то есть в четырехмерное многообразие, параметризованное координатами x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) и снабженное метрикой ds^2 следующего вида[1]

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \tag{1.1}$$

где

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Точки пространства Минковского называются *событиями*, метрика ds^2 называется *интервалом*. Координаты x^μ могут принимать любые вещественные значения $-\infty < x^\mu < \infty$. Координата x^0 называется временнóй, она обычно записывается как $x^0 = ct$, где c – скорость света, а t – время. Обычно используется система единиц, в которой $c = 1$, т.е. $x^0 = t$. Координаты x^i ($i = 1, 2, 3$) называются пространственными, они определяют положение объектов в трехмерном пространстве.

Интервал ds^2 (1.1) не имеет определенного знака и поэтому возможны три варианта:

1. $ds^2 > 0$. В этом случае интервал называется *времениподобным.*

2. $ds^2 < 0$. В этом случае интервал называется *пространственноподобным.*

3. $ds^2 = 0$. В этом случае интервал называется *изотропным* или *светоподобным.*

С математической точки зрения координаты x^μ, в которых интервал имеет указанную форму (1.1), определены неоднозначно. Рассмотрим два фиксированных события, разделенных интервалом ds^2. Пусть имеется две системы координат x^μ и x'^μ, параметризующих эти два события, в каждой из которых интервал имеет форму (1.1), т.е.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{и} \quad ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta. \tag{1.3}$$

[1] По повторяющимся индексам μ, ν, находящимся на разном уровне, подразумевается суммирование. Далее везде будет использоваться это правило, если не оговаривается иное.

Мы будем считать, что координаты x'^{μ} выражаются через x^{μ} посредством гладких функций

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x). \tag{1.4}$$

Поскольку величина интервала не зависит от параметризации фиксированных событий, уравнение на функции преобразования координат выглядит следующим образом

$$\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим линейное неоднородное преобразование координат пространства Минковского

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} x^{\alpha} + a^{\mu}, \tag{1.6}$$

где $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}$ – некоторая матрица, не зависящая от координат, а a^{μ} – вектор с постоянными координатами. Подставим преобразования (1.6) в (1.3), в результате получим следующее уравнение на коэффициенты $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \tag{1.7}$$

или

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}. \tag{1.8}$$

В матричной форме уравнение (1.8) имеет вид

$$\Lambda^{\mathrm{T}} \eta \Lambda = \eta, \tag{1.9}$$

где Λ^{T} – матрица, транспонированная к Λ.

Преобразования координат пространства Минковского (1.6), в которых матрица Λ подчинена уравнению (1.9), называются *неоднородными преобразованиями Лоренца*. Преобразования вида (1.9), для которых $a^{\mu} = 0$, называются *однородными преобразованиями Лоренца.*

Остановимся подробно на преобразованиях Лоренца.

Рассмотрим соотношение (1.9) и вычислим детерминант от правой и левой части данного равенства

$$(\det \Lambda)^2 \det \eta = \det \eta. \tag{1.10}$$

Поскольку $\det \eta = -1 \neq 0$, получаем

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \neq 0, \tag{1.11}$$

т.е. матрица преобразований Лоренца является невырожденной.

Преобразования Лоренца образуют группу. Действительно, рассмотрим два последовательных преобразования Лоренца с матрицами Λ_1, Λ_2

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{1\,\nu} x^{\nu}, \quad x''^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{2\,\nu} x'^{\nu}, \tag{1.12}$$

тогда

$$x''^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{2\,\nu} \Lambda^{\nu}_{1\,\rho} x^{\rho} = (\Lambda_1 \Lambda_1)^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho}.$$

При этом

$$(\Lambda_2 \Lambda_1)^{\mathrm{T}} \eta (\Lambda_2 \Lambda_1) = \Lambda_1^{\mathrm{T}} \Lambda_2^{\mathrm{T}} \eta \Lambda_2 \Lambda_1 = \eta, \tag{1.13}$$

т.е. матрица $\Lambda_2 \Lambda_1$ также осуществляет преобразование Лоренца.

Тождественное преобразование, генерируемое единичной матрицей $I = (\delta^\mu_\nu)$

$$x'^\mu = \delta^\mu_\nu x^\nu = x^\mu,$$

также является преобразованием Лоренца, т.к.

$$I^{\mathrm{T}} \eta I = \eta.$$

Остается показать, что обратное преобразование для преобразования Лоренца также является лоренцевым. Преобразование Лоренца с матрицей Λ имеет вид (1.9)

$$\Lambda^{\mathrm{T}} \eta \Lambda = \eta.$$

Отсюда

$$\Lambda^{\mathrm{T}} \eta = \eta \Lambda^{-1} \quad \text{или} \quad \eta = (\Lambda^{\mathrm{T}})^{-1} \eta \Lambda^{-1},$$

следовательно

$$(\Lambda^{-1})^{\mathrm{T}} \eta \Lambda^{-1} = \eta,$$

что и означает, что Λ^{-1} является обратным элементом группы.

Таким образом, если рассмотреть множество всех преобразований Лоренца и определить в нем операцию умножения как последовательное выполнение преобразований, то согласно приведенным выше свойствам это множество образует группу. Данная группа называется *группой Лоренца* и обозначается как L. В теории групп она также называется группой псевдоортоганальных матриц и обозначается $O(3,1)$.

Рассмотрим некоторые свойства группы Лоренца.

Из равенства (1.11) $(\det \Lambda)^2 = 1$ следует, что

$$\det \Lambda = \pm 1. \tag{1.14}$$

Это условие разбивает группу Лоренца на две компоненты связности, состоящие из матриц с детерминантом, равным $+1$ и -1. Данные компоненты обозначаются L_+ и L_- соответственно. Компонента L_+ содержит единицу группы и является подгруппой, она называется специальной группой Лоренца $SO(3,1)$. L_- подгруппой не является.

Рассмотрим условие (1.8) при $\mu = 0$, $\nu = 0$:

$$1 = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_0 \Lambda^\beta_0 \quad \text{или} \quad (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i_0)^2.$$

Следовательно, $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$, и мы имеем две возможности:

$$\Lambda^0_0 \geq 1, \quad \Lambda^0_0 \leq -1. \tag{1.15}$$

Поскольку от матриц, для которых $\Lambda^0_0 \geq 1$, невозможно непрерывным образом перейти к матрицам с $\Lambda^0_0 \leq 1$, то группа Лоренца дополнительно разбивается на две компоненты $L^\uparrow$ и $L^\downarrow$ соответственно. $L^\uparrow$ содержит единицу группы Лоренца и является подгруппой, $L^\downarrow$ подгруппой не является. $L^\uparrow$ называется *ортохронной группой Лоренца.*

В итоге мы получаем, что группа Лоренца состоит из четырех компонент связности

$$L = L^\uparrow_+ \cup L^\uparrow_- \cup L^\downarrow_+ \cup L^\downarrow_-, \tag{1.16}$$

где
$$
\begin{aligned}
L_+^\uparrow &= \{\Lambda |\det\Lambda = 1, \Lambda_0^0 \geq 1\},\\
L_-^\uparrow &= \{\Lambda |\det\Lambda = -1, \Lambda_0^0 \geq 1\},\\
L_+^\downarrow &= \{\Lambda |\det\Lambda = 1, \Lambda_0^0 \leq 1\},\\
L_-^\downarrow &= \{\Lambda |\det\Lambda = -1, \Lambda_0^0 \leq 1\}.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Компонента $L_+^\uparrow$ является подгруппой и называется *собственной группой Лоренца.* Можно показать, что $L_+^\uparrow$ является связной, т.е. два любых ее элемента можно соединить непрерывной кривой, точками которой являются элементы $L_+^\uparrow$.

Кроме компонент $L_+^\uparrow$, $L_+ = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow$, $L^\uparrow = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow$ подгруппой также является множество $L_+^\uparrow \cup L_-^\downarrow$.

Введем преобразования T и P координат пространства Минковского по правилу
$$
Tx^\mu = \left\{ \begin{array}{c} -x^0 \\ x^i \end{array} \right. , \quad Px^\mu = \left\{ \begin{array}{c} x^0 \\ -x^i \end{array} \right. . \tag{1.18}
$$

Преобразование T называется операцией обращения времени, а преобразование P – операцией пространственного отражения. Явный вид матриц этих преобразований легко найти:
$$
T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.19}
$$

Очевидно, операции T и P принадлежат группе Лоренца, причем
$$
T \in L_-^\downarrow, \quad P \in L_-^\uparrow, \quad T \cdot P \in L_+^\downarrow.
$$

Легко показать, что выполняются следующие свойства
$$
\begin{aligned}
&\forall\ \tilde\Lambda \in L_-^\downarrow \ \ \exists\Lambda:\ \Lambda \in L_+^\uparrow,\ \tilde\Lambda = T\Lambda,\\
&\forall\ \tilde\Lambda \in L_-^\uparrow \ \ \exists\Lambda:\ \Lambda \in L_+^\uparrow,\ \tilde\Lambda = P\Lambda,\\
&\forall\ \tilde\Lambda \in L_+^\downarrow \ \ \exists\Lambda:\ \Lambda \in L_+^\uparrow,\ \tilde\Lambda = TP\Lambda.
\end{aligned}
$$

Операции T и P называются *дискретными преобразованиями пространства-времени.*

Таким образом, любое преобразование Лоренца является либо собственным преобразованием Лоренца, либо может быть представлено в виде композиции собственного преобразования Лоренца и одного из дискретных преобразований T, P или TP. Поэтому основной интерес для изучения представляет именно собственная группа Лоренца.

Вернемся к рассмотрению преобразований (1.6)
$$
x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,
$$

где матрица Λ удовлетворяет уравнению $\Lambda^\mathrm{T}\eta\Lambda = \eta$, а a^μ – произвольный постоянный вектор. Как мы видим, неоднородные преобразования Лоренца задаются парой (Λ, a). Очевидно, что пара $(\Lambda, 0)$ соответствует преобразованиям Лоренца, а пара (I, a) задает пространственно-временные трансляции на вектор a.

Покажем, что неоднородные преобразования Лоренца образуют группу. Совершим последовательно два таких преобразования:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{1\nu} x^{\nu} + a^{\mu}_{1}, \quad x''^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{2\nu} x'^{\nu} + a^{\mu}_{2}.$$

Тогда результат последовательного применения этих преобразований будет

$$x''^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{2\nu}(\Lambda^{\nu}_{1\lambda} x^{\lambda} + a^{\nu}_{1}) + a^{\mu}_{1} = (\Lambda_2\Lambda_1)^{\mu}{}_{\lambda} x^{\lambda} + \Lambda^{\mu}_{2\nu} a^{\nu}_{1} + a^{\mu}_{2},$$

то есть

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \tag{1.20}$$

Очевидно, что произведение $\Lambda_2\Lambda_1$ является преобразованием Лоренца, а $\Lambda_2 a_1 + a_2$ – некоторая трансляция. Следовательно, произведение двух неоднородных преобразований Лоренца есть снова неоднородное преобразование Лоренца.

Единичному преобразованию соответствует $(I, 0)$.

Обратное преобразование к (Λ, a) есть $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$, поскольку

$$(\Lambda, a)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda\Lambda^{-1}, -\Lambda\Lambda^{-1}a + a) = (I, 0).$$

Группа, образованная этими преобразованиями, называется *неоднородной группой Лоренца* или *группой Пуанкаре.*

Отметим вкратце топологические свойства группы Пуанкаре. Поскольку группа Лоренца состоит из четырех компонент, то и группа Пуанкаре также распадается в сумму четырех компонент связности

$$P = P^{\uparrow}_{+} \cup P^{\uparrow}_{-} \cup P^{\downarrow}_{+} \cup P^{\downarrow}_{-},$$

где каждая из компонент группы Пуанкаре получается из соответствующей компоненты группы Лоренца добавлением трансляций.

Единица группы содержится в компоненте $P^{\uparrow}_{+}$, которая является подгруппой и называется собственной группой Пуанкаре.

В заключении параграфа отметим еще одно полезное свойство. Из закона умножения (1.20) следует, что любая пара (Λ, a) может быть записана в виде

$$(\Lambda, a) = (I, a)(\Lambda, 0), \tag{1.21}$$

то есть любое неоднородное преобразование Лоренца может быть представлено в виде произведения преобразований Лоренца и пространственно-временных трансляций. Из формул (1.20, 1.21) следует, что группа Пуанкаре является полупрямым произведением группы Лоренца на группу трансляций.

Задача 1. Доказать, что необходимым условием выполнения равенства (1.5) при произвольных преобразованиях (1.4), является линейность этих преобразований, т.е. они имеют вид (1.6).

Задача 2. Показать, что собственное преобразование Лоренца может быть представлено в виде произведения трех преобразований

$$\Lambda = R\Lambda_x(\psi)\tilde{R},$$

где Λ_x – стандартный Лоренцев буст в плоскости x^0, x^1, т.е.

$$\Lambda_x(\psi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а R и $\tilde{R}$ являются некоторыми чисто пространственными поворотами:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1^1 & R_2^1 & R_3^1 \\ 0 & R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 \\ 0 & R_1^3 & R_2^3 & R_3^3 \end{pmatrix}, \quad R^{\mathrm{T}} R = \mathbf{1}, \quad \det R = 1.$$

То есть $R \in SO(3)$. Можно также показать, что любой поворот R представляется в виде произведения поворотов вокруг каждой из координатных осей:

$$R = R_x(\phi_1) R_y(\phi_2) R_z(\phi_3),$$

где

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad R_y(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix},$$

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Алгебра Ли группы Пуанкаре

Напомним некоторые сведения из теории групп, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1. Группа G с элементами g называется группой Ли, если ее элементы являются гладкими функциями конечного количества параметров $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$g = g(\alpha).$$

Операция группового умножения записывается следующим образом

$$g(\alpha) = g(\beta) g(\gamma),$$

где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, причем параметры α являются гладкими функциями от двух наборов параметров β и γ

$$\alpha = \alpha(\beta, \gamma).$$

Аналогично операция нахождения обратного элемента

$$g(\alpha) = (g(\beta))^{-1}$$

должна задаваться гладкими функциями

$$\alpha = \alpha(\beta).$$

2. Представлением группы G в линейном пространстве X называется отображение T группы G в множество линейных операторов в пространстве X

$$\forall g \in G \quad T : g \to T(g),$$

такое, что выполнено условие

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G. \tag{1.22}$$

3. Алгеброй Ли называется линейное пространство, в котором задана операция умножения элементов, обозначаемая $[a, b]$ и удовлетворяющая следующим свойствам:

$$\begin{aligned}
&[a,b] = -[b,a],\\
&[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a,c] + \beta[b,c], \quad \alpha,\beta = const,\\
&[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку алгебра Ли является линейным пространством, в ней можно выбрать базис $\{e_i\}$, и любой элемент алгебры можно представить в виде разложения по этому базису

$$a = a^i e_i.$$

Произведение базисных элементов $[e_i, e_j]$ снова является элементом алгебры, поэтому

$$[e_i, e_j] = C^k_{ij} e_k, \tag{1.23}$$

где $C^k_{ij} = -C^k_{ji}$ – константы, называемые структурными постоянными алгебры Ли.

4. Представлением алгебры Ли в линейном пространстве X называется отображение Γ, которое каждому элементу a ставит в соответствие линейный оператор $\Gamma(a)$, действующий в X

$$\Gamma: \ a \to \Gamma(a),$$

причем умножению Ли соответствует коммутатор операторов

$$\Gamma([a_1, a_2]) = [\Gamma(a_1), \Gamma(a_2)] = \Gamma(a_1)\Gamma(a_2) - \Gamma(a_2)\Gamma(a_1). \tag{1.24}$$

Очевидно, что операторы $\Gamma_i = \Gamma(e_i)$ образуют базис, то есть для любого $\Gamma(a)$ имеем

$$\Gamma(a) = a^i \Gamma(e_i).$$

Операторы Γ_i называют генераторами представления алгебры Ли. Они также удовлетворяют соотношениям (1.23)

$$[\Gamma_i, \Gamma_j] = C^k_{ij} \Gamma_k.$$

Отсюда видно, что структурные постоянные не зависят от выбора представления (однако они зависят от выбора базиса $\{e_i\}$).

5. Пусть G – группа Ли с элементами $g(\alpha)$, параметризованными координатами $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ таким образом, что $g(0) = e$. Фундаментальная теорема теории групп Ли гласит, что в окрестности единичного элемента в любом представлении T этой группы выполняется соотношение

$$T(g) = e^{i\alpha^n \Gamma_n}, \tag{1.25}$$

где Γ_n – операторы, образующие базис в представлении алгебры Ли, действующие в пространстве представления группы.

Фактически здесь утверждается, что любой группе Ли соответствует некоторая алгебра Ли, причем в окрестности единицы группы представления группы Ли и алгебры Ли могут быть связаны экспоненциальным соотношением. Таким образом, эта теорема сводит задачу об изучении представлений группы Ли к описанию представлений алгебры Ли, которая соответствует этой группе. Алгебра Ли однозначно определяется своими структурными константами, и значит, эти постоянные однозначно определяют свойства группы Ли в окрестности единицы.

Перейдем теперь к изучению алгебры Ли группы Пуанкаре. Поскольку алгебра Ли задается своими коммутационными соотношениями, найдем коммутационные соотношения этой алгебры.

Группа Пуанкаре задает преобразования координат пространства Минковского (1.6)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad \Lambda^{\mathrm{T}} \eta \Lambda = \eta, \quad a^{\mu} = const.$$

В бесконечно малой форме эти преобразования имеют вид

$$\delta x^{\mu} = x'^{\mu} - x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} - x^{\mu} + a^{\mu}.$$

Запишем матрицу $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ в виде

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu},$$

тогда

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}. \tag{1.26}$$

Условие $\Lambda^{\mathrm{T}} \eta \Lambda = \eta$ накладывает на параметры $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ следующие ограничение

$$\eta_{\alpha\beta}(\delta^{\alpha}_{\mu} + \omega^{\alpha}{}_{\mu})(\delta^{\beta}_{\nu} + \omega^{\beta}{}_{\nu}) = \eta_{\mu\nu}. \tag{1.27}$$

Раскрывая скобки и отбрасывая члены второго порядка малости по $\omega^{\mu}{}_{\nu}$, уравнение (1.27) приводит к следующему условию

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0. \tag{1.28}$$

Таким образом, матрица $\omega_{\mu\nu}$ антисимметрична и имеет, следовательно, шесть независимых компонент.

Параметры $\omega_{\mu\nu}$ удобно выбрать в качестве локальных координат на группе Лоренца, поскольку справедливо равенство

$$\Lambda(\omega = 0) = I.$$

Отсюда видно, что группа Лоренца – шестипараметрическая группа. Соответственно группа Пуанкаре – десятипараметрическая, локальные координаты в окрестности единицы можно выбрать в виде $(\omega_{\mu\nu}, a_{\mu})$.

Перейдем к вычислению коммутационных соотношений группы Пуанкаре.

Пусть $T(\Lambda, a)$ – некоторое представление группы Пуанкаре. Так как любой элемент группы Пуанкаре записывается в виде произведения (1.21)

$$(\Lambda, a) = (I, a)(\Lambda, 0),$$

то же самое будет справедливо и для операторов представления

$$T(\Lambda, a) = T(I, a) T(\Lambda, 0).$$

Обозначим $T(I, a) = T(a)$, $T(\Lambda, 0) = T(\Lambda)$. Теперь, согласно общей теореме групп и алгебр Ли, операторы T могут быть представлены в виде

$$T(a) = e^{i a^{\mu} P_{\mu}}, \quad T(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}}, \quad M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu},$$

где P_μ и $M_{\mu\nu}$ – генераторы представления алгебры Ли группы Пуанкаре. Оператор P_μ соответствует преобразованию $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ и называется генератором пространственно-временных трансляций. Соответственно, $M_{\mu\nu}$ отвечает за преобразования Лоренца и называется генератором Лоренцевых вращений (M_{0i} – Лоренцевы бусты, M_{ij} – чисто пространственные повороты).

Наша цель состоит в нахождении коммутационных соотношений между этими генераторами.

Из определения представления следует

$$T(\Lambda_1, a_1)T(\Lambda_2, a_2) = T((\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2)) = T(\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1),$$

тогда в силу $T(\Lambda, a) = T(a)T(\Lambda)$ имеем

$$T(a_1)T(\Lambda_1)T(a_2)T(\Lambda_2) = T(\Lambda_1 a_2 + a_1)T(\Lambda_1\Lambda_2). \tag{1.29}$$

Это основное соотношение для получения коммутаторов генераторов.

1. Рассмотрим равенство (1.29) при $\Lambda_1 = \Lambda_2 = I$:

$$T(a_1)T(a_2) = T(a_1 + a_2)$$

или

$$e^{ia_1^\mu P_\mu} e^{ia_2^\nu P_\nu} = e^{i(a_1^\mu + a_2^\mu)P_\mu}. \tag{1.30}$$

Будем считать параметры a_1^μ, a_2^μ малыми и разложим экспоненты в равенстве (1.30) в ряд до второго порядка малости

$$(1+ia_1^\mu P_\mu - \frac{1}{2}a_1^\mu a_1^\nu P_\mu P_\nu)(1+ia_2^\mu P_\mu - \frac{1}{2}a_2^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu) = 1+i(a_1^\mu + a_2^\mu)P_\mu - \frac{1}{2}(a_1^\mu + a_2^\mu)(a_1^\nu + a_2^\nu)P_\mu P_\nu$$

или

$$\begin{aligned} &1 + i(a_1^\mu + a_2^\mu)P_\mu - a_1^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu - \tfrac{1}{2}a_1^\mu a_1^\nu P_\mu P_\nu - \tfrac{1}{2}a_2^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu = \\ &= 1 + i(a_1^\mu + a_2^\mu)P_\mu - \tfrac{1}{2}a_1^\mu a_1^\nu P_\mu P_\nu - \tfrac{1}{2}a_2^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu - \tfrac{1}{2}(a_1^\mu a_2^\nu + a_2^\mu a_1^\nu)P_\mu P_\nu. \end{aligned}$$

Отсюда, приравнивая слагаемые второго порядка малости, получаем

$$a_1^\mu a_2^\nu P_\mu P_\nu = \frac{1}{2}a_1^\mu a_2^\nu (P_\mu P_\nu + P_\nu P_\mu).$$

Следовательно, операторы P_μ коммутируют между собой

$$[P_\mu, P_\nu] = 0. \tag{1.31}$$

2. Подставим в (1.29) $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, тогда

$$T(\Lambda_1)T(a)T(\Lambda_2) = T(\Lambda_1 a)T(\Lambda_1\Lambda_2).$$

Пусть $\Lambda_1 = \Lambda$, $\Lambda_2 = \Lambda^{-1}$, тогда

$$T(\Lambda)T(a)T^{-1}(\Lambda) = T(\Lambda a).$$

Отсюда

$$T(\Lambda)e^{ia^\mu P_\mu}T^{-1}(\Lambda) = e^{i\Lambda^\mu{}_\nu a^\nu P_\mu}.$$

Воспользуемся очевидным соотношением

$$Ae^{B}A^{-1} = e^{ABA^{-1}},$$

справедливым для любых обратимых операторов A, B, тогда

$$e^{ia^{\mu}T(\Lambda)P_{\mu}T^{-1}(\Lambda)} = e^{i\Lambda^{\mu}{}_{\nu}a^{\nu}P_{\mu}}$$

или

$$T(\Lambda)P_{\mu}T^{-1}(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P_{\mu}.$$

Последнее соотношение показывает, что P_{μ} является одновременно оператором в пространстве представления и вектором относительно лоренцевых преобразований.

Воспользуемся соотношениями

$$T(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}, \quad T^{-1}(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}, \quad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu},$$

тогда в бесконечно малой форме (пренебрегая членами второго порядка малости по $\omega_{\mu\nu}$)

$$\begin{aligned}
&(1 + \tfrac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta})P_{\mu}(1 - \tfrac{i}{2}\omega^{\lambda\sigma}M_{\lambda\sigma}) = (\delta^{\nu}_{\mu} + \omega^{\nu}{}_{\mu})P_{\nu},\\
&\tfrac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}P_{\mu} - \tfrac{i}{2}P_{\mu}\omega^{\lambda\sigma}M_{\lambda\sigma} = \omega^{\nu}{}_{\mu}P_{\nu},\\
&\tfrac{i}{2}\omega^{\alpha\beta}[M_{\alpha\beta}, P_{\mu}] = \omega^{\alpha\beta}\eta_{\beta\mu}P_{\alpha}.
\end{aligned}$$

В результате

$$[M_{\alpha\beta}, P_{\mu}] = i(\eta_{\alpha\mu}P_{\beta} - \eta_{\beta\mu}P_{\alpha}). \tag{1.32}$$

3. Подставим в (1.29) $a_1 = a_2 = 0$, тогда

$$T(\Lambda_1)T(\Lambda_2) = T(\Lambda_1\Lambda_2)$$

или

$$T(\Lambda_1)T(\Lambda_2)T^{-1}(\Lambda_1) = T(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_1^{-1}). \tag{1.33}$$

Запишем левую часть этого равенства в инфинитезимальной форме и удержим только члены $\sim \omega_1\omega_2$:

$$\begin{aligned}
&T(\Lambda_1)T(\Lambda_2)T^{-1}(\Lambda_1) =\\
&\quad = (1 + \tfrac{i}{2}\omega_1^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta})(1 + \tfrac{i}{2}\omega_2^{\mu\nu}M_{\mu\nu})(1 - \tfrac{i}{2}\omega_1^{\lambda\sigma}M_{\lambda\sigma}) =\\
&\quad = 1 + \tfrac{i}{2}\omega_2^{\mu\nu}M_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}\omega_1^{\alpha\beta}\omega_2^{\mu\nu}[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] + \ldots .
\end{aligned} \tag{1.34}$$

В правой части равенства (1.33) имеем:

$$\begin{aligned}
&(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_1^{-1})^{\alpha}_{\mu} = (\delta^{\alpha}_{\beta} + \omega_1{}^{\alpha}{}_{\beta})(\delta^{\beta}_{\lambda} + \omega_2{}^{\beta}{}_{\lambda})(\delta^{\lambda}_{\mu} - \omega_1{}^{\lambda}{}_{\mu}) =\\
&\quad = \delta^{\alpha}_{\mu} + \omega_2{}^{\alpha}{}_{\mu} + \omega_1{}^{\alpha}{}_{\beta}\omega_2{}^{\beta}{}_{\mu} - \omega_2{}^{\alpha}{}_{\beta}\omega_1{}^{\beta}{}_{\mu} + \ldots,
\end{aligned}$$

поэтому

$$T(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_1^{-1}) = 1 + \frac{i}{2}(\omega_2^{\alpha\beta} + \omega_1{}^{\alpha}{}_{\lambda}\omega_2{}^{\lambda\beta} - \omega_2{}^{\alpha}{}_{\lambda}\omega_1^{\lambda\beta})M_{\alpha\beta} + \ldots . \tag{1.35}$$

Приравнивая выражения (1.34) и (1.35), получаем

$$-\frac{1}{4}\omega_1^{\alpha\beta}\omega_2^{\mu\nu}[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = \frac{i}{2}(\omega_1{}^{\alpha}{}_{\lambda}\omega_2{}^{\lambda\beta} - \omega_2{}^{\alpha}{}_{\lambda}\omega_1^{\lambda\beta})M_{\alpha\beta},$$

следовательно,

$$\omega_1^{\alpha\beta}\omega_2^{\mu\nu}[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = -2i\omega_1^{\alpha\beta}\omega_2^{\mu\nu}(\eta_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\nu}M_{\mu\beta})$$

или

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\alpha\nu}M_{\mu\beta} - \eta_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} + \eta_{\alpha\mu}M_{\beta\mu} - \eta_{\beta\nu}M_{\mu\alpha}). \tag{1.36}$$

Итак, собирая вместе соотношения (1.31–1.36), получаем, что алгебра Ли группы Пуанкаре имеет следующие коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [M_{\alpha\beta}, P_\mu] &= i(\eta_{\alpha\mu}P_\beta - \eta_{\beta\mu}P_\alpha), \\ [M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} - \eta_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} + \eta_{\alpha\nu}M_{\mu\beta} - \eta_{\beta\nu}M_{\mu\alpha}). \end{aligned} \tag{1.37}$$

По поводу коммутационных соотношений (1.37) можно сделать следующие замечания:

- генераторы подгруппы трансляций P_μ коммутируют между собой, т.е. эта группа абелева;
- в коммутационные соотношения для генераторов группы Лоренца не входят генераторы трансляций, т.е. группа Лоренца является подгруппой в группе Пуанкаре;
- коммутаторы между моментами $M_{\alpha\beta}$ и импульсами P_μ не равны нулю, а выражаются через генераторы трансляций P_μ. Это свойство отражает тот факт, что группа Пуанкаре является не прямым, а полупрямым произведением группы Лоренца и группы трансляций.

Задача 3. Пусть есть оператор S_μ, действующий в пространстве представления группы Пуанкаре, который преобразуется как вектор, и оператор $S_{\mu\nu}$, преобразующийся тензор. Показать, что

$$\begin{aligned} &[M_{\alpha\beta}, S_\mu] = i(\eta_{\mu\nu}S_\beta - \eta_{\beta\mu}S_\alpha), \\ &[M_{\alpha\beta}, S_{\mu\nu}] = i(\eta_{\alpha\mu}S_{\beta\nu} - \eta_{\beta\mu}S_{\alpha\nu} + \eta_{\alpha\nu}S_{\mu\beta} - \eta_{\beta\nu}S_{\mu\alpha}). \end{aligned}$$

Задача 4. Введем $M_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}$ – генераторы поворотов вокруг i-ой оси. Здесь ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор Леви-Чевитты, $\varepsilon_{123} = +1$. В явном виде: $M_1 = M_{23}$, $M_2 = M_{31}$, $M_3 = M_{12}$. Показать, что операторы M_i образуют алгебру $SO(3)$, т.е.

$$[M_i, M_j] = -i\varepsilon_{ijk}M_k.$$

Аналогично можно показать, что генераторы M_{01}, M_{02}, M_{12} образуют алгебру $SO(1,2)$.

1.3. Группа Лоренца и группа $SL(2,C)$

В этом параграфе мы покажем, что изучение представлений собственной группы Лоренца тесно связано с рассмотрением представлений группы $SL(2,C)$, т.е. группы комплексных 2×2 матриц с определителем, равным единице.

Рассмотрим линейное пространство эрмитовых 2×2 матриц X

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad X^\dagger = X. \tag{1.38}$$

Это пространство четырехмерно, в нем существует базис из четырех матриц $\sigma_\mu = (\sigma_0, \sigma_i)$ следующего вида

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

Матрицы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, определенные в выражении (1.39), называются *матрицами Паули*. Любую матрицу X вида (1.38) можно разложить по базису (1.39)

$$X = X^\mu \sigma_\mu, \tag{1.40}$$

где X^μ – вещественные числа, поскольку X и σ_μ эрмитовы матрицы. Записывая выражение (1.40) в явном виде, имеем

$$\begin{aligned} X = X^\mu \sigma_\mu \; &= \begin{pmatrix} X^0 & 0 \\ 0 & X^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & X^1 \\ X^1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iX^2 \\ iX^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X^3 & 0 \\ 0 & -X^3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} X^0 + X^3 & X^1 - iX^2 \\ X^1 + iX^2 & X^0 - X^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$\det X = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu. \tag{1.41}$$

Рассмотрим теперь матрицу $N \in SL(2, C)$ и совершим с ее помощью преобразование в пространстве эрмитовых матриц по правилу

$$X \to X' = N X N^\dagger. \tag{1.42}$$

Очевидно, X' снова является эрмитовой матрицей

$$X'^\dagger = (N X N^\dagger)^\dagger = N X^\dagger N^\dagger = X'.$$

Следовательно, X и X' могут быть разложены по одному и тому же базису (1.37):

$$X = X^\mu \sigma_\mu, \qquad X' = X'^\mu \sigma_\mu,$$

причем их координаты должны быть связаны некоторым линейным преобразованием (поскольку преобразование (1.42) линейно)

$$X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu,$$

где явный вид матриц Λ должен определяться видом матриц N. Покажем, что матрицы Λ принадлежат группе Лоренца. Заметим, что поскольку матрицы N и $N^\dagger$ унимодулярны

$$\det N = \det N^\dagger = 1,$$

преобразования (1.42) сохраняют детерминант матриц X

$$\det X' = \det N \det X \det N^\dagger = \det X.$$

Благодаря этому свойству, используя (1.41), имеем

$$\eta_{\mu\nu} X'^{\mu} X'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu} \quad \text{или}$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} X^{\alpha} X^{\beta} = \eta_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu},$$

откуда, в силу произвольности X^{μ}, следует

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

Последнее условие означает, что матрицы Λ удовлетворяют условию (1.8), которое определяет группу Лоренца.

Таким образом, мы получили отображение $\pi : SL(2, C) \to L$, заданное следующими правилами:

1. Каждому вектору пространства Минковского с координатами X^{μ} сопоставляется 2×2 эрмитова матрица $X = X^{\mu} \sigma_{\mu}$. Это отображение является взаимооднозначным. Скалярному квадрату вектора соответствует определитель матрицы (1.41). **2.** Каждой матрице $N \in SL(2, C)$, осуществляющей преобразование

$$X' = N X N^{\dagger},$$

соответствует матрица из группы Лоренца, связывающая координаты X'^{μ} и X^{μ}

$$X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu}.$$

Поэтому будем далее обозначать $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N)$.

Рассмотрим свойства этого отображения.

1. Отображение $\pi : SL(2, C) \to L$ является гомоморфизмом.

Действительно, рассмотрим два последовательных преобразования:

$$X' = N_1 X N_1^{\dagger} \quad \text{и} \quad X'' = N_2 X N_2^{\dagger},$$

при этом

$$X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N_1) X^{\nu} \quad \text{и} \quad X''^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N_2) X'^{\nu}.$$

С другой стороны,

$$X'' = N_2 N_1 X N_1^{\dagger} N_2^{\dagger} = N_2 N_1 X (N_2 N_1)^{\dagger},$$

следовательно,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N_2 N_1) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}(N_2) \Lambda^{\rho}{}_{\nu}(N_1),$$

т.е. произведению матриц из $SL(2, C)$ при данном отображении соответствует последовательное выполнение преобразований Лоренца. Очевидно, что единица в группе $SL(2, C)$ отображается в единицу в группе Лоренца

$$X' = I X I^{\dagger} = X \quad \Rightarrow \quad X'^{\mu} = X^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu} X^{\nu}.$$

Следовательно, отображение π является гомоморфизмом.

2. Ядро гомоморфизма π состоит из двух матриц $\mathbf{1}$ и $-\mathbf{1}$

$$\mathrm{Ker}\, \pi = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}. \tag{1.43}$$

По определению, ядром гомоморфизма π является множество элементов группы $SL(2,C)$, которые при отображении переходят в единицу группы L:

$$\operatorname{Ker}\pi = \{N \in SL(2,C) \mid \Lambda^\mu{}_\nu(N) = \delta^\mu_\nu\}.$$

Докажем утверждение (1.43).

Если $N \in \operatorname{Ker}\pi$, то $\Lambda^\mu{}_\nu(N) = \delta^\mu_\nu$ и $X'^\mu = X^\mu$, т.е.

$$X = NXN^\dagger \quad \forall N \in \operatorname{Ker}\pi, \quad \forall X. \tag{1.44}$$

При $X = \mathbf{1}$ имеем

$$\mathbf{1} = NN^\dagger \quad \Rightarrow \quad N^\dagger = N^{-1}, \quad N \in \operatorname{Ker}\pi.$$

Тогда уравнение (1.44) можно записать в виде

$$X = NXN^{-1}$$

или

$$XN = NX. \tag{1.45}$$

Выражение (1.45) означает, что матрица N коммутирует со всеми матрицами X. Это возможно, только если она кратна единичной матрице

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det N = \lambda^2 = 1$, имеем $\lambda = \pm 1$, следовательно,

$$N = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker}\pi = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Итак, рассматриваемое отображение π есть $2 \to 1$ гомоморфизм, т.е. прообраз любого элемента $\Lambda^\mu{}_\nu(N)$ состоит из двух элементов N и $-N$

$$\pi^{-1}[\Lambda^\mu{}_\nu(N)] = \pm N.$$

3. Образом гомоморфизма π является собственная группа Лоренца $L_+^\uparrow$ (см. рис. 1.1)

$$\operatorname{Im}\pi = L_+^\uparrow. \tag{1.46}$$

Утверждение, что $\operatorname{Im}\pi \subset L_+^\uparrow$, т.е. $SL(2,C)$ отображается <u>*в*</u> собственную группу Лоренца, основано на следующих двух фактах:

- группа $SL(2,C)$ является связной (она определяется единственным условием $\det N = 1$), а поскольку π – гладкий гомоморфизм, то отображение ведется в связную компоненту группы Лоренца;

- $\mathbf{1} \in \operatorname{Im}\pi$, следовательно, отображение ведется в связную компоненту, содержащую единицу группы, т.е. в $L_+^\uparrow$.

