МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

2-е издание, переработанное и дополненное

Под редакцией **Н.С. Кравченко**

Издательство
Томского политехнического университета
2013

УДК 53(076)
ББК 22.3я73
С23

Авторы
К.Б. Коротченко, Н.С. Кравченко, Ю.Б. Моржикова,
В.Ф. Рудковская, Е.А. Синицын, Н.Д.Толмачева, В.В. Шамшутдинова

С23 **Сборник олимпиадных задач по физике:** учебное пособие / К.Б. Коротченко, Н.С. Кравченко, Ю.Б. Моржикова и др., под ред. Н.С. Кравченко; Томский политехнический университет. – 2-е изд., перераб. и доп. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 142 с.

Пособие представляет собой задания, предлагавшиеся на олимпиадах различного уровня прошлых лет. Часть задач сопровождаются подробными решениями, что позволяет осуществлять методическое руководство для проведения как групповых, так и индивидуальных занятий по подготовке студентов к участию в олимпиадах различного ранга. Содержит задачи по таким разделам физики, как: механика, молекулярная физика и термодинамика, электромагнетизм, колебания и волны.

Предназначено для студентов технических специальностей вузов, а также может быть использовано преподавателями классических, технических, педагогических университетов в качестве методических материалов при организации олимпиад и подготовке студентов к участию в конкурсах и олимпиадах.

Во второе издание включены задачи из интернет-олимпиад, а также внесены необходимые исправления.

УДК 53(076)
ББК 22.3я73

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Ю.П. Кунашенко

Кандидат педагогических наук, доцент НИ ТГУ
О.Г. Ревинская

Предисловие

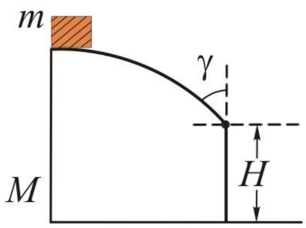
В 2012 году издательством ТПУ было издано учебное пособие под названием «Сборник олимпиадных задач по физике», которое предназначено для студентов технических специальностей вуза. Главная задача, поставленная авторами – научить студентов использовать современные теоретические представления в области физики для решения типовых и нестандартных задач, развить у них навыки самостоятельного анализа и интерпретации полученных результатов, а также умение оценивать правильность полученных решений.

Данное пособие имеет ту же цель. Основная его часть – это задачи с решениями, встречающиеся в первом издании. Во второе издание пособия включен раздел «Интернет олимпиады». В него вошли задачи (и решения) предлагавшиеся на международных интернет олимпиадах 2011 – 2012 г.г.

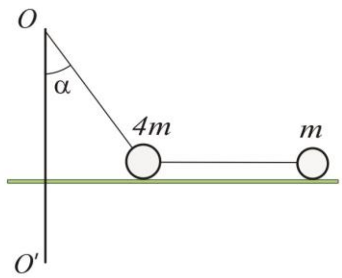
Авторы с пониманием и благодарностью примут замечания и предложения, способствующие улучшению данного пособия.

Глава 1. Механика

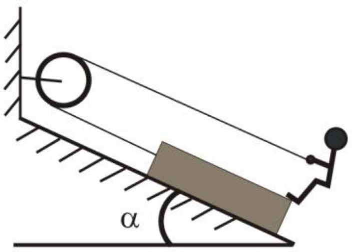
1.1. Горка массой M с шайбой массой m покоятся на гладкой горизонтальной поверхности стола. Шайба начинает скользить (без начальной скорости) по горке без трения, не отрываясь от нее, и покидает горку. Горка, не отрываясь от стола, приобретает скорость u. С какой скоростью шайба упадет на стол? Нижняя часть поверхности горки составляет угол γ и находится на расстоянии H от стола.



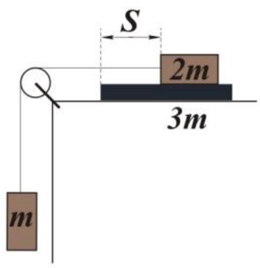
1.2. Горизонтальная платформа и находящиеся на ней небольшие по размерам шарики массами m и $4m$ вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси OO'. Нить, прикрепленная к шарику массой $4m$ и оси OO' составляет угол α с осью и в 2 раза короче нити, связывающей шарики. При вращении шарик массой $4m$ давит на платформу с силой в 2 раза больше, чем другой шарик. Найти силу натяжения нити между шариками. Трением между платформой и шариками пренебречь.



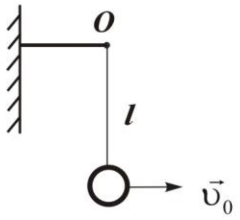
1.3. Человек массой m, упираясь ногами в ящик массой M, подтягивает его с помощью каната, перекинутого через блок, по наклонной плоскости с углом наклона α. С какой минимальной силой нужно тянуть канат человеку, чтобы подтянуть ящик к блоку? Коэффициент трения скольжения между ящиком и наклонной плоскостью μ. Части каната, не соприкасающиеся с блоком параллельны наклонной плоскости. Массами блока и каната пренебречь.



1.4. Систему из груза массой m, бруска массой $2m$ и доски массой $3m$ удерживают в покое. Брусок находится на расстоянии S от края доски. Систему отпускают и брусок движется по доске, а доска по горизонтальной поверхности стола. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской μ_1, между доской и столом μ_2. Определить ускорения всех грузов. Через какое время брусок достигнет края доски? Считать, что за

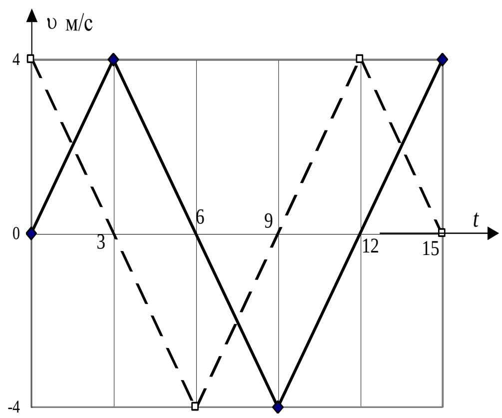


время движения доска не достигнет блока (блок невесомый, нить нерастяжима).



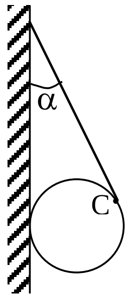
1.5. Маленький шарик подвешен к балке на тонкой невесомой нити, длиной $l = 10$ см. Какую наименьшую скорость υ_0 нужно сообщить шарику в горизонтальном направлении, чтобы он ударился о кронштейн в точке подвеса?

1.6. Две радиоуправляемые машинки ездят по прямолинейному полигону. Их скорости зависят от времени периодически (см. рис.). В момент времени $t = 0$ машины находились рядом. На какое максимальное расстояние S они удалятся друг от друга в процессе движения?



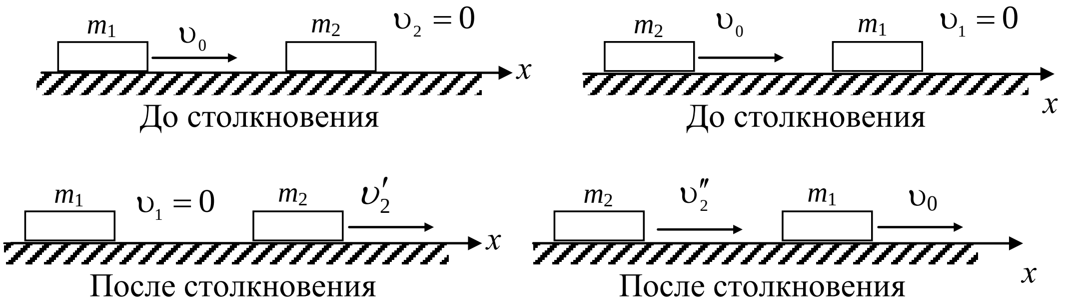
1.7. Шар радиуса R, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности (вращения нет), налетает на длинную ступеньку высотой $H = R/5$. При какой минимальной скорости шар «запрыгнет» на ступеньку после удара? Удар о ступеньку абсолютно упругий. Трения нет.

1.8. Мяч, брошенный под углом 45° к горизонту упруго отскочив от вертикальной стенки, расположенной на расстоянии L от точки бросания, ударяется о Землю на расстоянии l от стены. С какой начальной скоростью был брошен мяч?

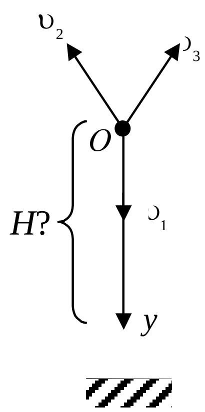


1.9. На нити длиной 20 см висит шар радиусом 5 см, опирающийся на вертикальную стенку. Нить касается шара в точке C. Определить коэффициент трения шара о стенку.

1.10. На рисунке показаны два опыта с шайбами. Поверхность стола горизонтальная и абсолютно гладкая. Измерения показали, что $\upsilon_2' = \upsilon_2''$. Найдите отношение масс шайб. Какой это удар? Ответ обосновать.

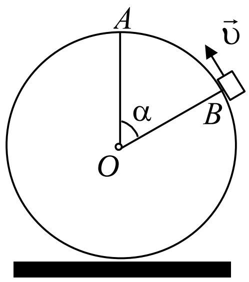


Опыт 1. *Опыт 2.*



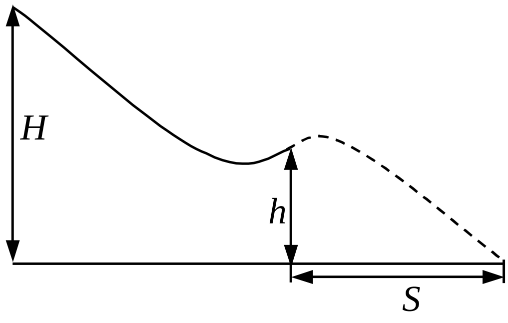
1.11. Снаряд, летящий по вертикали, разрывается в верхней точке траектории на три равных осколка. Один из осколков, двигаясь по вертикали вниз, упал через время t_1 после взрыва. Два других упали одновременно через t_2. Найти высоту H, на которой разорвался снаряд.

1.12. По поверхности большого полого цилиндра лежащего на горизонтальной плоскости, начинает двигаться тело массы m в направлении к наивысшей точке A и притом так, что оно все время находится на одном и том же расстоянии от этой точки. Соответственно цилиндр начинает катиться по горизонтальной плоскости без скольжения. Масса цилиндра M, а угол AOB равен α. Определить ускорение цилиндра a (см. рисунок).

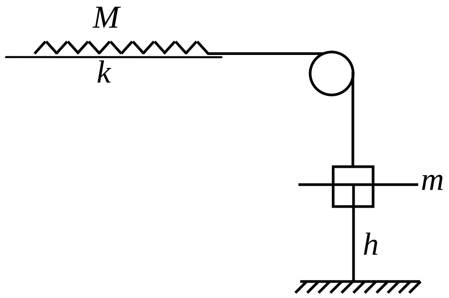


1.13. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону, $k = ax$ где a – постоянная. Найти путь, пройденный бруском до остановки и максимальную скорость его на этом пути.

1.14. Небольшая шайба соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H, имеющей трамплин высотой h. Найти наибольшее расстояние S, которое может пролететь шайба.



1.15. Пружина жесткостью k и массой M лежит на гладком горизонтальном столе. К одному из ее концов привязана тонкая нерастяжимая нить, перекинутая через неподвижный блок, укрепленный к краю стола. Нить свисает с него вертикально. К свисающему концу нити прикрепляют грузик массой m, который в определенный момент времени отпускают без начальной скорости. Определить удлинение пружины. Жесткость пружины считать достаточной, чтобы удлинение было мало по сравнению с первоначальной длиной.



1.16. Обручу, закрученному вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно плоскости обруча через его центр, сообщают вдоль горизонтальной поверхности стола скорость υ_0, направленную перпендикулярно оси вращения (рис.). Обруч сначала удаляется, а затем из-за трения о стол возвращается к месту начала движения со скоростью $\upsilon_1=\upsilon_0/4$, катясь без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения между обручем и столом равен μ.

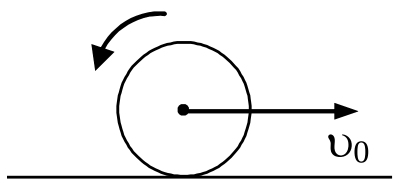


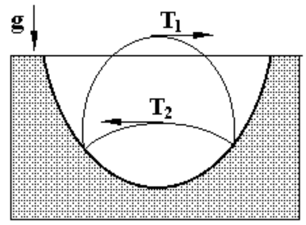
Рис.

1) Найдите время движения до места максимального удаления.
2) Через какое время, считая от начала движения, обруч возвратится назад?

1.17. Шар небольшого радиуса массой M подвешен на невесомой нерастяжимой нити длиной l. В шар попадает пуля массой m, скорость которой в момент столкновения направлена под углом β_0 к горизонту.

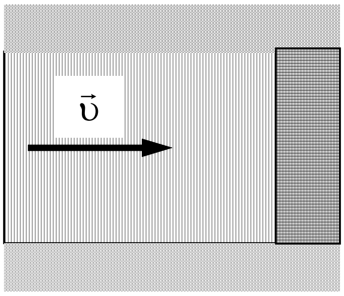
1) Найти максимальный угол отклонения шара, считая удар центральным и абсолютно не упругим.
2) найти потери полной механической энергии (за все время).

1.18. В сферической лунке прыгает шарик, упруго ударяясь о ее стенки в двух точках, расположенных на одной горизонтали. Промежуток времени между ударами при движении шарика слева направо всегда равен T_1, а при движении справа налево T_2; $T_2 \neq T_1$. Определить радиус лунки.

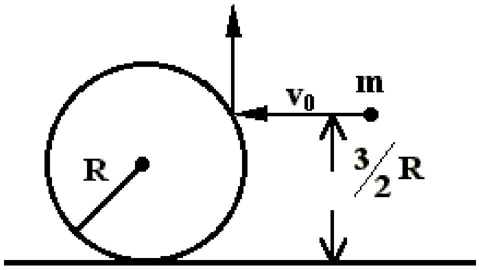


1.19. По реке со скоростью υ плывут мелкие льдины, которые равномерно распределены по поверхности воды, покрывая ее n-ю часть.

В некотором месте реки образовался затор. В заторе льдины полностью покрывают поверхность воды, не нагромождаясь друг на друга (см. рис.). С какой скоростью растет граница сплошного льда? Какая сила действует на 1 м ледяной границы между водой и сплошным льдом в заторе со стороны останавливающихся льдин? Плотность льда $\rho = 0{,}91 \times 10^3$ кг/м^3; толщина льда h = 20 см; скорость реки υ = 0,72 км/ч; плывущие льдины покрывают n = 0,1 часть поверхности воды.

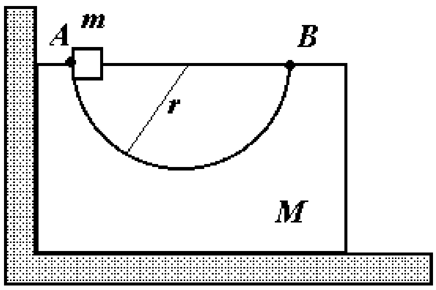


1.20. Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью υ_0 попадает в покоящийся на горизонтальном столе металлический шар массой M и радиусом R на расстоянии $R/2$ выше центра шара и рикошетом отскакивает от него вертикально вверх. Спустя некоторое время движение шара по столу переходит в равномерное качение со скоростью υ_1. Определить скорость пули после удара по шару.



1.21. Сначала тело поднимают из шахты глубиной $h_1 = \dfrac{R}{2}$ (R – радиус Земли) на поверхность Земли, а затем на высоту $h_1 = h_2 = \dfrac{R}{2}$ от поверхности Земли. В каком случае работа больше?

1.22. На гладкой горизонтальной поверхности около стенки покоится симметричный брусок массы M с углублением полусферической формы радиуса R (см. рис.). Из точки A без трения соскальзывает шайба массой m. Найти скорость бруска, когда шайба достигнет точки B.

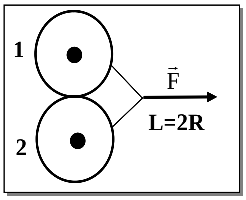


1.23. Пуля, пробив доску толщиной d, изменила свою скорость от υ_0 до υ. Найти время движения пули в доске, считая силу пропорциональной квадрату скорости пули.

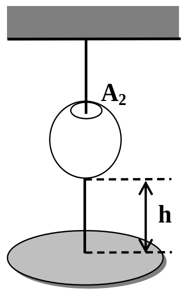
1.24. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Скорость подъема постоянна и равна $\vec{v}_0$. Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $\vec{v}_x = \alpha y$, где α – постоянная величина, y – высота подъема. Найти зависимость от высоты подъема полного, тангенциального и нормального ускорения.

1.25. Радиус-вектор частицы меняется со временем по закону $\vec{r} = \vec{b}t(1 - at)$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор. Чему равен вектор перемещения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$?

1.26. На гладком горизонтальном столе лежат, касаясь друг друга, две одинакового размера шайбы 1 и 2, радиус которых равен R. Шайбы соединены друг с другом с помощью тонкой легкой нити. Длина нити $L = 2R$. Нить начали тянуть в горизонтальном направлении с постоянной силой $\vec{F}$. Найдите силу, с которой шайбы будут давить друг на друга, когда их движение установится. Сила $\vec{F}$ приложена в середине нити. Трение можно считать малым. Рассмотрите два случая: 1) шайбы имеют одинаковую массу; 2) масса одной шайбы в два раза больше другой.

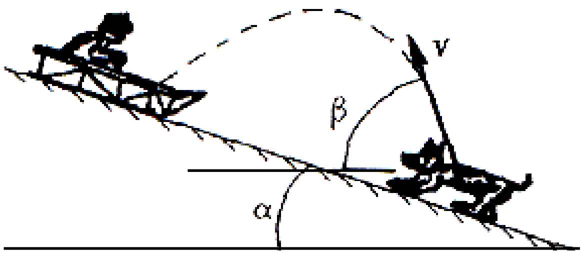


1.27. Горизонтальная платформа массы M = 300 г подвешена на резиновом жгуте AB. Жгут проходит сквозь отверстие в грузе массы m = 100 г. Система находится в равновесии. Затем груз опускают без начальной скорости с высоты h относительно платформы. Найдите, при каком минимальном значении h жгут порвется, если его максимально допустимое удлинение x_k = 8 см. Зависимость силы натяжения жгута от его удлинения $F(x)$ приведена на рисунке. Удар груза о платформу считать абсолютно неупругим.



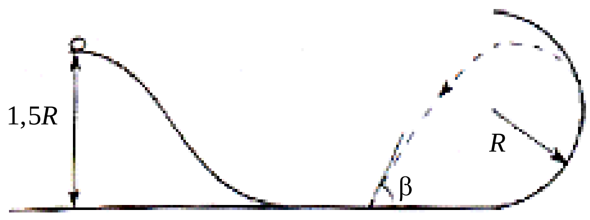
1.28. Обруч радиуса R начинает двигаться вдоль горизонтальной поверхности так, что скорость его центра масс υ_0, а угловая скорость относительно центра масс ω_0, направлена так, что между обручем и горизонтальной поверхностью возникает сила трения скольжения. Определить минимальное значение начальной угловой скорости, при котором обруч после движения с проскальзыванием покатится назад. Найти значение конечной скорости υ, если $\omega_0 > \omega_{min}$. Трением качения пренебречь.

1.29. С горы с уклоном α ($\cos\alpha = 5/6$) съезжают с постоянной скоростью сани с седоком общей массой M. Навстречу саням бежит и запрыгивает в них собака массой m, имеющая при прыжке в момент отрыва от по-

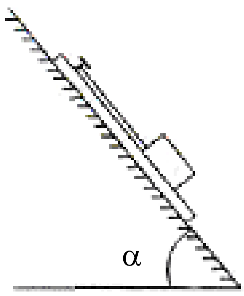


верхности горы скорость υ, направленную под углом β $(\cos\beta = 2/3)$ к горизонту (см. рис.). В результате этого сани продолжают двигаться по горе вниз со скоростью u. Найти скорость саней до прыжка собаки.

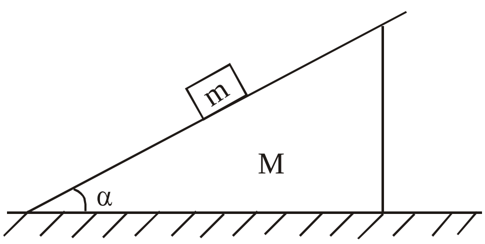
1.30. С высоты $1{,}5R$ соскальзывает без начальной скорости небольшой шарик, двигаясь без трения по желобу, расположенному в вертикальной плоскости (см. рис.). Горизонтальный участок желоба плавно переходит в полуокружность радиуса R. Под каким углом β к горизонту упадет шарик на горизонтальный участок желоба после отрыва от желоба?



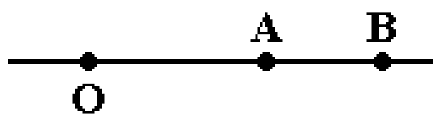
1.31. На наклонной плоскости (рис.) с углом наклона $\alpha = 60°$ неподвижно удерживают доску. На верхней гладкой поверхности доски лежит брусок, прикрепленный с помощью нити к гвоздю, вбитому в доску. Нить параллельна наклонной плоскости. Если доску отпустить, то она начинает скользить по наклонной плоскости, и сила натяжения нити уменьшается в 10 раз. Найти значение коэффициента трения скольжения между доской и наклонной плоскостью.



1.32. Тело массы m без трения скользит вдоль наклонной плоскости массы M. Пренебрегая трением между телом и плоскостью, а также между плоскостью и полом, определить ускорение тела и плоскости. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол α.



1.33. Материальное тело движется прямолинейно так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию. В момент времени, когда тело находится в точке A, его скорость равна 2 см/с. За какое время тело пройдет расстояние от A до B, OA = 1 м, OB = 2 м.

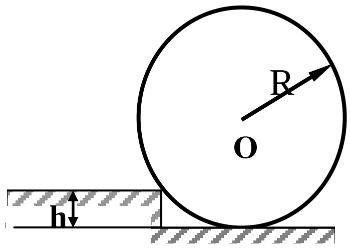


1.34. Скорость течения реки по ее ширине меняется по закону

$$\upsilon = -4x^2 + 4x + 0{,}5, \text{ где } x = \frac{a}{b}$$

(a – расстояние от берега, b – ширина реки). На какое расстояние снесет лодку течением при переправе, если ее скорость относительно воды 2 м/с и направлена прямо к противоположному берегу? Ширина реки 420 м.

1.35. Колесо радиуса R и массы m стоит перед ступенькой высоты h. Какую наименьшую горизонтальную силу F надо приложить к оси колеса O, чтобы оно могло подняться на ступеньку? Трение не учитывать.



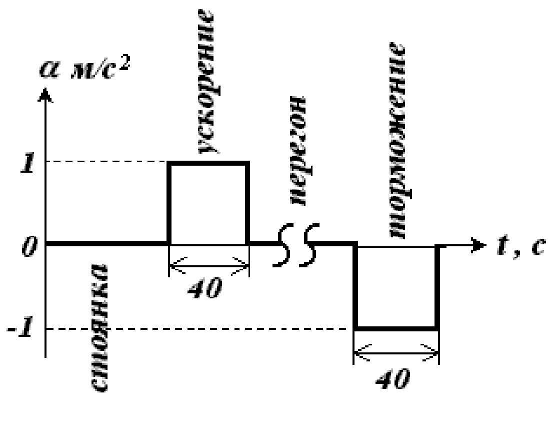
1.36. Груз падает без начальной скорости с высоты H на спиральную пружину. Под действием упавшего груза пружина сжимается на величину h. Вычислить время сжатия, пренебрегая массой пружины и силой трения.

1.37. Кубик из пенопласта массой $M = 100$ г лежит на горизонтальной подставке. Высота кубика 10 см. Снизу кубик пробивает вертикально летящая пуля массой $m = 10$ г. Скорость пули при входе в кубик $\upsilon_1 = 100$ м/с, при выходе из кубика $\upsilon_2 = 98$ м/с. Подпрыгнет ли кубик?

1.38. В ракете массой M запас топлива составляет k % от массы ракеты. Скорость расхода топлива равна μ. При отсутствии силы тяжести ракета приобретает наибольшие по величине ускорение $a = 10\,g$ и скорость через время τ после запуска. Определить наибольшую скорость ракеты.

1.39. На Землю падает метеорит массой $m = 1000$ т со скоростью $\upsilon = 20$ км/с под углом $\varphi = 45°$ к вертикали вблизи Северного полюса. Оценить угол поворота земной оси в результате соударения с метеоритом.

1.40. Маятниковые часы, с периодом колебаний 1 с установили на железнодорожной платформе. Идентичные часы установили в вагоне скоростной электрички. Электричка отправилась по кольцевому маршруту с 48 остановками. График движения электрички представлен на рисунке. Определить разницу в показаниях часов в момент прибытия электрички в пункт отправления.



1.41. На идеальной гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длины l и массы M, который может скользить по этой поверхности без трения. В одну из точек стержня ударяет шарик массы m, движущийся перпендикулярно стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал всю свою кинетическую энергию стержню? Удар считать абсолютно упругим. При каком соотношении масс это возможно?

1.42. На врытый в землю столб навита веревка, за один конец которой тянут с силой F_1 = 10000 Н. Какую силу F_2 надо приложить к другому концу веревки, чтобы она не соскользнула со столба? Коэффициент трения веревки о столб $\mu = \frac{1}{\pi}$. Веревка обвита о столб два раза.

1.43. Из одного облака через τ сек одна за другой начинают падать две дождевые капли. Как будет изменяться со временем расстояние между ними, если сопротивление воздуха пропорционально скорости капель.

1.44. Нить перекинута через бревно. На концах нити укреплены грузы, имеющие массы m_1 и m_2. Считая заданным коэффициент трения μ нити о бревно, найти условие, при котором грузы будут оставаться в покое. Определить ускорение a системы грузов при нарушении условия равновесия.

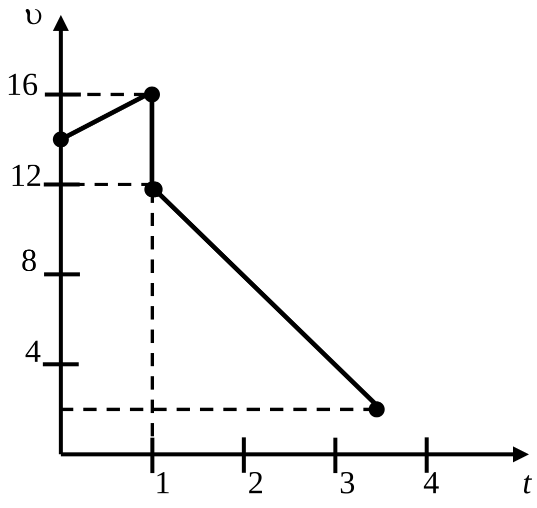
1.45. Автомобиль «Жигули» на скорости υ = 50 км/ч способен двигаться вверх по дороге с наибольшим уклоном α =16°. При движении по ровной дороге с таким же покрытием и на такой же скорости мощность, расходуемая двигателем, составляет N =20 л.с. (1л.с. = 736 Вт). Найти максимальную мощность двигателя, если масса автомобиля 1200 кг.

1.46. Пробуксовывая четырьмя ведущими колесами, автомобилист на Ниве пытается въехать по обледенелой дороге на крутой подъем (α = arcsin 0,1). После разгона на горизонтальном участке (также с пробуксовкой) ему это удается. Длина разгона оказалась равной пути подъёма. Найти коэффициент трения шин об обледенелую дорогу.

1.47. Лодка длины L_0 наезжает, двигаясь по инерции, на отмель и останавливается из-за трения, когда половина её длины оказывается на суше. Какова была начальная скорость лодки υ? Коэффициент трения равен μ.

1.48. Однородный стержень длины l падает, скользя концом по абсолютно гладкому полу. В начальный момент стержень покоился в вертикальном положении. Определить скорость центра тяжести в зависимости от высоты стержня от пола h.

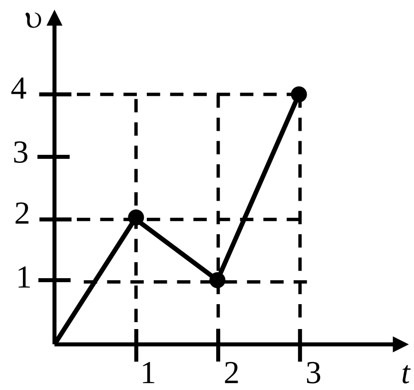
1.49. Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости вниз, скользит по ней, ударяясь об упор, отскакивает от него и возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени представлен на рисунке. Найти угол наклона плоскости к горизонту.



1.50. Сферическая капля воды свободно падает в атмосфере пересыщенного пара. Считая скорость возрастания массы капли $\frac{dm}{dt}$ пропорциональной её поверхности и пренебрегая силой сопротивления среды, определить зависимость скорости падения капли от времени. Предполагается, что в момент зарождения капли (t = 0) скорость её падения и размеры равны нулю.

1.51. На гладкой горизонтальной поверхности лежит мишень массы 9 кг. С интервалом t = 1 с в нее попадают и застревают 4 пули, первая из которых летит с юга, вторая – с запада, третья – с севера и четвертая – с востока. На сколько и в какую сторону сместится в итоге мишень? Масса каждой пули 9 г, скорость υ = 200 м/с.

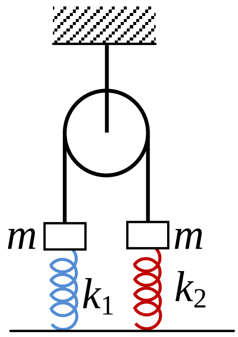
1.52. По плоскости с углом наклона к горизонту α ($\sin\alpha = 4/9$) соскальзывает брусок. Коэффициент трения μ между бруском и плоскостью меняется вдоль плоскости. График зависимости скорости бруска от времени представлен на рисунке. Найти минимальное значение μ.