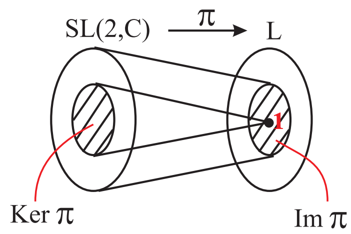


Рис. 1.1. Схематическое изображение отображения π. При данном гомоморфизме группа $SL(2,C)$ отображается в подмножество в группе L, ядро гомоморфизма переходит в единичный элемент группы Лоренца.

Чтобы доказать исходное утверждение, необходимо показать, что отображение ведется *на* всю собственную группу Лоренца. Другими словами, следует убедиться, что каждому элементу из $L_+^\uparrow$ соответствует некоторый элемент из $SL(2,C)$. Найдем явные формулы, определяющие для каждого собственного преобразования Лоренца его прообраз. Заметим, что группа Лоренца – связная шестипараметрическая группа Ли, следовательно, она имеет шесть однопараметрических подгрупп (3 вращения и 3 буста), задаваемых следующими элементами:

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_x(\psi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_y(\psi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & 0 & \operatorname{sh}\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\psi & 0 & \operatorname{ch}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_z(\psi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & 0 & 0 & \operatorname{sh}\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\psi & 0 & 0 & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}.$$

Любой элемент из $L_+^\uparrow$ может быть представлен в виде произведения этих шести матриц. Поэтому для каждой из этих матриц необходимо указать ее прообраз в группе $SL(2,C)$. Эти прообразы имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}[R_x(\phi)] &= \pm\exp(i\frac{\phi}{2}\sigma_1) = \pm\begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} & i\sin\frac{\phi}{2} \\ i\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}, \\
\pi^{-1}[R_y(\phi)] &= \pm\exp(i\frac{\phi}{2}\sigma_2) = \pm\begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} & \sin\frac{\phi}{2} \\ -\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}, \\
\pi^{-1}[R_z(\phi)] &= \pm\exp(i\frac{\phi}{2}\sigma_3) = \pm\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \\
\pi^{-1}[\Lambda_x(\psi)] &= \pm\exp(\frac{\psi}{2}\sigma_1) = \pm\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\psi}{2} & \operatorname{sh}\frac{\psi}{2} \\ \operatorname{sh}\frac{\psi}{2} & \operatorname{ch}\frac{\psi}{2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}[\Lambda_y(\psi)] &= \pm\exp(\frac{\psi}{2}\sigma_2) = \pm\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\psi}{2} & -i\operatorname{sh}\frac{\psi}{2} \\ i\operatorname{sh}\frac{\psi}{2} & \operatorname{ch}\frac{\psi}{2} \end{pmatrix}, \\
\pi^{-1}[\Lambda_z(\psi)] &= \pm\exp(\frac{\psi}{2}\sigma_3) = \pm\begin{pmatrix} e^{\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.47}
$$

Задача 5. Проверить формулы (1.47).

Таким образом, мы показали, что построенный $2 \to 1$ гомоморфизм π отображает группу $SL(2,C)$ на собственную группу Лоренца $L_+^\uparrow$.

Рассмотрим теперь вопрос о связи представлений группы $SL(2,C)$ и собственной группы Лоренца.

Пусть имеется некоторое представление собственной группы Лоренца

$$T:\ \Lambda \longrightarrow T(\Lambda), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow.$$

Используя построенный выше гомоморфизм π, автоматически получаем представления группы $SL(2,C)$:

$$\tilde{T}:\ N \longrightarrow T(\Lambda(N)), \quad N \in SL(2,C).$$

Поскольку гомоморфизм π обладает свойством

$$\Lambda(-N) = \Lambda(N),$$

то для построенного таким образом представления $\tilde{T}$ будет выполняться свойство

$$\tilde{T}(-N) = \tilde{T}(N), \quad N \in SL(2,C).$$

Однако не все представления группы $SL(2,C)$ удовлетворяют этому свойству. У данной группы существует другой класс представлений, для которых справедливо

$$\tilde{T}(-N) = -\tilde{T}(N).$$

Очевидно, что таким представлениям группы $SL(2,C)$ не соответствуют никакие представления собственной группы Лоренца. Это связано с тем, что отображение π^{-1} ставит в соответствие каждому $\Lambda \in L_+^\uparrow$ два оператора

$$\Lambda \longrightarrow \tilde{T}[\pi^{-1}(\Lambda)] = \pm\tilde{T}(N),$$

в то время, как, по определению представления, каждому элементу группы должен соответствовать только один оператор. Такие отображения, когда каждому элементу группы ставятся в соответствие два оператора, а не один, могут трактоваться как двузначные представления групп.

Введенное здесь двузначное представление группы Лоренца является частным случаем более общей конструкции, известной в теории групп как представления универсальной накрывающей группы. Приведем некоторые факты из теории групп, касающиеся этого вопроса.

1. *Группа Ли G называется односвязной, если любой замкнутый путь в ней может быть непрерывным образом стянут в точку.* Примеры односвязных групп и многообразий: R^n, сфера S^n $(n>1)$, $SU(2)$, $SL(2,C)$. Неодносвязные многообразия: тор T^n, цилиндр $S^1 \times R^1$, $R^2 \setminus 0$, $SO(3)$, $L_+^\uparrow$.

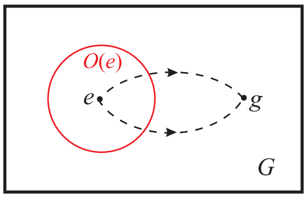


Рис. 1.2. Экспоненциальное отображение (1.48) может быть расширено за пределы окрестности единицы группы с помощью группового умножения элементов.

2. *Для односвязных групп Ли существует взаимооднозначное соответствие между представлением самой группы и ее алгебры.*

Прокомментируем второе утверждение более подробно. Пусть $T(g)$ – некоторое представление произвольной группы Ли G, а соответствующее представление алгебры Ли задается генераторами Γ_n. Тогда согласно фундаментальной теореме теории групп Ли, в окрестности единичного элемента эти представления связаны экспоненциальным соотношением

$$T(g) = e^{i\alpha^n \Gamma_n}. \tag{1.48}$$

Далее, используя тождество

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2), \qquad g_1, g_2 \in O(e),$$

можно расширить соответствие (1.48), увеличивая окрестность единицы и покрывая всю группу (если группа связная).

В общем случае элемент g не из окрестности $O(e)$ может быть различным образом представлен в виде произведения элементов, лежащих в окрестности единицы (см. рис. 1.2). Поэтому при расширении окрестности единицы каждому элементу g могут соответствовать различные операторы $T(g)$. Если группа Ли G односвязна, то $T(g)$ определено однозначно для каждого g. Для неодносвязных групп это соответствие неоднозначно, что приводит к так называемым многозначным представлениям, когда каждому элементу g соответствует несколько операторов $T(g)$.

В рассматриваемом нами случае группа $SL(2, C)$ односвязна, поэтому все ее представления однозначны. Группа Лоренца неодносвязна, поэтому часть представлений ее алгебры продолжается до однозначных представлений всей группы, а часть – нет.

3. *Для любой связной группы Ли G существует единственная (с точностью до изоморфизма) группа Ли $\tilde{G}$, называемая универсальной накрывающей группой группы G, удовлетворяющая следующим свойствам:*
1) $\tilde{G}$ односвязна,
2) существует аналитический гомоморфизм $\rho : \tilde{G} \to G$, такой, что $G \simeq \tilde{G}/\mathrm{Ker}\rho$, где $\mathrm{Ker}\rho$ – дискретная подгруппа в $\tilde{G}$.

Заметим, что поскольку $\mathrm{Ker}\rho$ дискретно, то отображение ρ является локально взаимооднозначным, т. е. ρ – локальный изоморфизм. Отсюда следует, что алгебры Ли групп G и $\tilde{G}$ изоморфны.

В интересующем нас случае для группы Лоренца:
а) имеется $2 \to 1$ гомоморфизм $\pi : SL(2, C) \to L_+^\uparrow$,
б) $SL(2, C)$ – односвязна.
Отсюда следует, что $SL(2, C)$ есть универсальная накрывающая для собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$.

В дальнейшем нам потребуется изучать представления алгебры Ли группы Лоренца. Поскольку эта алгебра изоморфна алгебре $sl(2,C)$, то представления этих алгебр должны быть эквивалентны. Каждому представлению алгебры $sl(2,C)$ однозначно соответствует некоторое представление группы $SL(2,C)$ в силу односвязности этой группы. Что касается представлений группы Лоренца, то лишь часть представлений алгебры соответствует однозначным представлениям $L_+^\uparrow$, а остальные представления могут трактоваться как двузначные. Это можно проиллюстрировать следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc}
\text{представления } sl(2,C) & \xrightarrow{\exp} & \text{представления } SL(2,C) \\
\Big\| & & \\
\text{представления алгебры Лоренца} & \xrightarrow{\exp} & \left\{ \begin{array}{l} \text{представления } L_+^\uparrow \\ \text{двузначные представления } L_+^\uparrow. \end{array} \right.
\end{array}$$

В заключении параграфа построим универсальную накрывающую для группы Пуанкаре.

Вновь рассмотрим пространство эрмитовых 2×2 матриц

$$X = X^\mu \sigma_\mu, \qquad X^\dagger = X,$$

где σ_μ – матрицы Паули (1.39), и введем в этом пространстве следующее преобразование

$$X \to X' = NXN^\dagger + b, \quad N \in SL(2,C), \quad b^\dagger = b = b^\mu \sigma_\mu.$$

Такое преобразование задается парой (N, b). Очевидно, что множество этих преобразований образует группу с законом умножения

$$(N_2, b_2)(N_1, b_1) = (N_2 N_1, N_2 b_1 N_2^\dagger + b_2).$$

Обозначим эту группу $\tilde{\mathcal{P}}$. Каждый элемент группы $\tilde{\mathcal{P}}$ генерирует следующее преобразование координат X^μ:

$$X'^\mu = \Lambda(N)^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu. \tag{1.49}$$

Аналогично тому, как это было сделано для алгебры Лоренца, можно показать, что $\Lambda(N)$ является матрицей преобразования Лоренца, а b^μ – произвольный постоянный 4-вектор. Следовательно, такие преобразования (1.49) образуют группу Пуанкаре.

Таким образом, мы построили следующий $2 \to 1$ гомоморфизм:

$$\varphi : \tilde{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}_+^\uparrow, \qquad \varphi[(N, b)] = (\Lambda(N), b).$$

Ядро этого гомоморфизма дискретно

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{(I, 0), (-I, 0)\}.$$

Очевидно, группа $\tilde{\mathcal{P}}$ односвязна, поскольку она является полупрямым произведением групп $SL(2,C)$ и R^4. Следовательно, $\tilde{\mathcal{P}}$ – универсальная накрывающая группа собственной группы Пуанкаре $\mathcal{P}_+^\uparrow$.

1.4. Спин-тензорные представления

В этом параграфе мы опишем конечномерные представления группы Лоренца и группы $SL(2,C)$ и установим связь между представлениями этих групп. Впоследствии мы выделим среди них полный набор неприводимых представлений.

Представления группы Лоренца

1. Векторное (фундаментальное) представление. При таком представлении каждому преобразованию Лоренца сопоставляется его матрица

$$T_v : \Lambda \longrightarrow \Lambda,$$

осуществляющая преобразование координат в некотором векторном пространстве

$$V^\mu \longrightarrow V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu.$$

2. Ковекторное (контргградиентное) представление

$$T_{cv} : \Lambda \longrightarrow (\Lambda^T)^{-1}$$

задано в пространстве ковекторов V_μ:

$$V_\mu \longrightarrow V'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu V_\nu, \tag{1.50}$$

где $\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\lambda}\Lambda^\lambda{}_\rho\eta^{\rho\nu}$. Соотношение (1.50) означает, что представления T_v и T_{cv} эквивалентны[2].

3. Представления на тензорах второго ранга (тензорное произведение двух представлений) $T_v^2 = T_v \otimes T_v$ определяется следующим отображением

$$T_v^2(\Lambda) : V^{\mu\nu} \longrightarrow V'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho V^{\lambda\rho}.$$

Это представление является приводимым, поскольку имеются инвариантные подпространства тензоров различной симметрии. Так, например, можно разложить любой тензор на симметричную и антисимметричную части

$$V^{\mu\nu} = V^{(\mu\nu)} + V^{[\mu\nu]},$$
$$V^{(\mu\nu)} = \tfrac{1}{2}(V^{\mu\nu} + V^{\nu\mu}), \qquad V^{[\mu\nu]} = \tfrac{1}{2}(V^{\mu\nu} - V^{\nu\mu}).$$

Очевидно, что подпространства симметричных и антисимметричных тензоров инвариантны относительно действия группы Лоренца. Далее, симметричную часть можно представить в виде суммы бесследового тензора и скаляра (который соответствует следу матрицы $V^{\mu\nu}$)

$$V^{(\mu\nu)} = (V^{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}V^\rho{}_\rho) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}V^\rho{}_\rho.$$

Бесследовая и скалярная части также образуют инвариантные подпространства, поскольку $\eta^{\mu\nu}$ является инвариантным тензором относительно действия группы Лоренца.

4. В общем случае можно построить тензорное произведение n векторных представлений

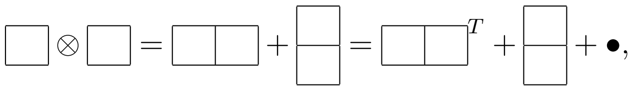
$$T_v^n(\Lambda) = \underbrace{T_v \otimes T_v \otimes \ldots \otimes T_v}_{n} : V^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \longrightarrow V'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1}\Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2}\ldots\Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n}V^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}.$$

[2] Пусть есть два представления $T(g)$ и $S(g)$ группы G в пространствах V и W. Представления T и S называются *эквивалентными*, если существует взаимооднозначный оператор $A : V \to W$, что

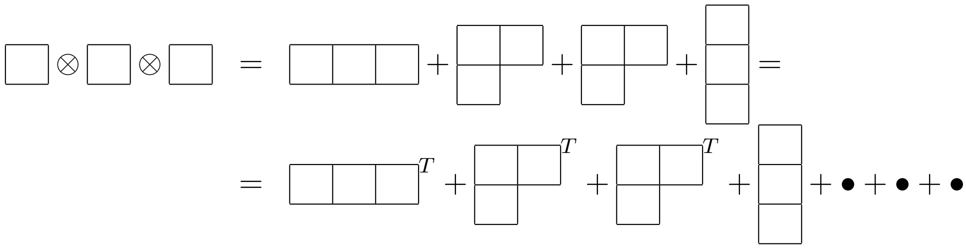
$$S(g)A = A\,T(g), \qquad \forall g \in G.$$

В нашем случае $\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\lambda}\Lambda^\lambda{}_\rho\eta^{\rho\nu}$ или $\Lambda_\mu{}^\nu\eta_{\nu\rho} = \eta_{\mu\lambda}\Lambda^\lambda{}_\kappa\eta^{\kappa\nu}\eta_{\nu\rho} = \eta_{\mu\lambda}\Lambda^\lambda{}_\rho$, т.е. $(\Lambda^T)^{-1}\eta = \eta\Lambda$.

Такое представление также является приводимым. Для выделения неприводимых представлений можно воспользоваться методом схем Юнга. Например, для $n = 2$



для $n = 3$



и так далее. Здесь отдельные квадратики соответствуют векторным представлениям, горизонтальная строка из квадратиков – представлению на симметричных тензорах, вертикальная строка из квадратиков – представлению на антисимметричных тензорах, нелинейная схема Юнга – представлению на тензорах смешанной симметрии, точка – это одномерное представление, значок “T” означает бесследовость. Более подробно о применении метода схем Юнга см., например, [1].

Представления группы $SL(2, C)$

Компоненты матриц $N \in SL(2, C)$ будем обозначать $N_a{}^b$, $a, b = 1, 2$.

1. Фундаментальное представление

$$T_s : N \longrightarrow N, \qquad N \in SL(2, C)$$

задается с помощью матриц из группы $SL(2, C)$, действующих в линейном пространстве, элементы которого будем обозначать ψ_a $(a = 1, 2)$:

$$\psi_a \longrightarrow \psi'_a = N_a{}^b \psi_b.$$

Согласно принятой терминологии, объекты ψ_a, преобразующиеся с помощью матриц из группы $SL(2, C)$, называются *левосторонними вейлевскими спинорами*, а представление T_s – *левосторонним спинорным представлением.* Оно также обозначается $(\frac{1}{2}, 0)$.

Очевидно, $T_s(-N) = -T_s(N)$, т.е. T_s соответствует двузначным представлениям группы Лоренца.

Можно построить тензорное произведение n экземпляров представления T_s по правилу

$$T_s^n = \underbrace{T_s \otimes T_s \otimes \ldots \otimes T_s}_{n} : \psi_{a_1 a_2 \ldots a_n} \to \psi'_{a_1 a_2 \ldots a_n} = N_{a_1}{}^{b_1} \ldots N_{a_n}{}^{b_n} \psi'_{b_1 \ldots b_n}.$$

2. Контргградиентное представление к T_s определено с помощью отображения

$$T_{cs} : N \longrightarrow (N^T)^{-1}, \qquad \psi^a \longrightarrow \psi'^a = \psi^b (N^{-1})_b{}^a.$$

Покажем, что представления T_s и T_{cs} эквивалентны, т.е. существует такая матрица B, что $(N^T)^{-1} = BNB^{-1}\ \forall N \in SL(2, C)$. Для этого рассмотрим тензор ε_{ab}, определенный свойствами

$$\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}, \qquad \varepsilon_{12} = -1,$$

т.е.

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратным к нему является тензор

$$\varepsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

обладающий свойствами

$$\varepsilon^{ab}\varepsilon_{bc} = \delta^a{}_c, \qquad \varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}, \qquad \varepsilon^{12} = 1.$$

Заметим, что определитель любой 2×2 матрицы S можно представить в виде

$$\det S = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}S_c{}^a S_d{}^b.$$

Для матриц из группы $SL(2, C)$ имеем $\det N = 1$, следовательно,

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{cd}N_c{}^a N_d{}^b = 1.$$

Умножим обе части этого равенства на ε_{mn} и воспользуемся тождеством

$$\varepsilon_{mn}\varepsilon^{cd} = -(\delta^c_m\delta^d_n - \delta^c_n\delta^d_m),$$

тогда

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}(\delta^c_n\delta^d_m - \delta^c_m\delta^d_n)N_c{}^a N_d{}^b = \varepsilon_{mn}.$$

В итоге получаем

$$N_m{}^a N_n{}^b \varepsilon_{ab} = \varepsilon_{mn}.$$

Аналогичное соотношение можно получить для обратных матриц

$$\varepsilon^{ab}(N^{-1})_a{}^m(N^{-1})_b{}^n = \varepsilon^{mn}.$$

Эти соотношения означают, что ε_{ab} является инвариантом относительно действия группы $SL(2, C)$, т.е. играет роль, аналогичную метрике Минковского $\eta_{\mu\nu}$ при преобразованиях Лоренца. Тензор ε_{ab} называют *спинорной метрикой*. Из полученных соотношений следует:

$$\varepsilon^{cm}\varepsilon_{mn} = N_m{}^a N_n{}^b \varepsilon_{ab}\varepsilon^{cm},$$

следовательно,

$$(N^{-1})_k{}^c = (N^{-1})_k{}^n N_m{}^a N_n{}^b \varepsilon_{ab}\varepsilon^{cm}$$

или

$$(N^{-1})_k{}^c = \varepsilon^{cm}N_m{}^a\varepsilon_{ak}.$$

В результате,

$$(N^{-1})^{\mathrm{T}} = \varepsilon N \varepsilon^{-1},$$

где $\varepsilon = ||\varepsilon^{mn}||$. Это показывает, что представления T_s и T_{cs} эквивалентны.

Поскольку ε_{ab} – инвариантный тензор, с помощью него можно поднимать и опускать индексы у спиноров:

$$\psi^a = \varepsilon^{ab}\psi_b, \qquad \psi_a = \varepsilon_{ab}\psi^b,$$

например,

$$\psi_a = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \qquad \psi^a = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ -\psi_1 \end{pmatrix},$$

где использованы следующие соотношения

$$\psi^1 = \varepsilon^{12}\psi_2 = \psi_2, \qquad \psi^2 = \varepsilon^{21}\psi_1 = -\psi_1.$$

Итак, поскольку представления T_s и T_{cs} эквивалентны, достаточно рассматривать только одно из них, например, T_s.

3. Поскольку матрицы $N \in SL(2, C)$ являются комплексными и действуют в двумерном комплексном векторном пространстве, то можно определить комплексно-сопряженное представление

$$\bar{T}_S : N \longrightarrow N^*,$$

действующее в пространстве элементов $\psi_{\dot{a}}$:

$$\psi_{\dot{a}} \longrightarrow \psi'_{\dot{a}} = N^{*\dot{b}}_{\dot{a}}\psi_{\dot{b}}, \qquad \dot{a}, \dot{b} = 1, 2. \tag{1.51}$$

Объект, преобразующийся по закону (1.51), называется *правосторонним вейлевским спинором*, представление $\bar{T}_s$ – *правосторонним спинорным представлением.* Оно обозначается $(0, \frac{1}{2})$ и реализует двузначные представления группы Лоренца.

Тензорное произведение n представлений $\bar{T}_s$ определяется следующим образом

$$\bar{T}^n_s = \underbrace{\bar{T}_s \otimes \bar{T}_s \otimes \ldots \otimes \bar{T}_s}_{n} : \psi_{\dot{a}_1\dot{a}_2\ldots\dot{a}_n} \to \psi'_{\dot{a}_1\dot{a}_2\ldots\dot{a}_n} = N^{*\ \dot{b}_1}_{\dot{a}_1} N^{*\ \dot{b}_2}_{\dot{a}_2} \ldots N^{*\ \dot{b}_n}_{\dot{a}_n} \psi_{\dot{b}_1\dot{b}_2\ldots\dot{b}_n}.$$

4. Представление, контргградиентное к $\bar{T}_s$, определяется с помощью отображения

$$\bar{T}_{cs} : N \longrightarrow (N^\dagger)^{-1}, \qquad \psi^{\dot{a}} \longrightarrow \psi'^{\dot{a}} = \psi^{\dot{b}}(N^*)^{-1}{}_{\dot{b}}{}^{\dot{a}}.$$

Это представление эквивалентно представлению $\bar{T}_s$. Доказать это можно по аналогии с тем, как это было сделано для левостороннего спинорного представления. Инвариантным тензором в этом случае будет тензор $\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} &= -\varepsilon_{\dot{b}\dot{a}}, \quad \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -1, \\ \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} &= -\varepsilon^{\dot{b}\dot{a}}, \quad \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1. \end{aligned}$$

Эти тензоры поднимают и опускают индексы у правосторонних вейлевских спиноров по правилу

$$\psi^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\psi_{\dot{b}}, \qquad \psi_{\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\psi^{\dot{b}}.$$

5. В общем случае можно построить тензорное произведение n представлений T_s и m представлений $\bar{T}_s$

$$T^n_s \otimes \bar{T}^m_s = \underbrace{T_s \otimes T_s \otimes \ldots \otimes T_s}_{n} \otimes \underbrace{\bar{T}_s \otimes \bar{T}_s \otimes \ldots \otimes \bar{T}_s}_{m} :$$
$$\psi_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_m} \to \psi'_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_m} = N_{a_1}{}^{c_1} \ldots N_{a_n}{}^{c_n} N^{*\ \dot{d}_1}_{\dot{b}_1} \ldots N^{*\ \dot{d}_m}_{\dot{b}_m} \psi_{c_1\ldots c_n\dot{d}_1\ldots\dot{d}_m}.$$

Объекты $\psi_{a_1\dots a_n\dot b_1\dots\dot b_m}$ называются *спин-тензорами*, а представление – *спин-тензорным*.

Очевидно, спин-тензорное представление при $n > 1$ или $m > 1$ приводимо. Например,

$$\psi_{ab} = \frac{1}{2}(\psi_{ab} + \psi_{ba}) + \frac{1}{2}(\psi_{ab} - \psi_{ba}) = \psi_{(ab)} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\varepsilon^{mn}\psi_{mn},$$

где $\psi_{(ab)}$ и $\psi = \varepsilon^{mn}\psi_{mn}$ преобразуется неприводимо. Особенностью друмерии является тот факт, что любой антисимметричный тензор ранга 3 и выше тождественно равен нулю

$$\psi_{[abc]} = 0,$$

а антисимметричный тензор ранга 2 пропорционален ε_{ab}

$$\psi_{[ab]} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\psi, \qquad \psi = \varepsilon^{mn}\psi_{mn},$$

и, таким образом, реализует скалярное представление. Это означает, что все неприводимые представления образованы только симметричными спин-тензорами произвольного ранга. То же самое справедливо и для сектора точечных индексов. Поэтому произвольное неприводимое представление будет реализовано на спин-тензорах

$$\psi_{a_1\dots a_n\dot b_1\dots\dot b_m} = \psi_{(a_1\dots a_n)(\dot b_1\dots\dot b_m)},$$

симметричных по всем точечным и неточечным индексам. Такое представление обозначают $(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$, оно имеет размерность $(n+1)(m+1)$ [3].

Закон преобразования спин-тензора можно схематически записать в виде

$$T(N) : \psi^{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})} \rightarrow \psi'^{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})} = (N)^n(N^*)^m\psi^{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}.$$

Очевидно, что при четном $(n+m)$ выполняется $T(-N) = T(N)$, следовательно, такому представлению будет соответствовать однозначное представление группы Лоренца. Когда $m + n$ – нечетно, имеем $T(-N) = -T(N)$, что соответствует двузначному представлению группы Лоренца.

Заметим, что спин-тензоры $\psi^{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}$ являются комплексными объектами, они реализуют комплексные представления. Определенный интерес в физике представляют вещественные представления, поэтому рассмотрим вопрос о получении вещественных представлений группы $SL(2, C)$.

Пусть $\psi_{a_1\dots a_n\dot b_1\dots\dot b_m}$ – спин-тензор типа $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$. Пространство таких спин-тензоров обозначим $V_{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}$. При комплексном сопряжении имеем:

$$\begin{array}{rcl} \hat C : V_{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})} & \longrightarrow & V_{(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}, \\ \psi_{a_1\dots a_n\dot b_1\dots\dot b_m} & \longrightarrow & (\psi_{a_1\dots a_n\dot b_1\dots\dot b_m})^* = \bar\psi_{b_1\dots b_m\dot a_1\dots\dot a_n}. \end{array}$$

Очевидно, что $\hat C^2 = 1$. Очевидно также, что при $n \neq m$ такое представление не может быть вещественным. Чтобы связать с ним вещественное представление, рассмотрим прямую сумму представлений

$$(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}) \oplus (\frac{m}{2}, \frac{n}{2}),$$

[3] Количество компонент у симметричного тензора ранга n в D-мерном пространстве равно $\frac{D(D+1)\dots(D+n-1)}{n!}$. В частности, при $D = 2$ оно равно $n + 1$.

действующую в пространстве $V_{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})\oplus(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}$. Очевидно, что оператор $\hat{C}$ переводит это пространство в себя. Следовательно, в нем можно определить подпространство $V^R_{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}$ спиноров, инвариантных относительно операции $\hat{C}$, т.е.

$$\hat{C}|_{V^R_{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}} = \hat{1}.$$

Такое подпространство состоит из пар вида

$$(\psi_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_m}, \bar{\psi}_{b_1\ldots b_m\dot{a}_1\ldots\dot{a}_n}).$$

Спин-тензорное представление в таком пространстве будет вещественным.

В случае, когда $n = m$, всегда можно определить в пространстве представления вещественные спин-тензоры

$$\psi_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_n} = \bar{\psi}_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_n}.$$

Пространство таких спиноров будет инвариантным относительно действия группы $SL(2,C)$ и будет реализовывать неприводимое вещественное представление.

Итак, мы описали различные представления группы Лоренца и группы $SL(2,C)$. Изучим вопрос о связи этих представлений.

Рассмотрим действие матриц из группы $SL(2,C)$ в пространстве эрмитовых матриц

$$N : X \to X' = NXN^{+}, \qquad N \in SL(2,C), \tag{1.52}$$

где X – произвольная эрмитова матрица, которая может быть разложена по базису, состоящему из матриц Паули (1.39): $X = X^{\mu}\sigma_{\mu}$. Следовательно, соотношение (1.52) может быть также переписано

$$X'^{\mu}\sigma_{\mu} = X^{\mu}N\sigma_{\mu}N^{\dagger}.$$

Поскольку координаты X^{μ} и X'^{μ} должны быть связаны преобразованием Лоренца

$$X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N)X^{\nu},$$

получаем

$$X^{\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(N)\sigma_{\mu} = X^{\mu}N\sigma_{\mu}N^{\dagger}.$$

В силу произвольности координат X^{μ} имеем:

$$\sigma_{\mu} = N\sigma_{\nu}N^{+}[\Lambda^{-1}(N)]^{\nu}{}_{\mu}. \tag{1.53}$$

Если считать, что матрицы σ_{μ} несут спинорные индексы $(\sigma_{\mu})_{a\dot{a}}$, т.е. являются элементами спин-тензорного представления $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ группы $SL(2,C)$, то равенство (1.52) можно представить в виде

$$(\sigma_{\mu})_{a\dot{a}} = N_{a}{}^{b}N^{*}{}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}(\sigma_{\nu})_{b\dot{b}}\Lambda^{-1}(N)^{\nu}{}_{\mu}. \tag{1.54}$$

Это означает, что объект $(\sigma_{\mu})_{a\dot{a}}$ является инвариантным тензором при преобразованиях Лоренца, также как и тензоры $\eta_{\mu\nu}$, ε_{ab}. Выражение (1.54) можно также записать в виде

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\sigma^{\nu})_{a\dot{a}} = N_{a}{}^{b}N^{*}{}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}(\sigma^{\mu})_{b\dot{b}},$$

что означает, что $(\sigma^\mu)_{a\dot a}$ осуществляют связь между векторным представлением и представлением $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Можно определить также матрицы $\tilde\sigma_\mu$ с поднятыми спинорными индексами:

$$(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a} = \varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot a\dot b}(\sigma_\mu)_{b\dot b}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\tilde\sigma_\mu = (\mathbf{1}_{2\times 2}, -\vec\sigma). \tag{1.55}$$

Для матриц σ_μ и $\tilde\sigma_\mu$ можно показать, что выполняются следующие свойства

$$\begin{array}{l} (\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu + \sigma_\nu\tilde\sigma_\mu)_a{}^b = 2\eta_{\mu\nu}\delta_a^b, \\ (\tilde\sigma_\mu\sigma_\nu + \tilde\sigma_\nu\sigma_\mu)^{\dot a}{}_{\dot b} = 2\eta_{\mu\nu}\delta_{\dot b}^{\dot a}, \\ \operatorname{tr}\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu = 2\eta_{\mu\nu}, \\ (\sigma^\mu)_{a\dot a}(\tilde\sigma_\mu)^{\dot b b} = 2\delta_a^b\delta_{\dot a}^{\dot b}. \end{array} \tag{1.56}$$

Задача 6. Проверить соотношение (1.55).

Задача 7. Доказать свойства (1.56).

Поскольку матрицы σ^μ осуществляют связь между представлениями, то они могут быть использованы для конвертирования векторных индексов в спинорные и наоборот:

$$\begin{array}{ccl} V_\mu & \longrightarrow & V_{a\dot a} = (\sigma^\mu)_{a\dot a}V_\mu, \\ V_{a\dot a} & \longrightarrow & V_\mu = \frac{1}{2}(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a}V_{a\dot a}. \end{array} \tag{1.57}$$

Таким образом, мы видим, что каждый четырехмерный индекс μ соответствует паре спинорных индексов $a,\dot a$. С помощью свойств (1.56) все векторные свертки могут быть переведены в спинорные и наоборот:

$$V_\mu W^\mu = \eta^{\mu\nu}V_\mu W_\nu = \frac{1}{4}(\tilde\sigma_\mu)^{\dot a a}(\tilde\sigma^\mu)^{\dot b b}V_{a\dot a}W_{b\dot b} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot a\dot b}W_{b\dot b}V_{a\dot a} = \frac{1}{2}V_{a\dot a}W^{a\dot a}.$$

В качестве менее тривиального примера найдем спин-тензорные представления, соответствующие тензору второго ранга $h_{\mu\nu}$. Согласно правилу (1.57) ему сопоставляется приводимый спин-тензор

$$h_{ab\dot a\dot b} = (\sigma^\mu)_{a\dot a}(\sigma^\nu)_{b\dot b}h_{\mu\nu}.$$

Разложим его на неприводимые компоненты:

$$\begin{aligned} h_{ab\dot a\dot b} &= h_{(ab)(\dot a\dot b)} + h_{(ab)[\dot a\dot b]} + h_{[ab](\dot a\dot b)} + h_{[ab][\dot a\dot b]} = \\ &= h_{(ab)(\dot a\dot b)} + \varepsilon_{\dot a\dot b}h_{(ab)} + \varepsilon_{ab}h_{\dot a\dot b} + \varepsilon_{ab}\varepsilon_{\dot a\dot b}h, \end{aligned}$$

где

$$\begin{array}{l} h_{(ab)} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot a\dot b}h_{(ab)[\dot a\dot b]}, \\ h_{(\dot a\dot b)} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}h_{[ab](\dot a\dot b)}, \\ h = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot a\dot b}h_{ab\dot a\dot b}. \end{array}$$

Таким образом, тензор $h_{\mu\nu}$ реализует сумму четырех неприводимых спин-тензорных представлений.

Рассмотрим случай, когда тензор $h_{\mu\nu}$ симметричен, $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$. Тогда имеем

$$h_{ab\dot a\dot b} = (\sigma^\mu)_{a\dot a}(\sigma^\nu)_{b\dot b}h_{\mu\nu} = (\sigma^\nu)_{a\dot a}(\sigma^\mu)_{b\dot b}h_{\mu\nu} = h_{ba\dot b\dot a}.$$

Отсюда следует, что $h_{(ab)} = 0$ и $h_{(\dot{a}\dot{b})} = 0$, и, таким образом, симметричный тензор реализует два неприводимых спин-тензорных представления

$$h_{(\mu\nu)} \sim h_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} + \varepsilon_{ab}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}h.$$

Пусть $h_{\mu\nu}$ также и бесследовый $\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0$, тогда

$$\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}(\tilde{\sigma}_\nu)^{\dot{b}b}h_{ab\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}h_{ab\dot{a}\dot{b}} = 2h = 0.$$

Таким образом, неприводимое представление $h_{(ab)(\dot{a}\dot{b})}$ соответствует симметричному бесследовому тензору второго ранга, а компонента h соответствует следу $h_{\mu\nu}$.