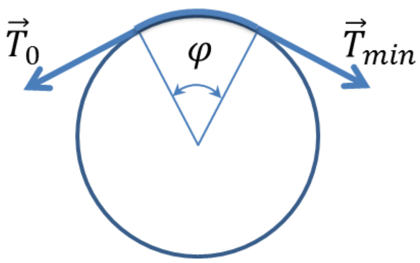
1.54. Шарик радиусом r скатывается без проскальзывания с вершины сферы радиусом R. Чему равна скорость центра масс шарика в момент отрыва от сферы.

1.55. По горизонтальным рельсам без трения движутся параллельно две тележки с дворниками. На тележки падает μ (г/с) снега. В момент времени t = 0 массы тележек равны m_0, а скорости – υ_0. Начиная с момента t = 0, один из дворников начинает сметать с тележки снег, так что масса её в дальнейшем остаётся постоянной. Снег сметается в направлении, перпендикулярном движению тележки. Определить скорости тележек. Какая тележка будет двигаться быстрее? Почему?

1.56. Система грузов изображена на рисунке. Пружины одним концом прикреплены к неподвижной опоре, другим к грузам массой m. Блок и нить невесомы, а пружины не деформированы. Левый груз опускают вниз на расстоянии x и отпускают без толчка. Найти ускорение грузов сразу после того, как отпустили левый груз. Жесткости пружины k_1 и k_2, причем $k_1 > k_2$.



1.57. Веревка касается поверхности столба на длине дуги сегмента с углом φ (см. рис.). Коэффициент трения веревки о столб μ. Какую минимальную силу T нужно приложить к одному из концов веревки, чтобы уравновесить силу T_0, приложенную к другому концу?

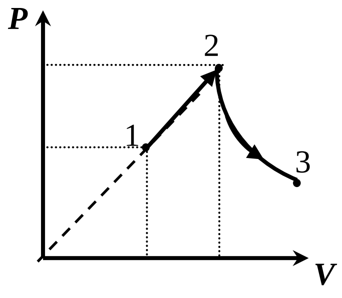


1.58. Со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью υ_0, стреляют в направлении, составляющем угол 120° к курсу. Какой должна быть скорость пули относительно спутника, чтобы пуля ушла в бесконечность?

1.59. С шероховатой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатываются без проскальзывания два цилиндра, имеющие одинаковую массу m и один и тот же радиус. Один из них сплошной, другой – полый, тонкостенный. Коэффициент трения между цилиндрами k. Как следует расположить полый цилиндр – впереди сплошного или за ним, чтобы цилиндры скатывались вместе? Найти ускорение a цилиндров и силу давления N одного на другой.

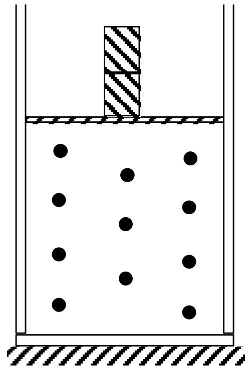
Глава 2. Термодинамика

2.1. Один моль гелия расширяется из состояния 1 в состояние 2 так, что давление меняется пропорционально объему и совершает работу A. Из состояния 2 в состояние 3 газ расширяется так, что теплоемкость газа в процессе расширения остается постоянной и равной $C = \frac{R}{2}$. Какую работу совершает газ в про-

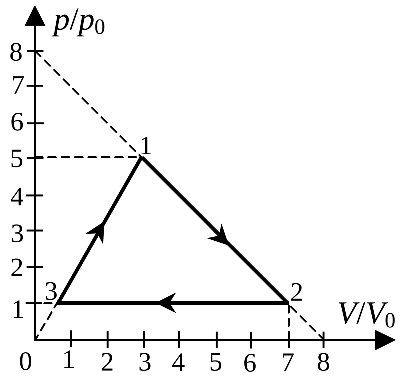


цессе 2-3, если температура газа в состоянии 3 равна температуре в состоянии 1.

2.2. Температура гелия уменьшается в k раз в процессе $PV^2 =$ const. Начальное давление P_1, минимальный объем, занимаемый газом в процессе охлаждения V_0. Найти начальный объем и изменение внутренней энергии, работу газа, количество теплоты, отданное газом.

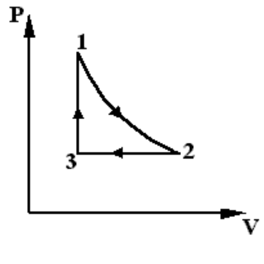


2.3. В теплоизолированном цилиндре, легкий поршень которого удерживается в неподвижном состоянии двумя одинаковыми гирями (см. рис.), находится 1 моль одноатомного идеального газа. Начальная температура газа равна T_0. Давление воздуха вне цилиндра равно нулю. Как изменится температура газа, если одну из гирь снять, а затем через некоторое время поставить обратно? Поршень скользит в цилиндре без трения.



2.4. Тепловая машина, рабочим телом которой является ν молей идеального одноатомного газа совершает цикл, изображенный на рисунке (участки цикла 1–2 и 3–1 линейные зависимости P от V). Величины P_0, V_0 считать известными. Найти: 1) объем и температуру газа в точке 3 цикла; 2) работу газа за цикл; 3) КПД цикла.

2.5. В тепловом процессе, при котором абсолютная температура газа связана с его объемом V соотношением $T = \alpha V^2$ (α – const) идеальному газу подведено количества тепла Q. Найти работу, совершенную газом.

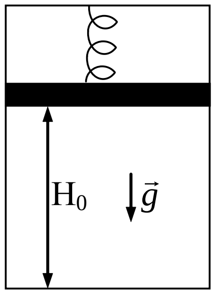


2.6. Определить термический КПД цикла, состоящего из адиабаты, изобары и изохоры, если известно отношение n max и min объемов газа (степень сжатия). Газ идеальный.

2.7. Теплоизолированный цилиндр разделен на две равные части закрепленным теплонепроницаемым поршнем. В каждой части сосуда находится один моль гелия, причем температура в одной из частей в два раза больше, чем в другой. Поршень освобождают, и после установления равновесия объем одной из частей сосуда оказывается в n = 1,5 раза больше объема другой части. Определить суммарное изменение энтропии гелия.

2.8. В вертикально расположенном цилиндре под поршнем находится одноатомный идеальный газ. Сила трения цилиндра при перемещении поршня превышает сумму его веса и силы внешнего атмосферного давления на поршень. Газ начинают медленно нагревать, причем за время расширения газ получил количество теплоты Q как за счет нагрева, так и за счет выделившегося тепла при трении поршня. Затем газ охладили, отобрав от него такое же количество теплоты Q. Во сколько раз изменилось давление газа в цилиндре за время от начала расширения до завершения охлаждения газа, если его объем за то же время увеличился в два раза?

2.9. Подвижный поршень весом mg, подвешенный на пружине, делит объем вертикально расположенного пустого цилиндра на две части. В положении равновесия высота нижней части цилиндра H_0, удлинение пружины x_0. В нижнюю часть цилиндра впускают ν молей воздуха. После установления равновесия пружина оказывается сжатой. Величина деформации сжатой пружины $x_1 = \alpha x_0$ ($\alpha = 2$). После этого воздух медленно охлаждают до некоторой температуры, так что в конечном состоянии деформация сжатой пружины $x_2 = \alpha x_0/2$.

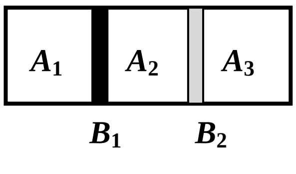


1) Найти конечную температуру воздуха.

2) Найти работу, совершенную воздухом в процессе охлаждения.

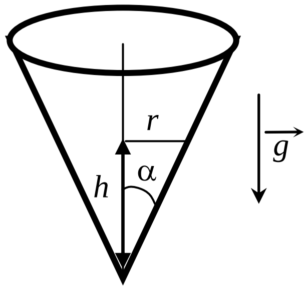
2.10. Идеальный газ сжимается под поршнем в цилиндре так, что уходящее в окружающую среду тепло равно изменению внутренней энергии газа. Определить работу A, затраченную на сжатие моля газа при изменении объема в два раза. Чему равна теплоемкость в этом процессе? Начальная температура газа равна T_0.

2.11. Цилиндр с адиабатическими стенками разделен на три отделения A_1, A_2, A_3 теплоизолирующим поршнем B_1 и теплопроводящим поршнем B_2. Поршни могут скользить без трения. В каждой части содержится 0,1 моля идеального двухатомного газа. Вначале давление во всех отделениях $P_0 = 10^5$ Па и температура $T_0 = 300$ К. Затем газ в отделении A_1 медленно нагревается до тех пор, пока в отделении A_3 температура не станет $T_3 = 340$ К. Найти давление, температуру, объем в конечном состоянии газов; изменение внутренней энергии газов, полную энергию, которая была сообщена газу в отделении A_1 при нагревании.

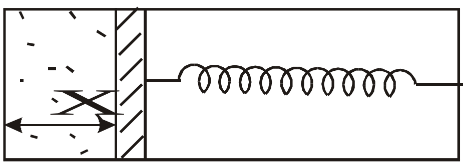


2.12. Горизонтально расположенный цилиндрический теплоизолированный сосуд объемом $V_0 = 100$ литров, заполненный гелием, разделен на две равные части теплонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Газу, находящемуся в левой части сосуда, сообщают количество теплоты Q = 100 Дж. Найти изменение давления в сосуде к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться.

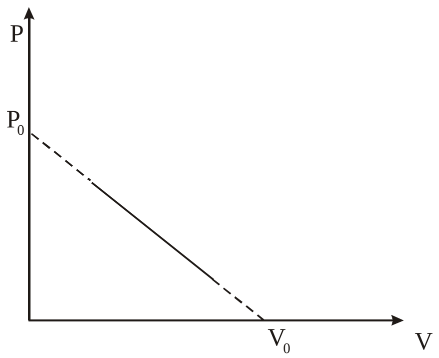
2.13. Найти давление газа в вершине бесконечной воронки, стоящей вертикально в однородном поле тяжести Земли, если число молекул в воронке N, а угол раствора конуса равен 2α. Температуру T считать постоянной по высоте. Масса молекулы воздуха m_0.



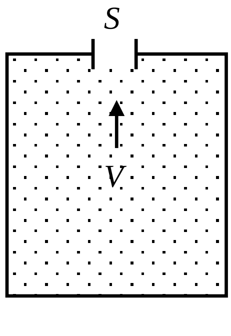
2.14. В цилиндре слева от поршня находится азот, справа – вакуум. Поршень прикреплен к задней стенке пружиной. При температуре T_1 расстояние поршня от передней стенки x_1, при T_2 – x_2. Какова длина нерастянутой пружины, если длина цилиндра L.



2.15. Найти зависимость молярной теплоемкости реального газа от объема $C = f(V)$, совершающего процесс, график которого дан на рисунке, считая известным P_0 и V_0 и коэффициент Пуассона газа γ. Какой максимальной температуры T_{max} достигает один моль газа в этом процессе.

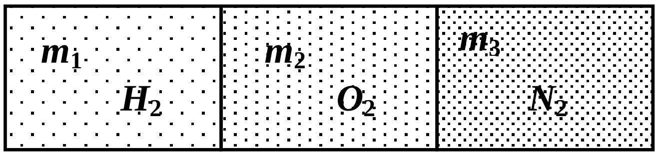


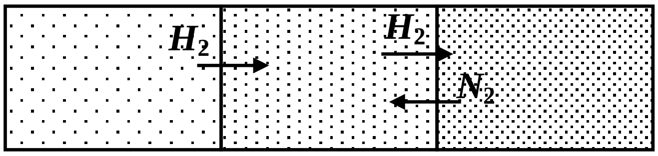
2.16. Тонкостенный сосуд объемом V находится при постоянной температуре T. Из сосуда в окружающее безвоздушное пространство через отверстие площадью S медленно вытекает газ, молекулы которого имеют массу m. Через какое время давление в сосуде упадет в β раз?



2.17. Органные трубы одинаковой длины продувают: одну воздухом при комнатной температуре T_0, а другую гелием. Найти температуру T гелия, при которой тоны второй трубы будут на одну октаву выше (отношение частот равно двум) соответствующих тонов первой трубы. Показатели адиабат газов и молярные массы известны.

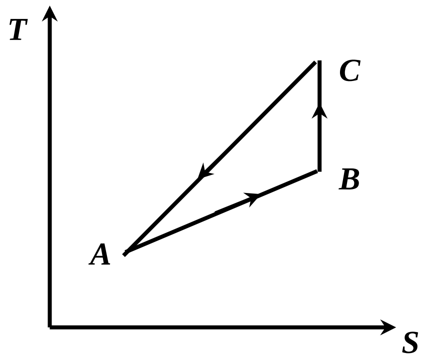
2.18. Сосуд вместимостью 30 л разделен на три равные части неподвижными полупроницаемыми тонкими перегородками. В левую часть вводят 30 г водорода, в среднюю 160 г кислорода, в правую 70 г



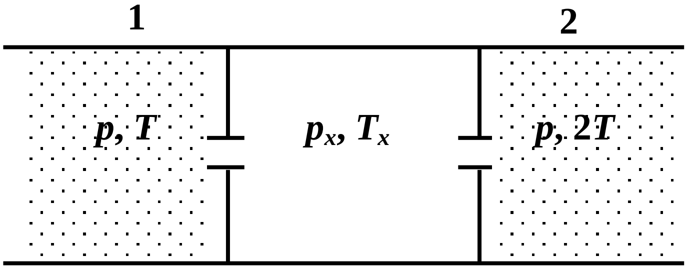


азота. Через левую перегородку может диффундировать только водород, через правую водород и азот. Какое давление будет в каждой из трех частей сосуда после установления равновесия, если сосуд поддерживается при постоянной температуре 300 К?

2.19. В координатах (T, S) цикл изображен треугольником ABC, у которого BC – адиабата. Температура вершин треугольника: $T_A = 300$ К, $T_B = 390$ К, $T_C = 400$ К. Над рабочим телом совершается работа $A_{внеш} = 1$ Дж. Определить количество тепла, отданное холодильнику.

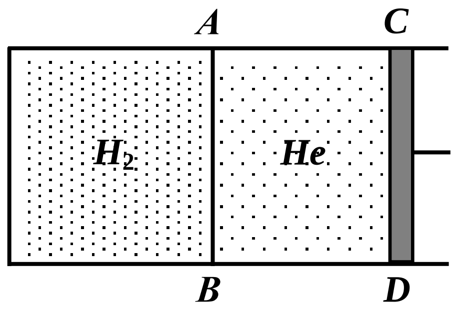


2.20. Теплоизолированная полость с очень маленькими одинаковыми отверстиями соединена с двумя сосудами (1 и 2), содержащими газообразный гелий (см. рис.). Давление гелия в этих сосудах поддерживается равным p, температуры равны T в первом сосуде и $2T$ – во втором сосуде. Найдите установившееся давление и температуру внутри полости.



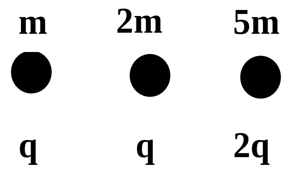
2.21. Под поршнем в цилиндре находятся два различных идеальных газа (по одному молю) разделенных легкой теплопроницаемой подвижной перегородкой. Найти выражение для работы, которая затрачивается на перемещение поршня в условиях отсутствия теплообмена с окружающей средой. Движение медленное, так что между газами все время сохраняется условие равновесия. Начальные температура и объем T_0 и V_0, конечный объем – V.

2.22. Теплоизолированный цилиндр разделен тонкой неподвижной, теплопроводящей перегородкой AB на две части, в одной из которых находится 1 моль газообразного водорода, а в другой – 1 моль гелия. Подвижный теплонепроницаемый поршень CD находится под постоянным внешним давлением p. В начальный момент оба газа находятся в равновесном состоянии, причем температуры H_2 и He различны, а давление гелия равно внешнему давлению p. Затем начинается неравновесный процесс выравнивания температур газов, в ходе которых поршень CD перемещается вправо. К моменту когда температуры газов выровняются и установится равновесие, система совершит против внешнего давления работу A = 42 Дж. Определить изменение температур водорода и гелия к этому моменту времени.

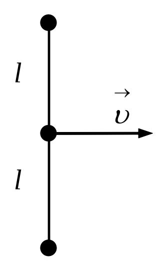


Глава 3. Электромагнетизм

3.1. Три маленьких шарика, массы которых равны m, $2m$ и $5m$, имеют электрический заряд q, q и $2q$, соответственно, и расположены вдоль одной прямой (см. рис.). Вначале расстояния между соседними шариками равно l, а сами шарики закреплены неподвижно. Затем шарики отпускают. Найдите суммарную кинетическую энергию шариков после разлета их на большое расстояние. Найдите скорости шариков, когда они находятся на большом удалении друг от друга. Считайте, что при разлете шарики все время остаются на одной прямой.

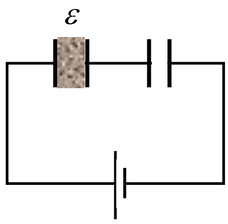


3.2. Три одинаковых одноименно заряженных шарика, каждый зарядом q и массой m, связаны нерастяжимыми нитями, каждая длиной l. Все три шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности вдоль прямой. Какую минимальную скорость υ необходимо сообщить центральному шарику, чтобы при дальнейшем движении, шарики смог-

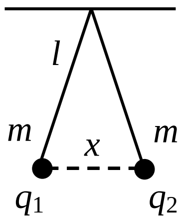


ли образовать равносторонний треугольник. Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити l.

3.3. Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d, заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Конденсатор подсоединен к батарее постоянного тока, ЭДС которой равна $\mathcal{E}$. Одну из пластин конденсатора отодвигают так, что образуется воздушный зазор. На какое расстояние x отодвинута пластина, если при этом внешние силы совершают работу A?



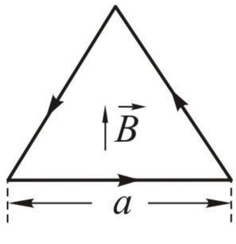
3.4. Два одинаковых маленьких шарика массой m и зарядом q каждый висят на нитях одинаковой длины l на расстоянии $x<<l$. Из-за медленной утечки зарядов величина заряда каждого шарика изменяется по закону $q = q_0(1 - at)^{3/2}$, где a – const, и шарики сближаются. Считая, q_0, m, l, a заданным, определить скорость сближения шариков.



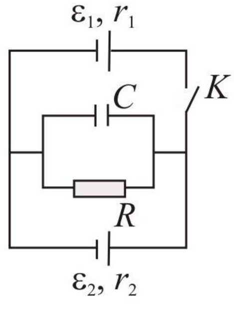
3.5. По поверхности однородного диэлектрического диска равномерно распределен заряд Q. Диск помещен во внешнее однородное магнитное поле индукции $\vec{B}$, направленной перпендикулярно плоскости диска. Масса диска равна M, и он может свободно вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. С какой угловой скоростью ω будет вращаться первоначально неподвижный диск, если внешнее магнитное поле выключить?

3.6. Однородный диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси симметрии. Заряд диска q. Найти магнитный момент диска.

3.7. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка из одного куска проволоки в виде равностороннего треугольника со стороной a. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, индукция которого B перпендикулярна одной из сторон рамки. Масса рамки m. Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника.



3.8. В схеме, изображенной на рисунке в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет установившийся ток. Определить величину и направление тока через конденсатор C сразу



после замыкания ключа *K*.

Параметры схемы: ε_1, внутреннее сопротивление r_1, ε_2, внутренне сопротивление r_2, сопротивление R.

3.9. Резистор, сопротивление которого постоянно и реостат подсоединены к источнику постоянного напряжения U. При силе тока в цепи $I_1 = 2$ А на реостате выделяется мощность $P_1 = 48$ Вт, а при силе тока $I_2 = 5$ А на нем выделяется мощность $P_2 = 30$ Вт.

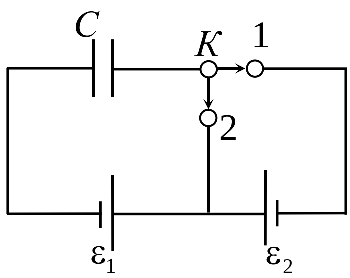
1. Определите напряжение источника и сопротивление резистора.
2. Найдите силу тока в цепи, когда сопротивление реостата равно нулю.
3. Найдите максимальную мощность, которая может выделиться на реостате. Чему равно сопротивление R_{max} реостата в этом случае?

3.10. Одинаково заряженные шарики с одинаковой массой, расположенные на расстоянии L друг от друга, отпустили без начальной скорости. Через t секунд расстояние между ними удвоилось. Через какое время удвоится расстояние между шариками, если их отпустить с расстояния $3L$?

3.11. Электрон попадает в однородное электрическое поле, напряженность которого линейно возрастает со временем со скоростью 200В/(м·с). Какую кинетическую энергию приобретает электрон, пройдя расстояние 1 м, если в начальный момент времени напряженность поля была равна нулю? Начальная скорость электрона равна нулю.

3.12. В однородном магнитном поле индукцией $B_0 = 1$ Тл в плоскости перпендикулярной к нему находится замкнутый круговой проводник сечением $S_0 = 10$ мм^2, радиусом $r = 10$ см, удельное сопротивление ρ материала равно $2{,}3\cdot 10^{-8}$ Ом·м. Магнитное поле выключают так что за любую секунду индукция уменьшается вдвое. Какое количество теплоты выделится в проводнике к моменту полного исчезновения поля?

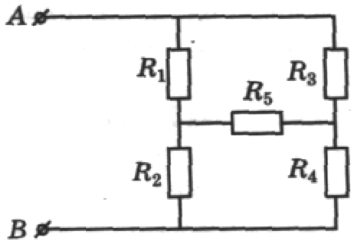
3.13. Сколько теплоты выделится при переключении ключа *K* из положения 1 в положение 2 в цепи, показанной на рисунке.



3.14. На поверхности длинного сплошного непроводящего цилиндра радиуса R равномерно распределен заряд плотностью σ. Определить угловую скорость вращения цилиндра после выключения внешнего магнитного поля, с индукцией B, силовые линии которого параллельны оси цилиндра (и во время выключения). Цилиндр однородный, плотность вещества ρ_0.

3.15. Ток с линейной плотностью j течет по бесконечному проводящему листу. Электрон вылетает из листа перпендикулярно его плоскости со скоростью υ. На какое расстояние электрон сможет удалиться от листа? Через сколько времени он вернется назад?

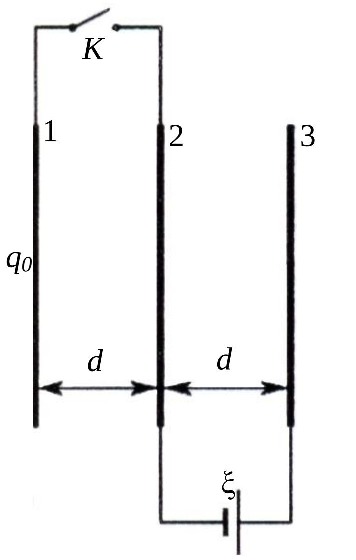
3.16. Найдите сопротивление R_{AB} цепи, изображенной на рис. Известно, что $R_1 = 3$ кОм, $R_2 = 8$ кОм, $R_3 = 21$ кОм, $R_4 = 56$ кОм, $R_5 = 9{,}625$ кОм.



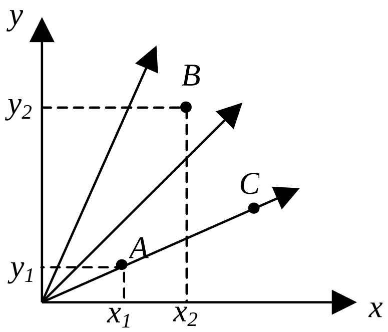
3.17. Три тонкие незаряженные металлические пластины площадью S каждая расположены на расстояниях d друг от друга, причем d много меньше размеров пластин. К пластинам 2 и 3 подсоединили батарею с ЭДС ξ. Пластине 1 сообщили заряд q_0 и замкнули ключ K.

1) Определить заряд пластины 3 до сообщения пластине 1 заряда q_0.

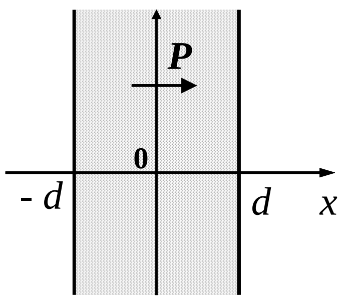
2) Определить заряд пластины 3 после замыкания ключа K.



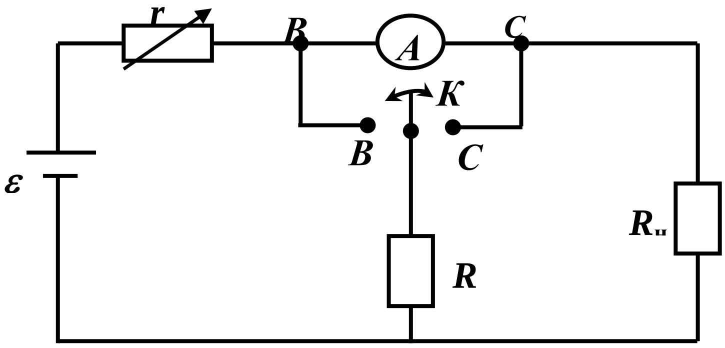
3.18. Вектор E лежит в плоскости XOY; $E_r = 0$ и направлен по радиусу. На расстоянии r от начала координат равен $E(r) = \dfrac{a}{r}$; (a = const). Определить разность потенциалов между любыми произвольными точками с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2).



3.19. Пластинка пьезодиэлектрика вследствие неоднородной деформации поляризована так, что поляризация в её середине равна P_0 и спадает по закону $P = P_0\,(1 - x^2/d^{\,2})$, где x отсчитывается от середины пластины, а d – её полутолщина (см. рис). Вектор поляризации направлен вдоль оси x. Определить напряжённость электрического поля внутри и вне пластинки, а также разность потенциалов между её боковыми поверхностями. Краевыми эффектами пренебречь.

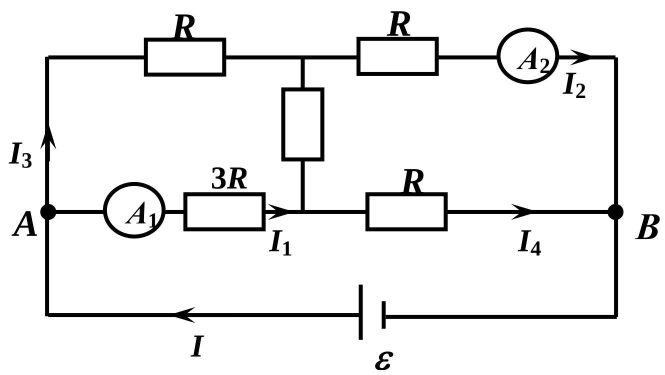


3.20. В нейтральном положении ключа K сила тока в цепи равна 0,1 А. При подключении к контакту B амперметр показывает силу тока 0,05 А. При подключении к контакту C амперметр показывает 0,3 А. Найти отношение мощности нагревателя R_H к полной потребляемой мощности цепи, т.е. кпд во всех случаях. Источник и амперметр считать идеальными. Сопротивление нагревателя R_H постоянно во всех случаях.

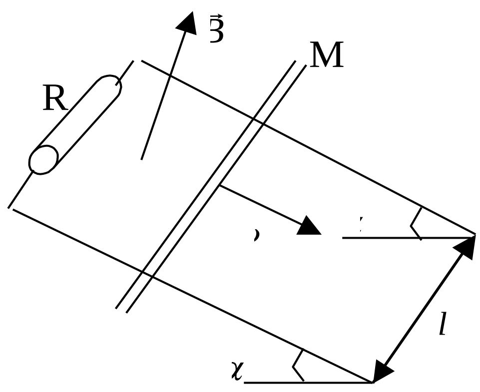


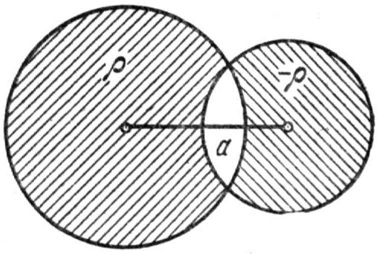
3.21. Два шарика с зарядами q_1 и q_2 имели вначале одинаковые по модулю и направлению скорости. После того, как на некоторое время было включено однородное электрическое поле, направление скорости первого шарика повернулось на 60^0, а модуль скорости уменьшился вдвое. Направление скорости второго шарика повернулось на 90^0. Во сколько раз изменилась скорость второго шарика? Определить модуль отношения заряда к массе второго шарика, если для первого он равен k_1. Электрическим взаимодействием зарядов пренебречь.

3.22. В схеме, показанной на рисунке, амперметр A_1 показывает силу тока I_1. Какую силу тока показывает амперметр A_2? Все приборы идеальные. Указанные на рисунке сопротивления считать известными.



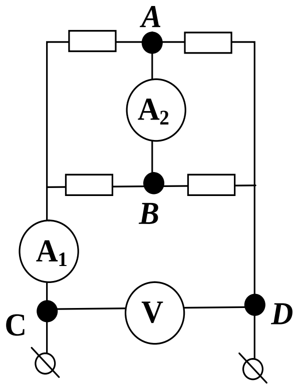
3.23. Две параллельные проводящие перекладины, расстояние между которыми L, соединены сопротивлением R и расположены под углом α к горизонту. Перпендикулярно к образованной перекладинами плоскости направлено однородное магнитное поле $\vec{B}$. По перекладинам под действием силы тяжести скатывается проводящая перемычка массой M (см. рис.). Найти установившуюся скорость υ движения перемычки.