Исследуем аналогичным образом случай антисимметричного тензора

$$h_{\mu\nu} = -h_{\nu\mu}.$$

В этом случае

$$h_{ab\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{2}[(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}(\sigma^\nu)_{b\dot{b}} - (\sigma^\mu)_{b\dot{b}}(\sigma^\nu)_{a\dot{a}}]h_{\mu\nu}.$$

Отсюда получаем, что компоненты $h_{(ab)(\dot{a}\dot{b})}$ и h равны нулю:

$$\begin{aligned} h_{(ab)(\dot{a}\dot{b})} = {} & \tfrac{1}{8}[(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}(\sigma^\nu)_{b\dot{b}} + (\sigma^\mu)_{b\dot{a}}(\sigma^\nu)_{a\dot{b}} + (\sigma^\mu)_{a\dot{b}}(\sigma^\nu)_{b\dot{a}} + (\sigma^\mu)_{b\dot{b}}(\sigma^\nu)_{a\dot{a}} - \\ & -(\sigma^\mu)_{b\dot{b}}(\sigma^\nu)_{a\dot{a}} - (\sigma^\mu)_{a\dot{b}}(\sigma^\nu)_{b\dot{a}} - (\sigma^\mu)_{b\dot{a}}(\sigma^\nu)_{a\dot{b}} - (\sigma^\mu)_{a\dot{a}}(\sigma^\nu)_{b\dot{b}}]h_{\mu\nu} = 0, \\ h = {} & \tfrac{1}{8}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}[(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}(\sigma^\nu)_{b\dot{b}} - (\sigma^\mu)_{b\dot{b}}(\sigma^\nu)_{a\dot{a}}]h_{\mu\nu} = \\ = {} & \tfrac{1}{8}[(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{b}b}(\sigma^\nu)_{b\dot{b}} - (\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}(\sigma^\nu)_{a\dot{a}}]h_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}(\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu})h_{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Прежде чем вычислить оставшиеся компоненты $h_{(ab)}$ и $h_{(\dot{a}\dot{b})}$ введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})_a{}^b &= -\tfrac{1}{4}(\sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu)_a{}^b, \\ (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} &= -\tfrac{1}{4}(\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что эти матрицы бесследовы

$$\mathrm{Tr}\sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(2\eta^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu\nu}) = 0, \qquad \mathrm{Tr}\tilde{\sigma}^{\mu\nu} = 0.$$

В силу антисимметричности $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$, среди них имеется только шесть независимых.

Задача 8. Прямым вычислением показать, что среди матриц $\sigma^{\mu\nu}$ имеется шесть линейно независимых матриц.

Следовательно, $\sigma^{\mu\nu}$ образуют базис в линейном пространстве комплексных матриц 2×2 с нулевым следом.

В дальнейшем будут также использоваться матрицы $\sigma^{\mu\nu}$ с верхними и нижними индексами:

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})_{ab} &= \varepsilon_{bc}(\sigma^{\mu\nu})_a{}^c, \qquad (\sigma^{\mu\nu})^{ab} = \varepsilon^{ac}(\sigma^{\mu\nu})_c{}^b, \\ (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{a}\dot{b}} &= \varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}(\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{c}}{}_{\dot{b}}, \qquad (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{a}\dot{b}} = \varepsilon^{\dot{b}\dot{c}}(\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{c}}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Задача 9. Показать, что матрицы, введенные соотношениями (1.58), симметричны:

$$(\sigma^{\mu\nu})_{ab} = (\sigma^{\mu\nu})_{ba}, \qquad (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{a}\dot{b}} = (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{b}\dot{a}}.$$

Вернемся к вычислению спин-тензорных компонент антисимметричного тензора

$$
\begin{aligned}
h_{(ab)} &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{\dot a\dot b}h_{(ab)\dot a\dot b} = \\
&= -\tfrac{1}{8}\varepsilon^{\dot a\dot b}[(\sigma^\mu)_{a\dot a}(\sigma^\nu)_{b\dot b} + (\sigma^\mu)_{b\dot a}(\sigma^\nu)_{a\dot b} - (\sigma^\mu)_{b\dot b}(\sigma^\nu)_{a\dot a} - (\sigma^\mu)_{a\dot b}(\sigma^\nu)_{b\dot a}]h_{\mu\nu} = \\
&= -\tfrac{1}{8}[(\sigma^\mu\tilde\sigma^\nu)_{ab} - (\sigma^\nu\tilde\sigma^\mu)_{ab} - (\sigma^\nu\tilde\sigma^\mu)_{ab} + (\sigma^\mu\tilde\sigma^\nu)_{ab}]h_{\mu\nu} = \\
&= (\sigma^{\mu\nu})_{ab}h_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Аналогично

$$
\begin{aligned}
h_{(\dot a\dot b)} &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ab}h_{ab(\dot a\dot b)} = \\
&= -\tfrac{1}{8}\varepsilon^{ab}[(\sigma^\mu)_{a\dot a}(\sigma^\nu)_{b\dot b} + (\sigma^\mu)_{a\dot b}(\sigma^\nu)_{b\dot a} - (\sigma^\mu)_{b\dot b}(\sigma^\nu)_{a\dot a} - (\sigma^\mu)_{b\dot a}(\sigma^\nu)_{a\dot b}]h_{\mu\nu} = \\
&= -\tfrac{1}{8}[-(\tilde\sigma^\mu\sigma^\nu)_{\dot a\dot b} + (\tilde\sigma^\nu\sigma^\mu)_{\dot a\dot b} + (\tilde\sigma^\nu\sigma^\mu)_{\dot a\dot b} - (\tilde\sigma^\mu\sigma^\nu)_{\dot a\dot b}]h_{\mu\nu} = \\
&= -(\tilde\sigma^{\mu\nu})_{\dot a\dot b}h_{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, получаем, что антисимметричный тензор второго ранга соответствует двум спин-тензорам $h_{(ab)}$ и $h_{(\dot a\dot b)}$

$$h_{[\mu\nu]} \sim \varepsilon_{ab}h_{(\dot a\dot b)} + \varepsilon_{\dot a\dot b}h_{(ab)}.$$

Получим также обратное соотношение между $h_{[\mu\nu]}$ и $(h_{ab}, h_{\dot a\dot b})$, т.е. выразим $h_{[\mu\nu]}$ через эти спин-тензоры. Пусть есть спин-тензор вида

$$h_{ab\dot a\dot b} = \varepsilon_{\dot a\dot b}h_{(ab)} + \varepsilon_{ab}h_{\dot a\dot b}.$$

Ему будет соответствовать тензор второго ранга

$$
\begin{aligned}
h_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{4}(\sigma_\mu)^{a\dot a}(\sigma_\nu)^{b\dot b}h_{ab\dot a\dot b} = \\
&= \tfrac{1}{4}(\sigma_\mu)^{a\dot a}(\sigma_\nu)^{b\dot b}(h_{(ab)}\varepsilon_{\dot a\dot b} + h_{(\dot a\dot b)}\varepsilon_{ab}) = \\
&= \tfrac{1}{8}\varepsilon_{\dot a\dot b}[(\sigma_\mu)^{a\dot a}(\sigma_\nu)^{b\dot b} + (\sigma_\mu)^{b\dot a}(\sigma_\nu)^{a\dot b}]h_{(ab)} + \tfrac{1}{8}\varepsilon_{ab}[(\sigma_\mu)^{a\dot a}(\sigma_\nu)^{b\dot b} + (\sigma_\mu)^{a\dot b}(\sigma_\nu)^{b\dot a}]h_{(\dot a\dot b)} = \\
&= \tfrac{1}{8}[-(\sigma_\mu\tilde\sigma_\nu)^{ab} + (\sigma_\mu\tilde\sigma_\mu)^{ab}]h_{(ab)} + \tfrac{1}{8}[(\tilde\sigma_\mu\sigma_\nu)^{\dot a\dot b} - (\tilde\sigma_\nu\sigma_\mu)^{\dot a\dot b}]h_{(\dot a\dot b)} = \\
&= \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^{ab}h_{(ab)} - \tfrac{1}{2}(\tilde\sigma_{\mu\nu})^{\dot a\dot b}h_{(\dot a\dot b)}.
\end{aligned}
$$

Из этого соотношения следует, что $h_{\mu\nu}$ антисимметричен, поскольку матрицы $\sigma_{\mu\nu}$ антисимметричны по индексам $\mu\nu$.

Итак, собирая вместе полученные соотношения для антисимметричного тензора, получаем следующее соответствие:

$$
\begin{gathered}
h_{ab} = (\sigma^{\mu\nu})_{ab}h_{\mu\nu}, \qquad h_{\dot a\dot b} = -(\tilde\sigma^{\mu\nu})_{\dot a\dot b}h_{\mu\nu}, \\
h_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^{ab}h_{ab} - \tfrac{1}{2}(\tilde\sigma_{\mu\nu})^{\dot a\dot b}h_{\dot a\dot b}.
\end{gathered}
$$

Подведем итог о связи тензорных и спин-тензорных представлений для тензора второго ранга $h_{\mu\nu}$ в виде таблицы

Тензор		Спин-тензор	Представление
симметричный бесследовый	$h_{(\mu\nu)} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}h^\alpha_\alpha$	$h_{(ab)(\dot a\dot b)}$	$(1,1)$
след	$\frac{1}{4}h^\alpha_\alpha\eta_{\mu\nu}$	$h\varepsilon_{ab}\varepsilon_{\dot a\dot b}$	$(0,0)$
антисимметричный	$h_{[\mu\nu]}$	$\varepsilon_{ab}h_{(\dot a\dot b)} + \varepsilon_{\dot a\dot b}h_{(ab)}$	$(1,0)\oplus(0,1)$.

Задача 10. Антисимметричный тензор второго ранга называется *самодуальным*, если
$$h^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}h_{\lambda\kappa}$$
и *антисамодуальным*, если
$$h^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}h_{\lambda\kappa}.$$
Установить соответствия между такими тензорами и неприводимыми представлениями группы Лоренца. Указание: доказать соотношения
$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\sigma_{\lambda\kappa} = -2i\sigma^{\mu\nu}, \qquad \varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\tilde{\sigma}_{\lambda\kappa} = 2i\tilde{\sigma}^{\mu\nu}.$$

В общем случае произвольный тензор ранга s
$$h_{\mu_1\ldots\mu_s}$$
разлагается в сумму компонент, реализующих различные представления $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$ и их прямые суммы, причем $m+n \leq 2s$ $(m+n = 0, 2, 4, \ldots, 2s)$. Представления с нечетным $(m+n)$ не могут быть реализованы в виде Лоренцевых тензоров, что является следствием их двузначности.

Задача 11. Показать, что представление $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$ реализуется полностью симметричным и бесследовым тензором ранга s.

1.5. Операторы Казимира группы Лоренца

В этом разделе мы покажем, что спин-тензоры, симметричные по точечным и неточечным индексам, действительно реализуют неприводимые представления группы Лоренца и группы $SL(2, C)$. Приведем некоторые необходимые сведения из теории групп.

Пусть $T(g)$ – некоторое представление группы Ли G с элементами g в линейном пространстве V. Пусть Γ_i $(i = 1, \ldots, n)$ – генераторы данного представления, т.е. для любого элемента g из окрестности единичного элемента группы справедливо
$$T(g) = e^{\alpha^i\Gamma_i} = \hat{1} + \alpha^i\Gamma_i + \ldots,$$
где α_i – некоторые числа. Генераторы Γ_i образуют базис представления алгебры Ли данной группы.

Пусть имеется набор функционально независимых операторов C_l $(l = 1, \ldots, k)$, действующих в пространстве V и коммутирующих со всеми генераторами Γ_i
$$[C_l, \Gamma_i] = 0, \quad l = 1, \ldots, k, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Очевидно, что операторы C_l коммутируют со всеми операторами представления $T(g)$. Такие операторы C_l, коммутирующие со всеми операторами представления, называют операторами Казимира группы Ли G. Из теории групп Ли известно, что число независимых операторов Казимира полупростой группы Ли совпадает с рангом соответствующей алгебры Ли.

Согласно лемме Шура любой оператор C_l, коммутирующий со всеми генераторами Γ_i неприводимого представления, кратен единичному оператору
$$C_l = \lambda_l\hat{1}, \qquad l = 1, \ldots, k,$$

где λ_l – некоторые числа, $\hat{1}$ – единичный оператор, действующий в пространстве представления. Различным неприводимым представлениям соответствуют различные наборы чисел $\{\lambda_l\}$, причем каждому неприводимому представлению соответствует свой набор. Если двум представлениям соответствует один набор $\{\lambda_a\}$, то эти представления эквивалентны. Следовательно, чтобы найти все неприводимые представления группы G, необходимо построить операторы Казимира C_l и изучить их спектр.

Далее мы применим эту процедуру для классификации неприводимых представлений группы Лоренца и группы Пуанкаре.

Пусть $T(g)$ – неприводимое представление группы Лоренца. По экспоненциальному закону ему будет соответствовать представление алгебры Лоренца

$$T(g) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}, \tag{1.59}$$

где $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ – генераторы алгебры Ли в этом представлении. Они должны удовлетворять коммутационным соотношениям

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} - \eta_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} + \eta_{\alpha\nu}M_{\mu\beta} - \eta_{\beta\nu}M_{\mu\alpha}).$$

Перейдем теперь к спинорным обозначениям и получим коммутационные соотношения для спинорных компонент тензора $M_{\mu\nu}$. Поскольку $\omega_{\mu\nu}$ – антисимметричный тензор, то ему будет соответствовать пара симметричных спин-тензоров $(\omega_{ab}, \omega_{\dot{a}\dot{b}})$

$$\begin{array}{l} \omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^{ab}\omega_{ab} - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}\dot{b}}\omega_{\dot{a}\dot{b}}, \\ \omega_{ab} = (\sigma^{\mu\nu})_{ab}\omega_{\mu\nu}, \qquad \omega_{\dot{a}\dot{b}} = -(\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{a}\dot{b}}h_{\mu\nu}. \end{array}$$

В результате

$$\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})^{ab}M_{\mu\nu}\omega_{ab} - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{a}\dot{b}}M_{\mu\nu}\omega_{\dot{a}\dot{b}}. \tag{1.60}$$

Введем спинорные компоненты тензора $M_{\mu\nu}$ по следующему правилу:

$$M_{ab} = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_{ab}M_{\mu\nu}, \qquad M_{\dot{a}\dot{b}} = -\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{a}\dot{b}}M_{\mu\nu}.$$

(Эти формулы отличаются коэффициентами от соответствующих формул для тензора второго ранга). Подставляя (1.60) в (1.59), получаем выражение для произвольного элемента представления в виде

$$T(g) = e^{\frac{i}{2}(\omega^{ab}M_{ab} + \omega^{\dot{a}\dot{b}}M_{\dot{a}\dot{b}})}.$$

Следовательно, группа Лоренца генерируется двумя симметричными спин-тензорами $M_{ab}, M_{\dot{a}\dot{b}}$. Очевидно, что среди них имеется шесть линейно-независимых генераторов, как и должно быть для группы Лоренца.

Вычислим коммутационные соотношения для этих операторов. Для этого нам понадобятся выражения для сверток матриц $\sigma^{\mu\nu}, \tilde{\sigma}^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} (\sigma^{\alpha\beta})_{ab}(\sigma^{\mu\nu})_{cd}\eta_{\alpha\mu} &= \tfrac{1}{16}(\sigma^\alpha\tilde{\sigma}^\beta - \sigma^\beta\tilde{\sigma}^\alpha)_{ab}(\sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\tilde{\sigma}^\nu)_{cd}\eta_{\alpha\mu} = \\ &= \tfrac{1}{16}[(\sigma^\alpha)_{a\dot{n}}(\tilde{\sigma}^\beta)^{\dot{n}}{}_b(\sigma^\mu)_{c\dot{m}}(\tilde{\sigma}^\nu)^{\dot{m}}{}_d - (\sigma^\beta)_{a\dot{n}}(\tilde{\sigma}^\alpha)^{\dot{n}}{}_b(\sigma^\mu)_{c\dot{m}}(\tilde{\sigma}^\nu)^{\dot{m}}{}_d - \\ &-(\sigma^\alpha)_{a\dot{n}}(\tilde{\sigma}^\beta)^{\dot{n}}{}_b(\sigma^\mu)_{c\dot{m}}(\tilde{\sigma}^\nu)^{\dot{m}}{}_d - (\sigma^\beta)_{a\dot{n}}(\tilde{\sigma}^\alpha)^{\dot{n}}{}_b(\sigma^\nu)_{c\dot{m}}(\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{m}}{}_d]\eta_{\alpha\mu} = \\ &= \tfrac{1}{8}[\varepsilon_{ac}\varepsilon_{\dot{n}\dot{m}}(\tilde{\sigma}^\beta)^{\dot{n}}{}_b(\sigma^\nu)^{\dot{m}}{}_d - \delta^{\dot{n}}_{\dot{m}}\varepsilon_{bc}(\tilde{\sigma}^\beta)_{a\dot{n}}(\sigma^\mu)^{\dot{m}}{}_d - \\ &-\delta^{\dot{m}}_{\dot{n}}\varepsilon_{da}(\sigma^\beta)^{\dot{n}}{}_b(\sigma^\nu)_{c\dot{m}} + \varepsilon^{\dot{n}\dot{m}}\varepsilon_{db}(\sigma^\beta)_{a\dot{n}}(\sigma^\nu)_{c\dot{m}}] = \\ &= \tfrac{1}{8}[-\varepsilon_{ac}(\sigma^\beta\tilde{\sigma}^\nu)_{bd} - \varepsilon_{bc}(\sigma^\beta\tilde{\sigma}^\nu)_{ad} - \varepsilon_{ad}(\sigma^\beta\tilde{\sigma}^\nu)_{bc} - \varepsilon_{bd}(\sigma^\beta\tilde{\sigma}^\nu)_{ac}], \\ (\sigma^{\alpha\beta})_{ab}(\sigma^{\mu\nu})_{cd}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} &= \tfrac{1}{4}[-\varepsilon_{ac}\delta^{\dot{n}}_{\dot{n}}\varepsilon_{db} - \varepsilon_{bc}\delta^{\dot{n}}_{\dot{n}}\varepsilon_{da} - \varepsilon_{ad}\delta^{\dot{n}}_{\dot{n}}\varepsilon_{cd} - \varepsilon_{bd}\delta^{\dot{n}}_{\dot{n}}\varepsilon_{ca}] = \\ &= \tfrac{1}{2}[\varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd} + \varepsilon_{bc}\varepsilon_{ad} + \varepsilon_{ad}\varepsilon_{bc} + \varepsilon_{bd}\varepsilon_{ac}] = \varepsilon_{ac}\varepsilon_{bd} + \varepsilon_{bc}\varepsilon_{ad}. \end{aligned}$$

<u>Задача 12.</u> Получить соотношения

$$\begin{aligned}
(\tilde\sigma^{\alpha\beta})_{\dot a\dot b}(\tilde\sigma^{\mu\nu})_{\dot c\dot d}\eta_{\alpha\mu} &= \tfrac{1}{8}[\varepsilon_{\dot a\dot c}(\sigma^\beta\tilde\sigma^\nu)_{\dot b\dot d} + \varepsilon_{\dot b\dot c}(\sigma^\beta\tilde\sigma^\nu)_{\dot a\dot d} + \varepsilon_{\dot a\dot d}(\sigma^\beta\tilde\sigma^\nu)_{\dot b\dot c} + \varepsilon_{\dot b\dot d}(\sigma^\beta\tilde\sigma^\nu)_{\dot a\dot c}],\\
(\tilde\sigma^{\alpha\beta})_{\dot a\dot b}(\tilde\sigma^{\mu\nu})_{\dot c\dot d}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} &= -\varepsilon_{\dot a\dot c}\varepsilon_{\dot b\dot d} - \varepsilon_{\dot b\dot c}\varepsilon_{\dot a\dot d},\\
(\sigma^{\alpha\beta})_{ab}(\tilde\sigma^{\mu\nu})_{\dot c\dot d}\eta_{\alpha\mu} &= 0.
\end{aligned}$$

Теперь мы можем вычислить коммутатор для спин-тензорных компонент моментов

$$\begin{aligned}
[M_{ab}, M_{cd}] &= \frac{1}{4}(\sigma^{\alpha\beta})_{ab}(\sigma^{\mu\nu})_{cd}[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] =\\
&= \frac{i}{4}(\sigma^{\alpha\beta})_{ab}(\sigma^{\mu\nu})_{cd}(\eta_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} - \eta_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} + \eta_{\alpha\nu}M_{\mu\beta} - \eta_{\beta\nu}M_{\mu\alpha}) =\\
&= \frac{i}{4}[(\sigma^{\alpha\beta})_{ab}(\sigma^{\mu\nu})_{cd} - (\sigma^{\beta\alpha})_{ab}(\sigma^{\mu\nu})_{cd} - (\sigma^{\alpha\beta})_{ab}(\sigma^{\nu\mu})_{cd} + (\sigma^{\beta\alpha})_{ab}(\sigma^{\nu\mu})_{cd}]\eta_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} =\\
&= i(\sigma^{\alpha\beta})_{ab}(\sigma^{\mu\nu})_{cd}\eta_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} =\\
&= \frac{i}{8}[-\varepsilon_{ac}(\sigma^\beta\tilde\sigma^\nu)_{bd} - \varepsilon_{bc}(\sigma^\beta\tilde\sigma^\nu)_{ad} - \varepsilon_{ad}(\sigma^\beta\tilde\sigma^\nu)_{bc} - \varepsilon_{bd}(\sigma^\beta\tilde\sigma^\nu)_{ac}]M_{\beta\nu} =\\
&= \frac{i}{2}(\varepsilon_{ac}M_{bd} + \varepsilon_{bc}M_{ad} + \varepsilon_{ad}M_{bc} + \varepsilon_{bd}M_{ac}). \qquad (1.61)
\end{aligned}$$

<u>Задача 13.</u> Получить остальные коммутационные соотношения

$$[M_{\dot a\dot b}, M_{\dot c\dot d}] = \frac{i}{2}(\varepsilon_{\dot a\dot c}M_{\dot b\dot d} + \varepsilon_{\dot b\dot c}M_{\dot a\dot d} + \varepsilon_{\dot a\dot d}M_{\dot b\dot c} + \varepsilon_{\dot b\dot d}M_{\dot a\dot c}), \qquad (1.62)$$

$$[M_{ab}, M_{\dot c\dot d}] = 0. \qquad (1.63)$$

Из коммутационных соотношений (1.61–1.63) видно, что алгебра Лоренца является прямой суммой двух независимых алгебр, образованных генераторами M_{ab} и $M_{\dot a\dot b}$.

Покажем, что операторами Казимира этой алгебры являются операторы

$$C_1 = M_{ab}M^{ab}, \qquad C_2 = M_{\dot a\dot b}M^{\dot a\dot b}.$$

Для этого нужно доказать, что они коммутируют со всеми генераторами M_{ab}, $M_{\dot a\dot b}$:

$$\begin{aligned}
[C_1, M_{cd}] &= [M^{ab}M_{ab}, M_{cd}] = M^{ab}[M_{ab}, M_{cd}] + [M_{ab}, M_{cd}], M^{ab} =\\
&= \tfrac{i}{2}M^{ab}(\varepsilon_{ac}M_{bd} + \varepsilon_{ad}M_{bc} + \varepsilon_{bc}M_{ad} + \varepsilon_{bd}M_{ac}) +\\
&+ \tfrac{i}{2}(\varepsilon_{ac}M_{bd} + \varepsilon_{ad}M_{bc} + \varepsilon_{bc}M_{ad} + \varepsilon_{bd}M_{ac})M^{ab} =\\
&= \tfrac{i}{2}(-M_c{}^bM_{bd} - M_d{}^bM_{bc} - M_c{}^aM_{ad} - M_d{}^aM_{ac} -\\
&- M_{bd}M_c{}^b - M_{bc}M_d{}^b - M_{ad}M_c{}^a - M_{ac}M_d{}^a) =\\
&= i(-M_c{}^dM_{bd} - M_d{}^bM_{bc} + M_d{}^bM_{bc} + M_c{}^bM_{bd}) = 0,\\
[C_1, M_{\dot c\dot d}] &= 0.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$[C_2, M_{ab}] = 0, \qquad [C_2, M_{\dot a\dot b}] = 0.$$

Итак, C_1 и C_2 – операторы Казимира группы Лоренца. Изучим действие данных операторов на элементы произвольного спин-тензорного неприводимого представлении.

Прежде всего, найдем действие генераторов M_{ab}, $M_{\dot{a}\dot{b}}$ на симметричные спиноры. Рассмотрим фундаментальное представление

$$\psi_a \longrightarrow \psi'_a = N_a{}^b \psi_b, \qquad N \in SL(2,C).$$

Представим матрицу N в экспоненциальной форме

$$N = e^B,$$

где B – некоторая матрица. В силу соотношения $\det N = e^{\mathrm{tr}\ln N}$ из условия $\det N = 1$ следует, что $\mathrm{tr}B = 0$. Это означает, что матрицы B образуют шестимерное линейное пространство бесследовых комплексных двурядных матриц. В качестве базиса в этом пространстве можно выбрать матрицы $\sigma_{\mu\nu}$

$$B = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}, \qquad N = e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(-i\sigma_{\mu\nu})},$$

т.е. $\omega^{\mu\nu}$ – локальные координаты на группе $SL(2,C)$. Поскольку в общем случае мы имеем

$$\psi'_a = (e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\psi)_a,$$

то, сравнивая эти формулы, замечаем, что генераторы фундаментального представления имеют вид

$$(M_{\mu\nu})_a{}^b = -i(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b, \qquad (M_{\mu\nu}\psi)_a = -i(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b\psi_b.$$

Отсюда получаем спинорные компоненты генератора $M_{\mu\nu}$ в данном представлении

$$\begin{array}{l} (M_{cd})_a{}^b = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_{cd}(M_{\mu\nu})_a{}^b = -\frac{i}{2}(\sigma^{\mu\nu})_{cd}(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b = -\frac{i}{2}(\varepsilon_{ac}\delta^b_d + \varepsilon_{ad}\delta^b_c), \\ (M_{\dot{c}\dot{d}})_a{}^b = -\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{c}\dot{d}}(M_{\mu\nu})_a{}^b = \frac{i}{2}(\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{c}\dot{d}}(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b = 0, \end{array}$$

т.е.

$$(M_{cd}\psi)_a = -\frac{i}{2}(\varepsilon_{ac}\psi_d + \varepsilon_{ad}\psi_c), \qquad (M_{\dot{c}\dot{d}}\psi)_a = 0.$$

В случае произвольного неточечного симметричного спин-тензора эти формулы легко обобщаются:

$$\begin{array}{l} (M_{cd}\psi)_{a_1\ldots a_n} = -\frac{i}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(\varepsilon_{a_ic}\psi_{da_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_n} + \varepsilon_{a_id}\psi_{ca_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_n}), \\ (M_{\dot{c}\dot{d}}\psi)_{a_1\ldots a_n} = 0, \end{array} \tag{1.64}$$

где $\hat{a}_i$ означает, что индекс a_i отсутствует у этого спин-тензора.

Найдем теперь действие операторов Казимира на спин-тензоры

$$\begin{array}{ll} (C_1\psi)_{a_1\ldots a_n} & = (M^{cd}M_{cd}\psi)_{a_1\ldots a_n} = \\ & = -\frac{i}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(\varepsilon_{a_ic}M^{cd}\psi_{da_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_n} + \varepsilon_{a_id}M^{cd}\psi_{ca_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_n}) = \\ & = -i\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_{a_ic}M^{cd}\psi_{da_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_n} = \\ & = -\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_{a_ic}\{\delta^d_d\psi^c{}_{a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_n} + \delta^c_d\psi^d{}_{a_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_n} + \\ & + \sum\limits_{j\neq i}^{n}(\delta^c_{a_j}\psi^d{}_{da_1\ldots\hat{a}_i\ldots\hat{a}_j\ldots a_n} + \delta^d_{a_j}\psi^c{}_{da_1\ldots\hat{a}_i\ldots\hat{a}_j\ldots a_n})\} = \\ & = -\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(2\psi_{a_1\ldots a_n} + \psi_{a_1\ldots a_n} + \sum\limits_{j\neq i}^{n}\psi_{a_1\ldots a_n}) = \\ & = -\frac{1}{2}(3n + n(n-1))\psi_{a_1\ldots a_n} = -\frac{n(n+2)}{2}\psi_{a_1\ldots a_n}, \\ (C_2\psi)_{a_1\ldots a_n} & = 0. \end{array}$$

Аналогично можно найти действие операторов Казимира в секторе точечных спиноров:

$$(C_1\psi)_{\dot a_1\ldots\dot a_m}=0,\qquad (C_2\psi)_{\dot a_1\ldots\dot a_m}=-\frac{m(m+2)}{2}\psi_{\dot a_1\ldots\dot a_m}.$$

Итак, в случае произвольного представления $(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$ имеем:

$$\begin{array}{l}(C_1\psi)_{a_1\ldots a_n\dot b_1\ldots\dot b_m}=-\frac{1}{2}n(n+2)\psi_{a_1\ldots a_n\dot b_1\ldots\dot b_m},\\ (C_2\psi)_{a_1\ldots a_n\dot b_1\ldots\dot b_m}=-\frac{1}{2}m(m+2)\psi_{a_1\ldots a_n\dot b_1\ldots\dot b_m}.\end{array}$$

Это означает, что операторы Казимира кратны единичному оператору в данном представлении

$$C_1|_{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}=-\frac{1}{2}n(n+2)\hat 1,\qquad C_2|_{(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}=-\frac{1}{2}m(m+2)\hat 1.$$

Таким образом, неприводимые представления группы Лоренца задаются числами m и n и имеют размерность $(n+1)(m+1)$. Из теории групп известно, что это полный набор неприводимых конечномерных представлений группы $SL(2,C)$. Подробное рассмотрение свойств операторов Казимира для группы $SL(2,C)$ дано в книге [10].

1.6. Дискретные преобразования спиноров

Ранее мы описали все неприводимые представления собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$. В данном параграфе мы изучим вопрос о неприводимых представлениях полной группы Лоренца L.

Напомним, что группа Лоренца L состоит из четырех компонент

$$L=L_+^\uparrow\cup L_-^\uparrow\cup L_+^\downarrow\cup L_-^\downarrow,$$

которые получаются из собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$ с помощью дискретных преобразований P, T, TP, где

$$\begin{array}{l}P: x^\mu\to x'^\mu=P^\mu{}_\nu x^\nu=(x^0,-x^1,-x^2,-x^3),\\ T: x^\mu\to x'^\mu=T^\mu{}_\nu x^\nu=(-x^0,x^1,x^2,x^3),\end{array}$$

$$||P^\mu{}_\nu||=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1),\qquad ||T^\mu{}_\nu||=\mathrm{diag}(-1,1,1,1).$$

Фактически, полная группа Лоренца отличается от $L_+^\uparrow$ наличием этих дискретных преобразований и любой элемент группы L может быть получен из некоторого элемента группы $L_+^\uparrow$ действием одного из операторов P, T или TP. Поэтому необходимо изучить действие операторов P, T, TP в неприводимых представлениях типа $(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$.

Начнем с рассмотрения оператора P. Пусть есть $U(\Lambda)$ – операторы некоторого представления группы Лоренца, т.е. для них выполняется соотношение

$$U(\Lambda_1)U(\Lambda_2)=U(\Lambda_1\Lambda_2),$$

где Λ_1, Λ_2 матрицы из группы Лоренца. В таком представлении преобразование пространственных отражений задается оператором

$$\hat P=U(P).$$

Рассмотрим следующее произведение

$$U(P)U(\Lambda)U^{-1}(P) = U(P\Lambda P^{-1}) = U(P\Lambda P),$$

где Λ – собственное преобразование Лоренца. Представим его в инфинитезимальной форме, тогда

$$\hat{P}(1 + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \ldots)\hat{P}^{-1} = 1 + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}P_\mu{}^\alpha P_\nu{}^\beta M_{\alpha\beta} + \ldots.$$

В первом порядке по $\omega^{\mu\nu}$ имеем

$$\hat{P}M_{\mu\nu}\hat{P}^{-1} = P_\mu{}^\alpha P_\nu{}^\beta M_{\alpha\beta}.$$

Запишем это соотношение для различных значений индексов μ, ν и воспользуемся явным видом матриц $P_\mu{}^\nu$:

$$\begin{array}{l} \hat{P}M_{ij}\hat{P}^{-1} = M_{ij}, \quad i,j = 1,2,3, \\ \hat{P}M_{0j}\hat{P}^{-1} = -M_{0j}. \end{array}$$

Кроме того, оператор $\hat{P}$ в любом представлении группы Лоренца должен обладать свойством

$$\hat{P}^2 = 1,$$

поскольку

$$\hat{P}^2 = U(P^2) = U(1).$$

Итак, в произвольном (однозначном) представлении группы Лоренца оператор $\hat{P}$ имеет следующие коммутационные соотношения

$$\hat{P}M_{ij} - M_{ij}\hat{P} = 0, \tag{1.65}$$

$$\hat{P}M_{0j} + M_{0j}\hat{P} = 0. \tag{1.66}$$

Уравнения (1.65, 1.66) имеют прозрачный геометрический смысл. Соотношение (1.65) означает, что пространственное отражение и последующий поворот приводят к такому же результату, что и поворот с последующим отражением. Соотношение (1.66) показывает, что к одному и тому же результату приводят переход в систему отсчета, движущуюся относительно исходной со скоростью $\vec{V}$ с последующим отражением, и отражение с последующим переходом в систему, движущуюся со скоростью $-\vec{V}$.