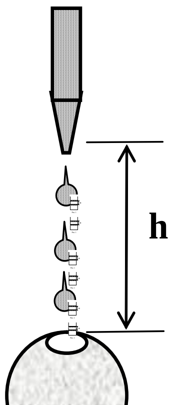
3.24. Найти электрическое поле в полости, образованной пересечением двух шаров (см. рис.). Шары несут равномерно распределенные по объему заряды с плотностями ρ и $-\rho$. Расстояние между центрами шаров равно a.

3.25. Проволочной квадратной рамке массой 100 г со стороной 10 см сообщают в горизонтальном направлении начальную скорость v_0. Рамка движется в гравитационном поле, все время находясь в магнитном поле, перпендикулярном плоскости рамки. Индукция поля измеряется по закону $B(x) = B_0 + kx$, где $k = 10$ см$^{-1}$. Сопротивление рамки $R = 1$ Ом. Через некоторое время рамка начинает двигаться с постоянной скоростью $v = 2$ м/с. Найти начальную скорость рамки.



3.26. В цепи, которая изображена на рисунке, амперметр A_2 показывает силу тока 2 *А*. Найдите показания амперметра A_1, если известно, что резисторы имеют сопротивления 1 Ом, 2 Ом, 3 Ом, и 4 Ом, а вольтметр *V* показывает напряжение 10 В. Все приборы считать идеальными.

3.27. Над тонкостенным металлическим шаром, радиус которого $R = 5$см, на высоте $h = 10$см находится капельница с заряженной жидкостью. Капли жидкости падают из капельницы в небольшое отверстие в шаре. Определите максимальный заряд Q_0, который накопится на шаре, если заряд каждой капли $q = 1{,}8{\cdot}10^{-11}$ Кл. Радиус капель $r = 1$ мм.



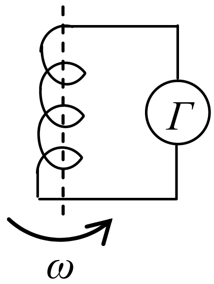
3.28. В соответствии с выводами квантовой теории атом водорода можно смоделировать в виде положительного ядра (протона, размерами которого в данной задаче можно пренебречь) и облака отрицательного заряда электрона, объемная плотность которого изменяется с расстоянием от ядра по закону

$$\rho = -\frac{e}{\pi R^3} e^{-\frac{2r}{R}},$$

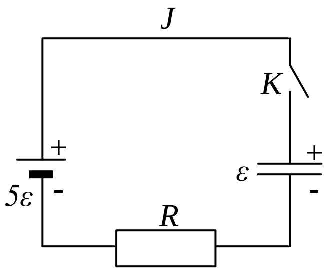
где r – расстояние от ядра, $R = 0{,}53{\cdot}10^{-10}$ м – радиус первой боровской орбиты, $e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Кл. Найти напряженность электрического поля на расстоянии R от ядра.

3.29. Какую долю полной энергии, освобождаемой при альфа распаде ядра радия $^{222}_{88}Ra$ уносит альфа частица $^{4}_{2}He$. Под полной энергией понимается суммарная кинетическая энергия альфа частицы и оставшегося ядра. Массы протона и нейтрона считать одинаковыми. Результат представить в процентах и округлить до целого числа.

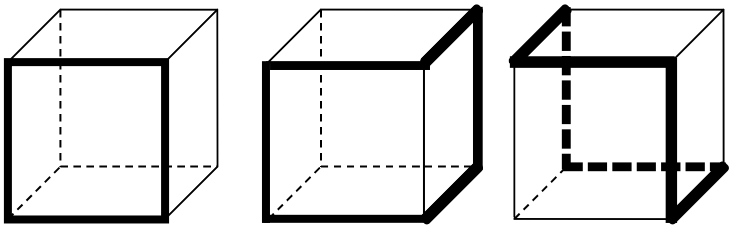
3.30. Катушка из N = 400 витков медной проволоки вращается вокруг своей оси с частотой ν = 100 с$^{-1}$. Катушка при помощи скользящих контактов присоединена к гальванометру. Диаметр катушки d = 50 см, общее сопротивление цепи 50 Ом. При резком торможении катушки через гальванометр прошел заряд $Q = 1{,}1\cdot 10^{-8}$ Кл. Определить концентрацию носителей тока в меди.



3.31. Конденсатор емкости C, заряженный до разности потенциалов ε, подключается через сопротивление R к батарее с ЭДС 5ε. Определите количество теплоты, которое выделится при зарядке конденсатора до напряжения 5ε. Подключение конденсатора к батарее производится по схеме, изображенной на рисунке.

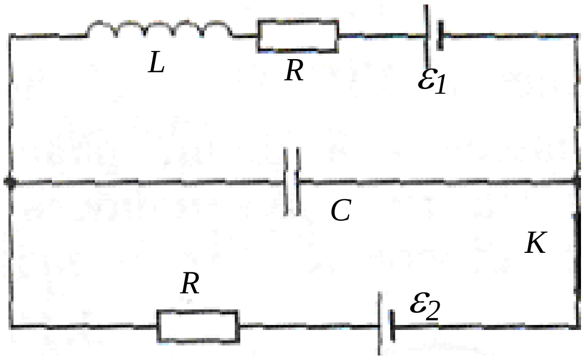


3.32. Виток тонкого провода, имеющий форму квадрата, обладает индуктивностью L_1 (рис.). Виток из такого же провода, идущего по ребрам куба, как это показано на рис. *б*, имеет индуктивность L_2. Найдите индуктивность показанного на рис. *в* витка из такого же провода. (Витки на рисунках выделены толстыми линиями.)


а) б) в)

3.33. Шар радиусом R = 10 см имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r от его центра по закону $\rho = \rho_0\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$, где ρ_0 = 10 нКл/м^3. Определить разность потенциалов между центром и поверхностью шара. Построить график зависимости напряженности от расстояния от центра.

3.34. В электрической схеме, представленной на рис., ключ *К* замкнут. Ключ *К* размыкают.



1) Определить заряд, протекший через батарею с ЭДС ε_1 после размыкания ключа *К*.

2) Найти количество теплоты, выделившейся в цепи после размыкания ключа *К*. Значения *R*, *L*, *C*, ε_1 и ε_2 считать заданными.

3.35. В контуре, состоящим из плоского конденсатора и катушки индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением, происходят колебания с энергией *W*. Пластины конденсатора медленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в *n* раз. Какую работу совершили при этом против электрических сил?

3.36. В тонкостенной непроводящей равномерно заряженной сфере радиуса $r = 1$ см имеются два небольших диаметрально противоположных отверстия. По прямой, соединяющей отверстия из бесконечности со скоростью $5 \cdot 10^3 м/с$ движется частица массой *m* с зарядом *q* (Заряды сферы и частицы одноименные). Найти время в течении которого заряд *q* будет находиться внутри сферы. Заряды и массы сферы и частицы принять одинаковыми и равными 1 мг и $q = 1$ мкКл.

3.37. Два небольших шарика массой 10^{-6} кг, несущие заряд 10^{-6} Кл каждый, соединены непроводящей нитью длиной 1 м. В некоторый момент времени середина нити начинает двигаться со скоростью 100 м/с, перпендикулярно направлению нити в начальный момент времени. Определите, на какое минимальное расстояние сблизятся шарики. Принять $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Результат выразите в единицах СИ и округлите до сотых.

3.38. При напряжении в сети 120 В вода в электрическом чайнике закипает через 20 минут. При напряжении в сети 110 В вода (при прочих равных условиях) закипает через 28 минут. Через какое время закипит вода в электрическом чайнике при напряжении в сети 100 В, если потери тепла пропорциональны времени нагревания.

3.39. Тонкое резиновое кольцо с электропроводным покрытием поместили в однородное магнитное поле перпендикулярное плоскости кольца. Индукция поля равна $B = 0{,}3$ Тл. На сколько (в процентах) увеличится радиус кольца, если по нему пропустить ток $I = 10$ А. Коэффициент упругости кольца $k = 10$ Н/м.

ИНТЕРНЕТ ОЛИМПИАДА

Интернет-олимпиады **проводятся в два тура**: I тур – отборочный (вузовский); II тур – заключительный (региональный, всероссийский, международный).

Первый отборочный (вузовский) тур Открытой международной студенческой Интернет-олимпиады проводится в формате компьютерного on-line тестирования.

При выполнении олимпиадных заданий участники могут использовать методическую литературу.

Второй тур проводится по федеральным округам в базовых вузах в формате компьютерного on-line тестирования или традиционной форме.

К участию во втором туре Интернет-олимпиад по каждой дисциплине приглашается не более трех студентов по результатам первого отборочного (вузовского) тура. Призеры второго тура награждаются дипломами, медалями и памятными подарками победителя.

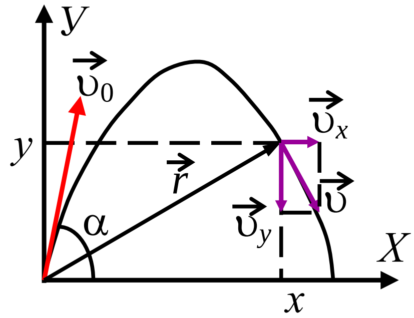
Открытая Международная Интернет-Олимпиада студентов вузов 2011 (1 тур)

Интернет олимпиада состоит из 20 заданий, для выполнения которых отводилось 90 минут. В интернет олимпиаде используются следующие типы заданий:

- *задание с выбором одного правильного ответа* (данный тип задания предполагает выбор одного варианта ответа из предложенных);
- *задание с кратким ответом* (данный тип задания предполагает ввод краткого ответа в виде целого числа).

Задание №1 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 1. Камень бросили с начальной скоростью υ_0 под таким углом α к горизонту, что расстояние от него до точки бросания в течение полета все время возрастало. Если в момент времени t в точке траектории, находящейся на спадающем её участке, вектор скорости υ перпендикулярен радиус вектору $\boldsymbol{r}$ (см. рис.), то



1) x и y координаты камня в этот момент можно определить уравнениями …
2) в этот момент времени проекции скорости υ_x и υ_y камня относятся как …
3) квадратное уравнение для момента времени t, когда это происходит, имеет вид …

(Камень бросают с небольшой скоростью, сопротивлением воздуха можно пренебречь).

а) 1) $\begin{cases} x = \upsilon_0 t \sin\alpha \\ y = \upsilon_0 t \cos\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$; 2) $\dfrac{\upsilon_x}{\upsilon_y} = \dfrac{y}{x}$;

3) $g^2t^2 + \left(3g\upsilon_0 \cos\alpha\right)t - 2\upsilon_0^2 \cos 2\alpha = 0.$

б) 1) $\begin{cases} x = \upsilon_0 t \sin\alpha \\ y = \upsilon_0 t \cos\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$; 2) $\dfrac{\upsilon_x}{\upsilon_y} = \dfrac{y}{x}$;

3) $g^2t^2 - \left(g\upsilon_0 \cos\alpha\right)t + 2\upsilon_0^2 = 0.$

в) 1) $\begin{cases} x = \upsilon_0 t \cos\alpha \\ y = \upsilon_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$; 2) $\dfrac{\upsilon_x}{\upsilon_y} = -\dfrac{y}{x}$;

3) $g^2t^2 - \left(3g\upsilon_0 \sin\alpha\right)t + 2\upsilon_0^2 = 0.$

г) 1) $\begin{cases} x = \upsilon_0 t \cos\alpha \\ y = \upsilon_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$; 2) $\dfrac{\upsilon_x}{\upsilon_y} = \dfrac{y}{x}$;

3) $g^2t^2 + \left(3g\upsilon_0 \sin\alpha\right)t - 2\upsilon_0^2 \cos 2\alpha = 0.$

Задание №2 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 2. На диаграмме S-T процесс, проводимый с системой, представлен отрезком прямой $S = a + bT$, где S – энтропия системы, a и b – константы. Если в ходе обратимого процесса температура T увеличивается от T_0 до $3T_0$, то

1) Малое количество теплоты δQ, полученное системой при изменении температуры на dT, равно …
2) Количество теплоты Q, полученное системой в указанном процессе, определяется выражением …

а) 1) $\delta Q = aT\,dT$; 2) $Q = 4aT_0^2$;

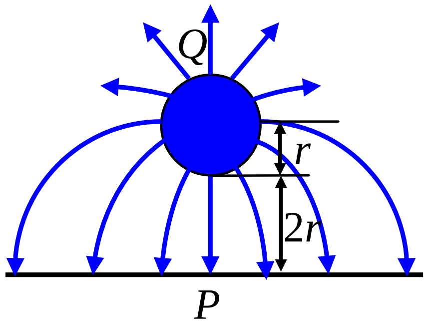
б) 1) $\delta Q = (a + b)\,T\,dT$; 2) $Q = 4(a + b)\,T_0^2$;

в) 1) $\delta Q = b\,T\,dT$; 2) $Q = 4\,b\,T_0^2$;

г) 1) $\delta Q = (a + b\,T)\,dT$; 2) $Q = 2\,T_0\,(a + 2b\,T_0)$.

Задание №3 оценивается в 1 балл.

Задание № 3. Пластмассовый шарик радиусом r и зарядом $Q > 0$, равномерно распределенным по объему, подвешен на диэлектрической нити над горизонтальной бесконечно протяженной проводящей не заряженной плоскостью (см. рис.). Если нижняя точка шарика отстоит от плоскости на расстоянии $2r$, то



1) Напряженность E_1 электрического поля, созданного зарядом Q в точке P, находящейся в непосредственной близости от плоскости, равна …
2) Напряженность E результирующего поля в точке P равна …
3) Плотность σ индуцированных поверхностных зарядов в области под шариком равна …

а) 1) $E_1 = \dfrac{1}{16\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$; 2) $E = \dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$; 3) $\sigma = -\dfrac{1}{8\pi}\dfrac{Q}{r^2}$;

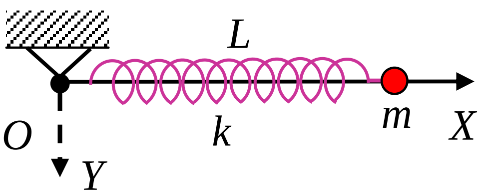
б) 1) $E_1 = \dfrac{1}{36\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$; 2) $E = \dfrac{1}{18\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$; 3) $\sigma = -\dfrac{1}{18\pi}\dfrac{Q}{r^2}$;

в) 1) $E_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$; 2) $E = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$; 3) $\sigma = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{Q}{r^2}$;

г) 1) $E_1 = \dfrac{1}{36\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$; 2) $E = \dfrac{1}{36\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; 3) $\sigma = -\dfrac{1}{36\pi}\dfrac{Q}{r^2}$.

Задание №4 оценивается в 1 балл.

Задание № 4. Один конец легкой слабой пружины в нерастянутом состоянии шарнирно закреплен в точке O, ко второму концу прикреплен шарик массой m. Если пружину с шариком привести в горизонтальное положение (см. рис.) и отпустить, то



1) Проекции уравнения движения шарика на оси OX и OY, при условии $\sqrt{x^2 + y^2} >> L$, имеют вид …

2) С использованием начальных условий решение этих уравнений представлено в виде …
3) Для шарика в нижней точке траектории …

(Жесткость пружины k, ее длина в недеформированном состоянии L. Слабость пружины означает, что ее удлинение $\Delta L >> L$).

a) 1) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx,\ \ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -ky - mg;$

2) $x(t) = L\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t,\ \ y(t) = \dfrac{mg}{k}\left(1 + \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right);$

3) $x(t) = 0,\ \ y(t) = \dfrac{mg}{k};$

b) 1) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx,\ \ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -ky + mg;$

2) $x(t) = L\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t,\ \ y(t) = \dfrac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right);$

3) $x(t) = 0,\ \ y(t) = \dfrac{mg}{k};$

c) 1) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx,\ \ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -ky + mg;$

2) $x(t) = L\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t,\ \ y(t) = \dfrac{mg}{k}\left(1 - \sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right);$

3) $x(t) = 0,\ \ y(t) = \dfrac{mg}{k};$

d) 1) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx,\ \ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -ky + mg;$

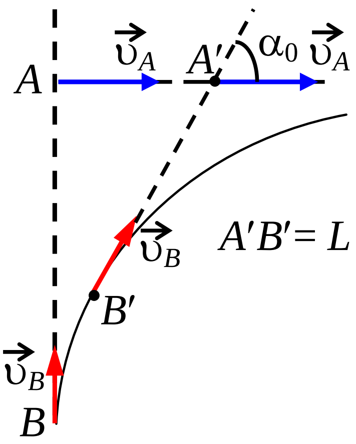
2) $x(t) = L\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t,\ \ y(t) = \dfrac{mg}{k}\left(1 - \sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right);$

3) $x(t) = 0,\ \ y(t) = \dfrac{mg}{k}.$

Задания №5, №6, №7, №8 являются составными частями одного общего V задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен 4.

Задание №5 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 5. Из леса по прямолинейному шоссе, перпендикулярно к опушке леса, с постоянной скоростью υ_A выезжает автобус. По лугу вдоль опушки леса с постоянной скоростью $\upsilon_B < \upsilon_A$ едет велосипедист (см. рис.). Велосипедист увидел автобус и тотчас устремился за ним в погоню. Скорость велосипеда υ_B постоянна по величине и все время направлена в ту точку, где находится в данный момент автобус. Вначале расстояние между автобусом и велосипедом уменьшается, затем начинает возрастать.



Если минимальное расстояние $A'B'$ между автобусом и велосипедом составляет L, то в этот момент времени значение угла α_0 определяется соотношением …

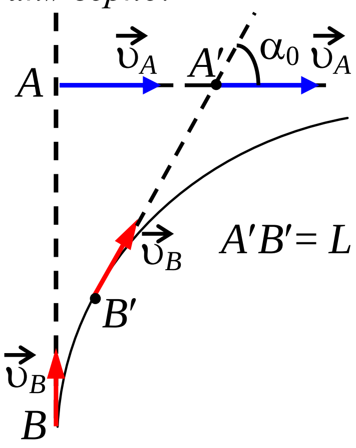
а) $\cos\alpha_0 = \upsilon_A/\upsilon_B$; **б)** $\sin\alpha_0 = \upsilon_B/\upsilon_A$; **в)** $\cos\alpha_0 = \upsilon_B/\upsilon_A$; **г)** $\sin\alpha_0 = \upsilon_A/\upsilon_B$.

Задание №6 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№5).

Если ответ на задание №5 *неправильный, то ответ на задание* №6 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 6. Из леса по прямолинейному шоссе, перпендикулярно к опушке леса, с постоянной скоростью υ_A выезжает автобус. По лугу вдоль опушки леса с постоянной скоростью $\upsilon_B < \upsilon_A$ едет велосипедист (см. рис.). Велосипедист увидел автобус и тотчас устремился за ним в погоню. Скорость велосипеда υ_B постоянна по величине и все время направлена в ту точку, где находится в данный момент автобус. Вначале расстояние

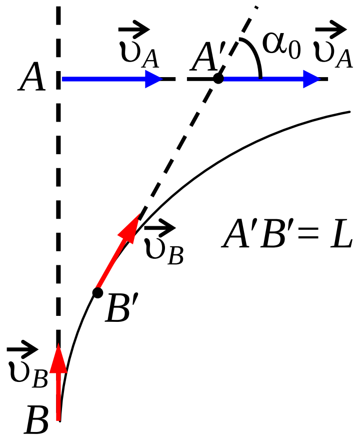


между автобусом и велосипедом уменьшается, затем начинает возрастать. Если минимальное расстояние $A'B'$ между автобусом и велосипедом составляет L, то в этот момент времени угловая скорость ω поворота вектора скорости велосипеда определяется равенством …

а) $\omega = \upsilon_B / L$; **б)** $\omega = \dfrac{\upsilon_B\sqrt{\upsilon_A^2-\upsilon_B^2}}{\upsilon_A L}$; **в)** $\omega = (\upsilon_A - \upsilon_B)/L$; **г)** $\omega = \dfrac{\sqrt{\upsilon_A^2-\upsilon_B^2}}{L}$.

Задание №7 *оценивается в* 1 *балл.*
При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№6).
Если ответ на задание №6 *неправильный, то ответ на задание* №7 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

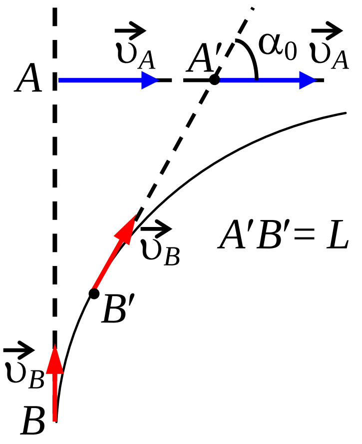
Задание № 7. Из леса по прямолинейному шоссе, перпендикулярно к опушке леса, с постоянной скоростью υ_A выезжает автобус. По лугу вдоль опушки леса с постоянной скоростью $\upsilon_B < \upsilon_A$ едет велосипедист (см. рис.). Велосипедист увидел автобус и тотчас устремился за ним в погоню. Скорость велосипеда υ_B постоянна по величине и все время направлена в ту точку, где находится в данный момент автобус. Вначале расстояние между автобусом и велосипедом уменьшается, затем начинает возрастать. Если минимальное расстояние $A'B'$ между автобусом и велосипедом составляет L, то в этот момент времени ускорение a велосипеда определяется выражением …



а) $a = \dfrac{\upsilon_A}{L}\sqrt{\upsilon_A^2-\upsilon_B^2}$; **б)** $a = \dfrac{\upsilon_B^2}{L}$; **в)** $a = \upsilon_A(\upsilon_A - \upsilon_B)/L$; **г)** $a = \dfrac{\upsilon_B}{L}\sqrt{\upsilon_A^2-\upsilon_B^2}$.

Задание №8 *оценивается в* 1 *балл.*
При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№7).
Если ответ на задание №7 *неправильный, то ответ на задание* №8 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 8. Из леса по прямолинейному шоссе, перпендикулярно к опушке леса, с постоянной скоростью υ_A выезжает автобус. По лугу вдоль опушки леса с постоянной скоростью $\upsilon_B < \upsilon_A$ едет велосипедист (см. рис.). Велосипедист увидел автобус и тотчас устремился за ним в погоню. Скорость велосипеда υ_B постоянна по величине и все время направлена в ту точку, где находится в данный момент автобус. Вначале расстояние между автобусом и велосипедом уменьшается, затем начинает возрастать. Если минимальное расстояние $A'B'$ между автобусом и велосипедом составляет L, то в этот момент времени выражение для радиуса кривизны R траектории движения велосипеда имеет вид …



а) $R = \dfrac{\upsilon_B L}{\sqrt{\upsilon_A^2 - \upsilon_B^2}}$; **б)** $R = \dfrac{\upsilon_B^2 L}{\upsilon_A\sqrt{\upsilon_A^2 - \upsilon_B^2}}$; **в)** $R = L$; **г)** $R = \dfrac{\upsilon_B^2 L}{\upsilon_A(\upsilon_A - \upsilon_B)}$.

Задания №9, №10, №11, №12 *являются составными частями одного общего VI задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен* 4.

Задание №9 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 9. Молярная теплоемкость идеального газа изменяется с температурой по закону $C = \alpha T^2$, где $\alpha = \text{const}$. Если δQ – бесконечно малое количество теплоты, полученное идеальным газом, δA - элементарная работа, совершенная газом, dU – бесконечно малое приращение внутренней энергии, $\nu = m/\mu$ - количество вещества идеального газа, C_V – его молярная теплоемкость при постоянном объеме, то первое начало термодинамики имеет вид …

a) $\nu C_V dT = -\nu\alpha T^2 dT - pdV;$
b) $\nu\alpha T^2 dT = pdV - \nu C_V dT;$
c) $\nu C_V dT = \nu\alpha T^2 dT + pdV;$
d) $\nu\alpha T^2 dT = pdV + \nu C_V dT.$

Задание №10 *оценивается в* 1 *балл.*
При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№9).

Если ответ на задание №9 *неправильный, то ответ на задание* №10 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 10. Молярная теплоемкость идеального газа изменяется с температурой по закону $C = \alpha T^2$, где $\alpha = \text{const}$. Если C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме, R – универсальная газовая постоянная, то первое начало термодинамики можно переписать в виде …

a) $\frac{C_V}{R}\frac{dT}{T} = \frac{\alpha}{R}TdT + \frac{dV}{V}$;

b) $\frac{\alpha}{R}TdT = \frac{C_V}{R}\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V}$;

c) $\frac{\alpha}{R}TdT = \frac{dV}{V} - \frac{C_V}{R}\frac{dT}{T}$;

d) $\frac{C_V}{R}\frac{dT}{T} = -\frac{\alpha}{R}TdT - \frac{dV}{V}$.

Задание №11 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№10).

Если ответ на задание №10 *неправильный, то ответ на задание* №11 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 11. Молярная теплоемкость идеального газа изменяется с температурой по закону $C = \alpha T^2$, где $\alpha = \text{const}$. Если молярная теплоемкость газа при постоянном объеме равна $C_V = iR/2$, где i – число степеней свободы молекул этого газа, R – универсальная газовая постоянная, то уравнение процесса, в переменных (V, T) имеет вид …

a) $VT^{\frac{i}{2}}\exp\left(-\frac{\alpha T^2}{2R}\right) = const$;

b) $VT^{\frac{i}{2}}\exp\left(\frac{\alpha T^2}{2R}\right) = const$;

c) $\frac{T^{\frac{i}{2}}}{V}\exp\left(-\frac{\alpha T^2}{2R}\right) = const$;

d) $\frac{T^{\frac{i}{2}}}{V}\exp\left(\frac{\alpha T^2}{2R}\right) = const$.

Задание №12 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№11).

Если ответ на задание №11 *неправильный, то ответ на задание* №12 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 12. Молярная теплоемкость идеального газа изменяется с температурой по закону $C = \alpha T^2$, где α = const. Если i – число степеней свободы молекул этого газа, R – универсальная газовая постоянная, то уравнение процесса, в переменных (p, T) имеет вид …

a) $pT^{\frac{i-2}{2}} \exp\left(\frac{\alpha T^2}{2R}\right) = const$;

b) $p^{-1}T^{\frac{i+2}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha T^2}{2R}\right) = const$;

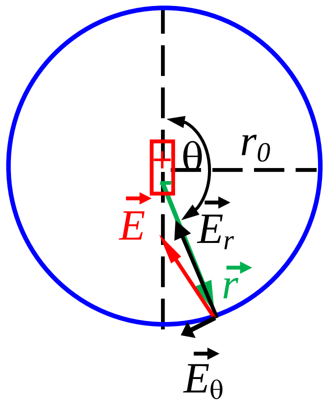
c) $p^{-1}T^{\frac{i+2}{2}} \exp\left(\frac{\alpha T^2}{2R}\right) = const$;

d) $pT^{\frac{i-2}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha T^2}{2R}\right) = const$.

Задания №13, №14, №15, №16 *являются составными частями одного общего VII задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен* 4.

Задание №13 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 13. Тонкое непроводящее кольцо радиуса r_0 расположено в вертикальной плоскости. В плоскости кольца в его центре помещен электрический диполь, ось которого направлена вертикально, а электрический дипольный момент равен p_e, а модуль плеча $l \ll r_0$ (см. рис.). Если рассматриваемая точка поля находится на кольце, то проекции E_r и E_θ вектора $\boldsymbol{E}$ напряженности поля диполя на полярный радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ и на вектор, проведенный в этой точке поля перпендикулярно $\boldsymbol{r}$ в сторону возрастания полярного угла θ (см. рис.), определяются формулами, имеющими вид



a) $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{r_0^3}$; $E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e\sin\theta}{r_0^3}$;

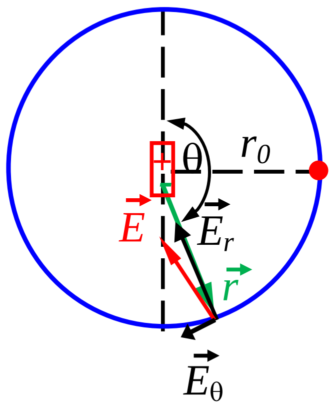
b) $E_r = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e\sin\theta}{r_0^3}$; $E_\theta = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{r_0^3}$;

c) $E_r = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\sin\theta}{r_0^3}$; $E_\theta = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{r_0^3}$;

d) $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e\cos\theta}{r_0^3}$; $E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\sin\theta}{r_0^3}$.

Задание №14 *оценивается в* 1 *балл.*
При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№13).
Если ответ на задание №13 *неправильный, то ответ на задание* №14 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 14. Тонкое непроводящее кольцо радиуса r_0 расположено в вертикальной плоскости. В плоскости кольца в его центре помещен электрический диполь, ось которого направлена вертикально, а электрический дипольный момент равен p_e, а модуль плеча $l << r_0$ (см. рис.). По кольцу может скользить без трения маленькая бусинка с зарядом $q > 0$ и массой m. Первоначально бусинку удерживают ($\upsilon_0 = 0$) в точке пересечения перпендикуляра, восстановленного к плечу l диполя из его середины, и кольца, как показано на рисунке.



Если бусинку отпустить, она начинает двигаться под действием силы электрического поля диполя. Тогда выражение для проекции нормального ускорения $a_n(\theta)$ бусинки в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения имеет вид …
(Считать, что сила тяжести много меньше электрической силы).

a) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e\cos\theta}{mr_0^3}$;

b) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{mr_0^3}$;

c) $-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e\sin\theta}{r_0^3}$;

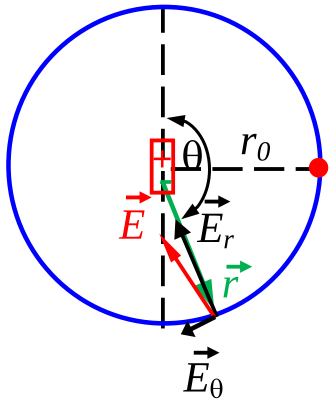
d) $-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\sin\theta}{mr_0^3}$.

Задание №15 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№13).

Если ответ на задание №13 *неправильный, то ответ на задание* №15 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 15. Тонкое непроводящее кольцо радиуса r_0 расположено в вертикальной плоскости. В плоскости кольца в его центре помещен электрический диполь, ось которого направлена вертикально, а электрический дипольный момент равен p_e, а модуль плеча $l << r_0$ (см. рис.). По кольцу может скользить без трения маленькая бусинка с зарядом $q > 0$ и массой m. Первоначально бусинку удерживают ($\upsilon_0 = 0$) в точке пересечения перпендикуляра, восстановленного к плечу l диполя из его середины, и кольца, как показано на рисунке.



Если бусинку отпустить, она начинает двигаться под действием силы электрического поля диполя. Тогда выражение для проекции ее тангенциального ускорения $a_\tau(\theta)$ бусинки в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения имеет вид …
(Считать, что сила тяжести много меньше электрической силы).

a) $-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e q\cos\theta}{mr_0^3}$;

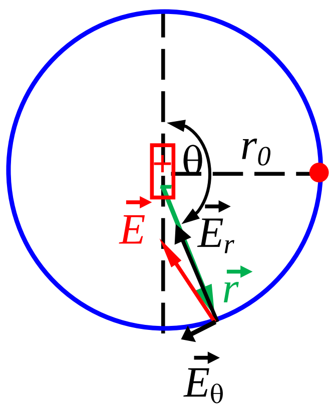
b) $-\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{mr_0^3}$;

c) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e q\sin\theta}{mr_0^3}$;

d) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\sin\theta}{mr_0^3}$.

Задание №16 *оценивается в* 1 *балл.*
При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующие задания (№14 и №15).
Если ответ на задания №14 и №15 *неправильный, то ответ на задание* №16 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 16. Тонкое непроводящее кольцо радиуса r_0 расположено в вертикальной плоскости. В плоскости кольца в его центре помещен электрический диполь, ось которого направлена вертикально, а электрический дипольный момент равен p_e, а модуль плеча $l \ll r_0$ (см. рис.). По кольцу может скользить без трения маленькая бусинка с зарядом $q > 0$ и массой m. Первоначально бусинку удерживают ($\upsilon_0 = 0$) в точке пересечения перпендикуляра, восстановленного к плечу l диполя из его середины, и кольца, как показано на рисунке. Если бусинку отпустить, она начинает двигаться под действием силы электрического поля диполя. Тогда выражение для модуля ее полного ускорения $a(\theta)$ бусинки в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения имеет вид …



(Считать, что сила тяжести много меньше электрической силы).

a) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e q}{m r_0^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$;

b) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e q}{m r_0^3}\sqrt{3+\cos^2\theta}$;

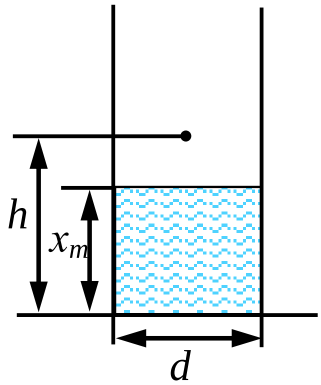
c) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e q}{m r_0^3}\sqrt{3+\sin^2\theta}$;

d) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e q}{m r_0^3}\sqrt{1+3\sin^2\theta}$.

Задания №17, №18 *являются составными частями одного общего* VIII *задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен* 2.

Задание №17 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 17. Центр масс пустой тонкостенной мензурки массой M и диаметром d находится на расстоянии h от основания (см. рис.). В мензурку небольшими порциями наливают жидкость плотностью ρ. Если x_m – высота жидкости, при которой мензурка с жидкостью становится наиболее (максимально) устойчивой, то справедливы следующие утверждения …



Укажите ***не менее двух*** *вариантов ответа*

a) координата центра масс системы прямо пропорциональна массе системы;
b) первая порция налитой в мензурку жидкости понижает общий центр масс;
c) первая порция налитой в мензурку жидкости находится ниже центра масс пустой мензурки;
d) для максимальной устойчивости системы общий центр тяжести должен находиться на наименьшей высоте;
e) общий центр масс понижается до тех пор, пока центр тяжести пустой мензурки не окажется на поверхности жидкости.

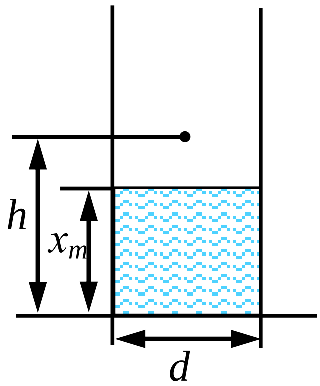
Задание №18 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№17).

Если ответ на задание №17 *неправильный, то ответ на задание* №18 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 18. Центр масс пустой тонкостенной мензурки массой $M = 100$ г и диаметром $d = 60$ мм находится на расстоянии $h = 100$ мм от основания (см. рис.). В мензурку небольшими порциями наливают жидкость плотностью $\rho = 1000$ кг/м^3. Высота x_m, при которой мензурка с жидкостью будет наиболее устойчивой, равна …

Ответ выразите в мм и округлите до целого числа.



Задания №19, №20 *являются составными частями одного общего* IX *задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен* 2.

Задание №19 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 19. Один моль разреженного гелия находится в горизонтальном цилиндрическом сосуде объемом V с подвижным поршнем при температуре T. Если при нагревании гелия объем увеличивается в 20 раз, а его теплоемкость C остается постоянной, то для определения приращения температуры ΔT гелия, надо учесть следующие утверждения … (Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь).

*Укажите **не менее двух** вариантов ответа*

a) теплоемкость газа – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг газа на 1 К;

b) молярная теплоемкость газа при постоянном объеме равна приращению внутренней энергии газа в количестве 1 моля при повышении его температуры на 1 К;

c) бесконечно малое количество теплот, сообщаемое системе, расходуется на бесконечно малое приращение ее внутренней энергии и на совершение системой элементарной работы против внешних сил;

d) теплоемкость газа – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания газа на 1 К;

e) теплоемкость газа при постоянном объеме равна приращению внутренней энергии газа в количестве 1 моля при повышении его температуры на 1 К.

Задание №20 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№19).

Если ответ на задание №19 *неправильный, то ответ на задание* №20 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание № 20. Один моль разреженного гелия находится в горизонтальном цилиндрическом сосуде объемом $V = 10$ л с подвижным поршнем при температуре $T = 300$ К. Если при нагревании гелия объем увеличивается в 20 раз, а его теплоемкость во всем процессе остается постоянной и равной $C = 1000$ Дж/К, то приращение температуры ΔT гелия равно … (Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь).

Ответ округлите до сотых и представьте в виде целого числа 100 ΔT.

Открытая Международная Интернет-Олимпиада студентов вузов 2012 (1 тур)

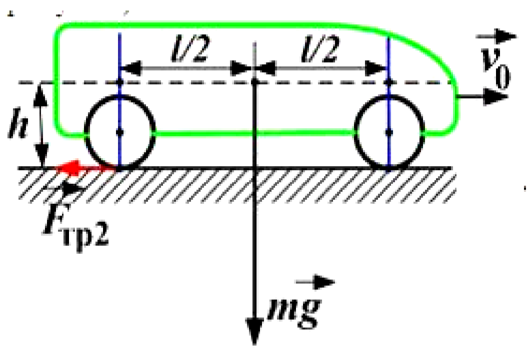
Интернет олимпиада состоит из 20 заданий, для выполнения которых отводилось 90 минут. В интернет олимпиаде используются следующие типы заданий:

- *задание с выбором одного правильного ответа* (данный тип задания предполагает выбор одного варианта ответа из предложенных);
- *задание с кратким ответом* (данный тип задания предполагает ввод краткого ответа в виде целого числа).

Задания №1, №2, №3, №4 *являются составными частями одного общего I задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен* 4.

Задание №1 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 1. Центр масс спортивного автомобиля массой m находится на равных расстояниях $l/2$ от осей передних и задних колес и расположен на высоте h относительно полотна дороги (см. рисунок). Если при торможении, когда колодками зажимают только задние колеса, длина тормозного пути равна L_2, то для



указанного случая торможения работа силы трения $F_{тр2}$ определяется выражением вида … (Считать, что коэффициент трения колес о дорогу равен μ).

a) $A_2 = -\dfrac{\mu mgL_2}{(1+\mu h/l)}$;

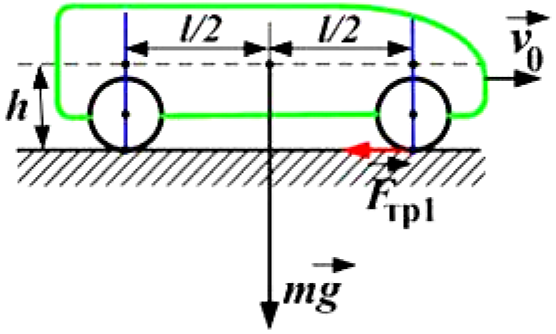
b) $A_2 = -\dfrac{\mu mgL_2}{2(1+\mu h/l)}$;

c) $A_2 = -\dfrac{\mu mgL_2}{2(1-\mu h/l)}$;

d) $A_2 = -\dfrac{\mu mgL_2}{(1-\mu h/l)}$.

Задание №2 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 2. Центр масс спортивного автомобиля массой m находится на равных расстояниях $l/2$ от осей передних и задних колес и расположен на высоте h относительно полотна дороги (см. рисунок). Если при торможении, когда колодками зажимают только передние колеса, длина тормозного пути равна L_1, то для указанного случая торможения работа силы трения $F_{тр1}$ определяется выражением вида … (Считать, что коэффициент трения колес о дорогу равен μ).



a) $A_1 = -\dfrac{\mu mgL_1}{2(1+\mu h/l)}$;

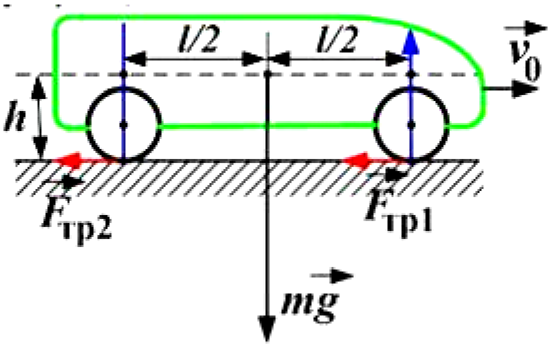
b) $A_1 = -\dfrac{\mu mgL_1}{(1+\mu h/l)}$;

c) $A_1 = -\dfrac{\mu mgL_1}{2(1-\mu h/l)}$;

d) $A_1 = -\dfrac{\mu mgL_1}{(1-\mu h/l)}$.

Задание №3 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание № 3. Центр масс спортивного автомобиля массой m находится на равных расстояниях $l/2$ от осей передних и задних колес и расположен на высоте h относительно полотна дороги (см. рисунок). Если при торможении, всеми четырьмя колесами, длина тормозного пути равна L_3, то для указанного случая торможения общая работа сил трения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$ определяется выражением вида … (Считать, что коэффициент трения колес о дорогу равен μ).



a) $A_3 = -\mu\, mg\, L_3$,

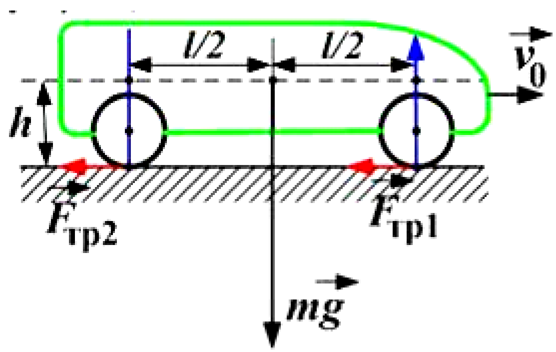
b) $A_3 = -1/2\, \mu\, mg\, L_3$,

c) $A_3 = -1/4\ \mu\ mg\ L_3$,
d) $A_3 = -2\ \mu\ mg\ L_3$.

Задание №4 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующие задания (№1, №2, №3).

Если ответ на задания №1, №2 и №3 *неправильные, то ответ на задание* №4 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*



Задание № 4. Центр масс спортивного автомобиля массой m находится на равных расстояниях $l/2$ от осей передних и задних колес и расположен на высоте h относительно полотна дороги (см. рисунок). Если при торможении, только передними колесами, длина тормозного пути равна L_1, если только задними – L_2, то длину тормозного пути L_3 в том случае, когда колодками одновременно зажимают передние и задние колеса, можно определить выражением вида … (Считать, что начальная скорость автомобиля υ_0 одинакова для всех случаев и коэффициент трения колес о дорогу равен μ).

a) $L_3 = \dfrac{L_1 + L_2}{2}$;

b) $L_3 = L_1 + L_2$;

c) $L_3 = \dfrac{L_1 + L_2}{4}$;

d) $L_3 = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$.

Задания №5, №6, №7, №8 *являются составными частями одного общего II задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен* 4.

Задание №5 *оценивается в 1 балл.*

Задание №5. Температура электрочайника при потребляемой им мощности P в режиме «Функция поддержания температуры» перестает увеличиваться, достигнув установившегося значения t_f , когда энергия, потребляемая из сети, целиком передается в окружающую среду. Если коэффициент теплоотдачи через поверхность выключенного из сети нагретого чайника равен k, а температура окружающей среды равна t_0, то при охлаждении чайника с горячей водой массой m и температурой t изменение температуры dt за бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ описывается соотношением … (Считать, что теплоемкость пустого чайника и удельная теплоемкость воды соответственно равны C_0 и c).

а) $(cm + C_0)\, dt = -k(t - t_0)\, d\tau$

б) $(cm + C_0)\, d\tau = -k(t - t_0)\, dt$

в) $(cm + C_0)\, d\tau = k(t - t_0)\, dt$

г) $(cm + C_0)\, dt = k(t - t_0)\, d\tau$.

Задание №6 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№5).

Если ответ на задание №5 *неправильный, то ответ на задание* №6 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание №6. Температура электрочайника при потребляемой им мощности P в режиме «Функция поддержания температуры» перестает увеличиваться, достигнув установившегося значения t_f , когда энергия, потребляемая из сети, целиком передается в окружающую среду. Если коэффициент теплоотдачи через поверхность выключенного из сети нагретого чайника равен k, а температура окружающей среды равна t_0, то скорость изменения температуры B выключенного из сети нагретого чайника с водой массой m в начальный момент $\tau = 0$ определяется равенством … (Считать, что теплоемкость пустого чайника и удельная теплоемкость воды соответственно равны C_0 и c).

a) $B = -\dfrac{k\left(t_f - t_0\right)}{cm + C_0}$;

b) $B = \dfrac{k\left(t_f - t_0\right)}{cm + C_0}$;

c) $B = -\dfrac{cm + C_0}{k\left(t_f - t_0\right)}$;

d) $B = \dfrac{cm + C_0}{k\left(t_f - t_0\right)}$.

Задание №7 оценивается в 1 балл.

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№5).

Если ответ на задание №5 *неправильный, то ответ на задание* №7 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание №7. Температура электрочайника при потребляемой им мощности P в режиме «Функция поддержания температуры» перестает увеличиваться, достигнув установившегося значения t_f , когда энергия, потребляемая из сети, целиком передается в окружающую среду. Если коэффициент теплоотдачи через поверхность выключенного из сети нагретого чайника равен k, а температура окружающей среды равна t_0, то зависимость температуры t чайника с горячей водой массой m от времени τ при охлаждении после отключения от сети определяется выражением … (Считать, что теплоемкость пустого чайника и удельная теплоемкость воды соответственно равны C_0 и c).

a) $t = t_0 + \left(t_f - t_0\right)\exp\left(-\dfrac{k\tau}{cm + C_0}\right)$;

b) $t = t_0 - \left(t_f - t_0\right)\exp\left(\dfrac{k\tau}{cm + C_0}\right)$;

c) $t = t_0 + \left(t_f - t_0\right)\exp\left(\dfrac{k\tau}{cm + C_0}\right)$;

d) $t = t_0 - \left(t_f - t_0\right)\exp\left(-\dfrac{k\tau}{cm + C_0}\right)$.

Задание №8 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующие задания (№6 и №7).

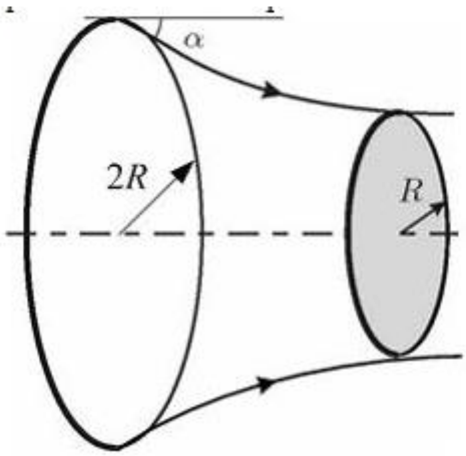
Если ответы на задания №6 и №7 *неправильные, то ответ на задание №8 не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание №8. Температура электрочайника при потребляемой им мощности P в режиме «Функция поддержания температуры» перестает увеличиваться, достигнув установившегося значения $t_f = 80^0C$, когда энергия, потребляемая из сети, целиком передается в окружающую среду. Если скорость уменьшения температуры выключенного из сети нагретого чайника с водой в начальный момент $\tau = 0$ равна $B = -0{,}080$ К/с, а температура окружающей среды равна $t_0 = 20^0C$, то характерное время его охлаждения (за время τ_0 разность температур нагретого чайника с водой и окружающей среды уменьшается в $e = 2{,}7$ раз) равно … (*Ответ выразите в секундах, округлите до целого числа*).

Задания №9, №10, №11, №12 *являются составными частями одного общего III задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен* 4.

Задание №9 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание №9. Электрическое поле создано равномерно заряженным с линейной плотностью τ тонким кольцом радиуса 2*R*. На оси кольца расположен незаряженный тонкий диск радиуса *R*. Если силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45^0$ к его оси, касаются края диска, E_n – проекция вектора напряженности ***E*** электрического поля заряженного кольца на нормаль ***n*** к поверхности



элементарного участка диска площадью *dS*, то для потока этого вектора через поверхность диска площадью $S = \pi R^2$ справедливо выражение вида …

a) $\Phi_E = \int\limits_S E_n dS, \quad где \quad E_n = E\cos 45°$

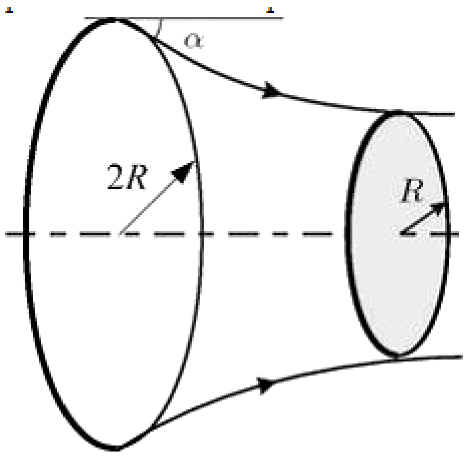
b) $\Phi_E = \int\limits_S E_n dS,$

c) $\Phi_E = \pi R^2 E\cos 45°,$

d) $\Phi_E = \pi R^2 E_n.$

Задание №10 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание №10. Электрическое поле создано равномерно заряженным с линейной плотностью τ тонким кольцом радиуса 2*R*. На оси кольца расположен незаряженный тонкий диск радиуса *R*. Если силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45^0$ к его оси, касаются края диска, то поток Φ^* вектора напряженности электрического поля заряженного кольца через произвольное параллельное диску сечение трубки,



ограниченной этими силовыми линиями, равен …

a) $\Phi^* = \dfrac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}$;

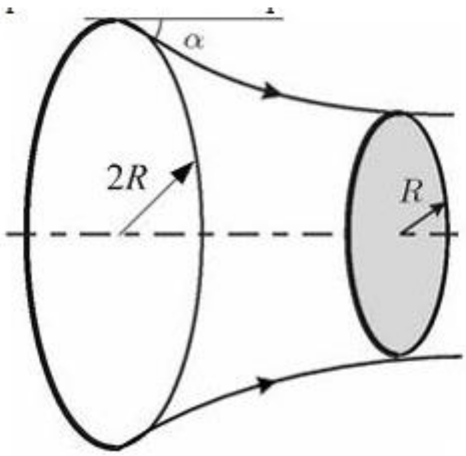
b) $\Phi^* = \dfrac{\pi R\tau}{4\varepsilon_0}$;

c) $\Phi^* = \dfrac{\pi R\tau}{\varepsilon_0}$;

d) $\Phi^* = \dfrac{4\pi R\tau}{\varepsilon_0}$.

Задание 11 *оценивается в* 1 *балл.*
При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующие задания (№9 и №10).
Если ответы на задания №9 и №10 *неправильные, то ответ на задание* №11 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание №11. Электрическое поле создано равномерно заряженным с линейной плотностью τ тонким кольцом радиуса $2R$. На оси кольца расположен незаряженный тонкий диск радиуса R. Если силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45^0$ к его оси, касаются края диска, то поток вектора напряженности Φ_E электрического поля заряженного кольца через поверхность диска равен …



a) $\Phi_E = \dfrac{4\pi R\tau}{\varepsilon_0}$;

b) $\Phi_E = \dfrac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}$;

c) $\Phi_E = \dfrac{\pi R\tau}{4\varepsilon_0}$;

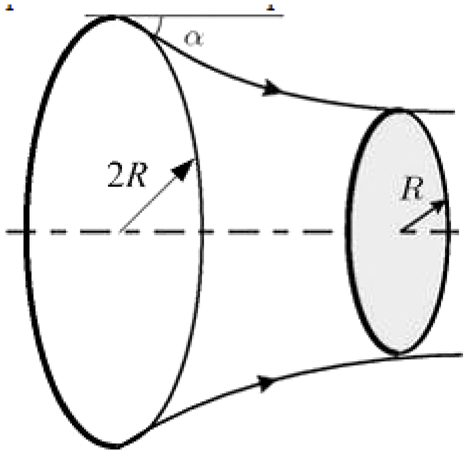
d) $\Phi_E = \dfrac{\pi R\tau}{\varepsilon_0}$.

Задание 12 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующие задание (№11).

Если ответ на задание №11 *неправильный, то ответ на задание* №12 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание №12. Электрическое поле создано равномерно заряженным с линейной плотностью τ тонким кольцом радиуса $2R$. На оси кольца расположен незаряженный тонкий диск радиуса R. Если силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45^0$ к его оси, касаются края диска, то сила взаимодействия заряженных кольца и диска определяется выражением вида …



a) $F = \dfrac{q\tau}{2R\varepsilon_0}$;

b) $F = \dfrac{4q\tau}{R\varepsilon_0}$;

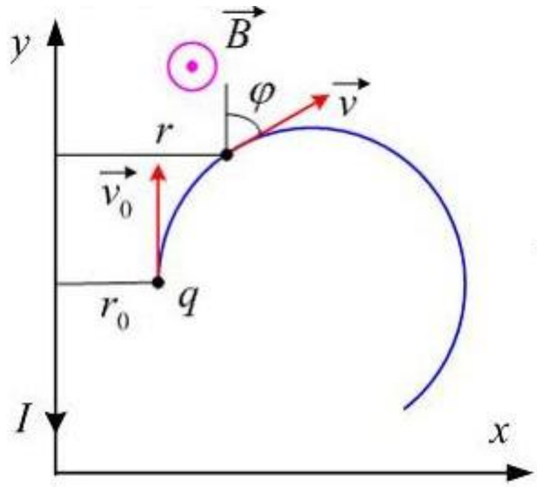
c) $F = \dfrac{q\tau}{R\varepsilon_0}$;

d) $F = \dfrac{q\tau}{4R\varepsilon_0}$.

Задания №13, №14, №15, №16 *являются составными частями одного общего IV задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен* 4.

Задание №13 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание №13. Вблизи длинного прямолинейного провода, по которому течет ток I, поместили частицу с зарядом $q > 0$ и массой m на расстоянии r_0 от провода и сообщили ей скорость υ_0, направленную против тока (см. рис.). Если μ_0 – магнитная постоянная, r – расстояние частицы от оси провода в процессе ее движения, φ - угол между направлением вектора ее скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ и осью $У$, то уравнение движения данной частицы в проекциях на ось $У$ записывается в виде …



a) $m\frac{d^2y}{dt^2} = -q\frac{dr}{dt}\frac{\mu_0 I}{2\pi r};$

b) $m\frac{d^2y}{dt^2} = q\frac{dr}{dt}\frac{\mu_0 I}{2\pi r};$

c) $m\frac{d^2y}{dt^2} = -q\upsilon\frac{\mu_0 I}{2\pi r};$

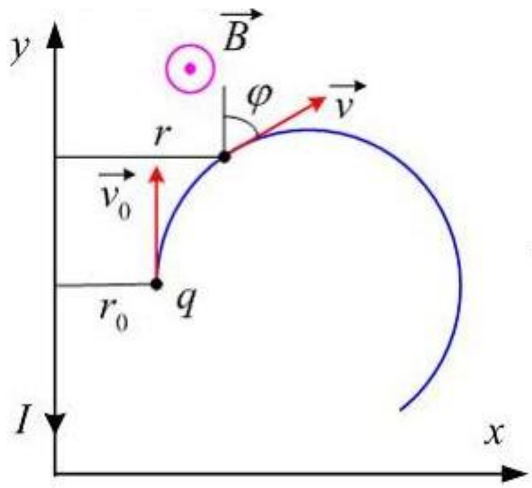
d) $m\frac{d^2y}{dt^2} = q\upsilon\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sin\varphi.$

Задание №14 оценивается в 1 балл.

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№13).

Если ответ на задание №13 неправильный, то ответ на задание №14 не учитывается, даже если он «угадан» верно.

Задание №14. Вблизи длинного прямолинейного провода, по которому течет ток I, поместили частицу с зарядом $q > 0$ и массой m на расстоянии r_0 от провода и сообщили ей скорость υ_0, направленную против тока (см. рис.). Если μ_0 – магнитная постоянная, r – расстояние частицы от оси провода в процессе ее движения, φ - угол между направлением вектора ее скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ и осью $У$, то выражение для зависимости этого расстояния $r(\varphi)$ от указанного угла φ имеет вид …



a) $r = r_0 \exp\left[2\pi \dfrac{m\upsilon_0}{\mu_0 qI}(1-\cos\varphi)\right]$;

b) $r = r_0 \exp\left[\dfrac{m\upsilon_0}{\mu_0 qI}(1+\cos\varphi)\right]$;

c) $r = r_0 \exp\left[2\dfrac{m\upsilon_0}{\mu_0 qI}(1-\cos\varphi)\right]$;

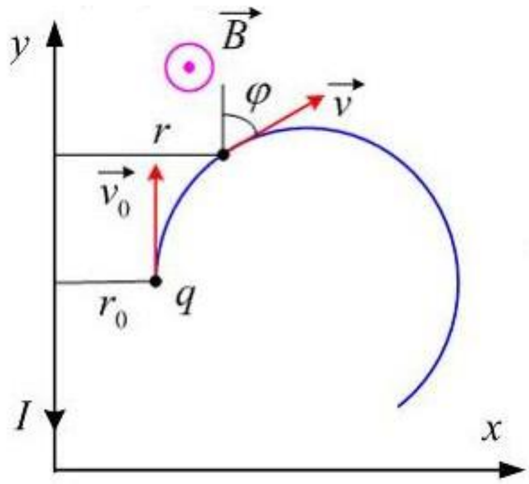
d) $r = r_0 \exp\left[\pi \dfrac{m\upsilon_0}{\mu_0 qI}(1+\cos\varphi)\right]$.

Задание №15 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№14).

Если ответ на задание №14 *неправильный, то ответ на задание* №15 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание №15. Вблизи длинного прямолинейного провода, по которому течет ток I, поместили частицу с зарядом $q > 0$ и массой m на расстоянии r_0 от провода и сообщили ей скорость υ_0, направленную против тока (см. рис.). Если μ_0 – магнитная постоянная, r – расстояние частицы от оси провода в процессе ее движения, φ - угол между направлением вектора ее скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ и осью $У$, то расстояние R, на котором касательная к траектории движения становится перпендикулярной к проводу равно …



a) $R = r_0 \exp\left[\dfrac{2\pi m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]$;

b) $R = r_0 \exp\left[\dfrac{\pi m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]$;

c) $R = r_0 \exp\left[\dfrac{m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]$;

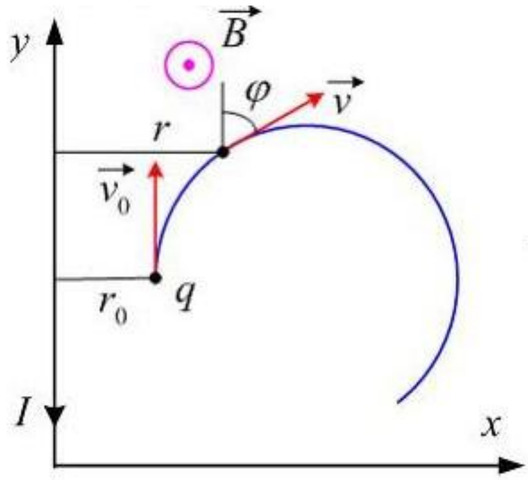
d) $R = r_0 \exp\left[\dfrac{2m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]$.

Задание №16 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№14).

Если ответ на задание №14 *неправильный, то ответ на задание* №16 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание №16. Вблизи длинного прямолинейного провода, по которому течет ток I, поместили частицу с зарядом $q > 0$ и массой m на расстоянии r_0 от провода и сообщили ей скорость υ_0, направленную против тока (см. рис.). Если r – расстояние частицы от оси провода в процессе ее движения, φ - угол между направлением вектора ее скорости υ и осью Y, то расстояние минимальное r_{min} и максимальное r_{max} расстояние от провода в процессе движения соответственно равны …



a) $r_{min} = r_0$ и $r_{max} = r_0 \exp\left[\dfrac{4\pi m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]$;

b) $r_{min} = r_0$ и $r_{max} = r_0 \exp\left[\dfrac{2\pi m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]$;

c) $r_{min} = r_0$ и $r_{max} = r_0 \exp\left[\dfrac{4m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]$;

d) $r_{min} = r_0$ и $r_{max} = r_0 \exp\left[\dfrac{2m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]$.