В общем случае, когда рассматриваются все представления группы Лоренца, включая двузначные (спинорные), ситуация усложняется. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Найдем коммутационные соотношения для $\hat{P}$ с генераторами M_{ab}, $M_{\dot{a}\dot{b}}$

$$\begin{aligned} \hat{P}M_{ab} &= \hat{P}\tfrac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_{ab}M_{\mu\nu} = \hat{P}\tfrac{1}{2}[2(\sigma^{0j})_{ab}M_{0j} + (\sigma^{ij})_{ab}M_{ij}] = \\ &= \tfrac{1}{2}[-2(\sigma^{0j})_{ab}M_{0j} + (\sigma^{ij}M_{ij})]\hat{P} = \\ &= \tfrac{1}{2}[2(\tilde{\sigma}^{0j})_{ab}M_{0j} + (\tilde{\sigma}^{ij})_{ab}M_{ij}]\hat{P} = -M_{\dot{a}\dot{b}}\hat{P}. \end{aligned}$$

Здесь были использованы следующие свойства σ-матриц

$$\begin{array}{l} \sigma^{0j} = -\frac{1}{4}(\sigma^0\tilde{\sigma}^j - \sigma^j\tilde{\sigma}^0) = -\frac{1}{4}(-\tilde{\sigma}^0\sigma^j + \tilde{\sigma}^j\sigma^0) = -\tilde{\sigma}^{0j}, \\ \sigma^{ij} = -\frac{1}{4}(\sigma^i\tilde{\sigma}^j - \sigma^j\tilde{\sigma}^i) = \tilde{\sigma}^{ij}. \end{array}$$

Аналогично доказывается
$$\hat{P}M_{\dot{a}\dot{b}} = -M_{ab}\hat{P}.$$

Итак, в произвольном спин-тензорном представлении оператор $\hat{P}$ имеет следующие перестановочные соотношения с операторами моментов

$$\hat{P}M_{ab} + M_{\dot{a}\dot{b}}\hat{P} = 0, \qquad \hat{P}M_{\dot{a}\dot{b}} + M_{ab}\hat{P} = 0, \tag{1.67}$$

кроме того, имеется две возможности: из того, что $P^2 = 1$, следует

$$\begin{array}{ll} \hat{P}^2 = \hat{1} & \text{для однозначных представлений,} \\ \hat{P}^2 = \pm\hat{1} & \text{для двузначных представлений.} \end{array} \tag{1.68}$$

На основе уравнений (1.67) находим:

$$\begin{array}{l} \hat{P}C_1 = \hat{P}M_{ab}M^{ab} = -M_{\dot{a}\dot{b}}\hat{P}M^{ab} = M_{\dot{a}\dot{b}}\hat{P} = C_2\hat{P}, \\ \hat{P}C_2 = \hat{P}M_{\dot{a}\dot{b}}M^{\dot{a}\dot{b}} = -M_{ab}\hat{P}M^{\dot{a}\dot{b}} = C_1\hat{P}. \end{array}$$

Пусть ψ – спин-тензор, реализующий неприводимое представление $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$, т.е.

$$C_1\psi = -\frac{n(n+2)}{2}\psi, \qquad C_2\psi = -\frac{m(m+2)}{2}\psi.$$

Подействуем на него оператором $\hat{P}$

$$\psi' = \hat{P}\psi.$$

Преобразованный спин-тензор ψ' будет уже принадлежать представлению $(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$, поскольку
$$\begin{array}{l} C_1\psi' = C_1\hat{P}\psi = \hat{P}C_2\psi = \hat{P}(-\frac{m(m+2)}{2})\psi = -\frac{m(m+2)}{2}\psi', \\ C_2\psi' = C_2\hat{P}\psi = \hat{P}C_1\psi = -\frac{n(n+2)}{2}\psi'. \end{array}$$

Таким образом, в случае $m \neq n$ оператор пространственного отражения $\hat{P}$ не может быть реализован в пространстве неприводимого представления собственной группы Лоренца, он перемешивает два неприводимых представления

$$\hat{P} : \left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) \leftrightarrows \left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right).$$

Очевидно, для того чтобы получить неприводимое представление всей группы Лоренца (с учетом дискретных преобразований), необходимо взять прямую сумму спин-тензорных представлений
$$\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) \oplus \left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right). \tag{1.69}$$

В простейшем случае при $n = 1$, $m = 0$ будем иметь представление

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{1.70}$$

Элемент пространства этого представления имеет четыре компоненты и построен из двух спиноров – точечного и неточечного

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}. \tag{1.71}$$

Такой спинор Ψ называется *дираковским спинором*, т.е. по определению, это элемент представления $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$. При преобразованиях Лоренца спиноры $\psi,\bar\chi$ преобразуются по правилу

$$\begin{array}{l} \delta\psi_a = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b\psi_b, \\ \delta\bar\chi^{\dot a} = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(\tilde\sigma_{\mu\nu})^{\dot a}{}_{\dot b}\bar\chi^{\dot b}. \end{array}$$

Следовательно, дираковский спинор имеет следующий закон преобразования

$$\delta\Psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \tilde\sigma_{\mu\nu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar\chi \end{pmatrix}. \tag{1.72}$$

Введем четырехрядные матрицы

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tilde\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.73}$$

которые называют *матрицами Дирака* Рассмотрим также их антисимметричную комбинацию

$$\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sigma_\mu\tilde\sigma_\nu - \sigma_\nu\tilde\sigma_\mu & 0 \\ 0 & \tilde\sigma_\mu\sigma_\nu - \tilde\sigma_\nu\sigma_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \tilde\sigma_{\mu\nu} \end{pmatrix}.$$

Тогда закон преобразования дираковского спинора (1.72) имеет вид

$$\delta\Psi = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\Psi. \tag{1.74}$$

Заметим, что для матриц Дирака выполняется следующее тождество

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = \begin{pmatrix} \sigma_\mu\tilde\sigma_\nu + \sigma_\nu\tilde\sigma_\mu & 0 \\ 0 & \tilde\sigma_\mu\sigma_\nu + \tilde\sigma_\nu\sigma_\mu \end{pmatrix} = 2\eta_{\mu\nu}\mathbf{1}_{4\times4}. \tag{1.75}$$

Из явного вида закона преобразования (1.74) следует, что генераторы представления (1.70) на дираковских спинорах (1.71) имеют вид

$$M_{\mu\nu} = -i\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \eta_{\mu\nu}\mathbf{1}_{4\times4}).$$

Для оператора пространственных отражений теперь получаем следующие свойства

$$\begin{array}{lll} [\hat P, M_{0j}]_+ = 0 & \Rightarrow & \hat P\gamma_0\gamma_j + \gamma_0\gamma_j\hat P = 0, \\ [\hat P, M_{ij}] = 0 & \Rightarrow & \hat P\gamma_i\gamma_j - \gamma_i\gamma_j\hat P = 0. \end{array} \tag{1.76}$$

Задача 14. Показать, что общее решение уравнений (1.76) записывается в виде

$$\hat P = \lambda_1\gamma_0 + \lambda_2\gamma_0\gamma_5, \tag{1.77}$$

где λ_1,λ_2 – произвольные параметры, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. С учетом явного вида матриц Дирака (1.73) выражение (1.77) может быть записано в виде

$$\hat P = \lambda_1\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь аналогичным образом операцию временно́го отражения. Можно показать, что она обладает теми же коммутационными соотношениями, что и $\hat P$:

$$[\hat T, M_{0j}]_+ = 0, \qquad [\hat T, M_{ij}] = 0,$$

и имеет свойство

$$\hat{T}^2 = 1 \qquad \text{для однозначных представлений}$$
$$\hat{T}^2 = \pm 1 \quad \text{для двузначных представлений.}$$

Следовательно, неприводимыми с учетом операции $\hat{T}$ будут, по-прежнему, представления вида

$$\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) \oplus \left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right), \qquad m \neq n$$

или представления $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

Очевидно, что операция $\hat{T}\hat{P}$ коммутирует со всеми генераторами $M_{\mu\nu}$

$$[\hat{T}\hat{P}, M_{\mu\nu}] = 0, \qquad (\hat{T}\hat{P})^2 = 1.$$

Следовательно, представления $\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$ инвариантны относительно $\hat{T}\hat{P}$.

Итак, мы получаем, что для группы Лоренца неприводимыми являются представления $\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) \oplus \left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

В заключении параграфа рассмотрим вопрос о вещественных представлениях. Ограничимся случаем представления $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)$, элементами которого являются дираковские спиноры

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}.$$

Комплексное сопряжение переводит спинор ψ_a в $\bar{\psi}_{\dot{a}}$, спинор $\bar{\chi}^{\dot{a}}$ в χ^a. Объединим их в четырехкомпонентный спинор-строку

$$\bar{\Psi} = (\chi^a, \bar{\psi}_{\dot{a}}). \tag{1.78}$$

Такой спинор (1.78) преобразуется по закону

$$\delta\bar{\Psi} = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\bar{\Psi}\Sigma_{\mu\nu}.$$

Заметим, что $\bar{\Psi}$ может быть выражен через Ψ

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0,$$

т.е. производится эрмитово сопряжение и затем переставляются двухкомпонентные части.

Такой спинор $\bar{\Psi}$, определенный выражением (1.78), называют *дираковски-сопряженным* к спинору Ψ.

Определим на спинорах Ψ дискретное преобразование $\hat{C}$ следующим образом

$$\hat{C} : \Psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \longrightarrow \Psi_c = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \bar{\psi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}. \tag{1.79}$$

Очевидно, что спинор Ψ_c преобразуется по тому же закону, что и Ψ:

$$\delta\Psi_c = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\Psi_c.$$

Явная связь спиноров Ψ_c и Ψ задается формулой

$$\Psi_c = C\bar{\Psi}^T, \qquad C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}.$$

Операция $\hat{C}$ называется *зарядовым сопряжением*, Ψ_c – *зарядово-сопряженным* к Ψ. Эта операция является аналогом обычного комплексного сопряжения для тензоров. При зарядовом сопряжении мы получаем спиноры из того же пространства представления.

Имея аналог комплексного сопряжения, можно ввести аналог вещественных объектов для дираковских спиноров

$$\hat{C} : \Psi_M \longrightarrow \Psi'_M = C\bar{\Psi}_M^T, \qquad \Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\psi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}.$$

Такие спиноры Ψ_M называются *майорановскими спинорами*. Они имеют две независимых компоненты, а не четыре, хотя и преобразуются по закону дираковских спиноров

$$\delta\Psi_M = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\Psi_M.$$

Задача 15. Показать, что любой дираковский спинор может быть представлен в виде суммы двух майорановских:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \qquad \Psi = \Pi_M + i\Lambda_M,$$

где спиноры Π_M и Λ_M имеют соответственно компоненты

$$\pi_a = \frac{1}{2}(\psi_a + \chi_a), \qquad \lambda_a = \frac{1}{2i}(\psi_a - \chi_a).$$

1.7. Неприводимые представления группы Пуанкаре

Напомним, что алгебра группы Пуанкаре задается следующими коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [M_{\alpha\beta}, P_\mu] = i(\eta_{\alpha\mu}P_\beta - \eta_{\beta\mu}P_\alpha), \\ &[M_{\alpha\beta}, M_{\mu\nu}] = i(\eta_{\alpha\mu}M_{\beta\nu} - \eta_{\beta\mu}M_{\alpha\nu} + \eta_{\alpha\nu}M_{\mu\beta} - \eta_{\beta\nu}M_{\mu\alpha}). \end{aligned} \tag{1.80}$$

Для классификации неприводимых представлений группы Пуанкаре требуется найти операторы Казимира и описать их спектр.

Первым оператором Казимира является квадрат генератора трансляций

$$C_1 = P_\mu P^\mu,$$

что вытекает из коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} [C_1, P_\alpha] &= 0, \\ [C_1, M_{\alpha\beta}] &= [P_\mu P^\mu, M_{\alpha\beta}] = [P_\mu, M_{\alpha\beta}]P^\mu + P_\mu[P^\mu, M_{\alpha\beta}] = \\ &= i(-\eta_{\alpha\mu}P_\beta + \eta_{\beta\mu}P_\alpha)P^\mu + P^\mu i(-\eta_{\alpha\mu}P_\beta + \eta_{\beta\mu}P_\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Для построения второго оператора Казимира введем оператор

$$W_\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\alpha\mu\nu}P^\alpha M^{\mu\nu}, \tag{1.81}$$

называемый *вектором Любанского-Паули*. Перечислим основные свойства этого оператора.

1. Порядок записи операторов P^α и $M^{\mu\nu}$ в выражении (1.81) несущественен

$$\begin{aligned} W_\beta &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\beta\alpha\mu\nu}P^\alpha M^{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\beta\alpha\mu\nu}(M^{\mu\nu} + [P^\alpha, M^{\mu\nu}]) = \\ &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\beta\alpha\mu\nu}M^{\mu\nu}P^\alpha = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha}M^{\mu\nu}P^\alpha. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали коммутационные соотношения (1.80).

2. Вектора W_μ и P_μ ортогональны

$$W_\mu P^\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\nu M^{\alpha\beta}P^\mu = 0.$$

3. Оператор W_μ трансляционно-инвариантен

$$\begin{aligned} [W_\mu, P^\nu] &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}P^\lambda[M^{\alpha\beta}, P^\nu] = \\ &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}P^\lambda i(\eta^{\alpha\nu}P^\beta - \eta^{\nu\beta}P^\alpha) = 0. \end{aligned}$$

4. Поскольку W_μ по построению является вектором, то он должен иметь векторный закон преобразования

$$[M_{\mu\nu}, W_\alpha] = i(\eta_{\mu\nu}W_\nu - \eta_{\nu\alpha}W_\mu).$$

5. Компоненты W_μ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [W_\alpha, W_\beta] &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu}P^\lambda[M^{\mu\nu}, W_\beta] = -\tfrac{i}{2}\varepsilon_{\alpha\lambda\mu\nu}P^\lambda(\delta^\mu_\beta W^\nu - \delta^\nu_\beta W^\mu) = \\ &= -\tfrac{i}{2}(\varepsilon_{\alpha\lambda\beta\nu}P^\lambda W^\nu - \varepsilon_{\alpha\lambda\mu\beta}P^\lambda W^\mu) = i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu}P^\lambda W^\nu. \end{aligned}$$

Вторым оператором Казимира является квадрат вектора Любанского-Паули

$$C_2 = W_\mu W^\mu = -\frac{1}{2}P_\alpha P^\alpha M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + P_\alpha P^\beta M^{\alpha\mu}M_{\beta\mu}.$$

Это вытекает из коммутационных соотношений данного оператора с операторами импульсов и моментов

$$\begin{aligned} [C_2, P_\mu] &= [W_\alpha, P_\mu]W^\alpha + W^\alpha[W_\alpha, P_\mu] = 0, \\ [C_2, M_{\mu\nu}] &= [W_\alpha, M_{\mu\nu}]W^\alpha + W^\alpha[W_\alpha, M_{\mu\nu}] = \\ &= i(-\eta_{\mu\alpha}W_\nu + \eta_{\nu\alpha}W_\mu)W^\alpha + iW^\alpha(-\eta_{\mu\alpha}W_\nu + \eta_{\nu\alpha}W_\mu) = 0. \end{aligned}$$

Известно, что группа Пуанкаре не имеет других операторов Казимира, являющихся полиномами генераторов P_μ и $M_{\mu\nu}$.

Для классификации неприводимых представлений изучим спектр операторов C_1 и C_2.

Далее мы будем считать, что имеется пространство неприводимого представления V, элементами которого являются векторы $|q\rangle$, где мы используем обозначения для векторов, принятое в квантовой механики. Для того, чтобы явно определить пространство V, необходимо построить базис в данном пространстве. Заметим, что поскольку все операторы P_μ коммутируют между собой, то базис в пространстве представления может быть построен из собственных векторов для этих операторов

$$P_\mu|q\rangle = q_\mu|q\rangle.$$

Очевидно, что эти векторы будут собственными для оператора C_1

$$C_1|q\rangle = P_\mu P^\mu |q\rangle = q_\mu q^\mu |q\rangle = m^2|q\rangle,$$

где собственное число оператора C_1 мы обозначили m^2. Это число m называют *массой* неприводимого представления. Каждому значению m соответствует свое представление, поэтому векторы, принадлежащие одному представлению, будем обозначать символом

$$|q, m\rangle.$$

Компоненты q^μ не являются независимыми, они подчинены условию

$$q^\mu q_\mu = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = m^2. \tag{1.82}$$

Мы ограничимся рассмотрением только унитарных представлений, поскольку именно они, в основном, используются в физических приложениях. Это означает, что операторы представления являются унитарными операторами вида

$$U(\Lambda, a) = e^{i(a^\mu P_\mu + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu})}.$$

Следовательно, операторы P_μ и $M_{\mu\nu}$ должны быть самосопряженными. Известно, что самосопряженные операторы имеют лишь вещественные собственные значения. Тогда все величины q_μ и m^2 вещественны и изменяются в пределах

$$-\infty < q_\mu < \infty, \qquad -\infty < m^2 < \infty.$$

Таким образом, неприводимые представления нумеруются непрерывным параметром m^2 (квадратом массы), изменяющимся от $-\infty$ до $+\infty$.

Соотношение (1.82) может быть записано в виде

$$q_0^2 = m^2 + \vec{q}^2$$

или

$$q_0 = \pm\sqrt{\vec{q}^2 + m^2} = \pm\varepsilon(\vec{q}), \tag{1.83}$$

где введено обозначение

$$\varepsilon(\vec{q}) = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}. \tag{1.84}$$

При этом на трехмерный вектор $\vec{q}$ никаких ограничений не накладывается. Поэтому каждый базисный вектор пространства представления маркируется трехмерным вектором $\vec{q}$ с произвольными координатами. Отсюда следует, что пространство неприводимого унитарного представления группы Пуанкаре бесконечномерно.

Соотношения (1.82, 1.84) допускают ясную физическую интерпретацию. Равенство (1.82) можно трактовать как связь между четыре-импульсом q_μ и массой релятивистской системы m. Компонента q_0 описывает энергию системы, поскольку она является собственным значением оператора энергии P_0 (напомним, что мы используем систему единиц, в которой скорость света $c = 1$). Следовательно, соотношения (1.83, 1.84) задают связь между энергией релятивистской системы и ее трехмерным вектором импульса $\vec{q}$.

Рассмотрим второй оператор Казимира C_2. Пространства $|q, m\rangle$ должны разложиться в сумму подпространств, соответствующих различным собственным значениям оператора C_2 и инвариантных относительно действия группы Пуанкаре. Найдем эти подпространства. Для этого подействуем оператором представления на состояние $|q, m\rangle$

$$U(\Lambda, a)|q, m\rangle = |q', m\rangle,$$

в результате получится вектор, который может соответствовать другому собственному значению оператора импульса

$$\begin{aligned} P_\mu|q',m\rangle &= P_\mu U(\Lambda,a)|q,m\rangle = U(\Lambda,a)U^{-1}(\Lambda,a)|q,m\rangle = U(\Lambda,a){\Lambda_\mu}^\nu P_\nu|q,m\rangle = \\ &= {\Lambda_\mu}^\nu q_\nu U(\Lambda,a)|q,m\rangle = {\Lambda_\mu}^\nu q_\nu|q',m\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$q'^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu q^\nu,$$

или в бесконечно-малой форме

$$q'^\mu = q^\mu + {\omega^\mu}_\nu q^\nu.$$

Рассмотрим теперь множество преобразований Лоренца, оставляющих вектор q^μ неизменным

$$\tilde{\omega}^\mu{}_\nu q^\nu = 0. \tag{1.85}$$

Такие преобразования образуют подгруппу группы Лоренца, которая называется *малой группой* вектора q^μ (или *группой стабильности, стационарной подгруппой*).

Задача 17. Показать, что уравнение (1.85) в четырехмерном пространстве имеет общее решение

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}q^\alpha n^\beta, \tag{1.86}$$

где n^β – произвольный вектор, ортогональный q^μ. Это значит,что только три параметра из четырех у вектора n^β независимы, поскольку при $n^\beta \sim q^\beta$ всегда $\tilde{\omega}_{\mu\nu} = 0$ (то есть вектор n^β определен с точностью до преобразования $n^\beta \to n'^\beta = n^\beta + \gamma q^\beta$).

С использованием (1.86) получаем, что любое преобразование из малой группы имеет вид

$$\tilde{U} = e^{i(a^\mu P_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P^\alpha M^{\mu\nu}n^\beta)} = e^{i(a^\mu P_\mu + n^\mu W_\mu)},$$

т.е. малая группа генерируется оператором трансляций P_μ и вектором Любанского-Паули W_μ и определяется четырьмя параметрами a^μ и тремя n^μ. Вспомним, что оператор Казимира C_2 является квадратом вектора Любанского-Паули $C_2 = W^\mu W_\mu$, а значит, спектр его собственных значений полностью фиксируется малой группой вектора q^μ.

Рассмотрим данную ситуацию более подробно. Оператор $C_2 = W^\mu W_\mu$ является оператором Казимира одновременно и для группы Пуанкаре и для малой группы, которая является подгруппой группы Пуанкаре. Предположим, мы нашли неприводимые представления малой группы, образованные векторами $|q,m,c_2\rangle$, т.е.

$$C_2|q,m,c_2\rangle = c_2|q,m,c_2\rangle.$$

Если совершим неоднородное преобразование Лоренца, то пространство векторов $|q,m,c_2\rangle$ может перейти в другое пространство $|q',m,c_2'\rangle$:

$$|q,m,c_2\rangle \to |q',m,c_2'\rangle = U(\Lambda,a)|q,m,c_2\rangle.$$

Чтобы найти c_2', надо подействовать оператором C_2 на это представление

$$\begin{aligned} C_2|q',m,c_2'\rangle &= C_2U(\Lambda,a)|q,m,c_2\rangle = U(\Lambda,a)U^{-1}(\Lambda,a)C_2U(\Lambda,a)|q,m,c_2\rangle = \\ &= U(\Lambda,a)C_2|q,m,c_2\rangle = c_2U(\Lambda,a)|q,m,c_2\rangle = c_2|q',m,c_2'\rangle. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Здесь мы учли, что оператор $C_2 = W^\mu W_\mu$ является скаляром

$$U^{-1}(\Lambda, a) C_2 U(\Lambda, a) = C_2.$$

Уравнение (1.87) показывает, что

$$c_2' = c_2,$$

следовательно, неоднородные преобразования Лоренца не перемешивают неприводимые представления малой группы, характеризующиеся различными значениями оператора Казимира C_2. Они лишь переводят неприводимые представления малой группы вектора q^μ в неприводимые представления малой группы вектора $q'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu q^\nu$, а собственные значения операторов Казимира при этом не изменяются. Таким образом, чтобы получить неприводимое представление группы Пуанкаре, нужно взять неприводимое представление малой группы вектора q^μ и рассмотреть прямую сумму таких представлений по всем векторам q^μ, связанным преобразованиями Лоренца.

Очевидно, имеется четыре класса неприводимых представлений у группы Пуанкаре, которые соответствуют векторам q^μ, не переводящимся друг в друга преобразованиями Лоренца:

I. $q^2 = m^2 > 0,$
II. $q^2 = m^2 = 0, \quad q^\mu \neq 0,$
III. $q^2 = m^2 < 0,$
IV. $q^\mu = 0.$

Для класса представлений IV группа Пуанкаре сводится к группе Лоренца, поскольку оператор P^μ в этих представлениях действует тривиально. Неприводимые представления группы Лоренца изучены в предыдущем параграфе. Класс представлений III не имеет физического смысла, поскольку он соответствует частицам с отрицательным квадратом массы. Рассмотрим классы представлений I и II более подробно.

1.7.1. Массивные представления

Заметим, что для получения неприводимых представлений достаточно взять один представитель q^μ из этого класса и построить по нему малую группу. Остальные векторы получаются из этого представителя преобразованием Лоренца. В качестве представителя класса векторов $q^2 = m^2 > 0$ выберем

$$q^\mu = (m, 0, 0, 0),$$

где m – собственное значение оператора C_1.

Найдем компоненты вектора Любанского-Паули, отвечающего данному вектору q^μ:

$$W_\mu = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} M^{\alpha\beta} P^\nu = -\tfrac{m}{2}\varepsilon_{\mu 0\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = \tfrac{m}{2}\varepsilon_{0\mu\alpha\beta} M^{\alpha\beta},$$
$$W_0 = 0, \qquad W_i = \tfrac{m}{2}\varepsilon_{0i\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = \tfrac{m}{2}\varepsilon_{0ijk} M^{jk} = \tfrac{m}{2}\varepsilon_{ijk} M_{jk}.$$

Введем вектор S_i, дуальный к M_{ij}:

$$S_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} M_{jk},$$

тогда

$$W_i = -m S_i.$$

Найдем коммутационные соотношения операторов S_i, генерирующих малую группу

$$[S_i, S_j] = \frac{1}{m^2}[W_i, W_j] = \frac{i}{m^2}\varepsilon_{ij\lambda\nu}P^\lambda W^\nu = \frac{i}{m}\varepsilon_{ij0k}W^k = -\frac{i}{m}\varepsilon_{ijk}W_k = i\varepsilon_{ijk}S_k.$$

Итак,

$$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}S_k,$$

мы получаем коммутационные соотношения алгебры $so(3)$. Следовательно, для вектора $q^\mu = (m, 0, 0, 0)$ малой группой является $SO(3)$ – группа вращений трехмерного пространства, ортогонального q^μ.

Рассмотрим оператор Казимира C_2 в этом представлении:

$$C_2 = W^\mu W_\mu = -W_i W_i = -m^2 S_i S_i = -m^2 S^2.$$

Известно, что оператор S^2 является единственным оператором Казимира группы $SO(3)$

$$[S^2, S_i] = 0.$$

Собственные значения этого оператора хорошо известны из теории углового момента в квантовой механике, они равны $s(s+1)$, где параметр s принимает полуцелые значения

$$S^2 = s(s+1)\hat{1}, \qquad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$$

Размерность каждого неприводимого представления $SO(3)$ равна $(2s+1)$, причем целым значениям s соответствуют однозначные представления, а полуцелым – двузначные.

Итак, неприводимые представления малой группы вектора $q^\mu = (m, 0, 0, 0)$ задаются дискретным параметром s; обозначим их $|q, m, s\rangle$:

$$C_2|q, m, s\rangle = -m^2 s(s+1)|q, m, s\rangle.$$

Параметр s называется *спином* представления.

Произвольный вектор p_μ, $p^2 = m^2$ получается из $q^\mu = (m, 0, 0, 0)$ посредством некоторого преобразования Лоренца

$$|p, m, s\rangle = U(\Lambda, a)|q, m, s\rangle.$$

Следовательно,

$$C_2|p, m, s\rangle = -m^2 s(s+1)|p, m, s\rangle, \qquad C_1|p, m, s\rangle = m^2|p, m, s\rangle.$$

В результате получаем, что неприводимые представления группы Пуанкаре характеризуются двумя параметрами: непрерывным m – массой и дискретным параметром s – спином.

Это представление бесконечномерно, поскольку каждому представлению с фиксированными m и s соответствует бесконечный набор независимых векторов $|p, m, s\rangle$ с различными p_μ, лежащими на массовой поверхности $p^2 = m^2$. Каждому набору (p_μ, m, s) при фиксированном m соответствует $(2s+1)$ различных векторов состояний (с различными проекциями спина на вектор импульса).

Заметим, что для собственной группы Пуанкаре векторы p_μ, соответствующие верхней и нижней полости гиперболоида $p^2 = m^2$, не могут быть переведены друг

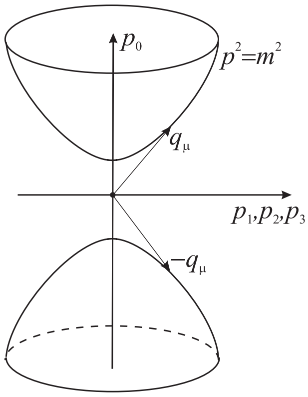


Рис. 1.3. Векторы p_μ, подчиненные массовому условию (1.82), образуют поверхность двухполостного гиперболоида в четырехмерном пространстве Минковского. Векторы лежащие на разных полостях гиперболоида не могут быть переведены друг в друга преобразованиями из собственной группы Лоренца.

в друга преобразованиями из собственной группы Лоренца. Чтобы различать эти представления, можно ввести оператор знака энергии

$$C_3 = \epsilon(P_0) = \frac{P_0}{|P_0|} = \begin{cases} 1, & p_0 > 0 \\ -1, & p_0 < 0, \end{cases}$$

который принимает значения либо $+1$, либо -1 в зависимости от того, положительна энергия системы или отрицательна. Для полной группы Пуанкаре, включающей отражения, обе полости гиперболоида соответствуют одному представлению, поскольку отражения перемешивают эти состояния с $p_0 > 0$ и $p_0 < 0$ (см. рис. 1.3).

1.7.2. Безмассовые представления

Рассмотрим теперь второй важный случай представлений, для которых

$$C_1 = P^2 = P_\mu P^\mu = 0.$$

В качестве представителя этого класса выберем вектор

$$q_\mu = (E, 0, 0, E), \qquad E > 0, \qquad q^2 = E^2 - E^2 = 0.$$

Найдем соответствующие компоненты вектора Любанского-Паули для такого представления. Из условия $W_\mu P^\mu = 0$ следует

$$W_0 P^0 + W_3 P^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad E(W_0 - W_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_0 = W_3,$$

поэтому остается изучить только алгебру компонент W_1, W_2, W_3. Из определения вектора Любанского-Паули (1.81) получаем

$$\begin{aligned} W_1 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{1\alpha\mu\nu} P^\alpha M^{\mu\nu} = -\frac{E}{2} 2(\varepsilon_{1023} M^{23} - \varepsilon_{1302} M^{02}) = \\ &= E(M_{23} + M_{02}) \equiv E\mathcal{P}_1, \\ W_2 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{2\alpha\mu\nu} P^2 M^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} 2(\varepsilon_{2013} M^{13} - \varepsilon_{2301} M^{01}) = \\ &= -E(M_{13} + M_{01}) \equiv -E\mathcal{P}_2, \\ W_3 &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{3\alpha\mu\nu} P^\alpha M^{\mu\nu} = -\frac{E}{2} 2\varepsilon_{3012} M^{12} = EM_{12}. \end{aligned}$$

Здесь мы ввели обозначения

$$\mathcal{P}_1 = M_{23} + M_{02}, \qquad \mathcal{P}_2 = M_{13} + M_{01}.$$

Найдем перестановочные соотношения операторов $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, M_{12}, генерирующих малую группу в таком представлении

$$\begin{aligned}
[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2] &= -\frac{1}{E^2}[W_1, W_2] = -\frac{i}{E^2}(\varepsilon_{1203}P^0W^3 + \varepsilon_{1230}P^3W^0) = \\
&= -\frac{i}{E}(W^3 + W^0) = -\frac{i}{E}(W_0 - W_3) = 0, \\
[\mathcal{P}_1, M_{12}] &= \frac{1}{E^2}[W_1, W_3] = \frac{i}{E^2}\varepsilon_{1302}P^0W^2 = \frac{i}{E}W_2 = -i\mathcal{P}_2, \\
[\mathcal{P}_2, M_{12}] &= -\frac{1}{E^2}[W_2, W_3] = -\frac{i}{E^2}\varepsilon_{2301}P^0W^1 = \frac{i}{E}W_1 = i\mathcal{P}_1.
\end{aligned}$$

Итак,

$$[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2] = 0, \quad [M_{12}, \mathcal{P}_1] = i\mathcal{P}_2, \quad [M_{12}, \mathcal{P}_2] = -i\mathcal{P}_1,$$

мы получили алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы движения двумерной плоскости $E(2)$. Ранг этой алгебры равен единице, следовательно, у нее имеется один оператор Казимира $\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2$. Именно с ним связан оператор Казимира алгебры Пуанкаре в этом представлении

$$C_2 = W_\mu W^\mu = W_0^2 - W_1^2 - W_2^2 - W_3^2 = -E^2(\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2).$$

Поскольку операторы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ коммутируют между собой, неприводимые представления можно построить на базисе собственных векторов этих операторов $|\rho_1, \rho_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1|\rho_1, \rho_2\rangle &= \rho_1|\rho_1, \rho_2\rangle, \\
\mathcal{P}_2|\rho_1, \rho_2\rangle &= \rho_2|\rho_1, \rho_2\rangle.
\end{aligned}$$

Тогда собственное значение оператора C_2 будет

$$C_2|\rho_1, \rho_2\rangle = -E^2(\rho_1^2 + \rho_2^2)|\rho_1, \rho_2\rangle = -E^2\mu^2|\rho_1, \rho_2\rangle,$$

где $\mu \geq 0$ – непрерывный параметр.

Здесь возможны два существенно различных случая: $\mu^2 > 0$ и $\mu^2 = 0$. В первом случае неприводимые представления бесконечномерны, поскольку они образованы всевозможными векторами $|\rho_1, \rho_2\rangle$ с ρ_1 и ρ_2, удовлетворяющими условию $\rho_1^2 + \rho^2 = \mu^2$. Частицы, которые соответствуют этим представлениями, называются *анионами*. Случай, когда $\mu^2 = 0$, рассмотрим более подробно.

Условие $\mu^2 = 0$ означает, что $\rho_1 = \rho_2 = 0$, то есть малая группа генерируется одним оператором M_{12}. Это есть группа $SO(2)$ или $U(1)$. Поскольку эта группа является Абелевой и компактной, то ее представления одномерны и характеризуются одним параметром λ, который в силу компактности принимает дискретные значения. Естественно выбрать в качестве такого параметра собственные значения единственного оператора M_{12}

$$M_{12}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle.$$

Оператор M_{12} является оператором вращения, спектр его собственных значений хорошо известен. Допустимыми значениями параметра λ являются положительные и отрицательные целые и полуцелые числа

$$\lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \ldots.$$

Параметр λ называют *спиральностью* представления.

Выясним физический смысл спиральности. Для представлений вида $q_\mu = (E, 0, 0, E)$ имеем

$$
\begin{aligned}
&W_3|\lambda\rangle = EM_{12}|\lambda\rangle = E\lambda|\lambda\rangle = \lambda P_3|\lambda\rangle,\\
&W_0|\lambda\rangle = \lambda P_0|\lambda\rangle,\\
&W_1 = W_2 = 0,\\
&P_1 = P_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Это означает, что векторы W_μ и P_μ пропорциональны друг другу с параметром λ

$$W_\mu = \lambda P_\mu.$$

Так как W_μ и P_μ – векторы, это соотношение должно выполняться во всех координатных системах и не зависеть от выбора вектора q_μ, т.е. λ является инвариантным параметром. В частности,

$$W_0 = \lambda P_0 \quad \text{или} \quad \lambda = W_0 P_0^{-1}.$$

Далее, из определения вектора Любанского-Паули (1.81) имеем

$$W_0 = -\frac{1}{2}\varepsilon_{0\alpha\beta\gamma}P^\alpha M^{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}P^i M^{jk} = P^i M_i = (\vec{P}, \vec{M}),$$

где $M_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk}$ – компоненты вектора углового момента $\vec{M}$. Поскольку $P^2 = 0$, то $P_0 = \pm|\vec{P}|$, для определенности будем считать $P_0 = |\vec{P}|$. Следовательно для параметра спиральности получаем следующее выражение

$$\lambda = \frac{(\vec{P}, \vec{M})}{|\vec{P}|},$$

то есть, спиральность является проекцией вектора углового момента на направление движения.

Иногда параметр $|\lambda|$ называют спином безмассового представления, поскольку он также принимает целые и полуцелые значения. Однако, при этом надо помнить, что спин (собственное значение оператора C_2) для безмассовых представлений равен нулю.

Итак, в безмассовом случае малой группой вектора $q_\mu = (E, 0, 0, E)$ является группа $SO(2)$, ее представления маркируются одним параметром λ и обозначаются как $|q, 0, \lambda\rangle$. Произвольный изотропный вектор p_μ ($p_\mu p^\mu = 0$) может быть получен из вектора q_μ посредством некоторого преобразования Лоренца, следовательно,

$$|p, 0, \lambda\rangle = U(\Lambda, a)|q, 0, \lambda\rangle.$$

Векторы $|p, 0, \lambda\rangle$ при произвольном (изотропном) p_μ, отличающиеся значениями параметра λ, образуют неприводимые безмассовые представления группы Пуанкаре.

В заключении параграфа отметим, что в безмассовом случае также, как и в массивном, можно ввести оператор знака энергии

$$\epsilon(P_0) = \frac{P_0}{|P_0|} = \begin{cases} 1, & p_0 > 0 \\ -1, & p_0 < 0, \end{cases}$$

который будет отличать состояния с положительной и отрицательной энергией. Преобразования из собственной группы Лоренца не перемешивают эти состояния, однако дискретные преобразования пространственного и временного отражения переводят эти состояния друг в друга.

Глава 2

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Релятивистские поля

Полем называется функция, определенная на пространстве Минковского или на какой-нибудь его области. В общем случае мы будем обозначать поле в виде $\phi(x)$, где $x = (x^\mu)$.

Рассмотрим неоднородные преобразования Лоренца координат пространства Минковского

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{2.1}$$

где матрица Λ удовлетворяет уравнению $\Lambda^{\mathrm{T}}\eta\Lambda = \eta$ и a^μ – параметры трансляций. Мы будем далее полагать, что $\phi(x)$ имеет спинорные индексы, т.е.

$$\phi(x) \equiv \phi_{a_1\ldots a_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_m}(x) \equiv \phi_{A_n\dot{A}_m}(x), \tag{2.2}$$

где $A_n = (a_1, \ldots, a_n)$ – набор всех неточечных индексов, $\dot{A}_m = (\dot{a}_1, \ldots, a_m)$ – набор всех точечных индексов.

Назовем поле $\phi_{A_n,\dot{A}_m}$ *релятивистским*, если оно преобразуется по представлению группы Пуанкаре, т.е. имеет место соотношение

$$\phi'_{A_n,\dot{A}_m}(x') = T(N)^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m}\phi_{B_n\dot{B}_m}(x), \tag{2.3}$$

где координаты x'^μ и x^μ связаны соотношением (2.1). Здесь $T(N)^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m}$ – матрица представления группы $SL(2,C)$, которая, как мы знаем, в представлении спин-тензоров типа $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$ имеет вид

$$T(N)^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m} = N_{a_1}{}^{b_1}\ldots N_{a_n}{}^{b_n}N^*_{\dot{a}_1}{}^{\dot{b}_1}\ldots N^*_{\dot{a}_m}{}^{\dot{b}_m},$$

где $N_a{}^b$ – элементы матриц группы $SL(2,C)$. В развернутой форме соотношение (2.3) записывается следующим образом

$$\phi'_{a_1\ldots a_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_m}(\Lambda x + a) = N_{a_1}{}^{b_1}\ldots N_{a_n}{}^{b_n}N^*_{\dot{a}_1}{}^{\dot{b}_1}\ldots N^*_{\dot{a}_m}{}^{\dot{b}_m}\phi_{b_1\ldots b_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_m}(x). \tag{2.4}$$

Выразим x через x' из соотношения (2.1)

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu(x'^\nu - a^\nu). \tag{2.5}$$

Подставим (2.5) в равенство (2.3) и затем заменим x' на x

$$\phi'_{A_n\dot{A}_m}(x) = T(N)^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m}\phi_{B_n\dot{B}_m}(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{2.6}$$

Это выражение задает закон преобразования релятивистского поля при неоднородных преобразованиях Лоренца и является определяющим для соотношением релятивистского поля.

Нам также потребуется инфинитезимальная форма записи уравнения (2.6). В бесконечно малой форме матрица обратного преобразования Лоренца имеет вид

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \omega^{\mu}{}_{\nu},$$

где $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ – бесконечно малые параметры преобразования Лоренца. В соотношениях (2.3), (2.6) матрица N – это элемент группы $SL(2,C)$, соответствующий данной матрице Λ. Следовательно, в бесконечно малой форме N задается теми же параметрами, что и матрица Λ. Поэтому можно записать

$$T(N)^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m} = (\hat{1})^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m} + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(M_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m}, \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}(\hat{1})^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m} &\equiv \delta^{b_1}_{a_1}\ldots\delta^{b_n}_{a_n}\delta^{\dot{b}_1}_{\dot{a}_1}\ldots\delta^{\dot{b}_m}_{\dot{a}_m},\\ (M_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m} &\equiv (M_{\mu\nu})_{a_1\ldots a_n\dot{a}_1\ldots\dot{a}_m}{}^{b_1\ldots b_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_m}.\end{aligned}$$

Здесь $M_{\mu\nu}$ – генераторы группы Лоренца в спин-тензорном представлении. В результате, соотношение (2.6) принимает вид

$$\phi_{A_n\dot{A}_m}(x) = (\hat{1} + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m}\phi_{B_n\dot{B}_m}(x - a - \omega x). \tag{2.8}$$

Функцию в правой части (2.8) разложим в ряд с точностью до линейных членов по малым параметрам a^{μ} и $\omega^{\mu\nu}$, тогда получим

$$\begin{aligned}\phi'_{A_n\dot{A}_m}(x) &= (\hat{1} + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m}[\phi_{B_n\dot{B}_m}(x) - a^{\mu}\partial_{\mu}\phi_{A_n\dot{A}_m}(x) - \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi_{B_n\dot{B}_m}(x)] =\\ &= \phi_{A_n\dot{A}_m} - a^{\mu}\partial_{\mu}\phi_{A_n\dot{A}_m}(x) - \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi_{A_n\dot{A}_m}(x) +\\ &\quad + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(M_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B^n\dot{B}_m}\phi_{B_n\dot{B}_m}(x),\end{aligned}$$

где $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial^{\mu}}$. Обозначим

$$\delta\phi_{A_n\dot{A}_m}(x) = \phi'_{A_n\dot{A}_m}(x) - \phi_{A_n\dot{A}_m}(x),$$

тогда

$$\delta\phi_{A_n\dot{A}_m}(x) = ia^{\mu}i\partial_{\mu}\phi_{A_n\dot{A}_m}(x) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}[(x_{\nu}i\partial_{\mu} - x_{\mu}i\partial_{\nu})(\hat{1})^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m} - i(M_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m}]\phi_{B_n\dot{B}_m}(x). \tag{2.9}$$

С другой стороны, мы знаем, что в общем случае представление группы Пуанкаре задается оператором

$$U(a,\Lambda) = U(a)U(\Lambda) = e^{ia^{\mu}P_{\mu}}e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}},$$

который осуществляет преобразование векторов пространства представления по закону

$$\phi' = U(a,\Lambda)\phi$$

или в бесконечно малой форме

$$\delta\phi = ia^{\mu}P_{\mu}\phi + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}\phi. \tag{2.10}$$

Сравнивая соотношения (2.9) и (2.10), находим явный вид операторов P_μ и $J_{\mu\nu}$ в пространстве релятивистских полей

$$\begin{aligned}
(P_\mu)_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m} &= (\hat{1})^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m} i\partial_\mu, && (2.11)\\
(J_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m} &= (\hat{1})^{B_n\dot{B}_m}_{A_n\dot{A}_m}(x_\nu i\partial_\mu - x_\mu i\partial_\nu) - i(M_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m} \equiv \\
&\equiv (L_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m} + (S_{\mu\nu})_{A_n\dot{A}_m}{}^{B_n\dot{B}_m}, && (2.12)
\end{aligned}$$

где $L_{\mu\nu} = x_\nu i\partial_\mu - x_\mu i\partial_\nu$ – так называемый оператор орбитального момента-импульса, $S_{\mu\nu} = -iM_{\mu\nu}$ – оператор спинового момента-импульса, $J_{\mu\nu}$ – оператор углового момента импульса, P_μ – четыре-импульс системы. Используя явный вид операторов орбитального и спинового моментов импульса, а также коммутационные соотношения (1.37), можно показать, что

$$\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}, L_{\lambda\sigma}] &= i(\eta_{\mu\lambda}L_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}L_{\mu\sigma}), && (2.13)\\
[S_{\mu\nu}, S_{\lambda\sigma}] &= i(\eta_{\mu\lambda}S_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}S_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}S_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}S_{\mu\sigma}). && (2.14)
\end{aligned}$$

Заметим, то в вектор Любанского-Паули, построенный по оператору углового момента импульса, входит лишь тензор $S_{\mu\nu}$:

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}M^{\nu\lambda}P^\kappa = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}(x^\lambda P^\nu - x^\nu P^\lambda + S^{\nu\lambda})P^\kappa = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}S^{\nu\lambda}P^\kappa.$$

Следовательно, компоненты оператора орбитального момента не войдут в состав оператора Казимира $C_2 = W^\mu W_\mu$ и не будут влиять на его собственные значения.

2.2. Понятие релятивистского волнового уравнения

Релятивистским волновым уравнением называется линейное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее распространение релятивистских полей в пространстве и времени.

Пусть $\phi_A(x)$ – набор релятивистских полей, где A – некоторый набор индексов. Тогда релятивистское волновое уравнение имеет следующую общую структуру

$$L_A{}^B(\partial_\mu)\phi_B(x) = 0, \qquad (2.15)$$

где $L_A{}^B(\partial_\mu)$ – матричный дифференциальный оператор некоторого порядка. Чтобы написать релятивистское волновое уравнение в явном виде надо, во-первых, зафиксировать набор полей $\phi_A(x)$ и, во-вторых, конкретизировать структуру оператора $L_A{}^B(\partial_\mu)$.

Построение оператора $L_A{}^B(\partial_\mu)$ основывается на следующих требованиях:

I. Уравнение (2.15) должно содержать производные не выше второго порядка.

II. Если поля $\phi_A(x)$ преобразуются по некоторому (вообще говоря, приводимому) представлению группы Пуанкаре, то поля $L_A{}^B(\partial_\mu)\phi_B(x)$ также должны преобразовываться по некоторому представлению группы Пуанкаре.

Обсудим следствия, вытекающие из этих требований. Требование II выражает явную релятивистскую ковариантность уравнения (2.15). Это означает, что временная координата не выделена по отношению к пространственным координатам. Следовательно, в согласии с требованием I, уравнение (2.15) содержит производные ∂_μ не выше второго порядка

$$L_A{}^B(\partial_\mu) = (a^{\mu\nu})_A{}^B\partial_\mu\partial_\nu + (b^\mu)_A{}^B\partial_\mu + c_A{}^B. \qquad (2.16)$$

В силу однородности пространства-времени коэффициенты $(a^{\mu\nu})_A{}^B$, $(b^\mu)_A{}^B$, $c_A{}^B$ не зависят от координат x^μ и, значит, являются матрицами с постоянными элементами. Таким образом, задача сводится к нахождению коэффициентов $(a^{\mu\nu})_A{}^B$, $(b^\mu)_A{}^B$, $c_A{}^B$. При этом, в силу релятивистской ковариантности оператора $L_A{}^B(\partial_\mu)$, данные коэффициенты могут быть построены только из выделенных тензоров группы Лоренца, преобразующихся по некоторому представлению этой группы. Группа Лоренца имеет только следующие инвариантные тензоры

$$\eta_{\mu\nu}, \quad \varepsilon_{ab}, \quad \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}, \quad (\sigma_\mu)_{a\dot{a}}, \quad (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

В результате, структура оператора (2.16) в значительной степени фиксирована. Кроме того, явная релятивистская ковариантность достигается, если ϕ_A есть набор некоторого количества спин-тензорных полей.

III. Уравнение (2.15) описывает динамику поля с определенными массой m и спином s или с определенным значением параметра спиральности λ в безмассовом случае. Это означает, что релятивистское поле должно описывать неприводимое представление группы Пуанкаре.

Условие неприводимости в массивном случае означает, что релятивистское поле является собственным для операторов Казимира

$$\begin{aligned} P^2\phi_A(x) &= m^2\phi_A(x), &(2.17)\\ W^2\phi_A(x) &= -m^2 s(s+1)\phi_A(x). &(2.18)\end{aligned}$$

Операторы P^2 и W^2 строятся с помощью операторов P_μ и $J_{\mu\nu}$, заданных соотношениями (2.11, 2.12). Релятивистские поля, удовлетворяющие уравнениям (2.17, 2.18) называются массивными релятивистскими полями.

В безмассовом случае, как было показано в первой главе, неприводимые представления отличаются значением параметра спиральности, который имеет смысл проекции момента импульса на направление движения

$$\frac{(\vec{P},\vec{M})}{|\vec{P}|}\phi_A(x) = \lambda\phi_A(x). \tag{2.19}$$

Релятивистские поля, удовлетворяющие уравнению (2.19), называются безмассовыми релятивистскими полями.

Напомним, что индекс A у релятивистского поля означает набор спин-тензорных индексов, т.е. релятивистское поле реализует некоторое спин-тензорное представление. Далее мы воспользуемся проведенной в предыдущей главе классификацией неприводимых представлений группы Пуанкаре для получения релятивистских волновых уравнений. При изложении материала в разделе 2.3. мы следуем книге [10].

2.3. Реализация неприводимых представлений группы Пуанкаре

2.3.1. Массивные представления

В данном разделе мы построим неприводимые представления группы Пуанкаре, реализованные на релятивистских полях. Это означает, что операторы Казимира в действии на эти поля кратны единичному оператору

$$C_1\phi = P^2\phi = m^2\phi, \tag{2.20}$$

$$C_2\phi = W^2\phi = -m^2 s(s+1)\phi, \tag{2.21}$$

где m – масса частицы, s – спин.

Реализация операторов P_μ и $M_{\mu\nu}$ на полях была найдена в разделе (2.1). В силу равенства

$$P_\mu = i\partial_\mu$$

находим

$$P^2 = -\partial^2.$$

Тогда из условия неприводимости (2.20) следует, что релятивистское поле должно подчиняться уравнению

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = (\partial_0^2 - \vec{\partial}^2 + m^2)\phi(x) = 0. \tag{2.22}$$

Это уравнение называется *уравнением Клейна-Гордона.*

В импульсном представлении уравнение Клейна-Гордона (2.22) принимает вид

$$(-p^2 + m^2)\phi(p) = 0.$$

Потребуем теперь, чтобы поле $\phi(x)$ было неприводимо относительно второго оператора Казимира, т.е. должно выполняться уравнение (2.21). Вспомним, что релятивистское поле является спин-тензором типа $(\frac{n}{2}, \frac{k}{2})$

$$\phi = \phi_{a_1 \ldots a_n \dot{b}_1 \ldots \dot{b}_k}(x).$$

Утверждение. Релятивистское поле $\phi_{a_1 \ldots a_n \dot{b}_1 \ldots \dot{b}_k}(x)$, удовлетворяющее уравнениям

$$(\partial^2 + m^2)\phi_{a_1 a_2 \ldots a_n \dot{b}_1 \dot{b}_2 \ldots \dot{b}_k}(x) = 0, \tag{2.23}$$

$$\partial^{a\dot{b}}\phi_{a a_1 \ldots a_{n-1} \dot{b} \dot{b}_1 \ldots \dot{b}_{k-1}}(x) = 0, \tag{2.24}$$

реализует неприводимое представление группы Пуанкаре с массой m и спином $s = \frac{n+k}{2}$. Здесь $\partial^{a\dot{a}} = (\tilde{\sigma}^\mu)^{a\dot{a}}\partial_\mu$; если $n = 0$ или $k = 0$, то условие (2.23) отсутствует. Уравнения (2.23, 2.24) явно ковариантны, поэтому их вид не зависит от системы отсчета.

Доказательство. Прежде всего, необходимо продемонстрировать, что у функции ϕ имеется $2s+1$ независимых компонент. В импульсном представлении уравнения (2.23, 2.24) имеют вид

$$(-p^2 + m^2)\phi_{a_1 a_2 \ldots a_n \dot{b}_1 \dot{b}_2 \ldots \dot{b}_k}(p) = 0, \tag{2.25}$$

$$p^{a\dot{b}}\phi_{a a_1 \ldots a_{n-1} \dot{b} \dot{b}_1 \ldots \dot{b}_{k-1}}(p) = 0. \tag{2.26}$$

Выберем систему координат, в которой частица покоится, т.е. $p_\mu = (m, 0, 0, 0)$, тогда

$$p_{a\dot{a}} = p^2\sigma_{\mu a\dot{a}} = m\delta_{a\dot{a}}.$$

В результате, условие неприводимости по спину (2.26) сведется к

$$\delta^{a\dot{a}}\phi_{a a_1 \ldots a_{n-1} \dot{b} \dot{b}_1 \ldots \dot{b}_{k-1}} = 0,$$

что дает $(n-1+1)(k-1+1)=nk$ независимых условий на компоненты функции ϕ. Исходная функция (не подчиненная никаким уравнениям) имеет $(n+1)(k+1)$ независимых компонент, в результате из них остается

$$(n+1)(k+1)-nk=n+k+1=2s+1$$

компонент, что совпадает с размерностью неприводимого представления (по спину).

Покажем теперь, что поля $\phi_{a_1\dots a_n\dot b_1\dots\dot b_k}(x)$, подчиненные уравнениям (2.23, 2.24), действительно реализуют неприводимые представления группы Пуанкаре. Вычислим действие операторов Казимира на таких волновых функциях. Для этого нам необходимо явное выражение для оператора Казимира C_2.

Задача 18. Показать, что оператор Казимира $C_2=W_\mu W^\mu$ в представлении спин-тензорных полей $\phi_{a_1\dots a_n\dot b_1\dots\dot b_k}(x)$ выглядит следующим образом

$$C_2=-\frac{1}{2}(M_{\dot a\dot b}M^{\dot a\dot b}+M_{ab}M^{ab})\partial^2-M_{ab}M_{\dot a\dot b}\partial^{a\dot a}\partial^{b\dot b}. \tag{2.27}$$

Решение. По определению, вектор Любанского-Паули имеет вид

$$W_\beta=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha}M^{\mu\nu}P^\alpha. \tag{2.28}$$

Запишем оператор $M_{\mu\nu}$ в спин-тензорном представлении

$$M_{\mu\nu}=\sigma_{\mu\nu}{}^{ab}M_{ab}-\tilde\sigma_{\mu\nu}{}^{\dot a\dot b}M_{\dot a\dot b}$$

и учтем, что в действии на волновые функции оператор энергии-импульса имеет вид

$$P_\mu=i\partial_\mu,$$

а также воспользуемся свойством самодуальности σ-матриц

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}\sigma^{\lambda\kappa}=i\sigma_{\mu\nu},\qquad \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}\tilde\sigma_{\mu\nu}=i\tilde\sigma_{\mu\nu}.$$

В результате для вектора Любанского-Паули получаем:

$$W_\beta=-\frac{i}{2}\varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha}\partial^\alpha(\sigma^{\mu\nu}{}_{ab}M^{ab}-\tilde\sigma^{\mu\nu}{}_{\dot a\dot b}M^{\dot a\dot b})=\partial^\alpha(\sigma_{\beta\alpha}{}^{ab}M_{ab}-\tilde\sigma_{\beta\alpha}{}^{\dot a\dot b}M_{\dot a\dot b}).$$

Перепишем вектор Любанского-Паули в спин-тензорном представлении

$$\begin{aligned}
W_{a\dot a} &= \sigma^\beta_{a\dot a}\partial^\alpha(\sigma_{\beta\alpha}{}^{bc}M_{bc}-\tilde\sigma_{\beta\alpha}{}^{\dot b\dot c}M_{\dot b\dot c})=\\
&= -\frac{1}{4}\sigma^\beta_{a\dot a}(\sigma_\beta\tilde\sigma_\alpha-\sigma_\alpha\tilde\sigma_\beta)^{bc}M_{bc}+\frac{1}{4}\sigma^\beta_{a\dot a}(\tilde\sigma_\beta\sigma_\alpha-\tilde\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{\dot b\dot c}M_{\dot b\dot c})\partial^\alpha=\\
&= \left\{(-\frac{1}{4}\sigma^\beta_{a\dot a}\sigma_\beta{}^b{}_{\dot c}\sigma^{c\dot c}_\alpha+\frac{1}{4}\sigma^\beta_{a\dot a}\sigma_\alpha{}^b{}_{\dot c}\sigma^{c\dot c}_\beta)M_{bc}+(\frac{1}{4}\sigma^\beta_{a\dot a}\sigma_\beta{}^b{}_{\dot c}\sigma^{c\dot c}_\alpha-\frac{1}{4}\sigma^\beta_{a\dot a}\sigma_\alpha{}^{\dot b}{}_c\sigma^{c\dot c}_\beta)M_{\dot b\dot c}\right\}\partial^\alpha=\\
&= \left\{(-\frac{1}{2}\delta^b_a\varepsilon_{\dot c\dot a}\sigma^{c\dot c}_\alpha+\frac{1}{2}\delta^c_a\delta^{\dot c}_{\dot a}\sigma_\alpha{}^b{}_{\dot c})M_{bc}+(\frac{1}{2}\delta^{\dot b}_{\dot a}\varepsilon_{ca}\sigma^{c\dot c}_\alpha-\frac{1}{2}\delta^c_a\delta^{\dot c}_{\dot a}\sigma_\alpha{}^{\dot b}{}_c)M_{\dot b\dot c}\right\}\partial^\alpha=\\
&= \left\{\frac{1}{2}\sigma_{\alpha\dot a}{}^cM_{ac}+\frac{1}{2}\sigma_\alpha{}^b{}_{\dot a}M_{ba}-\frac{1}{2}\sigma_{\alpha a}{}^{\dot c}M_{\dot a\dot c}-\frac{1}{2}\sigma_\alpha{}^{\dot b}{}_aM_{\dot b\dot a}\right\}\partial^\alpha=\\
&= (\sigma_{\alpha\dot a}{}^cM_{ac}-\sigma_{\alpha a}{}^{\dot c}M_{\dot a\dot c})\partial^\alpha=\\
&= M_{ac}\partial_{\dot a}{}^c-M_{\dot a\dot c}\partial_a{}^{\dot c}.
\end{aligned}$$

Вспомним, что оператор Казимира C_2 является квадратом вектора Любанского-Паули, тогда

$$\begin{aligned}
C_2 &= W^2 = \frac{1}{2}W_{a\dot a}W^{a\dot a} = \frac{1}{2}(M_{ac}\partial_{\dot a}{}^{c} - M_{\dot a\dot c}\partial_a{}^{\dot c})(M^{ab}\partial^{\dot a}{}_b - M^{\dot a\dot b}\partial^a{}_{\dot b}) = \\
&= \frac{1}{2}(M_{ac}M^{ab}\partial_{\dot a}{}^{c}\partial^{\dot a}{}_b + M_{\dot a\dot c}M^{\dot a\dot b}\partial_a{}^{\dot c}\partial^a{}_{\dot b} - M_{\dot a\dot c}M^{ab}\partial_a{}^{\dot c}\partial^{\dot a}{}_b - M_{ac}M^{\dot a\dot b}\partial_{\dot a}{}^{c}\partial^a{}_{\dot b}) = \\
&= \frac{1}{2}(-\delta_b^c M_{ac}M^{ab}\partial^2 - \delta_{\dot b}^{\dot c}M_{\dot a\dot c}M^{\dot a\dot b}\partial^2 - M_{\dot a\dot c}M_{ab}\partial^{a\dot c}\partial^{b\dot a} - M_{ac}M_{\dot a\dot b}\partial^{c\dot a}\partial^{b\dot b}) = \\
&= -\frac{1}{2}(M_{ab}M^{ab} + M_{\dot a\dot b}M^{\dot a\dot b})\partial^2 - M_{ab}M_{\dot a\dot b}\partial^{a\dot a}\partial^{b\dot b}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся теперь свойством, что на решениях уравнения Клейна-Гордона выполняется соотношение $\partial^2 = -m^2$, тогда получаем в точности выражение (2.27) для данного оператора Казимира

$$C_2 = \frac{m^2}{2}(M_{ab}M^{ab} + M_{\dot a\dot b}M^{\dot a\dot b}) - M_{ab}M_{\dot a\dot b}\partial^{a\dot a}\partial^{b\dot b}.$$

В результате мы видим, что в выражение (2.27) для оператора Казимира входят операторы Казимира группы Лоренца. В спин-тензорном представлении операторы Казимира группы Лоренца имеют следующий спектр:

$$M_{ab}M^{ab} = -\frac{n(n+2)}{2}, \qquad M_{\dot a\dot b}M^{\dot a\dot b} = -\frac{k(k+2)}{2}.$$

Найдем теперь действие второго слагаемого в выражении (2.27) на спин-тензорные поля

$$\begin{aligned}
&\partial^{a\dot a}\partial^{b\dot b}M_{ab}M_{\dot a\dot b}\phi_{c_1\ldots c_n\dot c_1\ldots\dot c_k} = 2\partial^{a\dot a}\partial^{b\dot b}M_{ab}\tfrac{i}{2}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{\dot c_i\dot a}\phi_{c_1\ldots c_n\dot b\dot c_1\ldots\hat{\dot c}_i\ldots\dot c_k} = \\
&= \tfrac{i}{2}2\tfrac{i}{2}\partial^{a\dot a}\partial^{b\dot b}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_{c_j a}\varepsilon_{\dot c_i\dot a}\phi_{bc_1\ldots\hat c_j\ldots c_n\dot b\dot c_1\ldots\hat{\dot c}_i\ldots\dot c_k} + \varepsilon_{c_j b}\varepsilon_{\dot c_i\dot a}\phi_{ac_1\ldots\hat c_j\ldots c_n\dot b\dot c_1\ldots\hat{\dot c}_i\ldots\dot c_k}) = \\
&= -\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\partial_{c_j\dot c_i}\partial^{b\dot b}\phi_{bc_1\ldots\hat c_j\ldots c_n\dot b\dot c_1\ldots\hat{\dot c}_i\ldots\dot c_k} + \partial^a{}_{\dot c_i}\partial_{c_j}{}^{\dot b}\phi_{ac_1\ldots\hat c_j\ldots c_n\dot b\dot c_1\ldots\hat{\dot c}_i\ldots\dot c_k}).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Преобразуем производные во втором слагаемом выражения (2.29)

$$\begin{aligned}
\partial^a{}_{\dot c_i}\partial_{c_j}{}^{\dot b} &= \partial^{a\dot a}\partial_{c_j\dot c}\varepsilon_{\dot c_i\dot a}\varepsilon^{\dot b\dot c} = \partial^{a\dot a}\partial_{c_j\dot c}(\delta^{\dot b}_{\dot a}\delta^{\dot c}_{\dot c_i} - \delta^{\dot b}_{\dot c_j}\delta^{\dot c}_{\dot a}) = \\
&= \partial^{a\dot b}\partial_{c_j\dot c_i} - \delta^{\dot b}_{\dot c_i}\partial^{a\dot a}\partial_{c_j\dot a} = \partial_{c_j\dot c_i}\partial^{a\dot b} - m^2\delta^{\dot b}_{\dot c_i}\delta^{a}_{c_j},
\end{aligned}$$

в результате получаем:

$$\begin{aligned}
&\partial^{a\dot a}\partial^{b\dot b}M_{ab}M_{\dot a\dot b}\phi_{c_1\ldots c_n\dot c_1\ldots\dot c_k} = -\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\partial_{c_j\dot c_i}\partial^{b\dot b}\phi_{bc_1\ldots\hat c_j\ldots c_n\dot b\dot c_1\ldots\hat{\dot c}_i\ldots\dot c_k} + \\
&+\tfrac{m^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\phi_{c_1\ldots c_n\dot c_1\ldots\dot c_k} = kn\frac{m^2}{2}\phi_{c_1\ldots c_n\dot c_1\ldots\dot c_k}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Здесь было использовано свойство, что функция ϕ удовлетворяет уравнению (2.24)

$$\partial^{a\dot b}\phi_{aa_1\ldots a_{n-1}\dot b\dot b_1\ldots\dot b_{k-1}}(x) = 0.$$

Собирая вместе все результаты (2.27, 2.29, 2.30), получаем

$$
\begin{aligned}
C_2 &= -\frac{m^2}{2}\frac{n(n+2)}{2} - \frac{m^2}{2}\frac{k(k+2)}{2} - \frac{m^2}{2}kn = \\
&= -\frac{m^2}{4}(n^2+2n+k^2+2k+2kn) = -\frac{m^2}{4}(2(n+k)+(n+k)^2) = \\
&= -\frac{m^2}{4}(n+k)(n+k+2) = -m^2\frac{n+k}{2}(\frac{n+k}{2}+1) = -m^2 s(s+1), \quad (2.31)
\end{aligned}
$$

где $s = \frac{n+k}{2}$. Таким образом, мы вычислили собственные значения оператора Казимира C_2 при действии на релятивистские поля. Следовательно, мы доказали, что релятивистские поля, подчиненные уравнениям (2.23, 2.24), реализуют неприводимые представления группы Пуанкаре.

Введем в рассмотрение следующий оператор

$$\Delta_{a\dot{a}} = \frac{i}{m}P_{a\dot{a}} = -\frac{1}{m}\partial_{a\dot{a}}, \tag{2.32}$$

который действует в пространстве решений уравнения Клейна-Гордона с массой m. В этом пространстве данный оператор обратим, т.е. существует $(\Delta_{a\dot{a}})^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
\Delta_a{}^{\dot{a}}\Delta^b{}_{\dot{a}} = \tfrac{1}{m^2}\partial_a{}^{\dot{a}}\partial^b{}_{\dot{a}} = \tfrac{1}{m^2}(\sigma^\mu)_a{}^{\dot{a}}(\sigma^\nu)^b{}_{\dot{a}}\partial_\mu\partial_\nu = \\
= \tfrac{i}{m^2}(-\tfrac{1}{2})(\sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu)_a{}^b\partial_\mu\partial_\nu = -\tfrac{1}{m^2}\delta_a^b\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \delta_a^b.
\end{aligned}
$$

С помощью оператора $\Delta_{a\dot{a}}$ можно преобразовывать точечные индексы спин-тензорных функций в неточечные по следующему правилу

$$\phi_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_n}(x) \to \phi_{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\dot{b}_1\dot{b}_2\ldots\dot{b}_{k-1}}(x) = \Delta_{a_{n+1}}{}^{\dot{b}_k}\phi_{a_1a_2\ldots a_n\dot{b}_1\dot{b}_2\ldots\dot{b}_n}(x),$$

а с помощью обратного оператора $(\Delta_{a\dot{a}})^{-1}$ – неточечные индексы в точечные.

Рассмотрим теперь спин-тензорное поле типа $(0,s)$ $\phi_{\dot{b}_1\dot{b}_2\ldots\dot{b}_{2s}}$, и подействуем на него оператором $\Delta_{a\dot{a}}$ n раз

$$\phi_{a_1a_2\ldots a_n\dot{b}_1\dot{b}_2\ldots\dot{b}_k} = \Delta_{a_1}{}^{\dot{b}_{k+1}}\Delta_{a_2}{}^{\dot{b}_{k+2}}\ldots\Delta_{a_n}{}^{\dot{b}_{k+n}}\phi_{\dot{b}_1\dot{b}_2\ldots\dot{b}_{k+n}}, \tag{2.33}$$

где $k+n=2s$. Полученный спин-тензор (2.33) по построению является симметричным по всем точечным и неточечным индексам и, следовательно, относится к типу $(\frac{n}{2}, \frac{k}{2})$. Кроме того, для такого тензора выполнено условие (2.24)

$$\partial^{a_1\dot{b}_1}\phi_{a_1a_2\ldots a_n\dot{b}_1\dot{b}_2\ldots\dot{b}_k} = 0.$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
\partial^{a_1\dot{b}_1}\phi_{a_1a_2\ldots a_n\dot{b}_1\dot{b}_2\ldots\dot{b}_k} = -\tfrac{1}{m}\partial^{a_1\dot{b}_1}\partial_{a_1}{}^{\dot{b}_{k+1}}\Delta_{a_2}{}^{\dot{b}_{k+2}}\ldots\Delta_{a_n}{}^{\dot{b}_{k+n}}\phi_{\dot{b}_1\ldots\dot{b}_{n+k}} = \\
= -\tfrac{1}{m}(\sigma^\mu)^{a_1\dot{b}_1}(\sigma^\nu)_{a_1}{}^{\dot{b}_{k+1}}\partial_\mu\partial_\nu\Delta_{a_2}{}^{\dot{b}_{k+2}}\ldots\Delta_{a_n}{}^{\dot{b}_{k+n}}\phi_{\dot{b}_1\ldots\dot{b}_{n+k}} = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались свойством $(\sigma^\mu)^{a_1\dot{b}_1}(\sigma^\nu)_{a_1}{}^{\dot{b}_{k+1}} \sim \varepsilon^{\dot{b}_1\dot{b}_{k+1}}$, в чего которого свертка ε-тензора с симметричной по индексам волновой функцией дает нулевой результат. Таким образом, мы получаем, что оператор $\Delta_{a\dot{a}}$ осуществляет взаимооднозначное соответствие между пространствами неприводимых представлений с одним спином, но разными n и k

$$(0,s) \to (\frac{1}{2}, s-\frac{1}{2}) \to (1, s-1) \to \ldots \to (s,0).$$

Спин-тензоры типа $(0,s)$ и $(s,0)$ являются симметричными объектами и имеют $2s+1$ независимых компонент. Для них никакого дополнительного условия типа (2.24) не требуется. Неприводимость представлений $(\frac{n}{2},\frac{k}{2})$, $n\neq 0$, $k\neq 0$, обеспечивается за счет условия (2.24), которое снижает количество независимых компонент у спин-тензора.

В итоге для каждого спина s получаем несколько различных представлений на спин-тензорных полях, которые различаются числом точечных и неточечных индексов. Рассмотрим в качестве примера несколько низших спинов:

• $s=0$. Такое представление реализуется с помощью поля типа $(0,0)$ без индексов $\varphi(x)$. Единственное условие – выполнение уравнения Клейна-Гордона

$$(\partial^2+m^2)\varphi(x)=0.$$

Размерность представления равна единице (в каждой точке);

• $s=1/2$. Существует два возможных представления $(0,\frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2},0)$, которые реализуются полями вида $\psi_a(x)$ или $\psi_{\dot a}(x)$. Никакого дополнительного ограничения, кроме уравнения Клейна-Гордона, не требуется. Размерность представления равна двум;

• $s=1$. Имеется три возможности: $(0,1)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(1,0)$, которым соответствуют поля вида $A_{\dot a\dot b}$, $A_{a\dot b}$, A_{ab}. Размерность представления равна $2s+1=3$. Для неприводимости представлений $(0,1)$ и $(1,0)$ дополнительных ограничений на индексы не требуется, эти волновые функции имеют три независимых компоненты в силу симметрии. Для представления $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ возникает уравнение

$$\partial^{a\dot a}A_{a\dot a}(x)=0,$$

которое из четырех компонент оставляет только три независимых. Поскольку такой спин-тензор эквивалентен вектору $A_\mu(x)=\frac{1}{2}(\sigma_\mu)^{a\dot a}A_{a\dot a}(x)$, то это уравнение записывается

$$\partial^\mu A_\mu(x)=0. \tag{2.34}$$

Таким образом, частица с единичным спином и массой m может быть описана векторным полем, удовлетворяющим уравнениям

$$(\partial^2+m^2)A_\mu=0, \qquad \partial^\mu A_\mu=0. \tag{2.35}$$

Условие (2.34) называется *лоренцевой калибровкой* для векторного поля. Оно также называется условием поперечности вектора A_μ. Рассмотрим это условие более подробно. Введем проекционные операторы

$$P^{\perp}{}_{\mu}{}^{\nu}=\delta_\mu^\nu-\partial_\mu\partial^\nu\frac{1}{\partial^2}, \qquad P^{\|}{}_{\mu}{}^{\nu}=\partial_\mu\partial^\nu\frac{1}{\partial^2}. \tag{2.36}$$

Задача 19. Показать, что для операторов (2.36) выполняются свойства проекционных операторов

$$\begin{gathered} P^{\perp}{}_{\mu}{}^{\nu}P^{\perp}{}_{\nu}{}^{\lambda}=P^{\perp}{}_{\mu}{}^{\lambda}, \qquad P^{\|}{}_{\mu}{}^{\nu}P^{\|}{}_{\nu}{}^{\lambda}=P^{\|}{}_{\mu}{}^{\lambda}, \\ P^{\perp}{}_{\mu}{}^{\lambda}P^{\|}{}_{\nu}{}^{\lambda}=0, \qquad P^{\perp}{}_{\mu}{}^{\nu}+P^{\|}{}_{\mu}{}^{\nu}=\delta_\mu^\nu. \end{gathered}$$

С помощью данных проекторов можно любой вектор $A_\mu(x)$ разложить в сумму двух составляющих

$$\begin{gathered} A_\mu(x)=A_\mu^{\perp}(x)+A_\mu^{\|}(x), \\ A_\mu^{\perp}(x)=P^{\perp}{}_{\mu}{}^{\nu}A_\nu(x), \qquad A_\mu^{\|}(x)=P^{\|}{}_{\mu}{}^{\nu}A_\nu(x). \end{gathered}$$

Функция $A_\mu^\perp(x)$ называется поперечной составляющей вектора A_μ, $A_\mu^\parallel(x)$ – продольной составляющей. Для функции $A_\mu^\perp(x)$ справедливо условие поперечности

$$\partial^\mu A_\mu^\perp = \partial^\mu A_\mu - \partial^\mu\partial_\mu\partial^\nu\frac{1}{\partial^2}A_\nu = 0,$$

следовательно, она имеет три независимых компоненты. Продольная составляющая $A_\mu^\parallel$ может быть всегда выражена через скалярную функцию

$$A_\mu^\parallel(x) = \partial_\mu\varphi(x),$$

в результате, она имеет только одну независимую компоненту.

Таким образом, получаем, что неприводимое представление спина 1 реализуется поперечным вектором, удовлетворяющим уравнению Клейна-Гордона;

• $s = \frac{3}{2}$. Для данного спина имеется четыре различных представления, которые можно представить в виде таблицы

Тип представления	$(0,\frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2},1)$	$(1,\frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2},0)$
Поле	$\phi_{\dot b_1\dot b_2\dot b_3}(x)$	$\phi_{a\dot b_1\dot b_2}(x)$	$\phi_{a_1a_2\dot b}(x)$	$\phi_{a_1a_2a_3}(x)$
Число независимых компонент	4	6	6	4

Представления $(0,\frac{3}{2})$ и $(\frac{3}{2},0)$ являются неприводимыми, а для волновых функций типа $(\frac{1}{2},1)$, $(1,\frac{1}{2})$ необходимо выполнение дифференциальных уравнений

$$\partial^{a\dot b}\phi_{ac\dot b}, \qquad \partial^{a\dot b}\phi_{a\dot b\dot c} = 0,$$

которые снижают число независимых компонент с шести до четырех;

• Для других значений спина s анализ проводится аналогичным образом.

Напомним, что для спин-тензорных представлений инвариантными тензорами являются объекты ε^{ab}, $\varepsilon^{\dot a\dot b}$, $\eta^{\mu\nu}$, $\sigma^\mu_{a\dot a}$, которые обеспечивают эквивалентность соответствующих представлений. Они используются для преобразования спинорных индексов в векторные и для поднятия-опускания индексов. Поскольку унитарные представления группы Пуанкаре реализуются в пространстве *функций* на пространстве Минковского

$$\phi = \phi(x^\mu),$$

появляется новый инвариантный тензор $\Delta_{a\dot a} = -\frac{1}{m}\partial_{a\dot a} = -\frac{1}{m}\sigma^\mu_{a\dot a}\partial_\mu$, который обеспечивает эквивалентность представлений с различным числом точечных и неточечных индексов, но одинаковым спином.