Задания №17, №18, №19, №20 *являются составными частями одного общего V задания. Баллы заданий складываются, общий балл равен* 4.

Задание №17 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание №17. Фотонный газ, моделирующий в корпускулярной теории тепловое излучение, температура которого T, находится в объеме V. Величину этого объема резко увеличивают на $\Delta V << V$, совершая необратимый адиабатический процесс. Если считать, что фотонный газ не совершает при рассматриваемом процессе работы, то изменение температуры ΔT_e равно …

(Использовать выражение для внутренней энергии $U = 3\alpha T^4 V$ фотонного газа, где $\alpha = \dfrac{4\sigma}{3c} = const$, σ - постоянная Стефана-Больцмана, а c – скорость света в вакууме.)

a) $\Delta T_e = -\dfrac{T}{3V}\Delta V$;

b) $\Delta T_e = -\dfrac{T}{2V}\Delta V$;

c) $\Delta T_e = -\dfrac{T}{V}\Delta V$;

d) $\Delta T_e = -\dfrac{T}{4V}\Delta V$.

Задание №18 *оценивается в* 1 *балл.*

Задание №18. Фотонный газ, моделирующий в корпускулярной теории тепловое излучение, температура которого T, находится в объеме V. Если уравнение состояния фотонного газа имеет вид: $p = \alpha T^4$, то его энтропия определяется выражением …

(Использовать выражение для внутренней энергии $U = 3\alpha T^4 V$ фотонного газа, где $\alpha = \dfrac{4\sigma}{3c} = const$, σ - постоянная Стефана-Больцмана, а c – скорость света в вакууме.)

a) $S = \dfrac{16\sigma}{3c}T^3 V$;

b) $S = \alpha T^3 V$;

c) $S = \dfrac{4\sigma}{3c}T^3 V$;

d) $= 4\alpha T^3 V$.

Задание №19 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующее задание (№18).

Если ответ на задание №18 *неправильный, то ответ на задание* №19 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание №19. Фотонный газ, моделирующий в корпускулярной теории тепловое излучение, температура которого T, находится в объеме V. Если величину этого объема резко увеличивают на $\Delta V << V$, совершая обратимый адиабатический процесс, то изменение его температуры ΔT_0 равно …

a) $\Delta T_0 = -\dfrac{T}{V}\Delta V$;

b) $\Delta T_0 = -\dfrac{T}{2V}\Delta V$;

c) $\Delta T_0 = -\dfrac{T}{4V}\Delta V$;

d) $\Delta T_0 = -\dfrac{T}{3V}\Delta V$.

Задание №20 *оценивается в* 1 *балл.*

При решении этого задания учитывайте ответ на предшествующие задания (№17 и №19).

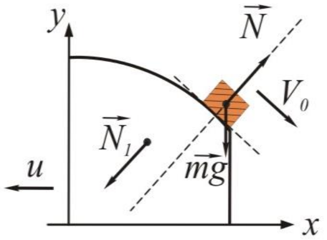
Если ответы на задания №17 и №19 *неправильные, то ответ на задание* №20 *не учитывается, даже если он «угадан» верно.*

Задание №20. Если фотонный газ, моделирующий в корпускулярной теории тепловое излучение, температура которого T, и находящийся в объеме V, адиабатически расширяют на $\Delta V << V$, то отношение $\Delta T_e/\Delta T_0$, где ΔT_e и ΔT_0 – изменения температуры фотонного газа в случаях необратимого и обратимого адиабатического расширения соответственно, равно … *Ответ выразить в* $100 \cdot \Delta T_e/\Delta T_0$ *и округлите до целого числа*. (Считать, что при протекании необратимого процесса фотонный газ не совершает работы.)

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава 1. Механика

1.1. (N_1, N) – внутренние силы системы $\Rightarrow$



$$(M+m)\vec{a}_c = m\vec{g}$$

$$\left.\begin{aligned} x: (M+m)a_{c_x} &= -Ma_{Mx} + ma_x = 0 \\ y: (M+m)a_{c_y} &= -ma_y = -mg \end{aligned}\right\}$$

$$(M+m)\upsilon_{C_x} = -Mu + m\upsilon_x = const = 0$$

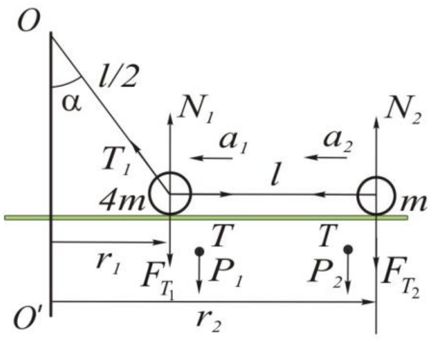
$$\upsilon_x = \frac{M}{m}u \rightarrow \upsilon_x' - u = \frac{M}{m}u \rightarrow \upsilon_x' = \frac{M+m}{m}u = \upsilon_0 \sin\gamma$$

$$\upsilon_0 = \frac{M+m}{m\sin\gamma}u, \upsilon_y = \upsilon_0\cos\gamma \rightarrow \upsilon_y = \left(\frac{M+m}{m}\right)u\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + 2gH = \left(\frac{M}{m}\right)^2 u^2 + \left(\frac{M+m}{m}\right)^2 u^2 ctg^2\gamma + 2gH$$

$$\upsilon = \sqrt{\left[\left(\frac{M}{m}\right)^2 + \left(\frac{M+m}{m}\right)^2 ctg^2\gamma\right]u^2 + 2gH}\,.$$

1.2.



$$r_1 = \frac{l}{2}\sin\alpha$$

$$r_2 = r_1 + l$$

$$|P_1| = |N_1| = 2|P_2|$$

$$|P_2| = |N_2|$$

$$\begin{cases} N_1 + T_1\cos\alpha - 4mg = 0 \\ N_2 - mg = 0 \end{cases} \rightarrow N_2 = mg \rightarrow$$

$$N_1 = 2mg$$

$$\begin{cases} T_1 \sin\alpha - T = 4m\omega^2 r_1 \\ T = m\omega^2 r_2 \end{cases}$$

$$2mg + T_1\cos\alpha = 4mg$$

$$T_1\cos\alpha = 2mg \to \quad \frac{2mg}{\cos\alpha}\sin\alpha - T = 4m\omega^2 r_1 \to$$

$$2mg\,tg\alpha - m\omega^2\left(r_1 + l\right) = 4m\omega^2 r_1 \to$$

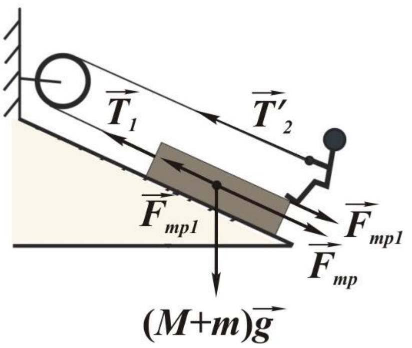
$$2mg\ tg\alpha = m\omega^2\left(5r_1 + l\right) = m\omega^2 l\left(\frac{5}{2}\sin\alpha + 1\right) \to$$

$$m\omega^2 l = \frac{2mg}{1 + \frac{5}{2}\sin\alpha}tg\alpha \to$$

$$T = m\omega^2 r_2 = m\omega^2\left(\frac{l}{2}\sin\alpha + l\right) = m\omega^2 l\left(\frac{1}{2}\sin\alpha + 1\right) = \frac{2mg}{1 + \frac{5}{2}\sin\alpha}\left(\frac{1}{2}\sin\alpha + 1\right)tg\alpha =$$

$$= \frac{tg\alpha\left(\sin\alpha + 2\right)}{1 + \frac{5}{2}\sin\alpha}mg.$$

1.3. Для доски:



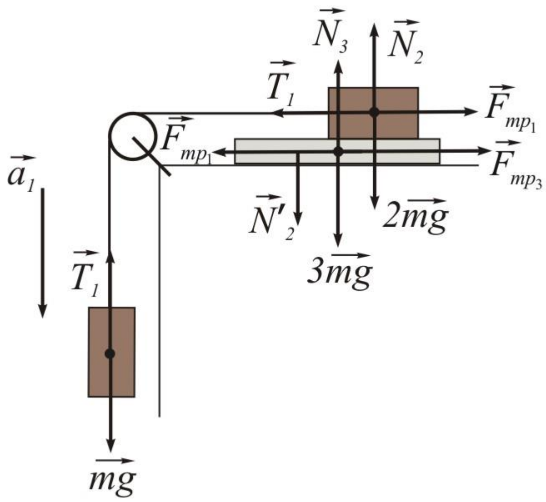
$$T + F_{тр_1} = F_{тр} + \left(m + M\right)\ g\ \ \sin\alpha$$

Для человека:

$$T = F_{тр_1}$$

$$2T = \mu\left(m + M\right)\ g\ \ \cos\alpha + \left(m + M\right)g\ \ \sin\alpha$$

$$T = \frac{m + M}{2}g\left(\mu\ \cos\alpha + \sin\alpha\right).$$



1.4.

Для бруска и тела:

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma_1 \\ T_1 - F_{тр_1} = 2ma_1 \end{cases}$$

$$F_{тр_1} = \mu_1 2mg$$

$$mg - 2mg\mu_1 = 3ma_1$$

$$g - 2\mu_1 g = 3a_1$$

$$a_1 = \frac{(1-2\mu_1)}{3} g$$

Для доски:

$$F_{тр_1} - F_{тр_3} = 3ma_2$$

$$a_2 = \frac{F_{тр_1} - F_{тр_3}}{3m}$$

$$F_{тр_1} = 2\mu_1 mg$$

$$F_{тр_3} = 5\mu_2 mg$$

$$a_2 = \frac{(2\mu_1 - 5\mu_2)g}{3} \Rightarrow$$

если $2\mu_1 \geq 5\mu_2$ -

доска движется только при этом условии

Ускорение бруска относительно доски:

$$a = a_1 - a_2 = \frac{(1-2\mu_1)-(2\mu_1 - 5\mu_2)}{3} g = \frac{1 - 4\mu_1 + 5\mu_2}{3} g.$$

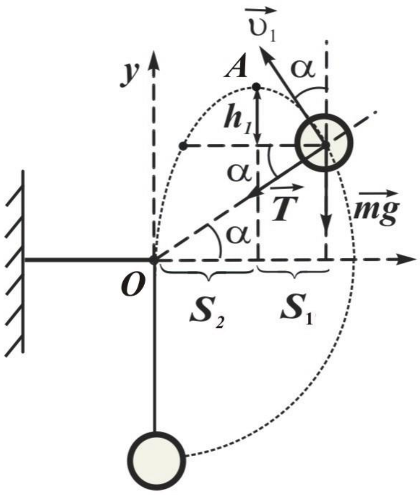
Путь, пройденный телом:

$$S = \frac{at^2}{2};$$

$$t=\sqrt{\frac{2S}{a}}=\sqrt{\frac{6S}{(1-4\mu_1+5\mu_2)}g}$$

1.5.

В какой-то момент времени шарик начнет двигаться по параболе и по-



падет в точку подвеса

$$\left.\begin{aligned}\upsilon_1\cos\alpha=gt_1\\ \upsilon_1 t_1\sin\alpha=S_1\end{aligned}\right\}\quad S_1=\frac{\upsilon_1^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

$$h_1=\frac{\upsilon_1^2\cos^2\alpha}{2g}$$ t_1-время движения шарика до т.A

$$\left.\begin{aligned}h_1+l\sin\alpha=\frac{gt_2^2}{2}\\ t_2\upsilon_1\sin\alpha=S_2\end{aligned}\right\}\quad S_2=\sqrt{\frac{2(h_1+l\sin\alpha)}{g}}\upsilon_1\sin\alpha$$

t_2-время движения от т.A до O

<u>По второму закону Ньютона:</u>

$$mg\sin\alpha+T=\frac{m\upsilon_1^2}{l},$$

если T=0 тогда тело движется по параболе $\Rightarrow$ $\upsilon_1^2=gl\sin\alpha$

$$\left.\begin{aligned} S_1 + S_2 &= l\cos\alpha \\ \upsilon_1^2 &= g\,l\sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Определим чему равен $\sin\alpha$

$$h_1 = \frac{\upsilon_1^2 \cos^2\alpha}{2g} = \frac{gl\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2g} = \frac{l\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2}$$

$$S_1 = \frac{\upsilon_1^2 \sin\alpha\ \cos\alpha}{g} = \frac{gl\sin^2\alpha\ \cos\alpha}{g} = l\sin^2\alpha\ \cos\alpha$$

$$S_2 = \upsilon_1 \sin\alpha\sqrt{\frac{2(h_1 + l\sin\alpha)}{g}} = \sqrt{\frac{2\upsilon_1^2\sin^2\alpha}{g}\left(\frac{l\sin\alpha\cos^2\alpha}{2} + l\sin\alpha\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2gl\sin^3\alpha}{2g}(\cos^2\alpha + 2)l\sin\alpha} = l\sin^2\alpha\sqrt{\cos^2\alpha + 2}$$

$S_1 + S_2 = l\cos\alpha$

$$l\cos\alpha = l\sin^2\alpha\sqrt{\cos^2\alpha + 2} + l\sin^2\alpha\cos\alpha =$$
$$= l\sin^2\alpha\left(\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 2}\right)$$

$$\cos\alpha = (1 - \cos^2\alpha)\left(\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + 2}\right) \qquad \cos\alpha = x$$

$$x = (1 - x^2)\left(x + \sqrt{2 + x^2}\right)$$
$$x(1 - x^2) + (1 - x^2)\sqrt{2 + x^2} = x$$
$$x - x(1 - x^2) = (1 - x^2)\sqrt{2 + x^2}$$
$$\left[x - x(1 - x^2)\right]^2 = (1 - x^2)^2(2 + x^2)$$
$$x^2 - 2x^2(1 - x^2) + x^2(1 - x^2)^2 = (1 - x^2)^2(2 + x^2)$$
$$x^2 - 2x^2(1 - x^2) + x^2(1 - x^2)^2 = 2(1 - x^2)^2 + x^2(1 - x^2)^2$$
$$x^2 - 2x^2 + 2x^4 = 2 - 4x^2 + 2x^4$$

$$3x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{3} \qquad x = \cos\alpha \qquad \cos^2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

По закону сохранения энергии:

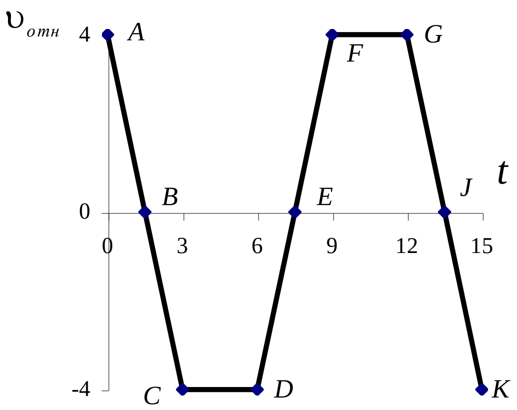
$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = mgl + mgl\sin\alpha + \frac{m\upsilon_1^2}{2}$$

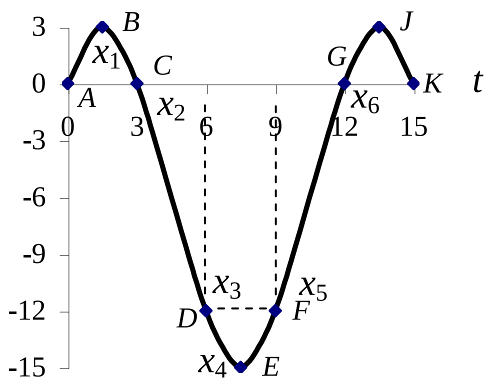
$$\upsilon_0^2 = 2gl\left(1 + \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

$$\upsilon_0^2 = 2gl\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \upsilon_0 = \sqrt{2gl\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

1.6.

Построим график относительной скорости





$$x_1 = 0 + \upsilon t - \frac{at^2}{2} = 3$$

$$x_2 = 3 - \frac{at^2}{2} = 0$$

$$x_3 = -4 \cdot 3 = -12$$

$$x_4 = -12 - \upsilon t + \frac{at^2}{2} = -12 - 4 \cdot 1{,}5 + 3 = -15$$

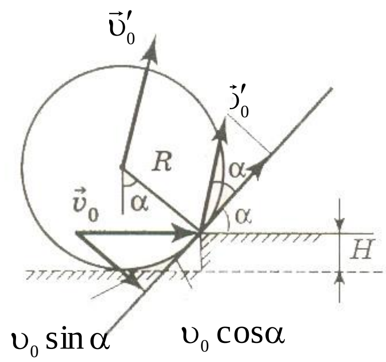
$$x_5 = -12$$

$$x_6 = 0$$

max смещение $x_{\max} = 15$

1.7.

Дано:	**Решение**:
R	Как видно из рисунка
$H = R/5$	$\cos\alpha = \dfrac{R-H}{R} = \dfrac{4}{5}, \sin\alpha = \dfrac{3}{5}.$
$\upsilon - ?$	



Скорость центра масс после удара сохраняется неизменной по модулю $(\upsilon_0' = \upsilon_0)$, и направлена она под углом 2α к горизонту. После удара шар должен пролететь в горизонтальном направлении расстояние, не меньше, чем $R\sin\alpha$, что бы «запрыгнуть» на ступеньку. Горизонтальная проекция скорости сразу после удара будет равна $\upsilon_0 \cos 2\alpha$, а вертикальная $\upsilon_0 \sin 2\alpha$. Минимальное время полета шара равно $t_0 = \dfrac{R\sin\alpha}{\upsilon_0 \cos 2\alpha}$.

Высота ступеньки H должна удовлетворять условию: $H \le (\upsilon_0 \sin 2\alpha)t_0 - \dfrac{gt_0^2}{2}$, откуда после алгебраических преобразований получим $\upsilon^2 \ge \dfrac{1125}{914} gR$, $\upsilon \ge 1{,}112\sqrt{gR}$. (Здесь учтено, что $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25}$, $\sin 2\alpha = \dfrac{24}{25}$).

1.8.

$L = \upsilon_{OX} \cdot t_1$

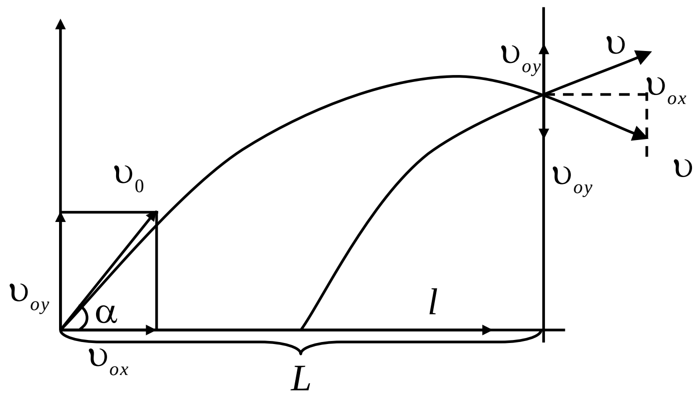
$l = \upsilon_{OX} \cdot t_2$

$\upsilon_{y_1} = \upsilon_{oy} - gt_1$

$\upsilon_{y_2} = -\upsilon_{oy} + gt_2$

$\upsilon_{y_1} = \upsilon_{y_2}$

$\upsilon_{oy} - gt_1 = -\upsilon_{oy} + gt_2$



$t_1 = \dfrac{L}{\upsilon_{ox}} \qquad \upsilon_{oy} - \dfrac{g \cdot L}{\upsilon_{ox}} = -\upsilon_{oy} + \dfrac{gl}{\upsilon_{ox}}$

$t_2 = \dfrac{l}{\upsilon_{ox}} \qquad 2\upsilon_{oy} = \dfrac{g(L+l)}{\upsilon_{ox}}$

$\dfrac{\upsilon_{oy}}{\upsilon_{ox}} = tg\alpha = 1$

$\upsilon_{ox} = \upsilon_{oy} \qquad \upsilon_{oy} = \sqrt{\dfrac{g(L+l)}{2}}$

$\upsilon_o = \sqrt{\upsilon_{ox}{}^2 + \upsilon_{oy}{}^2} = \sqrt{2}\upsilon_{oy} \qquad \boxed{\upsilon_o = \sqrt{g(l+L)}}$

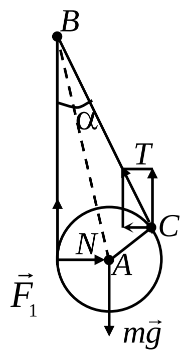
1.9.

$T + F_{тр}\cos\alpha = mg\cos\alpha + N\sin\alpha$

$F_{тр}\sin\alpha + N\cos\alpha = mg\sin\alpha$

$T\sin\alpha \cdot R \cdot \sin\alpha = F_{тр}R$

$T\sin^2\alpha = F_{тр}$



$T = \dfrac{F_{тр}}{\sin^2\alpha} = \dfrac{kN}{\sin^2\alpha}$

$\dfrac{kN}{\sin^2\alpha} + kN\cos\alpha = mg\cos\alpha + N\sin\alpha$

$$\left(\frac{k}{\sin^2\alpha}+k\cos\alpha-\sin\alpha\right)=\frac{mg\cos\alpha}{N}$$

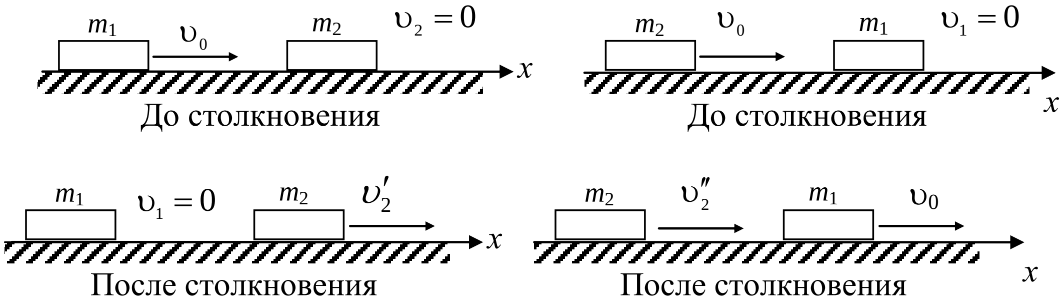
$$(k\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{mg\sin\alpha}{N}$$

$$\frac{k\sin\alpha+\cos\alpha}{\dfrac{k}{\sin^2\alpha}+k\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$k\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{k}{\sin\alpha}+k\cos\alpha\sin\alpha-\sin^2\alpha$$

$$1=\frac{k}{\sin\alpha} \qquad k=\sin\alpha$$

1.10.



Опыт 1. *Опыт 2.*

Из закона сохранения импульса:

$$m_1\upsilon_0=m_2\upsilon_2' \qquad (1)$$

$$m_2\upsilon_0=m_2\upsilon_2''+m_1\upsilon_0 \qquad (2)$$

Следует: $m_2=2m_1$ (3)

Подставим (3) в (1): $m_1\upsilon_0=2m_1\upsilon_2' \quad\Rightarrow\quad \upsilon_2'=\dfrac{\upsilon_0}{2} \quad\Rightarrow\ \upsilon_2''=\dfrac{\upsilon_0}{2}$.

Сравним энергии системы до (E_0) и после удара (E).

Слева: $E_0=\dfrac{m_1\upsilon_0^2}{2}$, $\qquad E=\dfrac{m_2(\upsilon_2')^2}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{m_1\upsilon_0^2}{2}$.

Потери энергии $\varepsilon_1 = E_0 - E = \frac{1}{2}\frac{m_1\upsilon_0^2}{2} = \frac{1}{2}E_0$.

Удар неупругий.

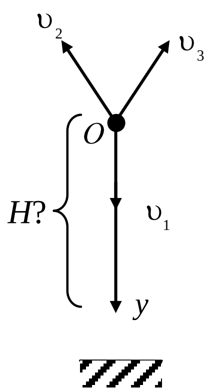
Справа: $E_0 = \frac{2m_1\upsilon_0^2}{2}$, $\quad E = \frac{2}{4}\frac{m_1\upsilon_0^2}{2} + \frac{m_1\upsilon_0^2}{2} = \frac{3}{2}\frac{m_1\upsilon_0^2}{2}$.

Потери энергии $\varepsilon_2 = E_0 - E = \frac{1}{2}\frac{m_1\upsilon_0^2}{2} = \frac{1}{2}E_0$.

Удар неупругий.

1.11.

Дано:	$m(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3) = 0$
$m_1 = m_2 = m_3 = m$	$oy: \upsilon_1 - \upsilon_{2y} - \upsilon_{3y} = 0$
t_1; $(t_2 > t_1)$	т.к. $t_2 = t_3$, то $\upsilon_{2y} = \upsilon_{3y}$
	$\upsilon_1 - 2\upsilon_{2y} = 0$
H–?	$\upsilon_{2y} = \frac{\upsilon_1}{2}$



$$-\upsilon_{2y}t_2 + \frac{gt_2^2}{2} = H \rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{-\upsilon_1}{2}t_2 + \frac{gt_2^2}{2} = H \quad (1) \\ \upsilon_1 t_1 + \frac{gt_1^2}{2} = H \rightarrow \upsilon_1 = \frac{H}{t_1} - \frac{gt_1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

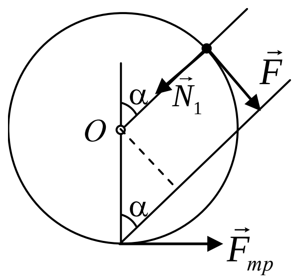
Подставим (2) в (1):

$$\frac{-Ht_2}{2t_1} + \frac{gt_1t_2}{4} + \frac{gt_2^2}{2} = H \rightarrow H\left(1 + \frac{t_2}{2t_1}\right) = \frac{gt_2}{2}\left(\frac{t_1}{2} + t_2\right)$$

$$H\left(\frac{2t_1 + t_2}{t_1}\right) = \frac{gt_2(t_1 + 2t_2)}{2}$$

$$H = \frac{gt_1(t_1 + 2t_2)t_2}{2(2t_1 + t_2)}.$$

1.12.



Уравнение для тела

оу) $N_1 - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha$

ох) $mg\sin\alpha - F = ma\cos\alpha$

$$N_1 = ma\sin\alpha + mg\cos\alpha$$

$$F = mg\sin\alpha - ma\cos\alpha$$

относительно т.О

уравнение для цилиндра

$$\sum M_i = J\varepsilon$$

$$J = 2MR^2 \qquad \varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$M_i = FR(1 + \cos\alpha) - N_1 R\sin\alpha$$

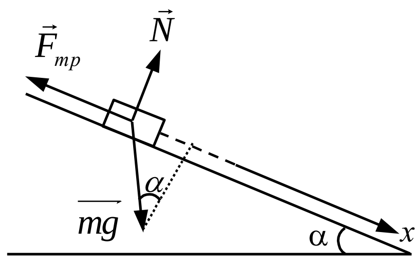
$$2Ma = +mg\sin\alpha - ma\cos\alpha + mg\sin\alpha \cdot \cos\alpha -$$

$$- ma\cos^2\alpha - ma\sin^2\alpha - mg\sin\alpha\cos\alpha$$

$$2Ma = mg\sin\alpha - ma\cos\alpha - ma\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)$$

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{2M + m(1 + \cos\alpha)}.$$

1.13.