Рассмотрим общий случай и получим условие неприводимости представления произвольного целого спина s. Среди представлений целого спина всегда существует представление типа $(\frac{s}{2},\frac{s}{2})$ с равным числом точечных и неточенчых индексов

$$\phi_{a_1\dots a_s,\dot b_1\dots\dot b_s}(x).$$

Для такого спин-тензора все спинорные индексы можно конвертировать в векторные:

$$\phi_{\mu_1\dots\mu_s}(x) = \frac{1}{2^s}\sigma^{a_1\dot b_1}_{\mu_1}\dots\sigma^{a_s\dot b_s}_{\mu_s}\phi_{a_1\dots a_s\dot b_1\dots\dot b_s}(x).$$

По построению этот тензор симметричен и бесследов

$$\phi_{\mu_1\dots\mu_s}(x) = \phi_{(\mu_1\dots\mu_s)}(x), \qquad \phi^\mu{}_{\mu\mu_1\dots\mu_{s-2}} = 0.$$

Условия неприводимости по массе и спину сводятся к следующим уравнениям:

$$(\partial^2+m^2)\phi_{a_1\dots a_s\dot b_1\dots\dot b_s}(x)=0 \quad\Rightarrow\quad (\partial^2+m^2)\phi_{\mu_1\dots\mu_s}(x)=0,$$
$$\partial^{a\dot b}\phi_{aa_1\dots a_{s-1}\dot b\dot b_1\dots\dot b_{s-1}}(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \partial^{\mu}\phi_{\mu\mu_1\dots\mu_{s-1}}(x)=0.$$

Таким образом, получаем, что представление целого спина реализуется симметричным бесследовым тензором, поперечным по всем индексам.

Задача 20. Показать, что у симметричного бесследового поперечного по всем индексам тензора ранга s в четрырехмерном пространстве имеется $2s+1$ независимых компонент.

В случае полуцелого спина s из всевозможных реализаций представления типа $(\frac{n}{2},\frac{k}{2})$, как правило, принято выбирать либо $(\frac{n+1}{2},\frac{n}{2})$, либо $(\frac{n}{2},\frac{n+1}{2})$, при этом $s=n+\frac{1}{2}$. В первом случае имеем спин-тензор вида

$$\phi_{aa_1\dots a_1\dot b_1\dots\dot b_n}(x).$$

У данного спин-тензора можно конвертировать n пар спинорных индексов в векторные

$$\phi_{a\mu_1\dots\mu_n}(x)=(\tfrac{1}{2})^n\sigma^{a_1\dot b_1}_{\mu_1}\dots\sigma^{a_n\dot b_n}_{\mu_n}\phi_{aa_1\dots a_1\dot b_1\dots\dot b_n}(x).$$

Такой объект имеет n векторных и один спинорный индекс. По всем векторным индексам он симметричен и бесследов, а по спинормному σ-бесследов:

$$\begin{aligned}&\phi_{a\mu_1\dots\mu_n}=\phi_{a(\mu_1\dots\mu_n)},\\ &\phi_{a\mu}{}^{\mu}{}_{\mu_1\dots\mu_{n-2}}=0,\\ &(\sigma^{\mu})^{a\dot b}\phi_{a\mu\mu_1\dots\mu_{s-1}}=0.\end{aligned}$$

В данном случае бесследовость следует из σ-бесследовости:

$$0=\sigma^{\nu}_{c\dot b}(\sigma^{\mu})^{a\dot b}\phi_{a\mu\nu\mu_1\dots\mu_{n-2}}=\delta^a_c\eta^{\mu\nu}\phi_{a\mu\nu\mu_1\dots\mu_{n-2}}=\phi_{c\mu}{}^{\mu}{}_{\mu_1\dots\mu_{n-2}}.$$

Дополнительное условие неприводимости по спину (2.24) приводит к поперечности данного спин-тензора по всем векторным индексам

$$\partial^{a\dot b}\phi_{aa_1\dots a_n\dot b\dot b_1\dots\dot b_{n-1}}(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \partial^{\mu}\phi_{a\mu\mu_1\dots\mu_{n-1}}(x)=0.$$

Итак, частица с полуцелым спином $s=n+\frac{1}{2}$ описывается объектом $\phi_{a\mu_1\dots\mu_n}$ с одним спинорным индексом и n векторными индексами, обладающим свойствами симметрии, σ-бесследовости, поперечности и удовлетворяющим уравнению Клейна-Гордона

$$\begin{aligned}&\phi_{a\mu_1\dots\mu_n}(x)=\phi_{a(\mu_1\dots\mu_n)}(x), && (\sigma^{\mu})^{a\dot b}\phi_{a\mu\mu_1\dots\mu_{n-1}}(x)=0,\\ &\partial^{\mu}\phi_{a\mu\mu_1\dots\mu_{n-1}}(x)=0, && (\partial^2+m^2)\phi_{a\mu_1\dots\mu_n}(x)=0.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Задача 21. Показать, что объект, определенный уравнениями (2.37), имеет $2s+1$ независимых компонент.

Представлению типа $(\frac{n}{2},\frac{n+1}{2})$ соответствует спин-тензор вида

$$\phi_{a_1\dots a_n\dot b\dot b_1\dots\dot b_n}(x),$$

по которому можно построить объект с одним точечным и n-векторными индексами

$$\phi_{\dot b\mu_1\dots\mu_n}(x)=(\tfrac{1}{2})^n\sigma^{a_1\dot b_1}_{\mu_1}\dots\sigma^{a_n\dot b_n}_{\mu_n}\phi_{a_1\dots a_n\dot b\dot b_1\dots\dot b_n}(x).$$

Его неприводимость обеспечивается условиями

$$\begin{array}{ll} \phi_{\dot{b}\mu_1\ldots\mu_n} = \phi_{\dot{b}(\mu_1\ldots\mu_n)}, & (\sigma^\mu)^{a\dot{b}}\phi_{\mu\mu_1\ldots\mu_{n-1}}(x) = 0, \\ \partial^\mu \phi_{\dot{b}\mu\mu_1\ldots\mu_{n-1}}(x) = 0, & (\partial^2 + m^2)\phi_{\dot{b}\mu_1\ldots\mu_n}(x) = 0. \end{array} \tag{2.38}$$

Он также имеет $2s+1 = 2(n+1)$ независимых компонент.

Все рассматриваемые в этой главе представления типа $(\frac{n}{2}, \frac{k}{2})$ реализуются комплексными спин-тензорными полями и являются *комплексными*. Изучим вопрос о построении вещественных представлений, которые также имеют важное значение в физике. Комплексное сопряжение переводит представления $(\frac{n}{2}, \frac{k}{2})$ и $(\frac{k}{2}, \frac{n}{2})$ друг в друга

$$\hat{C} : \phi_{a_1\ldots a_n \dot{b}_1\ldots\dot{b}_k} \leftrightarrow \phi^*_{b_1\ldots b_k \dot{a}_1\ldots\dot{a}_n},$$

т.е. в случае $n \neq k$ эта операция не определена в пространстве неприводимого представления. Для разрешения этой проблемы необходимо рассмотреть прямую сумму представлений

$$(\tfrac{n}{2}, \tfrac{k}{2}) \oplus (\tfrac{k}{2}, \tfrac{n}{2}),$$

тогда операция комплексного сопряжения не будет выводить из пространства представления. Такое представление имеет размерность в два раза больше, чем требуется для неприводимости. Для получения неприводимого представления в этом пространстве требуется выделить инвариантные относительно сопряжения подпространства с нужной размерностью.

Заметим, что если мы хотим построить теорию, инвариантную относительно дискретных симметрий пространственного и временного отражения, то также необходимо рассматривать прямую сумму представлений.

Рассмотрим этот вопрос на примере представления спина $\frac{1}{2}$. Вещественное представление реализуется на прямой сумме $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, элементы которой являются четырехкомпонентными дираковскими спинорами

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_a(x) \\ \chi^{\dot{a}}(x) \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Для выделения инвариантного подпространства необходимо построить операторы проектирования на двумерные подпространства, инвариантные относительно сопряжения и группы Пуанкаре.

Вспомним, что имеется оператор $\Delta_{a\dot{a}}$, заданный выражением (2.32), действующий в пространстве спин-тензорных функций, который переводит точечные и неточечные индексы друг в друга. Для него справедливы следующие свойства

$$\begin{array}{ll} \Delta_a{}^{\dot{a}} \Delta^b{}_{\dot{a}} = \delta^b_a, & \Delta_a{}^{\dot{a}} \Delta^a{}_{\dot{b}} = \delta^{\dot{a}}_{\dot{b}}, \\ \Delta_{a\dot{a}} \Delta^{b\dot{a}} = -\delta^b_a, & \Delta^{a\dot{a}} \Delta_{a\dot{b}} = -\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}}. \end{array}$$

Можно определить действие данного оператора для дираковских спиноров:

$$\Delta : \Psi \to \Delta\Psi = -i \begin{pmatrix} \Delta_{b\dot{a}} \chi^{\dot{a}} \\ \Delta^{a\dot{b}} \psi_a \end{pmatrix},$$

то есть

$$\Delta = -i \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{b\dot{a}} \\ \Delta^{a\dot{b}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадрат этого оператора равен единичной матрице

$$\Delta^2 = (-i)^2 \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{b\dot{c}} \\ \Delta^{c\dot{b}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{c\dot{a}} \\ \Delta^{a\dot{c}} & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \Delta_{b\dot{c}}\Delta^{a\dot{c}} & 0 \\ 0 & \Delta^{c\dot{b}}\Delta_{c\dot{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^a_b & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{b}}_{\dot{a}} \end{pmatrix} = 1.$$

Можно также показать, что оператор Δ коммутирует с операцией зарядового сопряжения (1.79)

$$\hat{C}\Delta\Psi = \Delta\hat{C}\Psi = \Delta\Psi_c.$$

Следовательно, можно ввести следующие инвариантные операторы проектирования

$$\Pi_1 = \frac{1+\Delta}{2}, \qquad \Pi_2 = \frac{1-\Delta}{2}. \tag{2.40}$$

Легко проверить, что для операторов (2.40) выполняются все свойства проекционных операторов

$$\begin{array}{ll} \Pi_1^2 = \frac{1}{4}(1+2\Delta+\Delta^2) = \frac{1+\Delta}{2} = \Pi_1, & \Pi_2^2 = \frac{1}{4}(1-2\Delta+\Delta^2) = \frac{1-\Delta}{2} = \Pi_2, \\ \Pi_1\Pi_2 = \frac{1}{4}(1-\Delta^2) = 0, & \Pi_1 + \Pi_2 = 1. \end{array}$$

Запишем данные операторы в явном виде:

$$\Delta = -i\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{m}\partial_{b\dot{a}} \\ -\frac{1}{m}\partial^{a\dot{b}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{m}\begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{b\dot{a}} \\ (\tilde{\sigma}^\mu)^{a\dot{b}} & 0 \end{pmatrix}\partial_\mu = \frac{i}{m}\gamma^\mu\partial_\mu,$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2m}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m), \qquad \Pi_2 = \frac{1}{2m}(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m). \tag{2.41}$$

Далее, мы должны потребовать, чтобы данная спин-тензорная функция принадлежала одному из подпространств, на которые проектируют операторы (2.41)

$$\Pi_2\Psi = 0, \qquad \Pi_1\Psi = \Psi. \tag{2.42}$$

С учетом явного вида проекционных операторов (2.41) получаем что поле Ψ должно удовлетворять следующему уравнению

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0. \tag{2.43}$$

Уравнение (2.43) называется *уравнением Дирака*. В сущности, это уравнение обеспечивает неприводимость представления $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, заданного на полях, которые являются дираковскими спинорами (2.39).

Перепишем уравнение Дирака (2.43) в импульсном представлении

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi(p) = 0. \tag{2.44}$$

Рассмотрим уравнение (2.44) в системе покоя, когда $p_\mu = (m, 0, 0, 0)$,

$$(m\gamma^0 - m)\Psi = 0 \quad \text{или} \quad (\gamma^0 - \mathbf{1}_{4\times4})\Psi = 0.$$

Последнее выражение можно записать в блочном виде

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix}\right]\Psi = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{2\times2} & +\mathbf{1}_{2\times2} \\ +\mathbf{1}_{2\times2} & -\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_a + \chi^{\dot{a}} \\ \psi_a - \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix} = 0. \tag{2.45}$$

Из уравнения (2.45) следует

$$\psi_1 = \chi^{\dot{1}}, \qquad \psi_2 = \chi^{\dot{2}},$$

в результате, из четырех компонент дираковского спинора Ψ остается только две независимых (комплексных) компоненты, как и требуется для неприводимости представления.

Важно отметить, что уравнение Клейна-Гордона следует из уравнения Дирака. Действительно, пусть функция Ψ удовлетворяет уравнению Дирака (2.43). Подействуем на обе части этого уравнения оператором $(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\Psi = 0.$$

Используя свойства γ-матриц (1.75), можно получить следующее равенство

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)(i\gamma^\nu\partial_\nu-m) = (-\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu-m^2) = -(\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu+m^2) = -(\partial^2+m^2).$$

В результате получаем, что поле Ψ удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона

$$(\partial^2 + m^2)\Psi = 0.$$

Данное свойство согласуется с тем, что мы подразумеваем выполнение уравнения Клейна-Гордона, когда используем свойства проекционных операторов (2.36).

Обобщим теперь данный результат для случая произвольного представления полуцелого спина и построим вещественные неприводимые представления. Как отмечалось в разделе 1.6., при комплексном сопряжении представления $(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2})$ и $(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2})$ переходят друг в друга, что приводит к необходимости рассмотрения прямой суммы этих представлений

$$\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}\right) \oplus \left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Элементами такого представления являются объекты, аналогичные дираковским спинорам

$$\Psi_{\mu_1\ldots\mu_n} = \begin{pmatrix} \psi_{a\mu_1\ldots\mu_n} \\ \chi^{\dot{a}}_{\mu_1\ldots\mu_n} \end{pmatrix}. \tag{2.46}$$

Для неприводимости такого представления необходимо, чтобы спинор (2.46) был симметричным, γ-бесследовым и поперечным

$$\Psi_{\mu_1\ldots\mu_n} = \Psi_{(\mu_1\ldots\mu_n)}, \quad \gamma^\mu\Psi_{\mu\mu_1\ldots\mu_{n-1}} = 0, \quad \partial^\mu\Psi_{\mu\mu_1\ldots\mu_{n-1}} = 0, \tag{2.47}$$

а также чтобы он удовлетворял уравнению Дирака

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x) = 0. \tag{2.48}$$

Спинор (2.46), удовлетворяющий условиям (2.47,2.48), описывает массивную частицу с полуцелым спином $s = n + \frac{1}{2}$.

2.3.2. Безмассовые представления

Для безмассовых представлений, как видно из (2.20, 2.21), оба оператора Казимира равны нулю

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0.$$

В этом случае имеется дополнительный оператор Казимира $\frac{(\vec{P},\vec{M})}{|\vec{P}|}$ (спиральность), который соответствует проекции момента импульса на направление движения. По аналогии с массивными представлениями будем строить явно ковариантную реализацию представлений на спин-тензорах типа $(\frac{n}{2}, \frac{k}{2})$

$$\phi_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k}(x). \tag{2.49}$$

Утверждение. Безмассовые неприводимые представления реализуются спин-тензорными полями вида (2.49), для которых выполняются уравнения

$$\partial^{c\dot{c}}\phi_{ca_1\ldots a_{n-1}\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k}(x) = 0, \tag{2.50}$$

$$\partial^{c\dot{c}}\phi_{a_1\ldots a_n\dot{c}\dot{b}_1\ldots\dot{b}_{k-1}}(x) = 0. \tag{2.51}$$

Если $n = 0$ или $k = 0$, то остается только одно из данных уравнений. При $n \neq 0$ или $k \neq 0$ нет необходимости накладывать условие неприводимости волновой функции по массе $\partial^2\phi = 0$, поскольку оно следует из уравнений (2.50, 2.51). Действительно, продифференцируем, например, уравнение (2.50)

$$\partial_{a_n\dot{c}}\partial^{c\dot{c}}\phi_{ca_1\ldots a_{n-1}\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k} = \delta^c_{a_n}\partial^2\phi_{ca_1\ldots a_{n-1}\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k} = \partial^2\phi_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k} = 0,$$

в результате получаем неприводимость релятивистского поля по массе. В случае $n = k = 0$ единственным условием, которому должно удовлетворять релятивистское поле, есть $\partial^2\phi = 0$.

Доказательство. Рассмотрим левую часть уравнения (2.50)

$$\partial^{c\dot{c}}\phi_{ca_1\ldots a_{n-1}\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k} = \varepsilon^{cd}\partial_d{}^{\dot{c}}\phi_{ca_1\ldots a_{n-1}\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k} = \frac{1}{2}\varepsilon^{cd}(\partial_d{}^{\dot{c}}\phi_{ca_1\ldots a_{n-1}\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k} - \partial_c{}^{\dot{c}}\phi_{da_1\ldots a_{n-1}\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k}). \tag{2.52}$$

Отметим, что если для произвольного тензора T_{ab} выполняется уравнение

$$\varepsilon^{ab}T_{ab} = 0,$$

то антисимметричная часть тензора тождественно равна нулю

$$T_{[ab]} = 0.$$

Двумерный антисимметричный тензор $T_{[ab]}$ имеет только одну компоненту $T_{12} = -T_{21}$, в результате

$$0 = \varepsilon^{12}T_{12} + \varepsilon^{21}T_{21} = T_{12} - T_{21} = 2T_{12},$$

то есть $T_{ab} = T_{ba}$. Тогда используя (2.52), уравнения (2.50, 2.51) можно записать в эквивалентной форме

$$\partial_{c\dot{c}}\phi_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k} = \partial_{a_i\dot{c}}\phi_{ca_1\ldots\hat{a}_i\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k}, \tag{2.53}$$

$$\partial_{c\dot{c}}\phi_{a_1\ldots a_n\dot{b}_1\ldots\dot{b}_k} = \partial_{c\dot{b}_i}\phi_{a_1\ldots a_n\dot{c}\dot{b}_1\ldots\hat{\dot{b}}_i\ldots\dot{b}_k}. \tag{2.54}$$

Запишем теперь уравнения (2.50,2.51) в импульсном представлении

$$
\begin{aligned}
p^{c\dot{c}}\phi_{ca_1\dots a_{n-1}\dot{b}_1\dots\dot{b}_k}(p) &= 0, &(2.55)\\
p^{c\dot{c}}\phi_{a_1\dots a_n\dot{c}\dot{b}_1\dots\dot{b}_{k-1}}(p) &= 0. &(2.56)
\end{aligned}
$$

В системе покоя, где $p_\mu = (E, 0, 0, -E)$, имеем

$$
p^{c\dot{c}} = (\sigma^\mu)^{c\dot{c}}p_\mu = [(\sigma^0)^{c\dot{c}} - (\sigma^3)^{c\dot{c}}]E = E\left[\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right] = 2E\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.
$$

Тогда из условий неприводимости (2.55, 2.56) следует, что если у спин-тензора $\phi_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k}$ хотя бы один индекс равен 2 или $\dot{2}$, то такая компонента равна нулю. В итоге остается единственная отличная от нуля компонента

$$
\phi_{\underbrace{1\dots 1}_{n}\underbrace{\dot{1}\dots\dot{1}}_{k}},
$$

что и гарантирует неприводимость рассматриваемого представления.

Докажем теперь неприводимость данного представления, явно вычислив соответствующий оператор Казимира

$$
\begin{aligned}
&W_{c\dot{c}}\phi_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k}(x) = (\partial^d{}_{\dot{c}}M_{cd} - \partial_c{}^{\dot{d}}M_{\dot{c}\dot{d}})\phi_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k} =\\
&= \tfrac{i}{2}\partial^d{}_{\dot{c}}(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{a_ic}\phi_{da_1\dots\hat{a}_ia_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k} + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{a_id}\phi_{ca_1\dots\hat{a}_i\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k})-\\
&-\tfrac{i}{2}\partial_c{}^{\dot{d}}(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{\dot{b}_i\dot{c}}\phi_{a_1\dots a_n\dot{d}\dot{b}_1\dots\hat{\dot{b}}_i\dots\dot{b}_k} + \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{\dot{b}_i\dot{d}}\phi_{a_1\dots a_n\dot{c}\dot{b}_1\dots\hat{\dot{b}}_i\dots\dot{b}_k}) =\\
&= \tfrac{i}{2}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{a_ic}\partial^d{}_{\dot{c}}\phi_{da_1\dots\hat{a}_ia_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k} + \partial_{a_i\dot{c}}\phi_{ca_1\dots\hat{a}_i\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k})-\\
&-\tfrac{i}{2}\sum_{i=1}^{k}(\varepsilon_{\dot{b}_i\dot{c}}\partial_c{}^{\dot{d}}\phi_{a_1\dots a_n\dot{d}\dot{b}_1\dots\hat{\dot{b}}_i\dots\dot{b}_k} + \partial_{c\dot{b}_i}\phi_{a_1\dots a_n\dot{c}\dot{b}_1\dots\hat{\dot{b}}_i\dots\dot{b}_k}) =\\
&= \tfrac{i}{2}\sum_{i=1}^{n}\partial_{c\dot{c}}\phi_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k} - \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{k}\partial_{c\dot{c}}\phi_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k} =\\
&= \tfrac{i}{2}(n-k)\partial_{c\dot{c}}\phi_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k} = \tfrac{n-k}{2}p_{c\dot{c}}\phi_{a_1\dots a_n\dot{b}_1\dots\dot{b}_k}.
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались формулами (1.64) для записи действия операторов лоренцевых моментов на спиноры, а также условиями неприводимости (2.50, 2.51). В результате мы получаем, что на данных представлениях вектор Любанского-Паули пропорционален вектору импульса с коэффициентом пропорциональности

$$
\lambda = \frac{n-k}{2}, \tag{2.57}
$$

который является спиральностью представления. Таким образом, мы доказали, что для безмассового случая уравнения (2.50, 2.51) обеспечивают неприводимость представлений.

Отметим различие между массивными и безмассовыми представлениями, которое следует из формулы (2.57). Для каждого значения параметра спиральности λ

существует бесконечное число реализаций представлений с различным числом точечных и неточечных индексов. Например,

• при $\lambda = 0$, кроме очевидной скалярной реализации $\partial^2\phi(x) = 0$, имеется бесконечное число представлений на спин-тензорах типа $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$

$$\phi_{a_1 \ldots a_n \dot{b}_1 \ldots \dot{b}_n}(x),$$

где n – любое целое;

• при $\lambda = \frac{1}{2}$ представления реализуются на спин-тензорах типа $(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2})$. Например, представление $(\frac{1}{2}, 0)$ задается полем ψ_a, удовлетворяющим *уравнению Вейля*

$$\partial^{a\dot{a}}\psi_a = 0 \quad \text{или} \quad (\sigma^\mu)^{a\dot{a}}\partial_\mu\psi_a = 0; \tag{2.58}$$

при $\lambda = -\frac{1}{2}$ имеем представление типа $(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2})$. В частности, для поля типа $(0, \frac{1}{2})$ получаем уравнение

$$\partial_{a\dot{a}}\chi^{\dot{a}} = 0 \quad \text{или} \quad (\sigma^\mu)_{a\dot{a}}\partial_\mu\chi^{\dot{a}} = 0, \tag{2.59}$$

которое также называется уравнением Вейля;

• при $\lambda = 1$ имеем в частном случае спин-тензор F_{ab}, который подчиняется уравнению

$$\partial^{a\dot{a}}F_{ab}(x) = 0; \tag{2.60}$$

• при $\lambda = -1$ неприводимое представление, в частности, может реализовываться спин-тензором $F_{\dot{a}\dot{b}}$, удовлетворяющим уравнению

$$\partial^{a\dot{a}}F_{\dot{a}\dot{b}}(x) = 0. \tag{2.61}$$

По спин-тензорам F_{ab}, $F_{\dot{a}\dot{b}}$ можно построить антисимметричный лоренцев тензор

$$\begin{aligned} &F_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})^{ab}F_{ab}(x) - \tfrac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}\dot{b}}F_{\dot{a}\dot{b}}(x), \\ &F_{ab} = (\sigma^{\mu\nu})_{ab}F_{\mu\nu}(x), \qquad F_{\dot{a}\dot{b}}(x) = (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{a}\dot{b}}F_{\mu\nu}(x), \end{aligned}$$

который должен удовлетворять следующим уравнениям

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = 0, \qquad \varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\partial_\nu F_{\lambda\kappa}(x) = 0. \tag{2.62}$$

Уравнения (2.62) называются *уравнениями Максвелла*, они являются прямым следствием уравнений (2.60, 2.61). Если не требовать вещественности данного представления, то тензор $F_{\mu\nu}$ описывает две частицы со спиральностями $+1$ и -1, иначе это одна частица с двумя состояниями спиральности.

Задача 22. Показать, что уравнения Максвелла (2.62) получаются из уравнений (2.60, 2.61).

Итак, в данной главе мы получили релятивистские уравнения, которые должны описывать квантовую динамику свободных релятивистских систем.

2.4. Уравнение Клейна-Гордона

Уравнение Клейна-Гордна

$$(\partial^2 + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{2.63}$$

описывает релятивистскую частицу с массой m и нулевым спином. Здесь $\varphi(x)$ – скалярное поле. Более подробно уравнение (2.63) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2\right)\varphi(t,x,y,z) = 0. \tag{2.64}$$

До сих пор мы использовали систему единиц, в которой постоянная Планка и скорость света равнялись единице

$$\hbar = 1, \qquad c = 1.$$

Если восстановить размерности этих констант, то уравнение (2.63) запишется следующим образом

$$\left(\partial^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi(x) = 0, \tag{2.65}$$

где $\partial^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ – оператор Даламбера.

Исторически уравнение Клейна-Гордона было получено следующим образом. Как известно, в нерелятивистской квантовой механике состояние системы задается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\vec{x}) = \hat{H}\varphi(t,\vec{x}), \tag{2.66}$$

где $\hat{H}$ – гамильтониан системы. Для свободной безмассовой частицы уравнение Шредингера (2.66) имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(t,\vec{x}). \tag{2.67}$$

Если учесть, что в квантовой механике операторы энергии и импульса определяются выражениями

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \hat{\vec{P}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{x}}, \tag{2.68}$$

то уравнение (2.67) может рассматриваться как соотношение между энергией и импульсом нерелятивистской частицы

$$E = \frac{P^2}{2m}. \tag{2.69}$$

Вспомним, что для релятивистской частицы импульс связан с энергией релятивистским соотношением[4]

$$\frac{E^2}{c^2} = \vec{P}^2 + m^2c^2. \tag{2.70}$$

Тогда, если формально подставить в (2.70) выражения для операторов энергии и импульса (2.68), то мы приходим к уравнению Клейна-Гордона

$$\left(-\frac{\hat{E}^2}{c^2} + \hat{P}^2 + m^2c^2\right)\varphi = 0.$$

Далее, для простоты, мы будем работать в системе единиц, в которой $\hbar = 1$, $c = 1$.

[4]Четырехмерный вектор энергии импульса связан с трехмерным как $P^\mu = (\frac{E}{C}, \vec{P})$, $P_\mu = (\frac{E}{C}, -\vec{P})$, следовательно, $P^2 = P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2$.

Свойства уравнения Клейна-Гордона

1. Уравнение Клейна-Гордона является дифференциальным уравнением второго порядка (по переменной t). Поэтому для однозначного решения задачи Коши необходимо два начальных условия

$$\varphi(x)|_{t=0} = \varphi_1(\vec{x}), \qquad \left.\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(\vec{x}).$$

Это противоречит принципам квантовой механики, поскольку для уравнения Шредингера достаточно задать волновую функцию в начальный момент времени

$$\varphi(x)_{t=0} = \varphi(\vec{x}),$$

и это позволит найти волновую функцию во все моменты времени.

2. Введем *вектор тока* для уравнения Клейна-Гордона по правилу

$$j_\mu = \frac{i}{2m}(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^*), \tag{2.71}$$

где $\varphi^*(x)$ – волновая функция, комплексно сопряженная к $\varphi(x)$. Покажем, что на решениях уравнения Клейна-Гордона вектор тока сохраняется

$$\partial^\mu j_\mu = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\partial^\mu j_\mu &= \frac{i}{2m}(\partial^\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi + \varphi^*\partial^2\varphi - \partial\varphi\partial_\mu\varphi^* - \varphi\partial^2\varphi^*) = \\
&= \frac{i}{2m}(\varphi^*(\partial^2 + m^2)\varphi - \varphi(\partial^2 + m^2)\varphi^*) = 0.
\end{aligned}$$

Выделим из четырехмерного вектора тока уравнения Клейна-Гордона (2.71) нулевую и трехмерную компоненты $j_\mu = (\rho, \vec{j})$:

$$\rho = j_0 = \frac{i}{2m}(\varphi^*\partial_0\varphi - \varphi\partial_0\varphi^*), \qquad \vec{j} = \frac{i}{2m}(\varphi^*\vec{\partial}\varphi - \varphi\vec{\partial}\varphi^*).$$

Если $\varphi(x)$ является собственной функцией оператора энергии

$$P_0\varphi = i\partial_0\varphi = \varepsilon\varphi,$$

то при $\varepsilon = m$ получаем, что

$$\rho = \varphi^*\varphi,$$

т.е. нулевая компонента является стандартной плотностью вероятности в квантовой механике, которая положительно определена. В общем случае, когда φ и $\partial_0\varphi$ произвольны, величина ρ не положительно определена.

3. *Скалярное произведение* в пространстве решений уравнения Клейна-Гордона вводится по правилу

$$\langle\varphi|\chi\rangle = i\int_\sigma d\sigma^\mu(\varphi^*\partial_\mu\chi - \partial_\mu\varphi^*\chi), \tag{2.72}$$

где φ, χ – решения уравнения Клейна-Гордона, σ – некоторая пространственно-подобная поверхность, т.е. вектор нормали $n^\mu(x)$ к данной поверхности является

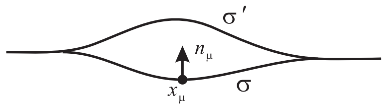


Рис. 2.1. Схематическое изображение пространственной гиперповерхности, которая деформируется малым образом в окрестности точки x_μ.

времениподобным во всех точках $n^2 = n_\mu n^\mu > 0$. Например, если поверхность определяется уравнением $x^0 = const$, то $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Покажем, что скалярное произведение (2.72) не зависит от выбора поверхности σ. Будем считать, что скалярное произведение является функционалом поверхности σ

$$\langle\varphi|\chi\rangle_\sigma = F[\sigma].$$

Деформируем теперь поверхность σ малым образом вблизи точки x^μ, $\sigma \to \sigma'$ так, чтобы обе поверхности σ и σ' были пространственно-подобными. Условие малости деформации поверхности σ означает, что объем $\Omega(x)$ между поверхностями σ и σ' является малым (см. рис. 2.1). Тогда независимость скалярного произведения от поверхности σ означает, что вариационная производная функционала $F[\sigma]$ равна нулю

$$\frac{\delta F[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = 0.$$

Запишем данный функционал в виде

$$F[\sigma] = \int_\sigma d\sigma^\mu F_\mu(x),$$

где $F(x)$ – некоторая функция. Тогда определение вариационной производной запишется следующим образом

$$\frac{\delta F[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \lim_{\Omega(x)\to 0} \frac{F[\sigma'] - F[\sigma]}{\Omega(x)} = \lim_{\Omega(x)\to 0} \frac{\int_{\sigma'} d\sigma^\mu F_\mu(x) - \int_\sigma d\sigma^\mu F_\mu(x)}{\Omega(x)} = \lim_{\Omega(x)\to 0} \frac{\oint_\Sigma d\sigma^\mu F_\mu(x)}{\Omega(x)},$$

где Σ – поверхность, охватывающая объем $\Omega(x)$. Далее, воспользуемся теоремой Гаусса чтобы перейти от интегрирования по поверхности Σ к интегрированию по объему $\Omega(x)$

$$\frac{\delta F[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \lim_{\Omega(x)\to 0} \frac{\int_\Omega d^4x \partial^\mu F_\mu(x)}{\Omega(x)} = \partial^\mu F_\mu(x). \tag{2.73}$$

Здесь мы использовали теорему о среднем, в силу которой интеграл по объему Ω от функции $\partial^\mu F_\mu(x)$ равен значению этой функции в некоторой точке внутри поверхности Σ, умноженному на величину этого объема.

Применим теперь свойство вариационной производной (2.73) для скалярного произведения (2.72)

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\langle\varphi|\chi\rangle = \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} i \int d\sigma^\mu(\varphi^*\partial_\mu\chi - \partial_\mu\varphi^*\chi) = \\
&= i\partial^\mu(\varphi^*\partial_\mu\chi - \partial_\mu\varphi^*\chi) = i(\partial^\mu\varphi^*\partial_\mu\chi + \varphi^*\partial^2\chi - (\partial^2\varphi^*)\chi - \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\chi) = \\
&= i(\varphi^*(\partial^2 + m^2)\chi - \chi(\partial^2 + m^2)\varphi^*) = 0.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Соотношение (2.74) демострирует независимость скалярного произведения от выбора поверхности интегрирования σ для волновых функций, являющихся решениями уравнения Клейна-Гордона. Следовательно, всегда можно использовать поверхность, определенную уравнением $x^0 = const$. Тогда

$$d\sigma^\mu = n^\mu d^3x, \qquad d\sigma^0 = d^3x, \qquad d\sigma^i = 0$$

и скалярное произведение (2.72) принимает вид

$$\langle\varphi|\chi\rangle = i\int d^3x(\varphi^*\partial_0\chi - \partial_0\varphi^*\chi).$$

В частности, получаем, что скалярный квадрат волновой функции

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = i\int d^3x(\varphi^*\partial_0\varphi - \partial_0\varphi^*\varphi)$$

не всегда положительно определен.

4. *Решения* уравнения Клейна-Гордона.