Работа сил равна изменению кинетической энергии

$$F_{тр} = kN = a \cdot x \cdot N = axmg\cos\alpha$$

$$A = \Delta\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

$$A = -\int F_{тр}dx + mg\sin\alpha \cdot x$$

$$-amg\cos\alpha\int_0^x xdx + mg\sin\alpha x = mg\left(-\frac{ax^2}{2}\cos\alpha + x\sin\alpha\right) = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

$$\upsilon = \sqrt{2g\left(-\frac{ax^2}{2}\cos\alpha + x\sin\alpha\right)}$$

$$\upsilon'_x = 0 \to -ax\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \to x = \frac{tg\alpha}{a}$$

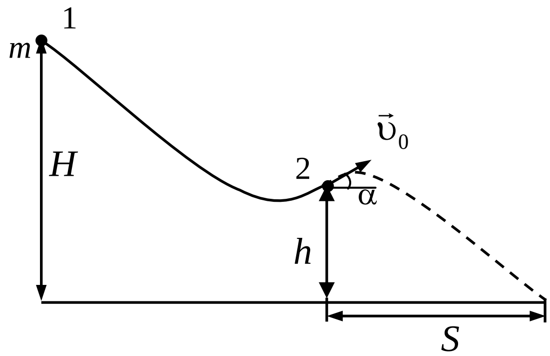
$$\upsilon_{\max} = \sqrt{2g\left(-\frac{a}{2}\frac{tg\alpha^2}{a^2}\cos\alpha + \frac{tg\alpha\sin\alpha}{a}\right)} = \sqrt{2g\left(-\frac{\sin^2\alpha}{2a\cos\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{a\cos\alpha}\right)} =$$

$$= \sqrt{g\frac{\sin^2\alpha}{a\cos\alpha}} = \sin\alpha\sqrt{\frac{g}{a\cos\alpha}}$$

$x_{\max}$, когда $A = 0 \to mg\left(-\frac{ax^2}{2}\cos\alpha + x\sin\alpha\right) = 0$

$$x = \frac{2\sin\alpha}{a\cos\alpha} = \frac{2tg\alpha}{a}$$

1.14.



$$mgH = mgh + \frac{m\upsilon_0^2}{2} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \upsilon_0^2 = 2(H-h)g$$

$$S = (\upsilon_0\cos\alpha)t \qquad (2)$$

$$h = -\upsilon_0(\sin\alpha)t + \frac{gt^2}{2} \qquad (3)$$

$$\upsilon_0^2 = 2g(H-h) \to (4)$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{4\upsilon_0^2} - \frac{h^2}{\upsilon_0^2t^2} + \frac{gh}{\upsilon_0^2}} \to (2)$$

$$S=\sqrt{\upsilon_0^2t^2-\frac{g^2t^4}{4}-h^2+ght^2}=\sqrt{2g\left(H-h\right)t^2-\frac{g^2t^4}{4}-h^2+ght^2}$$

$$=\sqrt{g\left(2H-h\right)t^2-\frac{g^2t^4}{4}-h^2+ght^2}$$

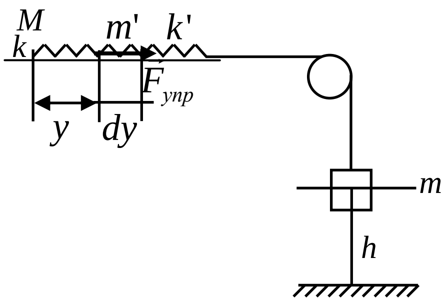
Максимальному значению соответствует равное нулю значение производной от подкоренного выражения

$$S_t'=0\to 2g(2H-h)t-g^2t^3=0$$

отсюда $t^2=\dfrac{2}{g}(2H-h)$

$$S=\sqrt{2(2H-h)^2-\frac{g^2}{4}\frac{4}{g^2}(2H-h)^2-h^2}=\sqrt{(2H-h)^2-h^2}=$$

$$=\sqrt{4H^2-4Hh}=2\sqrt{H\left(H-h\right)}$$



1.15.

$$\begin{cases} F_{упр}=k'dx \\ F_{упр}=m'a \end{cases}$$

$k'=\dfrac{kM}{dm'}$ − жесткость части dm' пружины

$\dfrac{kM}{dm'}dx=m'a$, где $a=\dfrac{mg}{m+M}$

$$\int_0^x dx=\frac{a}{kM}\int_0^m m'dm'$$

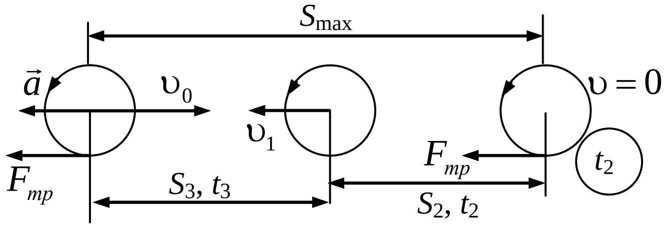
$$x=\frac{a}{k\cancel{M}}\frac{M^{\cancel{2}}}{2}=\frac{mgM}{\left(M+m\right)2k}=\frac{Mmg}{2k\left(M+m\right)}$$

1.16.

$$\upsilon_1 = \frac{\upsilon_0}{4}$$

$$\upsilon_0, \mu$$

t_1, t–?



$$F_{тр} = ma$$

$$a = \frac{F_{тр}}{m} = \mu g \quad \upsilon = 0 = \upsilon_0 - at_1$$

$$\boxed{t_1 = \frac{\upsilon_0}{a} = \frac{\upsilon_0}{\mu g}}; \; S_m = \frac{\upsilon_0^2}{2a} = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu g}.$$

В обратном направлении обруч движется равноускоренно в течении t_2, а затем равномерно.

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= \frac{at_2^2}{2} \\ \upsilon_1 &= at_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} t_2 &= \frac{\upsilon_1}{a} = \frac{\upsilon_1}{\mu g} = \frac{\upsilon_0}{4\mu g} \\ S_2 &= \frac{\mu g}{2}\frac{\upsilon_0^2}{16\mu^2 g^2} = \frac{\upsilon_0^2}{32\mu g} \end{aligned}$$

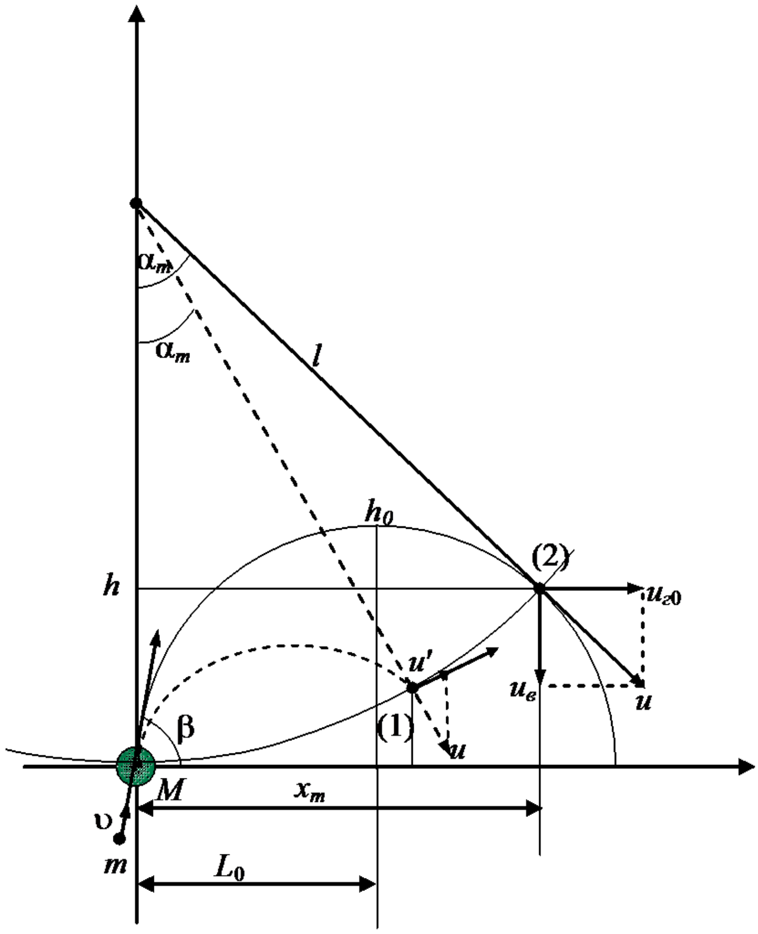
Равномерное движение: $S_3 = S_m - S_2 = \dfrac{\upsilon_0^2}{2\mu g} - \dfrac{\upsilon_0^2}{32\mu g} = \dfrac{15}{32}\dfrac{\upsilon_0^2}{\mu g}$.

Время $t_3 = \dfrac{S_3}{\upsilon_1} = \dfrac{15}{32}\dfrac{\upsilon_0^2}{\mu g}\dfrac{4}{\upsilon_0} = \dfrac{15}{8}\dfrac{\upsilon_0}{\mu g}$

Полное время возврата $t = t_1 + t_2 + t_3 = \dfrac{\upsilon_0^{\backslash 8}}{\mu g} + \dfrac{\upsilon_0^{\backslash 2}}{4\mu g} + \dfrac{15}{8}\dfrac{\upsilon_0}{\mu g} = \dfrac{25}{8}\dfrac{\upsilon_0}{\mu g}$.

$$\boxed{t = \frac{25\upsilon_0}{8\mu g}}.$$

1.17.



β>0 (пуля летит «снизу»)

$$m\upsilon = (M+m)u_0$$

$$\boxed{u_0 = \frac{m}{M+m}\upsilon}$$

$$M_0 = M+m$$

$$\begin{cases} \dfrac{u_в^2}{2g} = h_0 - h \Bigg| = \dfrac{u_{в0}^2}{2g} - h \\ u_в^2 + u_{г0}^2 = u^2 \end{cases}$$

$$u = \sqrt{u_{в0}^2 + u_{r0}^2 - 2gh} = \sqrt{u_0^2 - 2gh}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad u = u\cos(\alpha_m+\beta)\\ (2)\quad u\equiv 0\end{array}\right\rangle \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ *абсолютно неупругий удар* $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_1' = \frac{M_0}{2}\left[u\sin(\alpha_m+\beta)\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2' = \frac{M_0}{2}u^2 = \frac{M_0}{2}\left(u_0^2 - 2gh\right)$$

Энергия в тепло Q_2'

$$\frac{l-h}{\cos\alpha_m} = l \rightarrow \boxed{\sin^2\frac{\alpha_m}{2} = \frac{h}{2l}}\quad [1]$$

$$\left.\begin{array}{l} h_0 - y = k_1(x-L_0)^2 \rightarrow k_1 = \dfrac{h_0}{L_0^2}\\ l - y = k_2 x \rightarrow k_2 = \dfrac{l-h}{x_m}\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} x_m = L_0\left(1\pm\sqrt{1-\dfrac{h}{h_0}}\right)\\ L_0 = \dfrac{u_{г0}u_{в0}}{g}\end{array}\quad \begin{array}{l} u_{в0} = u_0\sin\beta\\ u_{г0} = u_0\cos\beta\end{array}$$

$$\frac{x_m}{l} = \sin\alpha_m \rightarrow l\sin\alpha_m = L_0\left(1+\sqrt{1-\frac{h}{h_0}}\right)\quad [2]$$

$$[1] \text{ и } [2] \Rightarrow 1 - \frac{l}{2L_0}\sin\alpha_m = L_0 tg\frac{\alpha_m}{2}$$

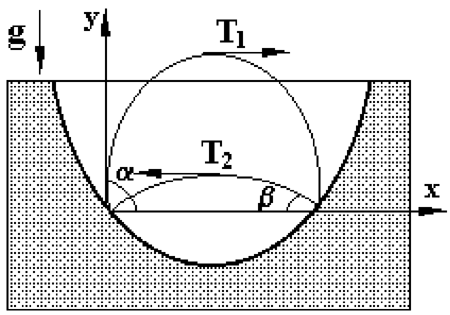
$\beta<0$ (пуля летит «сверху»)

$$\frac{M_0}{2}(u_0\cos\beta)^2 = M_0 gh \Rightarrow \boxed{h = \frac{u_0^2\cos^2\beta}{2g}}$$

$$\sin\frac{\alpha_m}{2} = \frac{u_0\cos\beta}{2\sqrt{gl}}$$

1.18.

Из закона сохранения энергии следует, что скорости шарика при отскоке (слева и справа) одинаковы (υ_0)

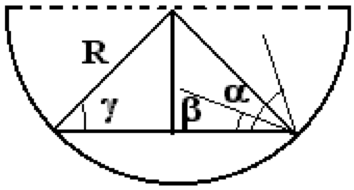


Из уравнений

$y = \upsilon_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}$,

$x = \upsilon_0 \cos\alpha t$

следует, что время полета $t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$;



$$S = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$$

Тогда $2\beta = 180^0 - 2\alpha$, $\beta = 90^0 - \alpha$

$$T_1 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}; \qquad T_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g}.$$

При упругом отскоке угол падения равен углу отражения (относительно нормали). $\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

$$\gamma = \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{90^0}{2} = 45^0$$

$$R = \frac{S}{2\cos\gamma} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{2g\cos 45^0}; \qquad \sin\alpha = \frac{gT_1}{2\upsilon_0}$$

$$\cos\alpha = \frac{gT_2}{2\upsilon_0}; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2g^2T_1T_2}{(2\upsilon_0)^2} = \frac{g^2T_1T_2}{2\upsilon_0^2}$$

$$R = \frac{\upsilon_0^2 g^2 T_1 T_2}{4g\upsilon_0^2 \cos 45^0} = \frac{gT_1T_2}{4\cos 45^0} = \frac{gT_1T_2}{2\sqrt{2}}$$

1.19.

Пусть L – длина произвольного участка реки. С этого участка льдины соберутся в сплошной ледяной слой, длина которого $x = Ln$. При скорости движения границы u это произойдет за время $\tau = \frac{x}{u}$. Тогда

$\upsilon\tau + u\tau = L$, откуда

$$u = \frac{n\upsilon}{1-n} = 0{,}022 \quad \text{м/с,}$$

Сила давления льдин на единицу длины границы затора равна импульсу, передаваемому в единицу времени затору останавливающимися льдинами. За время Δt к единичной длине границы присоединяются льдины общей массы $\Delta m = \rho u h \Delta t$. Тогда можно записать

$F\Delta t = \upsilon \Delta m = \rho u h \upsilon \Delta t$,

Таким образом, сила давления на единицу длины границы затора равна

$F = \dfrac{n\upsilon^2}{1-n}\rho h = 0{,}8$ Н/м.

1.20.

$p_x = \text{const}$ $\qquad m\upsilon_0 = Mu_x; \qquad u_x = \dfrac{m}{M}\upsilon_0$

$$\begin{cases} F_{тр} R\Delta t = I(\omega_0 - \omega_1); & (1) \qquad \omega_1 = \dfrac{\upsilon_1}{R} \qquad (3) \\ F_{тр}\Delta t = M\upsilon_1 - Mu_x; & (2) \qquad I = \dfrac{2}{5}MR^2 \qquad (4) \end{cases}$$

$F_{тр} \ll F_{вз\text{-}ия}$

Подставим в (1) выражения (3) и (4):

$$F_{тр} R\,\Delta t = \frac{2}{5}MR^2\left(\omega_0 - \frac{\upsilon_1}{R}\right)$$

Из (1) и (2) следует:

$$\frac{2}{5}MR\omega_0 - \frac{2}{5}MR\frac{\upsilon_1}{R} = M\upsilon_1 - m\upsilon_0$$

$$\frac{2}{5}MR\omega_0 = \frac{7}{5}M\upsilon_1 - m\upsilon_0$$

$$\omega_0 = \frac{7}{2}\frac{\upsilon_1}{R} - \frac{5}{2}\frac{m\upsilon_0}{MR} \qquad (5)$$

$L = \text{const}$ относительно C ($F_{тр} \ll F_{вз\text{-}ия}$ в момент удара)

$$m\upsilon_0\frac{R}{2}=m\upsilon\frac{\sqrt{3}R}{2}+\frac{2}{5}MR^2\omega_0$$

Отсюда:

$$\frac{2}{5}MR^2\omega_0=\left(m\upsilon_0-m\upsilon\sqrt{3}\right)\frac{R}{2}\qquad\qquad \omega_0=\frac{5m\upsilon_0}{4MR}-\frac{m\upsilon\sqrt{3}\cdot 5}{4MR}\qquad (6)$$

Приравняем (5) и (6):

$$\frac{7}{2}\frac{\upsilon_1}{R}-\frac{5}{2}\frac{m\upsilon_0}{MR}=\frac{5}{4}\frac{m\upsilon_0}{MR}-\frac{5}{4}\frac{\sqrt{3}m\upsilon}{MR}$$

$$\frac{5}{4}\sqrt{3}\frac{m}{M}\upsilon=\frac{5}{4}\frac{m}{M}\upsilon_0-\frac{7}{2}\upsilon_1;$$

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3\upsilon_0-\frac{14}{5}\frac{M}{m}\upsilon_1\right)$$

1.21.

В первом и во втором случаях работа совершается против силы тяготения, но законы, описывающие действие этих сил, различны: $F_1=\frac{4}{3}\pi G\rho m x,\ F_2=GmM/x^2$. Элементарные работы на участках dx составляют $dA_1=F_1dx,\quad dA_2=F_2\,dx$. После интегрирования в соответствующих пределах получаем

$$A_1=\int\limits_{R/2}^{R}\frac{4}{3}\pi G\rho m x\,dx=\frac{3}{8}\frac{GmM}{R};\quad A_2=\int\limits_{R}^{3/2 R}\frac{GmM}{x^2}dx=\frac{GmM}{3R};\qquad .$$

$A_1/A_2=9/8,\quad$ т.е. $A_1\rangle A_2$

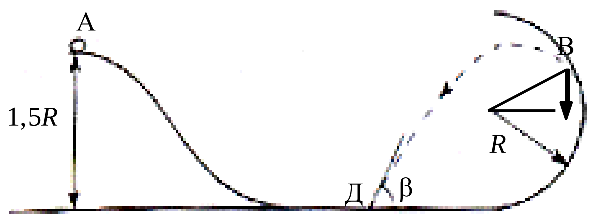
Ответ: $A_1\rangle A_2$

1.29.

$P_x = const$

$M\upsilon_0\cos\alpha - m\upsilon$

$\cos\beta = (M+m)\,u\cos\alpha$.



Отсюда

$$\upsilon_0=\frac{(M+m)u\cos\alpha+m\upsilon\cos\beta}{M\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{6}(M+m)u+\frac{2}{3}m\upsilon}{\frac{5}{6}M}=\frac{5(M+m)u+4m\upsilon}{5M}=$$

$$=\frac{5Mu+5mu}{5M}+\frac{4m\upsilon}{5M}=u+\frac{m}{M}u+\frac{m}{M}\frac{4}{5}\upsilon=u+\frac{m}{M}\left(u+\frac{4}{5}\upsilon\right)$$

1.30.

В точке В (отрыв) $g\sin\alpha=\frac{\upsilon_0^2}{R}\quad\Rightarrow\quad\upsilon_0^2=gR\sin\alpha\qquad(1)$

Закон сохранения энергии (для точки А и В):

$1{,}5gR=g\left(R+R\sin\alpha\right)+\frac{\upsilon_0^2}{2}$ или с учетом (1):

$1{,}5gR=g\left(R+R\sin\alpha\right)+\frac{1}{2}gR\sin\alpha\quad\Rightarrow\quad$ 0,5 = 3/2 sinα, sinα = 1/3.

Подставим в (1) $\upsilon_0^2=\frac{gR}{3}$, $\upsilon_0=\sqrt{\frac{gR}{3}}$.

$$\upsilon_x=\upsilon_0\sin\alpha=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{gR}{3}}\qquad(2)$$

Закон сохранения (для точек А и Д):

$$1{,}5gR=\frac{\upsilon^2}{2}\quad\Rightarrow\quad\upsilon=\sqrt{3gR}\qquad(3)$$

Тогда с учетом (2) и (3) $\cos\beta=\frac{\upsilon_x}{\upsilon}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{gR}{3}\frac{1}{3gR}}=\frac{1}{9}$.

1.31.

II закон Ньютона для системы «доска-брусок»:

OY: $(M+m)g\cos\alpha-N=0$

OX: $(M+m)g\sin\alpha-F_{тр}=(M+m)a$, где $F_{тр}=\mu(M+m)g\cos\alpha$

$(M+m)g\sin\alpha-\mu(M+m)g\cos\alpha=(M+m)a$, отсюда

$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$ (1)

II закон Ньютона для бруска

$mg\sin\alpha - F_{H_2} = ma \quad \Rightarrow \quad F_{H_2} = mg\sin\alpha - ma$

Когда брусок неподвижен $F_{H_2} = mg\sin\alpha$.

Тогда $\dfrac{F_{H_2}}{F_{H_1}} = \dfrac{mg\sin\alpha - ma}{mg\sin\alpha} = 1 - \dfrac{a}{g\sin\alpha} = 0{,}1$.

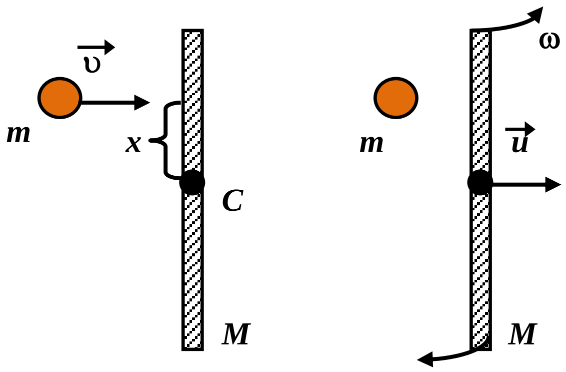
Отсюда $a = 0{,}9g\sin\alpha$ (2).

Приравняем (1) и(2):

$g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 0{,}9g\sin\alpha$,

$\mu\cos\alpha = 0{,}1\sin\alpha$

$\mu = 0{,}1\,tg\alpha = 0{,}17$



до удара после удара

1.41.

$$\begin{cases} E_{к.шар} = E_{к.ст.} \\ L_1 = L_2 \quad p_1 = p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{Mu^2}{2} + \dfrac{1}{12}Ml^2\dfrac{\omega^2}{2} & (1) \\ m\upsilon x = \dfrac{1}{12}Ml^2\omega & (2) \\ m\upsilon = Mu & (3) \end{cases}$$

Из (2) $\dfrac{1}{12}Ml^2\omega^2 = \dfrac{12(m\upsilon x)^2}{Ml^2}$, подставим в (1).

Из (3) $Mu^2 = \dfrac{m^2\upsilon^2}{M}$, подставим в (1).

$$m\upsilon^2 = m^2\frac{\upsilon^2}{M} + \frac{12m^2\upsilon^2x^2}{Ml^2} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{m}{M} + \frac{12mx^2}{Ml^2}, \text{ отсюда}$$

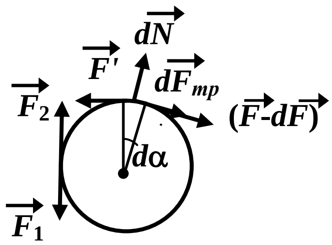
$$x^2 = \frac{Ml^2}{12m}\left(1 - \frac{m}{M}\right) = \frac{l^2}{12}\left(\frac{M-m}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{M-m}{3m}}.$$

$$x \le \frac{l}{2} \qquad \frac{l}{2}\sqrt{\frac{M-m}{3m}} \le \frac{l}{2}$$

$$\frac{M-m}{3m} \le 1, \qquad \frac{M}{3m} \le 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$m \le M \le 4m$$

1.42.



$$F' + dF_{тр} - F = 0 \Rightarrow \quad dF = F - F' = dF_{тр}$$

$$\vec{F} + \vec{F}' + d\vec{F}_{тр} + d\vec{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad dN = dF_p = Fd\alpha$$

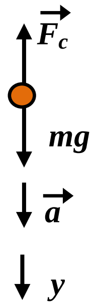
$$dF_{тр}^{\max} = \mu dN = \mu F d\alpha \text{ или } dF = F\mu d\alpha$$

Наименьшее усилие F_2 найдем из условия

$$\int_{F_2}^{F_1}\frac{dF}{F} = \int_0^{4\pi}\mu d\alpha = \mu 4\pi = \frac{1}{\pi}4\pi = 4$$

$$\ln\frac{F_1}{F_2}=4 \quad\Rightarrow\quad \frac{F_1}{F_2}=e^4 \quad\Rightarrow\quad F_2=\frac{F_1}{e^4}=F_1e^{-4}=10000e^{-4}\approx 183(H)$$

1.43.



$$m\vec{g}+\vec{F}_c=m\vec{a}$$

ОУ: $\quad mg-k\upsilon=m\dfrac{d\upsilon}{dt}$

$$mg-k\upsilon=m\frac{d\upsilon}{dt}, \qquad \int_0^{\upsilon}\frac{m}{mg-k\upsilon}d\upsilon=\int_0^t dt$$

$$t=-\frac{m}{k}\ln(mg-k\upsilon)\Big|_0^{\upsilon}=-\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{k\upsilon}{mg}\right)$$

$$\ln\left(1-\frac{k\upsilon}{mg}\right)=-\frac{k}{m}t$$

$$\upsilon=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-t\frac{k}{m}}\right)$$

$$S=\int_0^t\upsilon dt=\frac{mg}{k}t+\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-t\frac{k}{m}}\right)$$

$$\Delta S=S(t+\tau)-S(t)=\frac{mg}{k}\tau+\frac{m^2g}{k^2}e^{-t\frac{k}{m}}\left(1-e^{-\tau\frac{k}{m}}\right).$$

Если a = 0, то скорость установившегося движения $\upsilon_0=\dfrac{mg}{k}$

$$\Delta S=\upsilon_0\tau+\frac{\upsilon_0{}^2}{g}e^{-t\frac{g}{\upsilon_0}}\left(1-e^{-\tau\frac{g}{\upsilon_0}}\right).$$

Если $t\to\infty$, то $\Delta S=\upsilon_0\tau$.

1.44.

Пусть $m_2 > m_1$.

$$a_\tau=0 \quad\Rightarrow\quad F'+dF_{mp}-F=0 \;\Rightarrow\quad dF=F-F'=dF_{mp}$$

$$\vec{F} + \vec{F}' + d\vec{F}_{тр} + d\vec{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{N} = \vec{F} + \vec{F}' + d\vec{F}_{тр} = d\vec{F}_{р}$$

$$dN = dF_р = Fd\alpha$$

$$dF_{тр}{}^{\max} = \mu dN = \mu F d\alpha$$

$$dF = dF_{тр} \le \mu F d\alpha$$

$$\int_{F_2}^{F_1} \frac{dF}{F} \le \mu \int_0^{\pi} d\alpha \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{F_2}{F_1} \le \mu\pi \quad \Rightarrow \quad F_2 \le F_1 e^{\mu\pi}.$$

Здесь $F_2 = m_2 g, \quad F_1 = m_1 g$. Тогда $\dfrac{m_2}{m_1} \le e^{\mu\pi}$.

Если $m_1 > m_2$, то $\dfrac{m_1}{m_2} \le e^{\mu\pi} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{m_2}{m_1} \le e^{-\mu\pi}$. (сила трения направлена влево)

$e^{-\mu\pi} \le \dfrac{m_2}{m_1} \le \mu\pi$ − условие неподвижности.

Пусть $m_2 g > F_2$

$m_1 g < F_1$.

Тогда $F_{тр} = F_{тр}{}^{\max} \quad \rightarrow \quad F_2 = F_1 e^{\mu\pi}$.

$$\begin{cases} m_2 a = m_2 g - F_2 \\ m_1 a = F_1 - m_1 g \end{cases} \quad \begin{cases} m_2 a = m_2 g - F_1 e^{\mu\pi} & (1) \\ m_1 a = F_1 - m_1 g & (2) \end{cases}$$

Разделим (1) на $e^{\mu\pi}$ и сложим с (2):

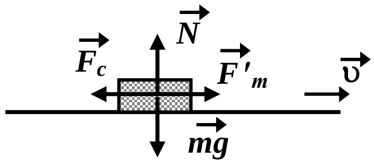
$$a\left(m_2 e^{-\mu\pi} + m_1\right) = \left(m_2 e^{-\mu\pi} - m_1\right) g$$

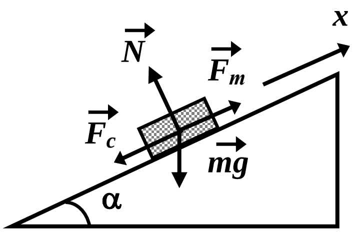
$$a = \left(\frac{m_2 e^{-\mu\pi} - m_1}{m_2 e^{-\mu\pi} + m_1}\right) g = \left(\frac{m_2 - m_1 e^{\mu\pi}}{m_2 + m_1 e^{\mu\pi}}\right) g.$$

Если $m_1 g > F_1$

$m_2 g < F_1$, то $a = \left(\dfrac{m_1 - m_2 e^{\mu\pi}}{m_1 + m_2 e^{\mu\pi}}\right) g$.

1.45.





Максимальная сила тяги $F_m = \mu N$. Максимальная мощность $N_{\max} = F_m\upsilon = \mu N\upsilon$.

$\vec{F}_c + \vec{F}_m + m\vec{g} + \vec{N} = 0$

OX: $F_m - mg\sin\alpha - F_c = 0$

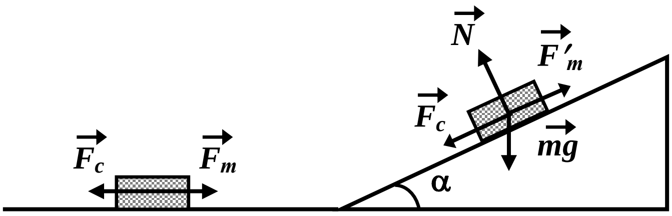
$F_m = mg\sin\alpha + F_c$.

Тогда $N_{max} = mg\upsilon\sin\alpha + F_c\upsilon$.

По ровной дороге $F'_m = F_c$ $N = F'_m\upsilon = F_c\upsilon$, отсюда

$N_{max} = mg\upsilon\sin\alpha + N = 81{,}2$ *л.с.*

1.46.



На ровном участке $F_m S = \frac{m\upsilon_0^2}{2} - F_c S$

$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = F_m S + F_c S = \mu mgS + F_c S$

На наклонном участке

$mgh - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = F'_m S - F_c S$

$mgh - \mu mgS - F_c S = F'_m S - F_c S$

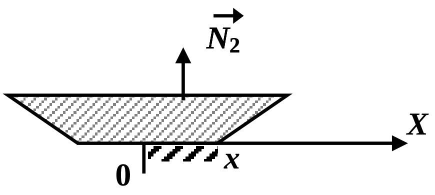
$h = S\sin\alpha$, $F'_m = \mu mg\cos\alpha = F_{\text{тр.max}}$

$mgS \sin\alpha - \mu mgS = \mu mg \cos\alpha\, S$

$\sin\alpha - \mu = \mu \cos\alpha$

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = 0{,}05$$

1.47.



$F_{тр} = \mu N.$

$$F_{тр} = \mu\left(\frac{m}{L_0}x\right)g$$

$$A_{тр} = -\int F_{тр}dx = -\frac{mg}{L_0}\mu\int_0^{L_0/2} xdx = -\frac{mgL_0\mu}{8}$$

$$A_{тр} = \triangle E_k = 0 - \frac{m\upsilon^2}{2}$$

$$\frac{mgL_0\mu}{8} = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{gL_0\mu}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{gL_0\mu}\,.$$

1.48.

$$mg\left(\frac{l}{2} - \frac{h}{2}\right) = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

$$\upsilon dt = \frac{l}{2}d\alpha\sin\alpha = \frac{l}{2}d\alpha\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}$$

$$\upsilon = \frac{\omega}{2}\sqrt{l^2-h^2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{4\upsilon^2}{l^2-h^2}$$

$$\frac{mg}{2}(l-h) = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{ml^2}{12}\frac{4\upsilon^2}{\left(l^2-h^2\right)}$$

$$g(l-h) = \upsilon^2\left(1+\frac{l^2}{3}\frac{1}{\left(l^2-h^2\right)}\right) = \upsilon^2\left(\frac{3l^2+l^2-3h^2}{3\left(l^2-h^2\right)}\right) = \frac{\upsilon^2\left(4l^2-3h^2\right)}{3\left(l^2-h^2\right)}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{3g(l-h)(l^2-h^2)}{4l^2-3h^2}} = (l-h)\sqrt{\frac{3g(l+h)}{4l^2-3h^2}}$$

1.49.

При движении вниз

$$ma_1 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

Вверх

$$ma_2 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g} \approx 0{,}3$$

1.50.

Движение капли по второму закону Ньютона:

$\frac{d(m\upsilon)}{dt} = mg$ или $\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{\upsilon}{m}\frac{dm}{dt} = g$, так как $m = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \alpha r^3$, а

$$\frac{dm}{dt} = 3\alpha r^2\frac{dr}{dt} = \beta r^2.$$

$\frac{dr}{dt} = \frac{\beta}{3\alpha} = c = const$, $dr = cdt$, $r = ct + c_1$. При $t = 0$ $r = 0$, тогда $c_1 = 0$.

Итак $r = ct$

$\frac{dm}{mdt} = \frac{\beta r^2}{\alpha r^3} = \frac{\beta}{\alpha r} = \frac{\beta}{\alpha ct} = \frac{\beta 3\alpha}{\alpha\beta t} = \frac{3}{t}$. Тогда уравнение движения перепишем

$$\frac{d\upsilon}{dt} + 3\frac{\upsilon}{t} = g.$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dr_к}\frac{dr_к}{dt} = 3\alpha\cancel{r}^2\frac{dr}{dt} = \beta\cancel{r}^2$$

$$\frac{dr_к}{dt} = \frac{\beta}{3\alpha} = const = c$$

$dr_к = cdt$, $r_к = ct + c_1$, $t = 0$, $c_1 = 0$, $r_к = 0$.

$\dfrac{d\upsilon}{dt}+3\dfrac{\upsilon}{t}=g$ − неоднородное дифференциальное уравнение. Найдем его решение. Решаем однородное:

$$\frac{d\upsilon}{dt}+3\frac{\upsilon}{t}=0 \qquad \frac{d\upsilon}{\upsilon}=-3\frac{dt}{t}$$

$$\ln\upsilon=-3\ln t+3\ln c \qquad \upsilon=\left(\frac{c}{t}\right)^3,$$

подставим в неоднородное:

$$\frac{d\upsilon}{dt}=3\left(\frac{c}{t}\right)^2\frac{c't-c}{t^2}$$

$$\frac{3\left(\frac{c}{t}\right)^2(c't-c)}{t^2}+\frac{3\left(\frac{c}{t}\right)^3}{t}=g$$

$$\frac{3\left(\frac{c}{t}\right)^2c't}{t^2}-\frac{3\left(\frac{c}{t}\right)^2c}{t^2}+\frac{3\left(\frac{c}{t}\right)^3}{t}=g$$

$$\frac{3c^2}{t^3}c'=g\,,\ c'=\frac{dc}{dt}$$

$$\frac{3c^2}{t^3}\frac{dc}{dt}=g$$

$$3c^2dc=gt^3dt$$

$3\dfrac{c^3}{3}=\dfrac{gt^4}{4}+c_1 \qquad c^3=\dfrac{gt^4}{4}+c_1$, подставив в $\upsilon=\left(\dfrac{c}{t}\right)^3$,

$$\upsilon=\frac{c^3}{t^3}=\frac{\frac{gt^4}{4}+c_1}{t^3}=\frac{gt}{4}+\frac{c_1}{t^3}.$$

Проверим начальные условия, определим c_1 при $t = 0$, $\upsilon = 0$.

$$\upsilon = \frac{gt}{4}\left(1 + \frac{c_1 4}{t^3 gt}\right) = 0$$

$$1 + \frac{c_1 4}{gt^4} = 0$$

$$c_1 = -\frac{gt^4}{4} = 0$$

Тогда $\upsilon = \frac{gt}{4}$ – зависимость скорости падения капли от времени, частица движется с ускорением $\frac{g}{4}$.

1.52. $\mu_{\min} = \dfrac{g\sin\alpha - a_{\max}}{g\cos\alpha} \approx 0{,}16$

1.55. Снег не сметается:

$$m_0\upsilon_0 = \left(m_0 + \mu t\right)\upsilon \qquad (1)$$

$$\boxed{\upsilon = \frac{m_0\upsilon_0}{m_0 + \mu t}}$$

Снег сметается:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt},$$

При следующих условиях: $\vec{F} = 0;\quad \vec{u} = -\vec{\upsilon};\quad m = m_0$, получим

$$X: \qquad m_0\frac{d\upsilon}{dt} = -\upsilon\mu$$

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{\mu}{m_0}dt$$

$$\ln\upsilon\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -\frac{\mu}{m_0}t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\upsilon = \upsilon_0 \exp\left(\frac{\mu t}{m_0}\right)}$$

1.56.

Если нить натянута T = const, запишем второй закон Ньютона

$$\begin{cases} T + k_1 x - mg = ma \\ mg + k_2 x - T = ma \end{cases},$$

Натяжение нити

$$T = mg - \frac{k_1 - k_2}{2} x$$

$T \geq 0$ то возможны 2 случая:

1) Если $x \leq \dfrac{2mg}{k_1 - k_2}$

   Нить натянута, грузы движутся с ускорением $a = \dfrac{k_1 + k_2}{2m} x$

2) Если $x > \dfrac{2mg}{k_1 - k_2}$, $T = 0$ (тогда нить будет провисать и тела движут-ся независимо с различными ускорениями)

   $k_1 x - mg = ma_1$, $a_1 = \dfrac{k_1 x}{m} - g < 0$

   $a_2 = g + \dfrac{k_2 x}{m} > 0$.

1.57.

$$\vec{T} + \vec{T}' + d\vec{F}_{тр} + d\vec{N} = 0$$

$$\begin{cases} T' + dF_{тр} = T \\ dN = Td\theta \end{cases}$$

$$dF_{тр} = \mu T d\theta, \qquad dF_{тр} = T - T' = dT, \qquad \mu T d\theta = dT$$

$$\int_{T_{\min}}^{T_0} \frac{dT}{T} = \int_0^{\varphi} \mu d\theta, \qquad \ln \frac{T_0}{T_{\min}} = \mu\varphi, \qquad \frac{T_0}{T_{\min}} = e^{\mu\varphi} \quad \Rightarrow$$

$$T_{\min} = T_0 \, e^{-\mu\varphi}.$$

1.58.

$$\frac{m\upsilon_0^2}{R} = \gamma \frac{mM}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{\gamma M}{\upsilon_0^2}$$

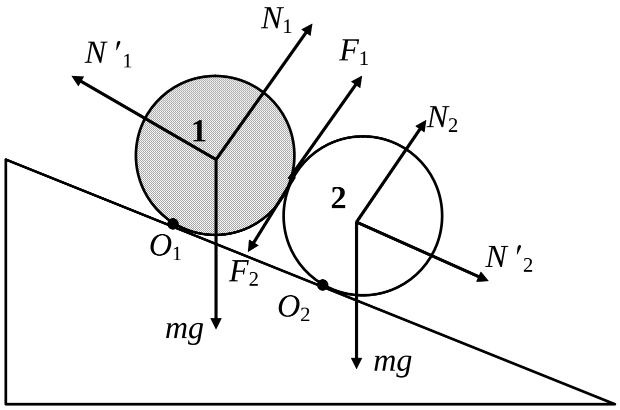
Скорость пули, которая улетит в бесконечность.

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1^2 = \frac{2\gamma M}{R} = \frac{2\gamma M}{\gamma M} \upsilon_0^2 = 2\upsilon_0^2$$

$$\upsilon_1^2 = \upsilon_0^2 + \upsilon_{отн}^2 - 2\upsilon_0\upsilon_{отн}\cos(180-\alpha)$$

$$2\upsilon_0^2 = \upsilon_0^2 + \upsilon_{отн}^2 - \upsilon_0\upsilon_{отн}$$

$$\upsilon_{отн}^2 - \upsilon_0\upsilon_{отн} - \upsilon_0^2 = 0$$



$$\upsilon_{отн} = +\upsilon_0\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1}\right) = \frac{\upsilon_0}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

1.59.

Запишем уравнения моментов относительно точки O_2 и O_1

$$\left.\begin{aligned} O_2:&\ \left(mg\sin\alpha + N_2'\right)R - F_2R = J_2\varepsilon \\ O_1:&\ \left(mg\sin\alpha - N_1'\right)R - F_1R = J_1\varepsilon \end{aligned}\right\}$$

$$J_1 = \left(\frac{1}{2}+1\right)mR^2, \quad J_2 = (1+1)mR^2$$

$$O_2: \ \left(mg\sin\alpha + N_2'\right)R - F_2R = 2mR^2\frac{a}{R}$$

$$O_1: \ \left(mg\sin\alpha - N_1'\right)R - F_1R = \frac{3}{2}mR^2\frac{a}{R}$$

Силы трения между цилиндрами соответственно равны:
$F_2 = kN_2',\ F_1 = kN_1',\ N'_2 = N_1' = N,$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha + N - kN = 2ma \\ mg\sin\alpha - N - kN = \dfrac{3}{2}ma \end{cases}$$

После сложения двух уравнений, получим:

$2mg\sin\alpha - 2kN = \dfrac{7}{2}ma$.

После вычитания двух уравнений, получим:

$$2N = \frac{1}{2}ma \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{1}{4}ma$$

$$2mg\sin\alpha - 2k\frac{1}{4}ma = \frac{7}{2}ma$$

$$2mg\sin\alpha - k\frac{1}{2}ma = \frac{7}{2}ma$$

$$\frac{7}{2}a + \frac{k}{2}a = 2g\sin\alpha$$

$$\boxed{a = \frac{4g\sin\alpha}{7+k}} \qquad \boxed{N = \frac{mg\sin\alpha}{7+k}}$$

Глава 2. Термодинамика

2.1.

Работа в процессе 1-2:

dA=PdV

P=αV

dA=αVdV

$$A_{1-2} = \int_1^2 \alpha V dV = \frac{\alpha V_2^2}{2} - \frac{\alpha V_1^2}{2}$$

По уравнению Менделеева-Клапейрона:

$$PV = RT \qquad \begin{cases} \alpha V_1^2 = RT_1 \\ \alpha V_2^2 = RT_2 \end{cases} \qquad A_{1-2} = \frac{RT_2}{2} - \frac{RT_1}{2} = \frac{R}{2}\left(T_2 - T_1\right)$$

$$\alpha V^2 = RT$$

$$T_2 - T_1 = \frac{2A_{12}}{R} \qquad (1)$$

Для процесса 2-3:

$T_3=T_1$

$\Delta Q=C\Delta T=C(T_3-T_2)=C(T_1-T_2)$

$\Delta U=C_V(T_1-T_2)$

$\Delta Q=\Delta U+A_{23}$

$C(T_1-T_2)= C_V(T_1-T_2)+A_{23}$

$(C-C_V)(T_1-T_2)=A_{23}$ (2)

Здесь $C=\frac{R}{2}$ $C_V=\frac{i}{2}R=\frac{3}{2}R$

Подставим (1) в (2):

$$-\left(\frac{R}{2}-\frac{3}{2}R\right)\frac{2A_{12}}{R}=A_{23}$$

$$A_{23}=2A_{12}=2A$$

2.2.

Процесс

$PV^2=const$ $PV=\nu RT$ $P=\frac{\nu RT}{V}$

$\frac{\nu RT}{\cancel{V}}V^{\cancel{2}}=const \Rightarrow TV=const$ - уравнение процесса

$T_2=\frac{T_1}{\kappa}$ по условию

$T_1V_1=T_2V_2$

$V_2=\kappa V_1$ газ охлаждается

объём увеличивается, следовательно, минимальный объём

$$V_0=V_1 \quad (1)$$

$$V_2=\kappa V_0 \quad (2)$$

$$\Delta U = \nu C_V\left(T_2 - T_1\right) = \nu C_V T_1\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) = \nu\frac{i}{2}RT_1\frac{1-\kappa}{\kappa} = \frac{i}{2}P_1V_1\frac{1-\kappa}{\kappa}$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{\left(1-\kappa\right)}{\kappa}P_1V_1 = \frac{i}{2}\left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)P_1V_0$$

Работа газа

$dA = PdV$ по уравнению $P_1V_1^2 = PV^2$

$$P = \frac{P_1V_1^2}{V^2}$$

$$dA = \frac{P_1V_1^2}{V^2}dV = P_1V_1^2\frac{dV}{V^2}$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P_1V_1^2\frac{dV}{V^2} = P_1V_1^2\left(-\frac{1}{V}\right)\Bigg|_{V_1}^{V_2} = P_1V_1^2\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = P_1V_0^2\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{\kappa V_0}\right) =$$

$$= \frac{P_1V_0^2}{V_0}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = P_1V_0\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right).$$

Учитывая соотношения (1), (2) и то, что $i = 3$

$$\Delta Q = \Delta U + A = P_1V_0\frac{i}{2}\left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right) + P_1V_0\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right) =$$

$$= \frac{P_1V_0}{\kappa}\left(\frac{3}{2}\left(1-\kappa\right) + \left(\kappa - 1\right)\right] = \frac{P_1V_0}{2\kappa}\left(1-\kappa\right)$$

$\Delta Q = \dfrac{P_1V_0}{2\kappa}\left(1-\kappa\right)$ – полученное газом количество теплоты меньше нуля.

Тогда $\Delta Q_2 = \dfrac{P_1V_0}{2\kappa}\left|1-\kappa\right|$ –количество теплоты, отданное газом.

2.3.

Начальное состояния газа $P_1, V_1, T_1 \Rightarrow P_1V = RT_1$ (1)

Для верхнего положения поршня, после того как гирю сняли

$$P_2, \quad V_2,\ T_2 \Rightarrow P_2V_2 = RT_2 \qquad (2)$$

После того как гирю поставили (нижнее положение поршня)

$$P_1, V_3, T_3 \Rightarrow P_1V_3 = RT_3 \qquad (3)$$

Процесс адиабатный $\Delta Q = 0$; $\underline{-\Delta U = A}$

Расширение газа (давление P_2) и сжатие (давление P_1) происходит при постоянных давлениях, при этом

$$P_2 = \frac{P_1}{2} \qquad (4)$$

Процесс расширения

$$C_V(T_1 - T_2) = P_2(V_2 - V_1)$$

$$C_VT_1 - C_VT_2 = P_2V_2 - P_2V_1$$

$$C_VT_1 + P_2V_1 = C_VT_2 + RT_2 = (C_V + R)T_2$$

Учитывая (1) и (4)

$$\boxed{T_2 = \frac{C_VT_1 + P_2V_1}{C_V + R} = \frac{C_VT_1 + \frac{P_1V_1}{2}}{C_V + R} = \frac{\left(C_V + \frac{R}{2}\right)T_1}{C_V + R}}$$

Процесс сжатия

$$C_V(T_2 - T_3) = P_1(V_3 - V_2)$$

$$C_VT_2 - C_VT_3 = P_1V_3 - P_1V_2$$

$$P_1V_3 + C_VT_3 = C_VT_2 + P_1V_2$$

$$P_1V_3 = RT_3$$

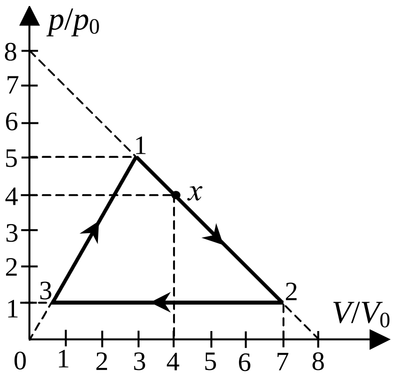
$$(R + C_V)T_3 = C_VT_2 + 2\frac{RT_2}{P_2V_2} = (C_V + 2R)T_2$$

$$T_3 = \frac{(C_V + 2R)T_2}{C_V + R}$$

$$T_3 = \frac{(C_V + 2R)}{(C_V + R)} \cdot \frac{\left(C_V + \frac{R}{2}\right) T_1}{(C_V + R)} = \frac{(C_V + 2R)\left(C_V + \frac{R}{2}\right)}{(C_V + R)^2} T_1$$

$$\Delta T = T_3 - T_1 = \left[\frac{(C_V + 2R)\left(C_V + \frac{R}{2}\right)}{(C_V + R)^2} - 1 \right] T_1 = \frac{3}{25} T_1 = 0{,}12 T_1$$

2.4.



Процесс 1–2

$P = c(1 - \alpha V)$.

Из графика: $c = 8P_0$, $P = 8P_0(1 - \alpha \mathrm{V})$,

при $V = 8V_0$, $P = 0$, $8P_0(1 - \alpha 8V_0) = 0$ $\alpha = \dfrac{1}{8V_0}$

тогда уравнение $\boxed{P = 8P_0\left(1 - \dfrac{1}{8V_0}V\right)}$ или

$$\boxed{P = 8P_0 - \frac{P_0}{V_0}V} \qquad (1)$$

Для т.1 $P = 5P_0$, $5P_0 = 8P_0 - \dfrac{P_0}{V_0}V_1$, отсюда $\boxed{V_1 = 3V_0}$.

Процесс 3–1

$P = kV$

$$V = \frac{P}{k}$$

для т.1

$$3V_0 = \frac{5P_0}{k} \qquad \boxed{k = \frac{5P_0}{3V_0}}$$

для т.3 $P_3 = P_0$, $V_3 = \dfrac{P_3}{k} = \dfrac{P_0 3V_0}{5P_0} = \dfrac{3}{5}V_0$.

Найдем температуры всех состояний:

$$P_1V_1 = \nu RT_1, \qquad T_1 = \frac{5P_0 \cdot 3V_0}{\nu R} = \frac{15P_0V_0}{\nu R};$$

$$P_2V_2 = \nu RT_2, \qquad T_2 = \frac{7P_0V_0}{\nu R};$$

$$P_3V_3 = \nu RT_3, \qquad T_3 = \frac{3P_0V_0}{5\nu R}.$$

Найдем работу за цикл:

$$A = \frac{1}{2}(5P_0 - P_0)\left(7V_0 - \frac{3}{5}V_0\right) = \frac{64}{5}P_0V_0$$

Найдем подведенное тепло.

Нагревание идет на участке 1–x и 3–1. Максимальную температуру T_x найдем из уравнения процесса 1–2 (уравнение 1):

$$T = f(V) = \frac{PV}{\nu R} = \frac{\left(8P_0 - \dfrac{P_0}{V_0}V\right)V}{\nu R} = \frac{1}{\nu R}\left(8P_0V - \frac{P_0}{V_0}V^2\right)$$

$$\frac{dT}{dV} = 0 \qquad \frac{dT}{dV} = \frac{8P_0 - 2\dfrac{P_0}{V_0}V}{\nu R} = 0 \Rightarrow \boxed{V_X = 4V_0}$$

$$\boxed{P_X = 8P_0 - \frac{P_0}{V_0}\cdot 4V_0 = 4P_0}$$

$$T_X = \frac{16P_0V_0}{\nu R}$$

$\boxed{\eta = \dfrac{A}{Q}}$ – кпд цикла.

$$\boxed{A = \frac{64}{5} P_0 V_0}$$

$$Q = Q_{1X} + Q_{31}$$

$$Q_{1X} = U_{1X} + A_{1X}$$

$$U_{1X} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_X - T_1\right) = \frac{3}{2}\left(16P_0V_0 - 15P_0V_0\right) = \frac{3}{2}P_0V_0$$

$$A_{1X} = \int\limits_{3V_0}^{4V_0} PdV = \int\limits_{3V_0}^{4V_0}\left(8P_0 - \frac{P_0V}{V_0}\right)dV = \left(8P_0V - \frac{P_0}{V_0}\frac{V^2}{2}\right)\Bigg|_{3V_0}^{4V_0} = 4,5P_0V_0$$

$$Q_{1X} = \frac{3}{2}P_0V_0 + 4,5P_0V_0 = 6P_0V_0$$

$$Q_{31} = U_{31} + A_{31}$$

$$U_{31} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_1 - T_3\right) = \frac{3}{2}\left(15P_0V_0 - \frac{3}{5}P_0V_0\right) = \frac{108}{5}P_0V_0$$

$$A_{31} = \int\limits_{\frac{3}{5}V_0}^{3V_0} PdV = \int\limits_{\frac{3}{5}V_0}^{3V_0} \frac{5}{3}\frac{P_0}{V_0}VdV = \frac{5}{3}\frac{P_0}{V_0}\frac{V^2}{2}\Bigg|_{\frac{3}{5}V_0}^{3V_0} = \frac{36}{5}P_0V_0$$

$$Q_{13} = \frac{108}{5}P_0V_0 + \frac{36}{5}P_0V_0 = \frac{144}{5}P_0V_0$$

$Q = \dfrac{144}{5}P_0V_0 + 6P_0V_0 = \dfrac{174}{5}P_0V_0$ – количество тепла, полученное газом.

$$\eta = \frac{64P_0V_0 \cdot 5}{5 \cdot 174P_0V_0} = 0,37$$

2.5.

$$T = \alpha V^2; \quad \alpha = const$$

$$dT = \alpha \cdot 2VdV \qquad (1)$$

$$dQ = dU + \delta A \qquad (2)$$

$$C\nu dT = \frac{i}{2}\nu RdT + pdV \qquad (3)$$

Из уравнения Клапейрона–Менделеева

$$pV = \nu RT = \nu R\alpha V^2 \Rightarrow p = \nu R\alpha V \to (3)$$

$$C\nu dT = \frac{i}{2}\nu R dT + \nu R\alpha V dV$$

Подставим dT из (1)

$C\nu \cdot \alpha \cdot 2VdV = \frac{i}{2}\nu R \cdot \alpha 2VdV + \nu R\alpha VdV$, отсюда найдем

$$2C = (i+1)R \Rightarrow C = \frac{i+1}{2}R$$

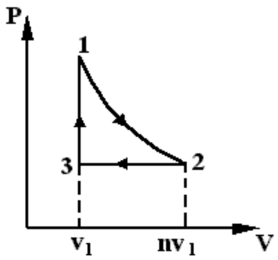
Из уравнения $Q = C\nu\Delta T$ выразим $\Delta T = \frac{Q}{C\nu} = \frac{Q\cdot 2}{(i+1)R\nu}$

Найдем $\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \frac{i}{2}\nu R\frac{2Q}{(i+1)R\nu} = \frac{iQ}{i+1}$

$$A = Q - \Delta U = Q - \frac{iQ}{i+1} = \frac{Q}{i+1}$$

$$\boxed{A = \frac{Q}{i+1}}$$

2.6.



Уравнение адиабаты: $PV^\gamma = const$,

$\frac{V_2}{V_1} = n$, $T_2 = T_3\frac{V_2}{V_3} = nT_3$, $T_1 = T_3\frac{P_1}{P_3} = T_3\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = T_3 n^\gamma$.

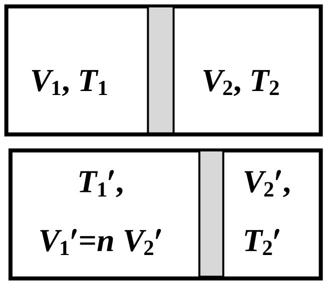
Тепло подводится на изохоре, отводится на изобаре:

$$Q_{31} = C_V(T_1 - T_3) = C_V T_3(n^\gamma - 1),$$

$$Q_{23} = C_P(T_2 - T_3) = C_P T_3(n - 1).$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_{23}}{Q_{31}} = 1 - \frac{C_P T_3(n-1)}{C_V T_3(n^\gamma - 1)} = 1 - \frac{\gamma(n-1)}{n^\gamma - 1}.$$

2.7.



В начальном состоянии $T_1 = 2T_2$, $V_1 = V_2$, $P_1 = 2P_2$

$\frac{PV_1'}{T_1'} = \frac{PV_2'}{T_2'}$, отсюда $T_1' = nT_2'$, где $n = \frac{V_2'}{V_1'}$

$$2V_1 = V_1' + V_2' = nV_2' + V_2' = (n+1)V_2'$$

$$\boxed{V_2' = \frac{2}{n+1}V_1\,,} \qquad V_2 = V_1 = \frac{n+1}{2}V_2'$$

$$\frac{V_2'}{V_2} = \frac{2}{n+1}, \qquad \frac{V_1'}{V_1} = \left(\frac{2n}{n+1}\right).$$

Так как $A = 0$, $\Delta Q = 0$, то $\Delta U = 0$.

$$C_V\left(T_1' - T_1\right) + C_V\left(T_2' - T_2\right) = 0,$$

$$T_1' + T_2' = T_1 + T_2,$$

$$(n+1)T_2' = 3T_2,$$

$$T_2' = \frac{3T_2}{n+1}; \quad T_1' = \frac{3nT_2}{n+1}.$$

$$\Delta S_1 = C_v \ln\frac{T_1'}{T_1} + R\ln\frac{V_1'}{V_1}$$

$$\Delta S_2 = C_v \ln\frac{T_2'}{T_2} + R\ln\frac{V_2'}{V_2}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_v\left(\ln\frac{T_1'}{T_1} + \ln\frac{T_2'}{T_2}\right) + R\left(\ln\frac{V_1'}{V_1} + \ln\frac{V_2'}{V_2}\right) =$$

$$C_v \ln\left(\frac{9n}{2(n+1)^2}\right) + R\ln\left(\frac{4n}{2(n+1)^2}\right)$$

2.8.

Расширение газа осуществляется при постоянном давлении p_1 и увеличении температуры от T_1 до T_2. Затем газ охлаждается от температуры

T_2 до температуры T_3 при постоянном объеме, так как по условию задачи сила трения поршня о стенки цилиндра больше суммы веса поршня и силы внешнего атмосферного давления. Пусть в начале расширения объем газа V, тогда в конце расширения и в конце охлаждения объем равен $2V$. Для ν молей газа

$p_1V = \nu RT_1$, $p_1\times 2V = \nu RT_2$. Отсюда $T_1 = T_2/2$ (1).

$p_2\times 2V = \nu RT_3$, здесь p_2 – давление в конце охлаждения. При расширении $Q = \nu(C_\nu + R)(T_2 - T_1)$, (2)

где $C_\nu = \dfrac{3R}{2}$ (3)

При охлаждении $Q = \nu C_\nu (T_2 - T_3)$. (4)

Из уравнений (1 – 4), найдем $T_3 = \dfrac{T_2}{6}$. Отсюда находим, что $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{p_2}{p_3} = \dfrac{T_3}{T_2} = \dfrac{1}{6}$, т. е. давление уменьшилось в 6 раз.

2.9.

mg, H_0, x_0, ν,	$\nu RT_2 = P_2V_2$ (1) В равновесии: $mg = kx_0$
$x_1 = \alpha x_0 = 2x_0$, $\alpha = 2$	$P_2 = \dfrac{mg}{S} + \dfrac{kx_2}{S} = \dfrac{1}{S}(mg + kx_0) = \dfrac{1}{S}(mg + mg) = \dfrac{2mg}{S}$
$x_2 = \dfrac{\alpha x_0}{2} = \dfrac{2}{2}x_0 = x_0$	$V_2 = S(H_0 + x_0 + x_2) = (H_0 + x_0 + x_0)S = (H_0 + 2x_0)S$
T_2 –? $A_{охл}$ –?	

Из (1):

$$\boxed{T_2 = \frac{P_2V_2}{\nu R} = \frac{2mg}{S\nu R}(H_0 + 2x_0)S = \frac{2mg(H_0 + 2x_0)}{\nu R}}.$$

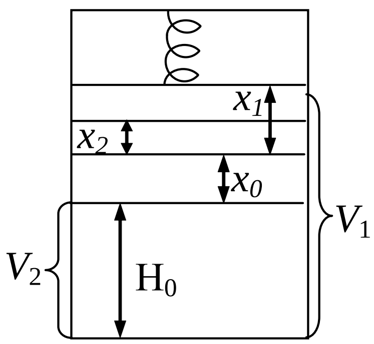


Рис. 2

Работа внешних сил при охлаждении (переход от x_1 до x_2): $A = mg(x_1 - x_2) + A_{упр}$, $A_{упр} = W_{пот1} - W_{пот2}$.

$$A = mg(x_1 - x_2) + \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = mg(2x_0 - x_0) + \frac{k}{2}4x_0^2 - \frac{k}{2}x_0^2 =$$

$$= mgx_0 + \frac{3}{2}kx_0^2 = mgx_0 + \frac{3}{2}mgx_0 = \frac{5}{2}mgx_0$$

Работа воздуха

$$\boxed{A_{охл} = -A = -\frac{5}{2}mgx_0}$$

2.10.

$$dQ = dU + dA$$

$$dQ = -dU = -C_V dT = CdT$$

отсюда теплоемкость газа

$$C = -C_V.$$

Из первого закона термодинамики

$$-dQ = dU - dA \quad \Rightarrow \quad 2dU = dA$$

$$-2C_V dT = pdV \text{, где } p = \frac{RT}{V}$$

$$-2C_V dT = \frac{RT}{V}dV \quad \Rightarrow \quad -\frac{dT}{T} = \frac{R}{2C_V}\frac{dV}{V}$$

$$-\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} = \int_{V_0}^{V}\frac{R}{2C_V}\frac{dV}{V},$$

$$\ln\frac{T}{T_0} = \frac{R}{2C_V}\ln\frac{V}{V_0}\text{, введем обозначение } b = \frac{R}{2C_V} = \frac{1}{i} = \frac{\gamma - 1}{2},$$

$$\ln\frac{T}{T_0} = -b\ln\frac{V}{V_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^b \quad \Rightarrow \quad T = T_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^b.$$

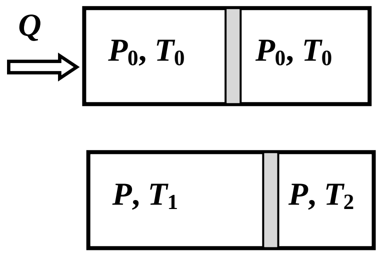
$$A=\int\limits_{V_0}^{2V_0} pdV=\int\limits_{V_0}^{2V_0}\frac{RT}{V}dV=\int\limits_{V_0}^{2V_0}\frac{RT_0}{V}\frac{V_0^b}{V^b}dV=\int\limits_{V_0}^{2V_0}\frac{RT_0V_0^b}{V^{b+1}}dV=$$

$$=-RT_0V_0^b\left.\frac{1}{bV^b}\right|_{V_0}^{2V_0}=-\frac{RT_0V_0^b}{b}\left(\frac{1}{\left(2V_0\right)^b}-\frac{1}{V_0^b}\right)=-\frac{RT_0}{b}\left(\frac{1}{2^b}-1\right)=$$

$$=2C_VT_0\left(1-2^{-b}\right)=2C_VT_0\left(1-2^{\frac{1-\gamma}{2}}\right).$$

2.11. $T=T_0\dfrac{\nu_в}{\nu_{He}}\dfrac{\mu_{He}}{\mu_в}$

2.12.