Перейдем к импульсному представлению волновых функций, совершив преобразование Фурье

$$\varphi(x) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\tilde{\varphi}(p), \tag{2.75}$$

$$\tilde{\varphi}(p) = \int d^4x e^{ipx}\varphi(x). \tag{2.76}$$

Здесь $\tilde{\varphi}(p)$ – Фурье-образ функции $\varphi(x)$. Подставим теперь волновую функцию $\varphi(x)$ в виде (2.75) в уравнение Клейна-Гордона (2.63)

$$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}(p^2 - m^2)\tilde{\varphi}(p) = 0. \tag{2.77}$$

В силу свойств интеграла Фурье получаем

$$(p^2 - m^2)\tilde{\varphi}(p) = 0. \tag{2.78}$$

Решение уравнения (2.78) можно записать в виде

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(p) = 0, & \text{если} \quad p^2 \neq m^2 \\ \tilde{\varphi}(p) = \varphi(\vec{p}), & \text{если} \quad p^2 = m^2, \end{cases} \tag{2.79}$$

где $\varphi(\vec{p})$ произвольная функция от трехмерного вектора импульса. На уравнении $p^2 = m^2$ можно всегда выразить нулевую компоненту четырехмерного импульса через трехмерный импульс

$$p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm\varepsilon(\vec{p}), \quad \text{где} \quad \varepsilon(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}.$$

Следовательно, решение (2.79) может быть также представлено в виде

$$\tilde{\varphi}(p) = \delta(p^2 - m^2)\varphi(\vec{p}). \tag{2.80}$$

Воспользуемся свойством дельта-функции Дирака

$$\delta(p^2-m^2)=\delta(p_0^2-\vec{p}^2-m^2)=\delta(p_0^2-\varepsilon^2(\vec{p}))=\frac{1}{2\varepsilon(\vec{p})}\left(\delta(p_0-\varepsilon(\vec{p}))+\delta(p_0+\varepsilon(\vec{p}))\right),$$

тогда можно выполнить интегрирование по dp_0 в интеграле (2.75)

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\delta(p^2-m^2)\varphi(\vec{p})=\\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}\int dp_0 e^{-i\vec{p}\vec{x}}e^{-ip_0x^0}\varphi(\vec{p})\frac{1}{2\varepsilon(\vec{p})}\left(\delta(p_0-\varepsilon(\vec{p}))+\delta(p_0+\varepsilon(\vec{p}))\right)=\\
&= \frac{1}{2(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}\frac{e^{-i\vec{p}\vec{x}}}{\varepsilon(\vec{p})}\left[e^{-i\varepsilon(\vec{p})x^0}-e^{i\varepsilon(\vec{p})x^0}\right]\varphi(\vec{p})=\\
&= \varphi_+(x)+\varphi_-(x),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi_\pm(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}\frac{e^{-i\vec{p}\vec{x}}}{\varepsilon(\vec{p})}e^{\pm i\varepsilon(\vec{p})x^0}\varphi(\vec{p})=\\
&= \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ipx}\delta(p^2-m^2)\theta(\pm p_0)\varphi(\vec{p}).
\end{aligned}$$

Функции φ_+ и φ_- соответствуют волновым решениям с положительной и отрицательной энергией соответственно. В частности, если положить $\varphi(\vec{p})=\varepsilon(\vec{p})\delta^3(\vec{p}-\vec{k})$, то получаем решения в виде плоских волн

$$\varphi_\pm(x)=\frac{1}{2(2\pi)^4}e^{-i\vec{k}\vec{x}\mp i\varepsilon(\vec{k})x^0}.$$

Плоские волны являются собственными функциями оператора энергии $\hat{P}_0=i\frac{\partial}{\partial x^0}$

$$\hat{P}_0\varphi_\pm(x)=\pm\varepsilon(\vec{k})\varphi_\pm(x).$$

Оказывается, в подпространстве состояний φ_+ скалярное произведение положительно определено

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi_+(x)|\varphi_+(x)\rangle = i\int d^3\vec{x}(\varphi_+^*(x)\partial_0\varphi_+-\varphi_+\partial_0\varphi_+^*)=\\
&=\tfrac{i}{4(2\pi)^8}\int d^3\vec{x}d^3\vec{p}d^3\vec{p}'\frac{1}{\varepsilon(\vec{p})\varepsilon(\vec{p}')}\Big[e^{i\vec{p}\vec{x}}e^{i\varepsilon(\vec{p})x^0}\varphi^*(\vec{p})e^{-i\vec{p}'\vec{x}}e^{-i\varepsilon(\vec{p}')x^0}\varphi(\vec{p}')(-i\varepsilon(\vec{p}'))-\\
&\qquad -e^{-i\vec{p}'\vec{x}}e^{-i\varepsilon(\vec{p}')x^0}\varphi(\vec{p}')e^{i\vec{p}\vec{x}}e^{i\varepsilon(\vec{p})x^0}i\varepsilon(\vec{p})\varphi^*(\vec{p})\Big]=\\
&=\tfrac{i}{4(2\pi)^8}\int\frac{d^3\vec{p}d^3\vec{p}'}{\varepsilon(\vec{p})\varepsilon(\vec{p}')}\Big[-i\varepsilon(\vec{p}')\varphi^*(\vec{p})\varphi(\vec{p}')e^{i(\varepsilon(\vec{p})-\varepsilon(\vec{p}'))x^0}-\\
&\qquad -i\varepsilon(\vec{p})e^{i(\varepsilon(\vec{p})-\varepsilon(\vec{p}'))x^0}\varphi^*(\vec{p})\varphi(\vec{p}')\Big]\int d^3xe^{i\vec{x}(\vec{p}-\vec{p}')}=\\
&=\tfrac{2}{4(2\pi)^5}\int d^3p\frac{1}{\varepsilon(\vec{p})}\varphi^*(\vec{p})\varphi(\vec{p})\geq 0.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались Фурье-представлением дельта-функции

$$\int d^3xe^{i\vec{x}(\vec{p}-\vec{p}')}=(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}').$$

Аналогично можно показать, что скалярное произведение в подпространстве волновых функций φ_- отрицательно определено

$$\langle\varphi_-(x)|\varphi_-(x)\rangle \leq 0.$$

Таким образом, плотность вероятности, определенная для решений уравнения Клейна-Гордона, не является положительно определенной, что связано с наличием решений с отрицательной энергией. Для свободной частицы этот недостаток может быть легко устранен. Для этого достаточно в начальный момент задать волновую функцию так, чтобы не было состояний с отрицательной энергией, тогда, очевидно, и во все моменты времени будет выполняться

$$\varphi_-(x) = 0,$$

следовательно, плотность вероятности будет положительно определена. При включении взаимодействия с внешними полями эта ситуация может нарушаться.

5. *Взаимодействие* с электромагнитным полем.

Перепишем уравнение Клейна-Гордона (2.63) в виде

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\varphi(x) = 0. \tag{2.81}$$

Известно, что взаимодействие с электромагнитным полем может быть включено *минимальным образом*, т.е. с помощью замены производной ∂_μ на ковариантную производную

$$\partial_\mu \longrightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x),$$

где e – заряд, A_μ – потенциал электромагнитного поля. Тогда уравнение Клейна-Гордона (2.81) запишется

$$(\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu + m^2)\varphi(x) = 0 \tag{2.82}$$

или

$$(\partial^2 + m^2 - 2ieA^\mu\partial_\mu - ie(\partial^\mu A_\mu) - e^2A^2)\varphi(x) = 0. \tag{2.83}$$

Запишем также комплексно-сопряженное уравнение

$$(\partial^2 + m^2 + 2ieA^\mu\partial_\mu + ie(\partial^\mu A_\mu) - e^2A^2)\varphi^*(x) = 0. \tag{2.84}$$

Очевидно, что уравнение (2.84) получается из (2.83) с помощью замены знака у заряда $e \to -e$. Отсюда вытекает важное следствие: волновая функция φ^* описывает частицы с противоположным знаком заряда.

С учетом взаимодействия с электромагнитным полем выражение для сохраняющегося тока (2.71) модифицируется следующим образом

$$j_\mu = \frac{i}{2m}(\varphi^*\mathcal{D}_\mu\varphi - \varphi(\mathcal{D}_\mu\varphi)^*) = \frac{i}{2m}(\varphi^*\partial_\mu\varphi - \varphi\partial_\mu\varphi^* - 2ieA_\mu\varphi^*\varphi). \tag{2.85}$$

Определение скалярного произведения (2.72) для решений уравнения Клейна-Гордона в электромагнитном поле принимает вид

$$\langle\varphi|\chi\rangle = i\int_\sigma d\sigma^\mu(\varphi^*\mathcal{D}_\mu\chi - \mathcal{D}_\mu\varphi^*\chi). \tag{2.86}$$

Задача 23. Показать, что ток (2.85) сохраняется на решениях уравнения Клейна-Гордона в электромагнитном поле.

Решение.

$$\begin{aligned}\partial^\mu j_\mu = \tfrac{i}{2m}(&\partial^\mu\varphi^*\partial_\mu\varphi - \partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi^* + \varphi^*\partial^2\varphi - \varphi\partial^2\varphi^* - \\ &-2ie\partial^\mu A_\mu\varphi^*\varphi - 2ieA_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - 2ieA_\mu\varphi\partial^\mu\varphi^*) = \\ = \tfrac{i}{2m}(&\varphi^*(\partial^2 - 2ieA^\mu\partial_\mu - ie\partial^\mu A_\mu - e^2A^2 + m^2)\varphi - \\ &-\varphi(\partial^2 + 2ieA^\mu\partial_\mu + ie\partial^\mu A_\mu - e^2A^2 + m^2)\varphi^*) = \\ = \tfrac{i}{2m}[&\varphi^*(\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu + m^2)\varphi - \varphi((\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu + m^2)\varphi)^*] = 0.\end{aligned}$$

Введение взаимодействия минимальным образом является универсальным способом включения взаимодействия с калибровочными полями. Оно возникает при локализации группы $U(1)$-симметрии уравнения Клейна-Гордона, которая действует на волновые функции по правилу

$$\varphi \longrightarrow e^{ie}\varphi, \tag{2.87}$$

где e – некоторый параметр. Модифицируем теперь преобразования (2.87) следующим образом

$$\varphi(x) \longrightarrow e^{ie\xi(x)}\varphi(x), \tag{2.88}$$

где $\xi(x)$ – произвольная функция на пространстве Минковского, e – некоторая константа. Уравнение Клейна-Гордона (2.63) не будет инвариантным при таких преобразованиях (2.88), поскольку

$$\partial_\mu\varphi'(x) = \partial_\mu e^{ie\xi(x)}\varphi(x) = e^{ie\xi(x)}(\partial_\mu\varphi + ie\varphi\partial_\mu\xi) \neq e^{ie\xi(x)}\partial_\mu(x)\varphi(x).$$

Чтобы восстановить инвариантность относительно преобразований вида (2.88), необходимо вместо производной ∂_μ использовать ковариантную производную

$$\partial_\mu \longrightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x),$$

где поле $A_\mu(x)$ преобразуется по следующему закону

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\xi(x). \tag{2.89}$$

При таких преобразованиях (2.88, 2.89) получаем

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_\mu\varphi \to \mathcal{D}'_\mu\varphi' = (\partial_\mu - ieA'_\mu(x))e^{ie\xi(x)}\varphi(x) = \\ &= e^{ie\xi(x)}(\partial_\mu\varphi + ie\varphi\partial_\mu\xi(x) - ieA_\mu\varphi - ie(\partial_\mu\xi)\varphi) = e^{ie\xi(x)}\mathcal{D}_\mu\varphi(x),\end{aligned}$$

т.е. производная волновой функции $\mathcal{D}_\mu\varphi$ преобразуется по такому же закону, что и сама функция $\varphi(x)$. Вследствие этого ее называют ковариантной производной. Тогда очевидно, что при преобразованиях (2.88, 2.89) уравнение (2.82) сохраняется:

$$(\mathcal{D}'_\mu\mathcal{D}'^\mu + m^2)\varphi'(x) = e^{ie\xi(x)}(\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu + m^2)\varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu + m^2)\varphi(x) = 0.$$

Поля $A_\mu(x)$ называют *компенсирующими* или *калибровочными.*

2.5. Уравнение Дирака

Уравнение Дирака, полученное в разделе 2.3.1. на основе анализа релятивистской симметрии, имеет вид

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x) = 0, \tag{2.90}$$

где $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \chi^{\dot{a}} \end{pmatrix}$ – дираковский спинор, $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$ – γ-матрицы Дирака (2.91), удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{2.91}$$

Перестановочные соотношения (2.91) определяют так называемую *алгебру Клиффорда*. Минимальная размерность матриц, удовлетворяющих соотношению (2.91), равна четырем. Важно отметить, что γ-матрицы, определенные соотношениями (2.91), заданы не однозначно, а с точностью до произвольного (унитарного) преобразования. Действительно, совершим с помощью произвольной (унитарной) матрицы S преобразование γ-матриц и волновой функции

$$\gamma^\mu \quad \longrightarrow \quad \gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1}, \tag{2.92}$$

$$\Psi(x) \quad \longrightarrow \quad \Psi'(x) = S\Psi(x), \tag{2.93}$$

тогда очевидно, что перестановочные соотношения для матриц γ'^μ будут иметь такой же вид (2.91), что и для матриц γ, а волновая функция Ψ' будет подчиняться уравнению Дирака

$$(i\gamma'^\mu \partial_\mu - m)\Psi'(x) = 0.$$

Отметим, что поскольку четырехрядные γ-матрицы имеют 16 элементов, базис в пространстве таких матриц состоит из 16 элементов.

Задача 24. Показать, что базисом в пространстве γ матриц являются следующие 16 линейно независимых матриц

$$\Gamma = \{\mathbf{1}_{4\times4}, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^5, \Sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\}, \tag{2.94}$$

где $\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\kappa = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Свойства уравнения Дирака

1. Уравнение Дирака, в отличие от уравнения Клейна-Гордона, является уравнением первого порядка, поэтому для задачи Коши необходимо только одно условие

$$\Psi(t,x)|_{t=0} = \tilde{\Psi}(x).$$

Это согласуется с принципами квантовой механики, где для задачи Коши уравнения Шредингера также необходимо только одно начальное условие.

2. Получим уравнение для дираковски-сопряженного спинора. Рассмотрим дираковски-сопряженный спинор

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0, \quad \text{где} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \tilde{\sigma}^0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{2\times2} \\ \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Он состоит из двух вейлевских спиноров

$$\bar{\Psi} = (\chi^a, \bar{\psi}_{\dot{a}}), \quad \Psi^\dagger = (\psi_a^*, \chi^{*\dot{a}}).$$

Подействуем эрмитовым сопряжением на уравнение Дирака (2.90)

$$(\partial_\mu \Psi^\dagger(-i)(\gamma^\mu)^\dagger - m\Psi^\dagger) = 0,$$

и домножим получившееся уравнение справа на γ^0

$$(i\partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 + m\Psi^\dagger \gamma^0) = 0. \tag{2.95}$$

Здесь мы вставили между волновой функцией $\Psi^\dagger$ и матрицей γ^μ единичную матрицу $\mathbf{1}_{4\times 4} = \gamma^0\gamma^0$. Уравнение (2.95) можно записать в виде уравнения на дираковский спинор

$$(i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 + m\bar{\Psi}) = 0. \tag{2.96}$$

Задача 25. Показать, что для γ-матриц Дирака выполняются свойства

$$\gamma^0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^\mu. \tag{2.97}$$

Решение. Для матрицы γ^0 выполнение равенства (2.97) тривиально:

$$\gamma^0 (\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0.$$

Рассмотрим теперь эрмитово сопряжение для матриц γ^i, где $i = 1, 2, 3$.

$$(\gamma^i)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \tilde{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & (\tilde{\sigma}^i)^\dagger \\ (\sigma^i)^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы воспользовались эрмитовостью σ-матриц Паули. Далее, из явного вида для матрицы γ^0 получаем требуемое равенство

$$\gamma^0 (\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = \gamma^i.$$

В результате, с использованием формулы (2.97), уравнение (2.96) сводится к уравнению на дираковски-сопряженный спинор

$$(i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m\bar{\Psi}) = 0. \tag{2.98}$$

Отметим, что с помощью спиноров Ψ, $\bar{\Psi}$ можно строить скалярные ковариантные величины вида $\bar{\Psi}\Psi$, $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$.

3. *Вектор тока* для решений уравнения Дирака определим следующим выражением

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \tag{2.99}$$

Используя явное выражение для γ-матриц (2.91), вектор тока (2.99) можно выразить через вейлевские спиноры

$$j^\mu = (\chi^a, \bar{\psi}_{\dot{a}}) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_b \\ \bar{\chi}^{\dot{b}} \end{pmatrix} = \chi^a (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \bar{\chi}^{\dot{b}} + \bar{\psi}_{\dot{a}} (\tilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \psi_b. \tag{2.100}$$

Покажем, что на решениях уравнения Дирака данный вектор тока сохраняется

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = (\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu - im\bar{\Psi})\Psi + \bar{\Psi}(\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + im\Psi) = 0.$$

Рассмотрим теперь нулевую компоненту вектора тока, которая соответствует плотности вероятности

$$\rho = j_0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \Psi^\dagger\Psi. \tag{2.101}$$

Из записи выражения (2.101) в компонентах

$$\rho = \chi^1 \bar{\chi}^{\dot{1}} + \chi^2 \bar{\chi}^{\dot{2}} + \bar{\psi}_{\dot{1}} \psi_1 + \bar{\psi}_{\dot{2}} \psi_2 = \chi^1 (\chi^1)^* + \chi^2 (\chi^2)^* + \psi_1 (\psi_1)^* + \psi_2 (\psi_2)^2 \geq 0$$

заключаем, что плотность вероятности для решений уравнения Дирака положительно определена. Таким образом, для решений уравнения Дирака не возникает проблем с вероятностной интерпретацией.

4. Для решений уравнения Дирака введем *скалярное произведение* в виде

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_\sigma d\sigma^\mu \bar{\Psi}_1 \gamma_\mu \Psi_2, \tag{2.102}$$

где σ – некоторая пространственно-подобная поверхность. Аналогично тому, как это было сделано для уравнения Клейна-Гордона (2.74), покажем, что скалярное произведение (2.102) не зависит от выбора поверхности σ:

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle_\sigma = \partial_\mu (\bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \Psi_2) = (\partial_\mu \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu - im \bar{\Psi}_1) \Psi_2 + \bar{\Psi}_1 (\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_2 + im \Psi_2) = 0.$$

Далее, в силу независимости скалярного произведения от выбора поверхности интегрирования, выберем поверхности σ в виде

$$x^0 = const, \tag{2.103}$$

тогда интегрирование в (2.102) будет проводиться по всему трехмерному пространству

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int d^3x \bar{\Psi}_1 \gamma^0 \Psi_2 = \int d^3x \Psi_1^\dagger \Psi_2. \tag{2.104}$$

При таком выборе поверхности интегрирования (2.103) очевидно, что скалярное произведение для решений уравнения Дирака положительно определено

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int d^3x \Psi^\dagger \Psi \geq 0.$$

5. Уравнение Дирака может быть представлено в виде, аналогичном уравнению Шредингера. Для этого перепишем уравнение (2.90) следующим образом

$$(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - m)\Psi = 0$$

или

$$i\gamma^0 \partial_0 \Psi = (-i\gamma^i \partial_i + m)\Psi.$$

Умножим последнее уравнение слева на матрицу γ^0

$$i\partial_0 \Psi = (-i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + m\gamma^0)\Psi. \tag{2.105}$$

Очевидно, что уравнение (2.105) имеет форму уравнения Шредингера

$$i\partial_0 \Psi = \hat{\mathcal{H}} \Psi \tag{2.106}$$

с гамильтонианом

$$\hat{\mathcal{H}} = -i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + m\gamma^0 = i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + m\beta, \tag{2.107}$$

где $\alpha_i = \gamma_0\gamma_i$, $\beta = \gamma_0$. Данный гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ имеет матричный вид.

6. Получим *решения уравнения Дирака.* В качестве базиса в пространстве решений можно выбрать собственные функции для набора коммутирующих операторов

$$\{\hat{\mathcal{H}}, \hat{\vec{P}} = i\vec{\partial}\},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \hat{\vec{P}}\Psi &= i\vec{\partial}\Psi = \vec{p}\Psi, && (2.108) \\ \hat{\mathcal{H}}\Psi &= (\alpha\hat{\vec{P}} + m\beta)\Psi = E_{\vec{p}}\Psi. && (2.109) \end{aligned}$$

Для волновых функций, подчиненных условиям (2.108, 2.109), уравнение (2.106) записывается

$$i\partial_0\Psi = E_{\vec{p}}\Psi. \qquad (2.110)$$

Очевидно, что совместное решение уравнений (2.108–2.110) имеет вид плоских волн

$$\Psi_{\vec{p}}(x) = e^{-iE_{\vec{p}}t - ip_ix_i}\Phi_{\vec{p}}, \qquad (2.111)$$

где $\Phi_{\vec{p}}$ – четырехкомпонентный спинор-столбец, удовлетворяющий уравнению

$$(\vec{\alpha} + m\beta)\Phi_{\vec{p}} = E_{\vec{p}}\Phi_{\vec{p}}. \qquad (2.112)$$

Каждому собственному значению $\vec{p}$ и $E_{\vec{p}}$ соответствует своя собственная функция $\Phi_{\vec{p}}$.

Вернемся к ковариантной записи уравнения (2.112)

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Phi_{\vec{p}} = 0. \qquad (2.113)$$

В блочной форме последнее уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} -m\mathbf{1}_{2\times2} & \sigma^\mu p_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu p_\mu & -m\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix}\Phi_{\vec{p}} = 0. \qquad (2.114)$$

Уравнение (2.114) имеет нетривиальное решение, только если детерминант оператора данного уравнения равен нулю

$$\det\begin{pmatrix} -m\mathbf{1}_{2\times2} & \sigma^\mu p_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu p_\mu & -m\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix} = 0. \qquad (2.115)$$

Выражение (2.115) представляет собой уравнение на допустимые значения энергии $E_{\vec{p}}$. Воспользуемся следующим тождеством для нахождения детерминанта блочной матрицы

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C)\det B,$$

тогда получаем

$$\det\begin{pmatrix} -m\mathbf{1}_{2\times2} & \sigma^\mu p_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu p_\mu & -m\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix} = \det(-m\mathbf{1}_{2\times2} + \sigma^\nu p_\nu \tfrac{\mathbf{1}_{2\times2}}{m}\tilde{\sigma}^\mu p_\mu)\det(-m\mathbf{1}_{2\times2}) =$$
$$= \det(-m^2 + \sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu p_\mu p_\nu) = \det(-m^2 + p^2) = (p^2 - m^2)^2.$$

В результате уравнение (2.115) принимает вид

$$(p^2 - m^2)^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$E_{\vec{p}}^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\vec{p}} = \pm\varepsilon(\vec{p}) = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2},$$

причем оба корня $E_{\vec{p}} = \pm\varepsilon(\vec{p})$ двукратно вырождены. Данным четырем значениям энергии $E_{\vec{p}}$ соответствует четыре решения

$$\Psi_{\vec{p}}^{(+)}(x) = e^{-i\varepsilon(\vec{p})t - i\vec{p}\vec{x}}\Phi_{\vec{p}}^{(+)}, \tag{2.116}$$

$$\Psi_{\vec{p}}^{(-)}(x) = e^{i\varepsilon(\vec{p})t - i\vec{p}\vec{x}}\Phi_{\vec{p}}^{(-)}, \tag{2.117}$$

где спиноры $\Phi_{\vec{p}}^{(\pm)}$ определяются уравнением

$$(\vec{\alpha}\vec{p} + m\beta)\Phi_{\vec{p}}^{(\pm)} = \pm\varepsilon(\vec{p})\Phi_{\vec{p}}^{(\pm)}. \tag{2.118}$$

Двукратная вырожденность собственных значений энергии связана с двумерностью неприводимого представления по спину, т.е. возможны состояния с различными направлениями спина, которые отвечают одной и той же энергии. Чтобы снять вырождение по спину необходимо найти оператор, коммутирующий с $\hat{\mathcal{H}}$.

Рассмотрим оператор спина

$$S_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}S_{jk},$$

где S_{jk} – генераторы внутреннего момента импульса

$$S_{\mu\nu} = -i\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu).$$

Спроецируем вектор спина $\vec{S}$ на некоторое направление $\vec{n}$ ($\vec{n}^2 = 1$)

$$S = (\vec{S}, \vec{n}) = -\frac{i}{4}\varepsilon_{ijk}n_i\gamma_j\gamma_k.$$

Покажем, что оператор S коммутирует с гаимльтонианом

$$\hat{\mathcal{H}} = i\gamma_0\gamma_i\partial_i + m\gamma_0 = \gamma_0\gamma_i p_i + m\gamma_0.$$

Для этого необходимо вычислить коммутаторы

$$[\varepsilon_{ijk}n_i\gamma_j\gamma_k, \gamma_0] = \varepsilon_{ijk}n_i(\gamma_j\gamma_k\gamma_0 - \gamma_0\gamma_j\gamma_k) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&[\varepsilon_{ijk}n_i\gamma_j\gamma_k, \gamma_0\gamma_m p_m] = \varepsilon_{ijk}n_i p_m(\gamma_j\gamma_k\gamma_0\gamma_m - \gamma_0\gamma_m\gamma_j\gamma_k) = \\
&= \varepsilon_{ijk}n_i p_m(\gamma_0\gamma_j\gamma_k\gamma_m - \gamma_0\gamma_m\gamma_j\gamma_k) = \varepsilon_{ijk}n_i p_m(-2\gamma_0\gamma_j\delta_{km} - 2\gamma_0\gamma_k\delta_{jm}) = \\
&= -2\varepsilon_{ijk}(\gamma_0\gamma_j n_i p_k + \gamma_0\gamma_k n_i p_j) = 0.
\end{aligned}$$

При вычислении данных коммутаторов мы воспользовались перестановочными соотношениями для γ-матриц (2.91). Из полученных коммутационных соотношений следует

$$[S, \hat{\mathcal{H}}] = 0,$$

поэтому спинор Φ можно выбрать собственным для оператора S

$$S\Phi^{(\pm)}_{\vec{p},\lambda} = \lambda\Phi^{(\pm)}_{p,\lambda}. \tag{2.119}$$

Чтобы найти собственные значения λ необходимо вычислить квадрат оператора S

$$S^2 = -\frac{1}{16}\varepsilon_{ijk}n_i\gamma_j\gamma_k\varepsilon_{mnl}n_m\gamma_n\gamma_l. \tag{2.120}$$

<u>**Задача 26.**</u> Показать, что

$$S^2 = \frac{1}{4}. \tag{2.121}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
S^2 &= -\tfrac{1}{16}\varepsilon_{ijk}n_i\gamma_j\gamma_k\varepsilon_{mnl}n_m\gamma_n\gamma_l = \\
&= -\tfrac{1}{16}\begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{jm} & \delta_{km} \\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{kn} \\ \delta_{il} & \delta_{jl} & \delta_{kl} \end{vmatrix} n_i n_m\gamma_j\gamma_k\gamma_n\gamma_l = \\
&= -\tfrac{1}{16}(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{il} + \delta_{km}\delta_{in}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \\
&-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn})n_i n_m\gamma_j\gamma_k\gamma_n\gamma_l = \\
&= -\tfrac{1}{16}(n^2\gamma_n\gamma_k\gamma_n\gamma_k + n_i n_m\gamma_m\gamma_k\gamma_k\gamma_i + n_i n_k\gamma_n\gamma_k\gamma_i\gamma_n - n_i n_m\gamma_n\gamma_m\gamma_n\gamma_i - \\
&-n_i n_m\gamma_m\gamma_k\gamma_i\gamma_k - n^2\gamma_n\gamma_k\gamma_k\gamma_n).
\end{aligned}$$

Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Когда индексы n, k принимают значения $1, 2, 3$, перестановочные соотношения для γ-матриц (2.91) имеют вид

$$\gamma_k\gamma_n + \gamma_n\gamma_k = -2\delta_{kn},$$

следовательно, справедливы соотношения

$$\gamma_k\gamma_k = -3, \qquad \gamma_k\gamma_n = -\gamma_n\gamma_k - 2\delta_{kn}, \qquad n_i n_k\gamma_i\gamma_k = -n_i n_k\delta_{ik} = -1.$$

В результате для квадрата проекции спина получаем

$$\begin{aligned}
S^2 &= -\tfrac{1}{16}(-\gamma_n\gamma_n\gamma_k\gamma_k - 2\gamma_n\gamma_k\delta_{nk} - 3n_i n_m\gamma_m\gamma_i - \gamma_n\gamma_n + 2n_i n_m\delta_{nm}\gamma_n\gamma_i + \\
&+n_i n_m\gamma_m\gamma_n\gamma_n\gamma_i + 2n_i n_m\delta_{ki}\gamma_m\gamma_k + n_i n_m\gamma_m\gamma_i\gamma_k\gamma_k + 3\gamma_n\gamma_n) = \\
&= -\tfrac{1}{16}(-9 + 6 + 3 + 3 - 2 + 3 - 2 + 3 - 9) = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Подействуем оператором S на обе части уравнения (2.119) и воспользуемся результатом данной задачи, получим

$$S^2\Phi^{(\pm)}_{\vec{p},\lambda} = \lambda^2\Phi^{(\pm)}_{p,\lambda} = \frac{1}{4}\Phi^{(\pm)}_{\vec{p},\lambda}.$$

Отсюда получаем

$$\lambda = \pm\frac{1}{2},$$

т.е. λ принимает два значения при каждом фиксированном значении энергии и импульса. Поскольку вектор $\vec{n}$ мы до сих пор считали произвольным, выберем его в виде $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$, тогда оператор S соответствует проекции спина на направление движения. Интерпретация собственных значений $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ заключается в том, что спин может быть направлен либо по направлению движения, либо в противоположную сторону.

Итак, вводя оператор S с собственными значениями $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, мы снимаем вырождение и получаем, что уравнение на спинор Φ имеет четыре решения, нумеруемые собственными значениями операторов энергии, импульса и проекции спина на направление движения

$$\Phi^{(+)}_{\vec{p},\frac{1}{2}}, \quad \Phi^{(+)}_{\vec{p},-\frac{1}{2}}, \quad \Phi^{(-)}_{\vec{p},\frac{1}{2}}, \quad \Phi^{(-)}_{\vec{p},-\frac{1}{2}},$$

а базис в пространстве решений уравнения Дирака записывается следующим образом

$$\Psi^{(\pm)}_{\vec{p},\lambda}(x) = e^{\mp i\varepsilon(\vec{p})t - i\vec{p}\vec{x}}\Phi^{(\pm)}_{\vec{p},\lambda}, \tag{2.122}$$

где $\lambda = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Перейдем к более удобным обозначениям, введя спиноры u, v

$$\begin{array}{ll} \Phi^{(+)}_{\vec{p},\frac{1}{2}} = u_{-\vec{p},\frac{1}{2}}, & \Phi^{(+)}_{\vec{p},-\frac{1}{2}} = u_{-\vec{p},-\frac{1}{2}}, \\ \Phi^{(-)}_{\vec{p},\frac{1}{2}} = v_{\vec{p},\frac{1}{2}}, & \Phi^{(-)}_{\vec{p},-\frac{1}{2}} = v_{\vec{p},-\frac{1}{2}}. \end{array}$$

Тогда общее решение свободного уравнения Дирака запишется в виде суммы (интеграла) по всем индексам от частного решения (2.122) с произвольными функциями $a(-\vec{p},\lambda)$, $b(\vec{p},\lambda)$:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \int d^3p \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} \{-a(-\vec{p},\lambda)e^{-i\varepsilon(\vec{p})t + i\vec{p}\vec{x}}u_{-\vec{p},\lambda} + b(\vec{p},\lambda)e^{i\varepsilon(\vec{p})t + i\vec{p}\vec{x}}v_{\vec{p},\lambda}\} = \\ &= \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} \int d^3p \{a(\vec{p},\lambda)u_{\vec{p},\lambda}e^{-ip^\mu x_\mu} + b(\vec{p},\lambda)v_{\vec{p},\lambda}e^{ip^\mu x_\mu}\}, \end{aligned} \tag{2.123}$$

где $p_0 = \varepsilon(\vec{p})$. Из выражения (2.123) следует, что решение уравнения Дирака представляет собой сумму положительной и отрицательной частотных частей.

7. Рассмотрим безмассовое уравнение Дирака. В этом случае уравнение Дирака сводится к двум уравнениям Вейля для двухкомпонентных вейлевских спиноров.

Введем матрицу

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= \frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \\ &= -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \tilde{\sigma}_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \tilde{\sigma}_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \tilde{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \tilde{\sigma}_3 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -i\begin{pmatrix} \sigma_0\tilde{\sigma}_1\sigma_2\tilde{\sigma}_3 & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_0\sigma_1\tilde{\sigma}_2\sigma_3 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -i\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.124}$$

Из явного вида для матрицы γ_5 (2.124) следует

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1}_{4\times4},$$

т.е. γ_5^2 является инвариантом, причем данное заключение не зависит от конкретного выбора реализации γ-матриц. Следовательно, матрицу γ_5 можно использовать для построения инвариантных операторов проектирования

$$P_R = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{4\times4} + \gamma_5), \qquad P_L = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_{4\times4} - \gamma_5). \tag{2.125}$$

Очевидно, что для операторов (2.125) выполняются все свойства проекционных операторов

$$P_R + P_L = \mathbf{1}_{4\times4}, \quad P_R P_R = P_R, \quad P_L P_L = P_L, \quad P_L P_R = 0.$$

Проекторы P_R, P_L называются киральными проекторами. Любой дираковский спинор может быть разложен с помощью данных проекторов в сумму двух спиноров с различной киральностью

$$\Psi = \Psi_R + \Psi_L, \qquad \Psi_R = P_R\Psi, \qquad \Psi_L = P_L\Psi.$$

Такие спиноры Ψ_R и Ψ_L называются киральными, в частности, Ψ_R – спинор с правой, Ψ_L – спинор с левой киральностями.

В стандартном представлении γ-матриц (2.91) проекционные операторы (2.125) имеют вид

$$P_R = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.126}$$

$$P_L = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2\times2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix}. \tag{2.127}$$

В результате для дираковского спинора $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}$ находим, что соответствующие киральные проекции записываются следующим образом

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что матрица γ_5 антикоммутирует со всеми γ-матрицами

$$\gamma_5\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_5,$$

что следует из определения (2.124). Следовательно, для проекционных операторов P_R, P_L получаем следующие перестановочные соотношения с γ-матрицами

$$\gamma_\mu P_R = P_L\gamma_\mu, \qquad \gamma_\mu P_L = P_R\gamma_\mu. \tag{2.128}$$

Подействуем теперь данными проекторами на уравнение Дирака $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$, с учетом (2.128) получим

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu P_L\partial_\mu\Psi - mP_R\Psi &= 0, \\ i\gamma^\mu P_R\partial_\mu\Psi - mP_L\Psi &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_L - m\Psi_R &= 0, \\ i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_R - m\Psi_L &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при $m \neq 0$ компоненты разной киральности перемешаны в уравнении Дирака, а при $m = 0$ уравнение Дирака сводится к двум независимым уравнениям Вейля для компонент разной киральности

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_R = 0, \qquad i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_L = 0.$$

Для двухкомпонентных вейлевских спиноров они имеют стандартный вид

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \psi = 0, \qquad i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \bar{\chi} = 0.$$

8. Рассмотрим введение взаимодействия с электромагнитным полем. Аналогично уравнению Клейна-Гордона взаимодействие может быть учтено минимальным образом, т.е. с помощью замены производной ∂_μ на ковариантную производную $\mathcal{D}_\mu$

$$\partial_\mu \longrightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x),$$

где e – заряд, $A_\mu(x)$ – потенциал электромагнитного поля. В результате, уравнение Дирака (2.90) принимает вид

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi = 0 \tag{2.129}$$

или

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\Psi = 0. \tag{2.130}$$

При калибровочных преобразованиях

$$\Psi(x) \quad \longrightarrow \quad \Psi'(x) = e^{ie\xi(x)}\Psi(x), \tag{2.131}$$
$$A_\mu(x) \quad \longrightarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \xi(x) \tag{2.132}$$

уравнение Дирака (2.129) остается инвариантным

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}^\mu - m)\Psi = 0 \quad \longrightarrow \quad (i\gamma^\mu \mathcal{D}'_\mu - m)\Psi' = 0.$$

Это следует из того, что ковариантная производная волновой функции при преобразованиях (2.131, 2.132) преобразуется также, как и сама функция

$$\mathcal{D}'_\mu \Psi' = e^{ie\xi(x)}\mathcal{D}_\mu \Psi.$$

Задача 27. Показать, что квадрирование уравнения Дирака в электромагнитном поле (2.129)

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi = 0 \quad \longrightarrow \quad (i\gamma^\nu \mathcal{D}_\nu + m)(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi = 0$$

дает следующий результат

$$(\mathcal{D}^2 - e\Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + m^2)\Psi = 0, \tag{2.133}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор электромагнитного поля, матрицы $\Sigma^{\mu\nu}$ определены в выражении (2.94).

Решение.

$$\begin{aligned}
&(i\gamma^\nu \mathcal{D}_\nu + m)(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) = i\gamma^\nu\gamma^\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - m^2 = \\
&= -\tfrac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \tfrac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] - m^2 = \\
&= -\mathcal{D}^2 + i\Sigma^{\mu\nu}[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] - m^2.
\end{aligned}$$

Далее, заметим, что коммутатор ковариантных производных пропорционален тензору электромагнитного поля

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = [\partial_\mu - ieA_\mu, \partial_\nu - ieA_\nu] = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -ieF_{\mu\nu}.$$

В результате получаем требуемое равенство (2.133)

$$(\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu - eF_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} + m^2)\Psi = 0.$$

Поскольку матрицы $\Sigma^{\mu\nu}$ соответствуют спину электрона, из выражения (2.133) видно, что член $\Sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ описывает взаимодействие спина с электромагнитным полем.

9. Зарядовое сопряжение для уравнения Дирака. Вновь рассмотрим уравнение Дирака в электромагнитном поле (2.130)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = 0. \tag{2.134}$$

Получим из него уравнение для дираковски сопряженного спинора, который определен следующим образом

$$\hat{C} : \Psi \to \Psi_c = C\bar{\Psi}^T = C(\Psi^\dagger \gamma^0)^T = C(\gamma^0)^T \Psi^*,$$

где $C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}$ – матрица зарядового спряжения. Подействуем операцией эрмитового сопряжения на уравнение (2.134)

$$-i\partial_\mu \Psi^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger + e\Psi^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger A_\mu - m\Psi^\dagger = 0$$

и умножим справа на γ^0

$$-i\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 + e\bar{\Psi}\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 A_\mu - m\bar{\Psi}.$$

В силу свойства γ-матриц $\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$ для последнего уравнения получаем

$$i\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu - e\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu + m\bar{\Psi} = 0. \tag{2.135}$$

Транспонируем уравнение (2.135)

$$i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu \bar{\Psi}^T - e(\gamma^\mu)^T \bar{\Psi}^T A_\mu + m\bar{\Psi}^T = 0$$

и умножим слева на матрицу C

$$iC(\gamma^\mu)^T C^{-1}\partial_\mu \Psi_c - eC(\gamma^\mu)^T C^{-1}\Psi_c A_\mu + m\Psi_c = 0. \tag{2.136}$$

В последнем уравнении появилась конструкция $C(\gamma^\mu)^T C^{-1}$. Покажем, что выполняется тождество

$$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu. \tag{2.137}$$

Действительно, поскольку матрицы γ^μ, $(\gamma^\mu)^\dagger$, C, C^{-1} имеют вид

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ (\sigma^\mu)^{b\dot{a}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\gamma^\mu)^T = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)^{b\dot{a}} \\ (\sigma^\mu)_{a\dot{b}} & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{ab} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \end{pmatrix},$$

получаем

$$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ac} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{a}\dot{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)^{c\dot{d}} \\ (\sigma^\mu)_{d\dot{c}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^{db} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\dot{d}\dot{b}} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{ac}\varepsilon_{\dot{d}\dot{b}}(\sigma^\mu)^{c\dot{d}} \\ \varepsilon^{\dot{a}\dot{c}}\varepsilon^{db}(\sigma^\mu)_{d\dot{c}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\sigma^\mu)_{a\dot{b}} \\ -(\sigma^\mu)^{b\dot{a}} & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^\mu.$$

Тогда с использованием свойства (2.137) уравнение (2.135) принимает вид

$$-i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_c + e\gamma^\mu A_\mu \Psi_c + m\Psi_c = 0$$

или

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi_c = 0. \tag{2.138}$$

Уравнение (2.138) отличается от (2.134) лишь знаком заряда, т.е. получается в результате замены

$$\Psi \longrightarrow \Psi_c, \qquad e \longrightarrow -e.$$

Следовательно, уравнение (2.138) описывает динамику частицы с зарядом $-e$, т.е. позитрона. Поскольку уравнение Дирака (2.134) не меняется при замене

$$\Psi \longrightarrow \Psi_c, \quad e \longrightarrow -e, \quad A_\mu \longrightarrow -A_\mu,$$

очевидно, что позитрон в поле $-A_\mu$ ведет себя так же как и электрон в поле A_μ.

Если электромагнитное поле отсутствует $A_\mu = 0$, то при зарядовом сопряжении уравнение Дирака переходит в себя, т.е. волновые функции Ψ и Ψ_c реализуют эквивалентные представления. Электромагнитное поле снимает данное вырождение.

Если частица имеет нулевой заряд $e = 0$, т.е. не взаимодействует с полем, то для нее функции Ψ и Ψ_c подчиняются одному уравнению. Такую волновую функцию можно выбрать в виде майорановского спинора $\Psi = \Psi_c$.

Таким образом, уравнение Дирака описывает как электроны, так и их античастицы – позитроны.

10. Обсудим *смысл решений с отрицательной энергией.* Для свободного электрона, также как и для частицы, описываемой уравнением Клейна-Гордона, выполняется массовое условие

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \quad \text{или} \quad E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

Следовательно, для уравнения Дирака возможны состояния как с положительной, так и отрицательной энергией. Очевидно, что под действием внешних воздействий электрон в состоянии с энергией mc^2 может перейти скачком в состояние $-mc^2$, излучив при этом энергию $2mc^2$, а затем – в состояние с бесконечной отрицательной энергией, излучив при этом бесконечное количество энергии (см. рис. 2.2). Однако, электрон является фермионом, т.е. частицей со спином $\frac{1}{2}$, и для него справедлив принцип запрета Паули: в каждом состоянии, задаваемом полным набором квантовых чисел, может находиться не более одной частицы полуцелого спина.

Дирак предположил, что все состояния с отрицательной энергией в природе заполнены электронами и поэтому частицы не могут переходить в эти состояния. Это означает, что вакуум не пуст, а заполнен частицами со спином $\frac{1}{2}$ с отрицательной энергией. Отсюда следует важный вывод. Предположим, что в состояниях с отрицательной энергией имеется "дырка" – не занятое состояние с энергией $-|E|$. Тогда электрон с энергией $|E|$ может перейти в это состояние излучив при этом энергию $2|E|$ и восстановив вакуум

$$e^- + \text{дырка} \longrightarrow \text{энергия}.$$

Таким образом, "дырка" эффективно обладает зарядом $+e$ и положительной энергией. Поэтому считают, что "дырка" и есть позитрон, т.е. античастица для электрона.

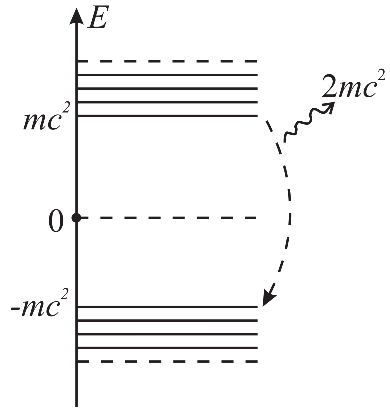


Рис. 2.2. При переходе электрона с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией, он излучает энергию $2mc^2$.

Следовательно, теория Дирака предсказывает существование античастиц ко всем частицам со спином $\frac{1}{2}$ (электрон, протон, нейтрон, нейтрино, ...), а также процессы рождения-уничтожения частиц. Это противоречит тому, что мы изначально рассматривали одночастичную теорию, не предполагающую процессы рождения-уничтожения частиц. Однако эту теорию можно вполне применять для изучения решений с энергией $E \ll 2mc^2$, т.е. для слабых полей, когда не проявляются эффекты рождения-уничтожения.

2.6. Уравнения Максвелла и Прока

В данном разделе мы изучим свойства уравнений Максвелла и Прока. Отметим, что уравнения Максвелла появляются в безмассовом пределе уравнений Прока, поэтому мы уделим главное внимание изучению уравнений Прока, а уравнения Максвелла будем отмечать как частный случай этих уравнений.

Рассмотрим массивное векторное поле $A_\mu(x)$ спина 1, которое соответствует неприводимому представлению типа $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Согласно результатам предыдущей главы, неприводимость представления обеспечивается уравнениями (2.23, 2.24), которые в данном случае принимают вид

$$(\partial^2 + m^2)A_\mu(x) = 0, \qquad \partial^\mu A_\mu(x) = 0. \tag{2.139}$$

Наша цель состоит в том, чтобы свести пару уравнений (2.139) к одному уравнению, из которого эти уравнения будут следовать. Данное уравнение должно быть релятивистски ковариантным дифференциальным уравнением не выше второго порядка. Это означает, что оно может состоять только из следующих объектов

$$(\partial^2 + m^2)A_\mu, \qquad \partial_\mu \partial^\alpha A_\alpha. \tag{2.140}$$

Возьмем линейную комбинацию данных объектов и приравняем к нулю

$$(\partial^2 + m^2)A_\mu + c\partial_\mu \partial^\alpha A_\alpha = 0, \tag{2.141}$$

где c – некоторый коэффициент. Рассмотрим дифференциальное следствие уравнения (2.141). Подействуем на него оператором ∂^μ и произведем свертку по индексу

μ

$$(\partial^2+m^2)\partial^\mu A_\mu + c\partial^2\partial^\alpha A_\alpha = 0. \tag{2.142}$$

Очевидно, что для выполнения равенства (2.142) мы должны потребовать $c = -1$. В результате, поскольку $m^2 \neq 0$, имеем

$$\partial^\mu A_\mu = 0, \tag{2.143}$$

т.е. условие неприводимости (2.143) будет дифференциальным следствием (2.141).

В результате мы приходим к следующему уравнению

$$\partial^2 A_\mu - \partial_\mu\partial^\nu A_\nu + m^2 A_\mu = 0, \tag{2.144}$$

которое описывает динамику массивного векторного поля и называется *уравнением Прока.* Данное уравнение эквивалентно паре уравнений (2.139), поскольку они являются следствиями уравнения Прока.

Свойства уравнения Прока

1. Имеется эквивалентная форма записи уравнения Прока в виде системы уравнений первого порядка. Введем тензор напряженности электромагнитного поля по стандартному правилу

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.145}$$

Из определения (2.145) вытекает следующее соотношение

$$\partial^2 A_\nu - \partial_\nu\partial^\mu A_\mu = \partial^\mu F_{\mu\nu}. \tag{2.146}$$

Тогда с учетом (2.145, 2.146), уравнение Прока можно записать в виде следующей системы уравнений первого порядка

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - m^2 A_\nu \;=\; 0, \tag{2.147}$$
$$F_{\mu\nu} - \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu \;=\; 0. \tag{2.148}$$

2. Получим *решения* уравнения Прока. Рассмотрим первое уравнение из системы (2.139), т.е. уравнение уравнение Клейна-Гордона. Решение уравнения Клейна-Гордона изучалось в разделе 2.4.. Воспользуемся этим результатом и запишем решение применительно для векторного поля $A_\mu(x)$ в виде суммы положительной и отрицательной частотных частей

$$\begin{gathered} A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x), \\ A_\mu^{(\pm)}(x) = \tfrac{1}{2(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}\frac{e^{-i\vec{p}\vec{x}}}{\varepsilon(\vec{p})}e^{\pm i\varepsilon(\vec{p})x^0}\tilde{A}_\mu(\vec{p}), \end{gathered} \tag{2.149}$$

где $\tilde{A}_\mu(\vec{p})$ – произвольная функция от трехмерного вектора импульса. Выражение (2.149) может быть также записано в виде

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}[e^{-ip^\mu x_\mu}\mathcal{A}_\mu(\vec{p}) + e^{ip^\mu x_\mu}\mathcal{A}_\mu(-\vec{p})], \tag{2.150}$$

где мы включили фактор $\frac{1}{\varepsilon(\vec{p})}$ в подинтегральную функцию

$$\mathcal{A}_\mu(\vec{p}) = \frac{\tilde{A}_\mu(\vec{p})}{\varepsilon(\vec{p})}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение (2.150) является решением уравнения Клейна-Гордона. Это вытекает из следующих соотношений

$$(\partial^2 + m^2)e^{\pm ip^\mu x_\mu} = (-p^\mu p_\mu + m^2)e^{\pm ip^\mu x_\mu} = (m^2 + \vec{p}^2 - \varepsilon^2(\vec{p}))e^{\pm ip^\mu x_\mu} = 0,$$

где мы учли, что $\varepsilon(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Заметим, что функция $\mathcal{A}_\mu(\vec{p})$ является произвольным четырехмерным вектором, зависящим от координат трехмерного импульса. Как четырехмерный вектор эту функцию можно разложить по базису, состоящему из четырех векторов $\mathbf{e}_\lambda(\vec{p})$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$

$$\mathcal{A}^\mu(\vec{p}) = \sum_{\lambda=0}^{3} a_\lambda(\vec{p})\mathbf{e}^\mu_\lambda(\vec{p}), \tag{2.151}$$

где $a_\lambda(\vec{p})$ – коэффициенты разложения, являющиеся функциями от трехмерных импульсов.

Базисные векторы $\mathbf{e}_\lambda(\vec{p})$ – произвольные линейно-независимые четырехмерные векторы. Зафиксируем данные векторы из соображения удобства. Положим

$$\mathbf{e}^\mu_0(\vec{p}) = n^\mu, \tag{2.152}$$

где n^μ – некоторый единичный вектор, не зависящий от импульсных переменных,

$$n^\mu n_\mu = 1.$$

Далее, зафиксируем вектор $\mathbf{e}_3(\vec{p})$ в виде

$$\mathbf{e}^\mu_3(\vec{p}) = \frac{p^\mu - n^\mu(p_\nu n^\nu)}{p_\alpha n^\alpha}. \tag{2.153}$$

Очевидно, что такой вектор $\mathbf{e}_3(\vec{p})$, заданный соотношением (2.153), ортогонален вектору n_μ

$$\mathbf{e}^\mu_3(\vec{p})n_\mu = 0.$$

Наконец, выберем векторы $\mathbf{e}_1(\vec{p})$, $\mathbf{e}_2(\vec{p})$ так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям

$$\mathbf{e}^\mu_\lambda(\vec{p})\mathbf{e}_{\lambda'\mu}(\vec{p}) = -\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{2.154}$$

$$\mathbf{e}^\mu_\lambda(\vec{p})p_\mu = 0, \tag{2.155}$$

$$\mathbf{e}^\mu_\lambda(\vec{p})n_\mu = 0, \tag{2.156}$$

где $\lambda, \lambda' = 1, 2$. Соотношения (2.154–2.156) означают, что векторы $\mathbf{e}_{1,2}(\vec{p})$ ортогональны друг другу, а также векторам $\mathbf{e}_0(\vec{p})$ и $\mathbf{e}_3(\vec{p})$.

В результате, с учетом (2.152–2.156), можно записать следующее соотношение ортонормированности для базисных векторов

$$\mathbf{e}^\mu_\lambda(\vec{p})\mathbf{e}_{\lambda'\mu}(\vec{p}) = \eta_{\lambda\lambda'} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1), \tag{2.157}$$

где $\lambda, \lambda' = 0, 1, 2, 3$.

Заметим, что вектор нормали n_μ до сих пор оставался произвольным единичным вектором. Зафиксируем его в виде

$$n^\mu = (1, 0, 0, 0). \tag{2.158}$$

Тогда из уравнений (2.152–2.156) для векторов $\mathbf{e}_\lambda(\vec{p})$ получаем следующие выражения

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_0^\mu(\vec{p}) &= (1,0,0,0), &(2.159)\\
\mathbf{e}_3^\mu(\vec{p}) &= (0, \frac{\vec{p}}{\varepsilon(\vec{p})}), &(2.160)\\
\mathbf{e}_{1,2}^\mu(\vec{p}) &= (0, \vec{\mathbf{e}}_{1,2}(\vec{p})), &(2.161)
\end{aligned}
$$

где $\vec{\mathbf{e}}_{1,2}(\vec{p})$ – произвольные трехмерные векторы, ортогональные друг другу и вектору $\vec{p}$

$$\vec{\mathbf{e}}_\lambda(\vec{p}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\lambda'}(\vec{p}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \qquad \vec{\mathbf{e}}_\lambda(\vec{p}) \cdot \vec{p} = 0, \qquad \lambda, \lambda' = 1, 2. \tag{2.162}$$

При таком выборе базисных векторов (2.159–2.161) коэффициенты разложения $a_\lambda(\vec{p})$ в (2.151) приобретают простой физический смысл: компонента $a_0(\vec{p})$ соответствует Фурье-образу скалярного потенциала $A_0(x)$, функция $a_3(\vec{p})$ является продольной компонентой вектора $\vec{\mathcal{A}}(\vec{p})$, функции $a_{1,2}(\vec{p})$ являются поперечными компонентами вектора $\vec{\mathcal{A}}(\vec{p})$.

Подставим теперь разложение (2.151) в выражение для векторного поля (2.150)

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int d^3\vec{p} \sum_{\lambda=0}^{3} \mathbf{e}_\lambda^\mu(\vec{p}) [e^{-ip^\mu x_\mu} a_\lambda(\vec{p}) + e^{ip^\mu x_\mu} a_\lambda(-\vec{p})]. \tag{2.163}$$

Заметим, что $a_\lambda(\vec{p})$ – четыре независимых функциями от импульсных переменных, на которые не наложено никаких ограничений. Однако, мы до сих пор не учли второе уравнение из пары (2.139), которое является калибровкой Лоренца. Следовательно, для векторного поля $A^\mu(x)$ должно выполняться следующее равенство

$$\partial_\mu A^\mu(x) = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int d^3\vec{p} \sum_{\lambda=0}^{3} \mathbf{e}_\lambda^\mu(\vec{p}) [-ip_\mu e^{-ip^\mu x_\mu} a_\lambda(\vec{p}) + ip_\mu e^{ip^\mu x_\mu} a_\lambda(-\vec{p})] = 0. \tag{2.164}$$

Для выполнения равенства (2.164) достаточно чтобы функции $a_\lambda(\vec{p})$ удовлетворяли соотношению

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \mathbf{e}_\lambda^\mu(\vec{p}) p_\mu a_\lambda(\vec{p}) = 0. \tag{2.165}$$

Учтем, что когда базисные векторы выбраны в виде (2.159–2.161), для них выполняются следующие свойства

$$\mathbf{e}_3^\mu p_\mu = -\frac{\vec{p}^2}{\varepsilon(\vec{p})}, \qquad \mathbf{e}_0^\mu p_\mu = \varepsilon(\vec{p}), \qquad \mathbf{e}_{1,2}^\mu p_\mu = 0.$$

В результате уравнение (2.165) позволяет выразить функцию $a_0(\vec{p})$ через $a_3(\vec{p})$

$$a_0(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{\vec{p}^2 + m^2} a_3(\vec{p}). \tag{2.166}$$

Это означает, что для массивного векторного поля только три из четырех функций $a_\lambda(\vec{p})$ являются независимыми. Следовательно, массивное векторное поле $A_\mu(x)$ имеет три независимые поляризации.

Итак, решение уравнения Прока записывается в виде (2.163), где для функций $a_\lambda(\vec{p})$ требуется выполнение соотношения (2.165).

3. Безмассовый случай. Уравнения Максвелла.
В пределе нулевой массы $m \to 0$ уравнения Прока, записанные в виде (2.147, 2.148), сводятся к уравнениям Максвелла

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{2.167}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.168}$$

Уравнение (2.168) можно переписать в следующей эквивалентной форме, где присутствует только само поле напряженности

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$$

или

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\partial_\nu F_{\lambda\kappa} = 0.$$

В результате приходим к стандартной форме записи уравнений Максвелла

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{2.169}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\partial_\nu F_{\lambda\kappa} = 0. \tag{2.170}$$

Напомним, что антисимметричный тензор второго ранга $F_{\mu\nu}$ соответствует представлению типа $(1,0) \oplus (0,1)$ – композиции двух состояний со спиральностями 1 и -1.

Вернемся снова к рассмотрению уравнений Прока в виде (2.139) и подставим в эти уравнения $m = 0$:

$$\partial^2 A_\mu(x) = 0, \qquad \partial^\mu A_\mu(x) = 0. \tag{2.171}$$

Уравнения (2.171) тоже являются уравнениями Максвелла, записанными для векторного потенциала. В таком виде они более удобны для изучения решений уравнений Максвелла. Важно отметить, что в уравнениях (2.171) имеется калибровочный произвол

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x),$$

где функция $f(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей уравнению Даламбера $\partial^2 f(x) = 0$. Очевидно, что выражение для напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ не меняется при таких преобразованиях

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x) = \partial_\mu A_\nu(x) + \partial_\mu\partial_\nu f(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\nu\partial_\mu f(x) = \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = F_{\mu\nu}(x). \end{aligned}$$

Следовательно, мы можем зафиксировать данный калибровочный произвол для векторного потенциала и это никак не повлияет на выражение для напряженностей. В частности, можно считать, что

$$A_0(x) = 0, \tag{2.172}$$

однако данное уравнение не является Лоренц-инвариантным. Более того, известно, что не существует никакого другого ковариантного калибровочного условия для векторного потенциала, кроме калибровки Лоренца $\partial^\mu A_\mu(x) = 0$, такого, чтобы это было линейное дифференциальное уравнение не выше первого порядка. Такое нарушение Лоренц-инвариантности не является критичным для нас, если мы хотим изучать решения уравнения Максвелла.

Аналогично уравнению Прока, решение уравнений (2.171) запишется в виде (2.163), где мы должны учесть условие калибровки (2.172):

$$\begin{aligned} A^0(x) &= \tfrac{1}{2(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}\sum_{\lambda=0}^{3}\mathbf{e}^0_\lambda(\vec{p})[e^{-ip^\mu x_\mu}a_\lambda(\vec{p})+e^{ip^\mu x_\mu}a_\lambda(-\vec{p})] = \\ &= \tfrac{1}{2(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}[e^{-ip^\mu x_\mu}a_0(\vec{p})+e^{ip^\mu x_\mu}a_0(-\vec{p})] = 0. \end{aligned} \tag{2.173}$$

Здесь мы воспользовались явным выражением для базисных векторов (2.159–2.161). По свойству преобразования Фурье равенство нулю выражения (2.173) возможно только в том случае, если

$$a_0(\vec{p}) = 0. \tag{2.174}$$

Далее, с учетом (2.166) (где массу следует считать равной нулю), получаем также

$$a_3(\vec{p}) = 0. \tag{2.175}$$

Следовательно, для решения уравнения Максвелла из четырех компонент поляризации векторного поля остается только две $a_{1,2}(\vec{p})$, которые соответствуют векторам $\mathbf{e}_{1,2}(\vec{p})$. Данные векторы, согласно (2.162), ортогональны вектору импульса, поэтому говорят, что безмассовое векторное поле имеет только две поперечных поляризации. В итоге выражение для векторного потенциала можно записать в виде

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{2(2\pi)^4}\int d^3\vec{p}\sum_{\lambda=1,2}\vec{\mathbf{e}}_\lambda(\vec{p})[e^{-ip^\mu x_\mu}a_\lambda(\vec{p})+e^{ip^\mu x_\mu}a_\lambda(-\vec{p})]. \tag{2.176}$$

Данный векторный потенциал определяет выражение для поля напряженности $F_{\mu\nu}(x)$, которое будет являться решением уравнений Максвелла (2.169, 2.170).

2.7. Уравнение Паули-Фирца

Поле спина 2 описывается спин-тензором типа $(1,1)$, т.е. спин-тензором с двумя неточечными и двумя точечными индексами $h_{ab\dot{a}\dot{b}}(x)$. Как было показано в разделе (2.3.1.), для неприводимости такого представления (в массивном случае) должны выполняться уравнения

$$\begin{aligned} &(\partial^2+m^2)h_{ab\dot{a}\dot{b}}(x) = 0,\\ &\partial^{a\dot{a}}h_{ab\dot{a}\dot{b}} = 0. \end{aligned} \tag{2.177}$$

Конвертируем спинорные индексы в векторные с помощью σ-матриц:

$$h_{ab\dot{a}\dot{b}}(x) \to h_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4}\sigma_\mu^{a\dot{a}}\sigma_\nu^{b\dot{b}}h_{ab\dot{a}\dot{b}}(x). \tag{2.178}$$

Используя свойства σ-матриц (1.56), можно показать, что данный тензор $h_{\mu\nu}$ является симметричным и бесследовым

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}, \qquad \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0. \tag{2.179}$$

Очевидно, что уравнения (2.177) для симметричного бесследового тензора $h_{\mu\nu}$ примут вид

$$(\partial^2+m^2)h_{\mu\nu}(x) = 0, \tag{2.180}$$

$$\partial^\mu h_{\mu\nu}(x) = 0. \tag{2.181}$$

Наша цель состоит в том, чтобы построить одно уравнение на тензор $h_{\mu\nu}$, из которого будет следовать выполнение уравнений (2.180, 2.181). Данное уравнение должно быть лоренц-инвариантным линейным дифференциальным уравнением не выше второго порядка, следовательно, оно может быть построено только из следующих из объектов

$$(\partial^2 + m^2)h_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu}, \quad \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta}. \tag{2.182}$$

Предположим, что искомое уравнение является линейной комбинацией выражений (2.182) с произвольными коэффициентами

$$(\partial^2 + m^2)h_{\mu\nu} + c_1(\partial_\mu\partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha h_{\alpha\mu}) + c_2\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.183}$$

Рассмотрим дифференциальные следствия уравнения (2.183). Подействуем на него оператором $\partial^\mu\partial^\nu$ и произведем свертку по индексам μ, ν

$$(\partial^2 + m^2)\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} + 2c_1\partial^2\partial^\alpha\partial^\nu h_{\alpha\nu} + c_2\partial^2\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.184}$$

Для выполнения данного уравнения необходимо, чтобы коэффициент перед слагаемым вида $\partial^2\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}$ равнялся нулю, то есть

$$1 + 2c_1 + c_2 = 0. \tag{2.185}$$

С учетом этого, уравнение (2.184) записывается

$$m^2\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0.$$

Поскольку $m^2 \neq 0$, то

$$\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} = 0. \tag{2.186}$$

Подействуем теперь оператором ∂^μ на исходное уравнение (2.183) и произведем свертку по индексу μ, тогда с учетом (2.186) получаем

$$(\partial^2 + m^2)\partial^\mu h_{\mu\nu} + c_1\partial^\alpha\partial^2 h_{\alpha\nu} = 0. \tag{2.187}$$

Очевидно, что для выполнения уравнения (2.188) необходимо

$$c_1 = -1. \tag{2.188}$$

Поскольку $m^2 \neq 0$, из (2.187) следует

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0. \tag{2.189}$$

В результате, при $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ предложенное выше уравнение (2.183) принимает вид

$$(\partial^2 + m^2)h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu\partial^\alpha h_{\alpha\nu}(x) + \partial_\nu\partial^\alpha h_{\alpha\mu}(x)) + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta}(x) = 0. \tag{2.190}$$

Условие неприводимости (2.181) является дифференциальным следствием уравнения (2.190). Очевидно, что когда выполняется условие (2.181), уравнение (2.190) эквивалентно уравнению Клейна-Гордона (2.180). Следовательно, уравнение (2.190) эквивалентно паре уравнений (2.180,2.181) и описывает неприводимое представление спина 2. Данное уравнение называется уравнением движения для массивного поля спина 2.

Заметим, что уравнение (2.190) было получено в предположении, что тензор $h_{\mu\nu}$ является бесследовым. Определенный физический интерес представляет задача о построении уравнения движения для поля $h_{\mu\nu}$ с ненулевым следом, но такое, из которого условие бесследовости вытекало бы как следствие. Итак, пусть $h_{\mu\nu}$ – произвольный симметричный тензор, у которого след не обязательно равен нулю. Обозначим

$$h(x) = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}(x). \tag{2.191}$$

В этом случае, кроме объектов (2.182), для построения уравнения можно использовать следующие конструкции

$$\partial_\mu \partial_\nu h(x), \qquad \eta_{\mu\nu}(\partial^2 + \gamma m^2) h(x), \tag{2.192}$$

где γ – произвольный параметр. Добавим слагаемые (2.192) к уравнению (2.183) с неопределенными коэффициентами c_4 и c_5

$$(\partial^2 + m^2) h_{\mu\nu} + c_1(\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu}) + c_2 \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + c_4 \partial_\mu \partial_\nu h + c_5 (\partial^2 + \gamma m^2) h = 0. \tag{2.193}$$

Аналогично, уравнению (2.183), подействуем оператором $\partial^\mu \partial^\nu$ и произведем свертку по $\mu\nu$

$$(\partial^2 + m^2) \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} + (2c_1 + c_2) \partial^2 \partial^\alpha \partial^\nu h_{\alpha\nu} + c_2 \partial^2 \partial^2 h + c_4 \partial^2 (\partial^2 + \gamma m^2) h = 0. \tag{2.194}$$

Для отсутствия высших производный в данном уравнении мы должны потребовать

$$1 + 2c_1 + c_2 = 0, \qquad c_3 + c_4 = 0. \tag{2.195}$$

В результате, поскольку $m^2 \neq 0$, имеем

$$\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} = -\gamma c_4 \partial^2 h. \tag{2.196}$$

Подействуем на уравнение (2.193) оператором ∂^μ и произведем свертку по μ, тогда с учетом уже полученных соотношений (2.195,2.196) получаем

$$(\partial^2 + m^2) \partial^\mu h_{\mu\nu} + c_1 \partial^2 \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \gamma c_4 (c_1 + c_2) \partial_\nu \partial^2 h + \gamma c_4 m^2 \partial_\nu h = 0. \tag{2.197}$$

Для выполнения уравнения (2.197) необходимо

$$c_2 = 1, \qquad c_1 = -1, \tag{2.198}$$

и, как следствие, получаем

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = -\gamma c_4 \partial_\nu h. \tag{2.199}$$

Подставим теперь соотношения между коэффициентами (2.195, 2.198) в исходное уравнение

$$(\partial^2 + m^2) h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu}) + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - c_4 \partial_\mu \partial_\nu h + c_4 \eta_{\mu\nu} (\partial^2 + \gamma m^2) h = 0. \tag{2.200}$$

Далее мы можем выполнить свертку по индексам $\mu\nu$ в уравнении (2.200), тогда с учетом (2.196, 2.200) получаем

$$(1 + 3c_4 - 2\gamma c_4) \partial^2 h + m^2 (1 + 4\gamma c_4) h = 0. \tag{2.201}$$

Чтобы обратить первое слагаемое в уравнении (2.201) в нуль, необходио

$$c_4 = \frac{1}{2\gamma - 3}, \tag{2.202}$$

где γ остается произвольным параметром и не фиксируется данной процедурой. Обычно используют следующее выражение для γ

$$\gamma = 1. \tag{2.203}$$

В результате из (2.202) получаем

$$c_4 = -1, \qquad c_3 = 1. \tag{2.204}$$

При таком выборе констант следствием уравнения (2.201) является равенство нулю скаляра h

$$h = 0. \tag{2.205}$$

Из уравнения (2.199) немедленно получаем одно из условий неприводимости тензора $h_{\mu\nu}$

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0. \tag{2.206}$$

Итак, учитывая все найденные выражения для констант (2.198, 2.203, 2.204), мы приходим к следующему дифференциальному уравнению на симметричный тензор $h_{\mu\nu}$

$$(\partial^2 + m^2)h_{\mu\nu} - (\partial_\mu\partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial^\alpha h_{\alpha\mu}) + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} + \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\partial^2 + m^2)h = 0. \tag{2.207}$$

Заметим, что на тензор $h_{\mu\nu}$ не накладывается условие бесследовости. Это условие возникает как дифференциальное следствие из данного уравнения. В результате, уравнение (2.207) эквивалентно уравнению (2.190) и также описывает динамику поля со спином 2. Уравнение (2.207) называется *уравнением Паули-Фирца*.

Вопросы для самоконтроля

Основные вопросы

1. Группа Лоренца и группа Пуанкаре.
2. Алгебра Ли группы Пуанкаре.
3. Группа Лоренца и группа $SL(2, C)$.
4. Спин-тензорные представления группы $SL(2, C)$.
5. Матрицы σ_μ и связь между четырехмерными и двумерными тензорами.
6. Операторы Казимира группы $SL(2, C)$ в спин-тензорных представлениях.
7. Дискретные преобразования спиноров.
8. Неприводимые представления группы Пуанкаре: общий анализ.
9. Неприводимые представления группы Пуанкаре: случай $m^2 \neq 0$.
10. Неприводимые представления группы Пуанкаре: случай $m^2 = 0$.
11. Формулировка релятивистских волновых уравнений.
12. Реализация массивных неприводимых представлений группы Пуанкаре на полях.
13. Реализация безмассовых неприводимых представлений группы Пуанкаре на полях.
14. Уравнение Клейна-Гордона.
15. Уравнение Дирака: общие свойства, решения в виде плоских волн.
16. Уравнения Дирака в электромагнитном поле. Зарядовое сопряжение.
17. Уравнения Максвелла и Прока, их свойства.
18. Уравнение Паули-Фирца.

Дополнительные вопросы

- Записать неоднородные преобразования Лоренца.
- Записать специальные, ортохронные и собственные преобразования Лоренца.
- Записать преобразования Лоренца в бесконечно-малой форме.
- Записать генераторы группы Пуанкаре.
- Записать коммутационные соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре.
- Записать матрицы σ_μ и их перечислить их свойства.
- Дать определение лево- и правосторонних вейлевских спиноров.
- Записать вид неприводимых спиноров типа $(n/2, m/2)$.
- Привести формулы связи между 2- и 4-тензорами.
- Записать разложение тензора второго ранга на неприводимые компоненты.
- Перечислить операторы Казимира группы $SL(2, C)$ (группы Лоренца).

- Записать действие операторов Казимира на спинорах типа $(n/2, m/2)$.
- Дать определение дираковских спиноров.
- Записать γ-матрицы и их свойства.
- Дать определение дираковски-сопряженных спиноров.
- Дать определение майорановских спиноров.
- Записать вектор Любанского-Паули.
- Дать определение малой группы.
- Привести классификацию неприводимых представлений группы Пуанкаре.
- Записать спектр операторов Казимира группы Пуанкаре.
- Записать оператор спиральности.
- Объяснить роль пространственных отражений.
- Дать определение релятивистского поля.
- Дать определение релятивистского волнового уравнения.
- Записать реализацию генераторов группы Пуанкаре на полях.
- Записать операторы импульса, момента импульса в реализации на полях.
- Записать орбитальный момент, спиновый момент в реализации на полях.
- Записать реализацию массивных неприводимых представлений группы Пуанкаре на полях.
- Привести примеры представлений спина $s = 0, 1/2, 1, 3/2$.
- Записать разбиение вектора на продольную и поперечную части.
- Записать реализацию представлений с целым спином на спинорах типа $(s/2, s/2)$.
- Записать реализацию представлений с полуцелым спином на спинорах типа $(n + 1/2, n/2)$, $(n/2, n + 1/2)$.
- Записать реализацию неприводимых безмассовых представлений группы Пуанкаре на полях.
- Привести примеры представлений спиральности $\lambda = 0, 1/2, 1$.
- Записать уравнение Клейна-Гордона.
- Записать вектор тока уравнения Клейна-Гордона.
- Записать скалярное произведение в пространстве решений уравнения Клейна-Гордона.
- Записать уравнение Клейна-Гордона в электромагнитном поле.
- Записать уравнение Дирака.
- Записать вектор тока для уравнения Дирака.
- Записать скалярное произведение в пространстве решений уравнения Дирака.
- Записать уравнение Дирака для дираковски-сопряженного спинора.
- Привести вид уравнения Дирака в электромагнитном поле.
- Записать уравнение Дирака для зарядово-сопряженного спинора.
- Записать уравнения Максвелла и Прока.
- Записать вид решений уравнений Максвелла и Прока.
- Записать калибровочные преобразования для уравнений Максвелла.
- Записать уравнение Паули-Фирца.

Рекомендуемая литература

[1] Барут А., Рончка Р. “Теория представлений групп и ее приложения”. В 2-х т. - М.: Мир, 1980.

[2] Наймарк М.А. “Теория представлений групп”, М.: Наука, 1976.

[3] Хамермеш М. “Теория групп и ее применение к физическим проблемам”, М.: Мир, 1966.

[4] Гюрши Ф. “Введение в теорию групп” / “Теория групп и элементарные частицы”, М.: Мир, 1967.

[5] Аминов Л.К. “Теория симметрии”, М.: ИКИ, 2002.

[6] Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. “Представления группы вращений и группы Лоренца”. М.: Физматгиз. 1953.

[7] Fonda L., Ghirardi G.C. “Symmetry Principles in Quantum Physics”, New York: Marcel Deccer, inc., 1970.

[8] Швебер С. “Введение в релятивистскую квантовую теорию поля”. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

[9] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. “Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля”, М.: Наука, 1969.

[10] Buchbinder I.L., Kuzenko S.M. “Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity”, Bristol and Philadelphia: IOP Publ., 1998, 656p.

[11] Новожилов Ю.В. “Введение в теорию элементарных частиц”, М.: Наука, 1972.

[12] Райдер Л. “Квантовая теория поля”, М.: Мир, 1978.