Для левой части $Q=\dfrac{3}{2}\nu R\left(T_1-T_0\right)+A.$ (1)

Для правой части $Q=\dfrac{3}{2}\nu R\left(T_2-T_0\right)-A$ (2)

$$Q=\Delta U_1+\Delta U_1=\frac{3}{2}\nu R\left(T_1-T_0+T_2-T_0\right),$$

где $\nu RT=pV$, следовательно

$$Q=\frac{3}{2}\left(pV_1-2p_0\frac{V_0}{2}+pV_2\right),\text{ где } V_1+V_2=V_0.$$

$$Q=\frac{3}{2}V_0\left(p-p_0\right),\Rightarrow\ \Delta p=\frac{2Q}{3V_0}=670\ Па.$$

2.13.

$$n=n_0e^{-\frac{m_0gh}{kT}}\qquad(1)\qquad\qquad P_0=n_0kT\qquad(2)$$

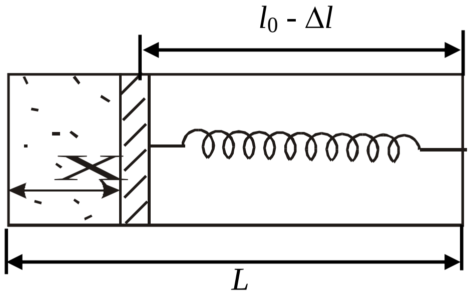
$N=\int ndV$, где $dV=\pi r^2dh$, $r=htg\alpha$, $dV=\pi h^2tg^2\alpha dh$

$$N = n_0\pi tg^2\alpha\int_0^\infty e^{-\frac{mgh}{kT}}h^2dh = \frac{n_0\pi tg^2\alpha}{b^3}\int_0^\infty e^{-bh}(bh)^2 d(bh) = \left| \begin{matrix} b = \dfrac{mgh}{kT} \\ \int_0^\infty x^2e^{-x}dx = 2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2n_0\pi tg^2\alpha}{(m_0g)^3}(kT)^3 \Rightarrow \quad n_0 = \frac{N(m_0g)^3}{2\pi tg^2\alpha(kT)^3},\ m_0 = \frac{\mu}{N_A} \text{ – масса молекулы.}$$

$$P_0 = \frac{N(m_0g)^3}{2\pi tg^2\alpha(kT)^2}.$$

2.14.



$p_1S = F_1 = k\Delta l_1 = k(L - l_0 - x_1)$ (1)

$p_2S = F_2 = k\Delta l_2 = k(L - l_0 - x_2)$ (2)

$$\frac{\nu RT_1}{V_1} = p_1 \qquad (3)$$

$$\frac{\nu RT_2}{V_2} = p_2 \qquad (4)$$

Решая уравнения (1 – 4) получим

$$\frac{T_1}{V_1}\frac{V_2}{T_2} = \frac{L - l_0 - x_1}{L - l_0 - x_2},$$

учитывая, что $V_2 = x_2L$ и $V_1 = x_1L$, получим

$$T_1x_2(L - l_0 - x_2) = T_2x_1(L - l_0 - x_1),$$

$$l_0 = L - \frac{T_1x_2^2 - T_2x_1^2}{T_1x_2 - T_2x_1}.$$

2.15.

Определим максимальную температуру.

$p = p_0 - kV$, где $k = \dfrac{p_0}{V_0}$.

$$\frac{dT}{dV}=0,\qquad T=\frac{pV}{\nu R}=\frac{\left(p_0-kV\right)V}{\nu R}=\frac{p_0V-kV^2}{\nu R}$$

$$\frac{dT}{dV}=\frac{p_0-2kV}{\nu R}=0\qquad\Rightarrow\qquad\boxed{V_1=\frac{p_0}{2k}=\frac{V_0}{2}}\qquad(1)$$

$\dfrac{dT}{dp}=0$, из уравнения $T=\dfrac{pV}{\nu R}=\dfrac{\left(p_0-p\right)p}{k\nu R}=\dfrac{pp_0-p^2}{k\nu R}$.

$$\frac{dT}{dp}=\frac{p_0-2p}{k\nu R}=0\qquad\Rightarrow\qquad\boxed{p_1=\frac{p_0}{2}}\qquad(2)$$

Учитывая уравнения (1) и (2)

$$\boxed{T_{\max}=\frac{p_1V_1}{\nu R}=\frac{p_0V_0}{4\nu R}}.$$

Найдем зависимость молярной теплоемкости реального газа от объема $C=f(V)$.

$$C(V)=\frac{dQ}{dT}=\frac{dU+pdV}{dT}\qquad(3)$$

$$p=p_0-kV,\ \text{где}\ k=\frac{p_0}{V_0}.\qquad(4)$$

$$pV=RT,\quad \text{учитывая (3)}\ pV=p_0V-kV^2=RT,$$

$$d\left(pV\right)=\left(p_0-2\frac{p_0}{V_0}V\right)dV=RdT$$

$$dV=\frac{RdT}{p_0\left(1-\dfrac{2V}{V_0}\right)},$$

Определим $C(V)$, подставив dV в (3)

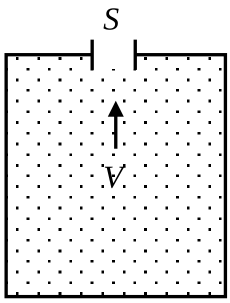
$$C(V)=\frac{dQ}{dT}=\frac{dU}{dT}+\frac{pdV}{dT}=C_V+\frac{\left(p_0-\dfrac{p_0}{V_0}V\right)\left(RdT\right)}{dT\,p_0\left(1-\dfrac{2V}{V_0}\right)}.$$

$$\boxed{C(V) = C_V + \frac{V_0 - V}{V_0 - 2V} R}.$$

2.16.

Число частиц через отверстие S $\qquad dN = \frac{1}{6} nS \langle \upsilon \rangle dt$.

Учитывая, что $n = \frac{N}{V}$.



$$\int_{N_1}^{N_2} \frac{dN}{N} = \int \frac{1}{6} \frac{S}{V} \langle \upsilon \rangle dt$$

$$\ln \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{6} \frac{S}{V} \langle \upsilon \rangle t,$$

Т.к. $p_1 V = \frac{N_1}{N_A} RT$, $p_2 V = \frac{N_2}{N_A} RT$, получим $\ln \frac{p_1}{p_2} = -\frac{1}{6} \frac{S}{V} \langle \upsilon \rangle t$,

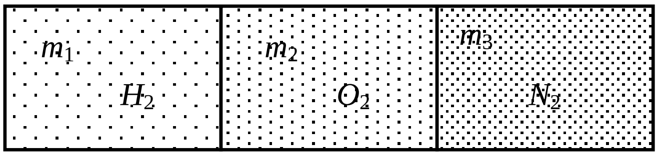
$$t = \frac{6V \ln \beta}{S \langle \upsilon \rangle} = \frac{6V \ln \beta}{S \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}.$$

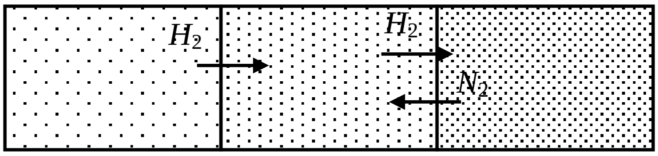
2.17. $T = T_0 \frac{\nu_в}{\nu_{He}} \frac{\mu_{He}}{\mu_в}$

2.18.

В левой останется 1/3 часть водорода

$$p_1 = \frac{1}{3} \frac{m_1}{\mu_1} \frac{RT}{V_1}, \qquad (1)$$



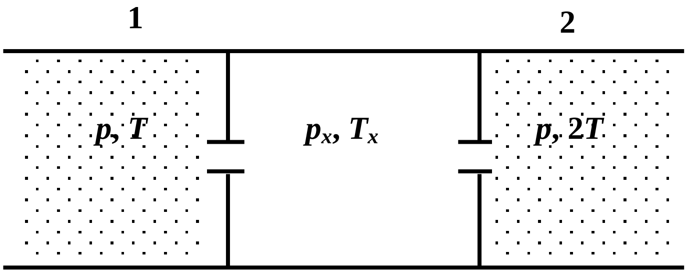


$$p_2 = \frac{1}{3}\frac{m_1}{\mu_1}\frac{RT}{V_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\frac{RT}{V_1} + \frac{1}{2}\frac{m_3}{\mu_3}\frac{RT}{V_1} = \frac{RT}{V_1}\left(\frac{m_1}{3\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_3}{2\mu_3}\right) \qquad (2)$$

$$p_3 = \frac{RT}{V_1}\left(\frac{1}{3}\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{1}{2}\frac{m_3}{\mu_3}\right) \qquad (3)$$

Ответ: p_1 = 1,25 МПа; p_2 = 2,8 МПа; p_3 = 16 МПа.

2.20.



Число ударов молекул по единицы площади $\nu = \frac{1}{4}n\langle\upsilon\rangle \sim n\sqrt{T}$, $n_1 \sim \frac{p}{T}$, $n_2 \sim \frac{p}{2T}$. Отсюда

$$n_1 = 2n_2. \qquad (1)$$

$n_x \sim \frac{p_x}{T_x} = const$. Число частиц в камере постоянно. Число приходящих частиц равно числу уходящих частиц:

$$n_1\sqrt{T} + n_2\sqrt{2T} = 2n_x\sqrt{T_x} \qquad (2)$$

Так как $n_x = const$ и $T_x = const$, то $\Delta Q = \Delta U = 0$. Энергия приходящих частиц равна энергии уходящих частиц:

$$n_1T\sqrt{T}+n_2 2T\sqrt{2T}=2n_xT_x\sqrt{T_x}\,. \qquad (3)$$

Учитывая (1), уравнения (2) и (3) можно переписать в следующем виде:

$$n_2\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{T}=2n_x\sqrt{T_x} \qquad (4)$$

$$2n_2T\sqrt{T}\left(1+\sqrt{2}\right)=2n_xT_x\sqrt{T_x} \qquad (5)$$

Разделим (5)-е уравнение на (4)-е:

$$T_x=\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)}T=\sqrt{2}\,T\,. \qquad (6)$$

Подставив (6) в (4), найдем:

$$n_x=n_2\frac{1+\sqrt{2}}{2^{3/4}}\,. \qquad (7)$$

4-е уравнение можно переписать в следующем виде:

$$n_2\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{T}=2\sqrt{n_x}\sqrt{n_xT_x}=2\sqrt{n_x}\sqrt{p_x}\,,$$

отсюда

$$\sqrt{p_x}=\frac{n_2\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{T}}{2\sqrt{n_x}}=\frac{2^{3/8}\left(2+\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}\sqrt{n_2T_2}=2^{-5/8}\sqrt{p}\sqrt{1+\sqrt{2}}\,,$$

$$p_x=p\left(1+\sqrt{2}\right)2^{-5/4}.$$

2.21. $A=\left(C_{V_1}+C_{V_2}\right)T_0\left(\dfrac{V_0}{V}\right)^{\frac{2R}{C_{V_1}+C_{V_2}}}$

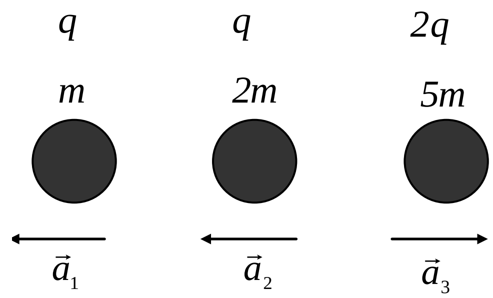
2.22. $\Delta T=-\dfrac{A}{R}=-5{,}05K\,.$

Глава 3. Электромагнетизм

3.1.

После разлета на большие расстояния суммарная кинетическая энергия шариков будет равна начальной энергии электростатического взаимодействия зарядов: $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{l} + \frac{2q^2}{l} + \frac{2q^2}{2l}\right) = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 l}$.

Для ответа на второй вопрос найдем ускорение шариков сразу после того, как их отпустили:



$$ma_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{l^2} + \frac{2q^2}{4l^2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q^2}{2l^2},$$

т.е. $a_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q^2}{2l^2 m}$.

Аналогично $a_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2l^2 m}$, $a_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2l^2 m}$.

Видно, что крайние шарики начали двигаться относительно среднего в разные стороны с одинаковым ускорением $a = a_1 - a_2 = a_3 + a_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l^2 m}$, следовательно, расстояние от каждого из них до среднего шарика будут все время одинаковыми. Отношение скоростей шариков будет такие же, как отношения их ускорений $\upsilon_1 : \upsilon_2 : \upsilon_3 = 3:1:1$.

Запишем закон охранения энергии $\frac{m(3\upsilon)^2}{2} + \frac{2m\upsilon^2}{2} + \frac{5m\upsilon^2}{2} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 l}$.

Отсюда $\upsilon = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml}}$ и соответственно

$$\upsilon_1 = 3\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml}},\ \upsilon_2 = \upsilon_3 = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml}}.$$

3.2.

По закону сохранения импульса

$\vec{\upsilon}_{ц.м.} = \text{const} = \vec{\upsilon}$

<u>вначале</u>:

$$\vec{\upsilon}_{ц.м.1} = \frac{m\vec{\upsilon}}{3m} = \frac{\vec{\upsilon}}{3}$$

<u>после</u>: скорости шариков одинаковы ($\upsilon_2 = \upsilon_3 = \upsilon_1$)

$$\vec{\upsilon}_{ц.м.2} = \frac{1}{3\mathrm{m}}\left(m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 + m\vec{\upsilon}_3\right) = \frac{m}{3m}\left(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3\right) = \frac{3\vec{\upsilon}_1}{3} = \vec{\upsilon}_1.$$

Каждое тело движется со скоростью $\upsilon_1 = \dfrac{\upsilon}{3}$,

по закону сохранения энергии

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5}{2}\frac{q^2}{l} + \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3q^2}{l} + 3\frac{m\left(\frac{\upsilon}{3}\right)^2}{2},$$ отсюда квадрат скорости

будет равен $\upsilon^2 = \dfrac{3}{8}\dfrac{q^2}{\pi\varepsilon_0 ml}$. В результате:

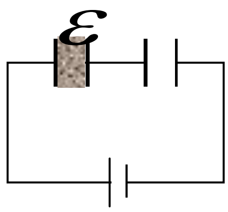
$$\upsilon = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi\,\varepsilon_0 ml}}.$$

3.3.

Энергия плоского конденсатора:

$$W_1 = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{\varepsilon\,\varepsilon_0 S}{2d}\mathcal{E}^2$$

После того как одну из пластин конденсатора отодвигают его можно представить в виде двух конденсаторов, соединенных последовательно. Тогда его емкость будет равна:



$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

где

$$C_1 = \frac{\varepsilon\,\varepsilon_0 S}{d}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{x}.$$

Тогда

$$C = \frac{\varepsilon\,\varepsilon_0\, S}{\varepsilon\, x + d}$$

Энергия конденсатора после раздвижения пластин:

$$W_2 = \frac{C}{2}\mathcal{E}^2 = \frac{\varepsilon\,\varepsilon_0 S}{2\left(\varepsilon x + d\right)}\mathcal{E}^2.$$

Работу совершают внешние силы (A) и источник тока ($A_{\text{ист}}$).

$$A_{\grave{e}\tilde{n}\grave{o}} = \Delta q\mathcal{E}^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon x + d}\mathcal{E}^2 - \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}^2.$$

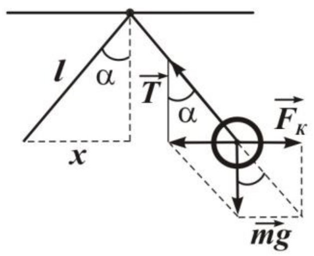
Работа равна разности энергий: $A + A_{ист} = \left(W_2 - W_1\right)$.

Подставляя в это уравнение $A_{\text{ист}}$, W_1, W_2 и решая его относительно x, получим

$$x = \frac{2d^2 A}{\varepsilon_0\varepsilon^2\mathcal{E}^2 S - 2d\,\varepsilon A} = \frac{d}{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon^2\mathcal{E}^2 S}{2d\,A} - \varepsilon}.$$

3.4.

По второму закону Ньютона:



$$\frac{\kappa\,\mathrm{q}_0^2\left(1 - \alpha t\right)^3}{x^2} = mg\,\frac{x}{2l}$$

$$x^3 = \frac{2l\,\kappa\,\mathrm{q}_0^2}{\mathrm{mg}}\left(1 - \alpha t\right)^3$$

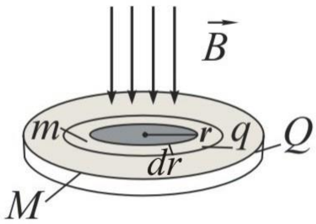
$$x = \sqrt[3]{\frac{2l\,\kappa\,\mathrm{q}_0^2}{\mathrm{mg}}}\left(1 - \alpha t\right)$$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -\alpha\sqrt[3]{\frac{2l\kappa \mathrm{q}_0^2}{\mathrm{mg}}} \qquad \upsilon = \alpha\sqrt[3]{\frac{2l\kappa \mathrm{q}_0^2}{\mathrm{mg}}} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \alpha\sqrt[3]{\frac{l \mathrm{q}_0^2}{2\pi\varepsilon_0 \mathrm{mg}}}$$

3.5.

Разобьем диск на тонкие кольца. На заряд dq кольца действует вихревое электрическое поле:



$$E_в \cdot 2\pi r = \pi r^2 \frac{dB}{dt},$$

$$E_в = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}.$$

Ускоряющая сила

$$dF = dq\,E_в = \frac{r}{2}dq\frac{dB}{dt},$$

с другой стороны, силу можно определить как

$$dF = dm\frac{d\upsilon}{dt},$$

тогда

$$\frac{r}{2}dq\frac{dB}{dt} = dm\frac{d\upsilon}{dt}.$$

Найдем конечную скорость кольца υ

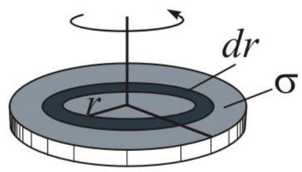
$$dm\,\upsilon = \frac{r}{2}dq\,B,$$

$$\upsilon = \frac{r}{2}B\frac{dq}{dm}.$$

Угловая скорость $\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{B}{2}\frac{dq}{dm} = \frac{B}{2}\frac{Q}{M}$,

$$\omega = \frac{QB}{2M}.$$

3.6.



По определению, величина магнитного момента кругового витка с током равна $dP_m = SdI$, где dI – сила кругового тока и $S = \pi r^2$ – площадь, охватываемая им. Разобьем весь диск на кольца радиуса r и площади $dS = 2\pi rdr$. Заряд каждого такого кольца равен $dq = \sigma dS$. За время равное одному полному обороту этот заряд создает ток силой $dI = dq/T = (\sigma dS)/T$, где T – период обращения диска вокруг своей оси и $T = 2\pi/\omega$. Таким образом, получаем следующее выражение для силы тока:

$$dI = \frac{\omega\sigma 2\pi rdr}{2\pi} = \omega\sigma rdr \cdot$$

Тогда элементарный магнитный момент

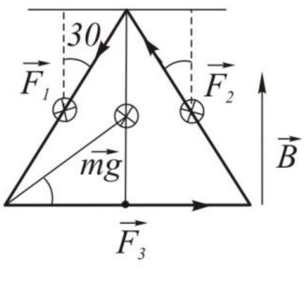
$$dP_m = SdI = \omega\sigma\pi r^3 dr.$$

Интегрируя по всему диску, получим суммарный магнитный момент

$$P_m = \int dP_m = \int_0^R \omega\sigma\pi r^3 dr = \omega\sigma\pi \frac{R^4}{4} = \omega\sigma S\frac{R^2}{4} = \omega q\frac{R^2}{4},$$

$$P_m = \omega q\frac{R^2}{4}.$$

3.7.



$$F_3 = IBa$$

$$F_1 = F_2 = IBa\ \sin 30^0 = IBa\frac{1}{2} = \frac{IBa}{2}$$

$$M_3 = F_3 h = F_3 a\ \sin 60^0 = F_3 a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M_1 = F_1 \frac{a}{2}\cos 30^0 = F_1 \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M_2 = F_2 \frac{a}{2}\cos 30^0 = F_2 \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M_{mg} = mg\, a \sin 60^0 \frac{2}{3} = mg\, a \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3} = mg\, a \frac{\sqrt{3}}{3}$$

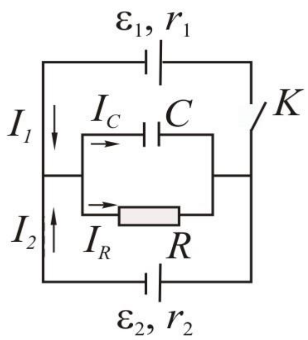
$$F_3\, a \frac{\sqrt{3}}{2} = 2F_1 \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + mg\, a \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$IBa \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = \cancel{2}\frac{IBa}{\cancel{2}}\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + mg\, a \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$IBa^2 \frac{\sqrt{3}}{2} - IBa^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = mg\, a \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$IBa^{\cancel{2}} \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{4} = mg\, \cancel{a} \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{3} \qquad \boxed{I = \frac{4mg}{3aB}}.$$

3.8.



До замыкания ключа

$$I_R = \frac{\varepsilon_2}{R + r_2}$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_C = I_R R = \frac{\varepsilon_2 R}{R + r_2}$$

Сразу после замыкания ключа

I_R и U_C останутся неизменными

Через батарею ε_1 течет ток $I_1 = \dfrac{\varepsilon_1 - U_C}{r_1}$,

через батарею ε_2 течет ток $I_R = I_2$

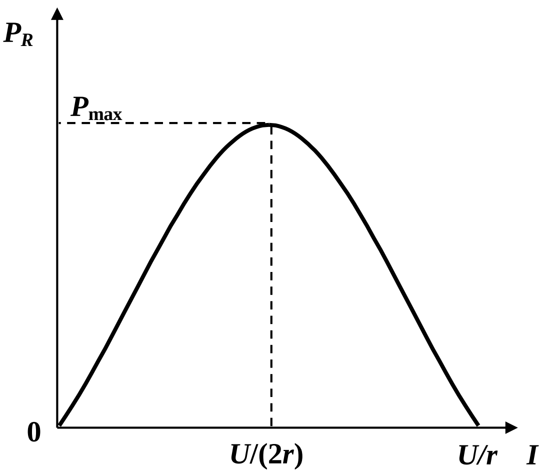
Ток через конденсатор $I_C = I_1 + I_2 - I_R = I_1$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \dfrac{R}{R + r_2}}{r_1} = \frac{\varepsilon_1}{r_1} - \frac{\varepsilon_2 R}{r_1(R + r_2)} = -1A.$$

3.9.

1. Пусть в первом случае сопротивление реостата равно R_1, во втором – равно R_2. По закону Ома имеем:

$$\begin{cases} I_1(r + R_1) = U, \\ I_2(r + R_2) = U \end{cases}, \qquad (1)$$



где $R_1 = \dfrac{P_1}{I_1^2} = 12$ Ом,

$$R_2 = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{6}{5} \text{ Ом.}$$

Решая систему (1), получим

$$U = \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = 36 \text{ В},$$

$$r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = 6 \text{ Ом.}$$

2. Если сопротивление реостата равно нулю, то

$$I_0 = \frac{U}{r} = 6A.$$

3. В общем случае мощность, которая выделяется на переменном сопротивлении R, можно представить в виде:

$$P_R = I^2 R = \frac{U^2 R}{(R + r)^2} \text{ или } P_R = IU - I^2 r,$$

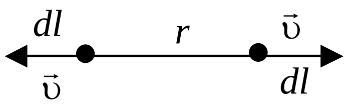
где IU – мощность, развиваемая источником. На рисунке представлена зависимость $P_R(I)$. Это парабола, вершина которой P_{max} соответствует силе тока $U = \dfrac{U}{2r}$. Следовательно, $P_{\max} = \dfrac{U^2}{4r} = \dfrac{U^2 R_m}{(R_m + r)^2}$, откуда $R_m = r$.

Итак,

$P_{\max} = \dfrac{U^2 4r}{} = 54$ Вт, $R_m = 6$ Ом.

3.10.

Дано:	
L-$2L$, t $3L$-$6L$	$dr = 2dl \rightarrow dl = \dfrac{dr}{2}$
t'–?	$\dfrac{kq^2}{L} = \dfrac{kq^2}{r} + m\upsilon^2 \rightarrow \upsilon = \sqrt{\dfrac{kq^2}{m}\left(\dfrac{1}{L} - \dfrac{1}{r}\right)}$



$$t = \int \frac{dl}{\upsilon} = \frac{1}{2}\int_L^{2L} \frac{dr}{\upsilon} = \frac{1}{2}\int_L^{2L} \frac{dr\sqrt{m}}{\sqrt{kq^2\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{r}\right)}};$$

$$t' = \frac{1}{2}\int_{3L}^{6L} \frac{dr\sqrt{m}}{\sqrt{kq^2\left(\frac{1}{3L} - \frac{1}{r}\right)}} = \left| \begin{array}{l} r = 3y \\ dr = 3dy \\ \left(\frac{1}{3L} - \frac{1}{3y}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{y}\right) \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_L^{2L} \frac{3dy\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{kq^2}{3}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{y}\right)}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}\int_L^{2L} \frac{dy\sqrt{m}}{\sqrt{kq^2\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{y}\right)}} = 3\sqrt{3}t.$$

3.11.

$k = 2 \cdot 10^2 \dfrac{В}{с}$ l=1 м	$F = qkt$, $P = m\upsilon = \int F dt$,
Т–?	$m\upsilon = q\dfrac{kt^2}{2}$,

$$l=\int \upsilon dt=\frac{qk}{2m}\int t^2dt=\frac{qk}{2m}\frac{t^3}{3},$$

$$t=\sqrt[3]{\frac{6ml}{kq}};$$

$$T=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{\left(qkt^2\right)^2}{4\cdot 2m}=\frac{(qk)^2}{8m}t^4=\frac{(qk)^2}{8m}\left(\frac{6ml}{qk}\right)^{4/3}=$$

$$=\frac{\left(1,6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^2\right)^2}{8\cdot 0,91\cdot 10^{-30}}\left(\frac{6\cdot 0,91\cdot 10^{-30}\cdot 1}{2\cdot 10^2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}\right)^{4/3}=0,008\text{э}B.$$

3.12.

Дано:	
B_0	$\frac{dB}{Bdt}=-k$, (т.к. $dB<0$)
S_0	$B=B_0e^{-kt}$,
ρ	$\frac{B_0}{2}=B_0e^{-k}$, отсюда получим $k=\ln 2$
r	
Q–?	$B=B_0e^{-(\ln 2)t}$,

$$\Phi = BS$$

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=S\ln 2B_0e^{-t\ln 2}$$

$$Q=\int\frac{\varepsilon^2}{R}dt=\frac{\left(S(\ln 2)B_0\right)^2}{R}\int_0^\infty e^{-t2\ln 2}dt=\frac{\left(SB_0\ln 2\right)^2}{R}\left(-\frac{1}{2\ln 2}e^{-t2\ln 2}\Big|_0^\infty\right)=\frac{S^2(\ln 2)B_0^2}{2R}$$

$$S=\pi r^2, \qquad R=\rho\frac{2\pi r}{S_0}$$

$$Q=\frac{\pi r^3B_0^2(\ln 2)S_0}{2\rho 2}=\frac{\pi r^3B_0^2S_0\ln 2}{4\rho}=\frac{3,14\ln 2}{9,2}=0,237\ \text{Дж}.$$

3.13.

$$\left.\begin{aligned}q_1 &= C(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\\ q_2 &= C(\varepsilon_1)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\Delta q = q_2 - q_1 = C(\varepsilon_2)\\ &A_{ист} = \Delta q\varepsilon_1 = C\varepsilon_2\varepsilon_1\end{aligned}$$

$$W_1 = \frac{C(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{2} = \frac{C}{2}\left(\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2\right)$$

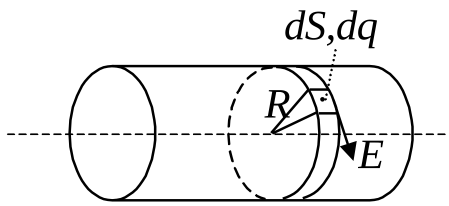
$$W_2 = \frac{C\varepsilon_1^2}{2}$$

$$A_{ист} = Q + W_2 - W_1 \to Q = A_{ист} - W_2 + W_1 =$$

$$= C\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{C\varepsilon_1^2}{2} + \frac{C\varepsilon_1^2}{2} - C\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{C\varepsilon_2^2}{2} = \frac{C\varepsilon_2^2}{2}$$

3.14.

$$(Edq)R = \varepsilon dJ\,, \qquad (1)$$



$$\begin{cases} dJ = \dfrac{R^2}{2}dm \\ dm = \rho_0\pi R^2 dh = \dfrac{\rho_0 R}{2}(2\pi R dh) = \dfrac{\rho_0 R}{2}dS \\ dq = \sigma dS \end{cases}.$$

Подставим dJ, dm, dq в (1), получим:

$$E\,\sigma dS\,R = \varepsilon\frac{R^2}{2}\frac{\rho_0 R}{2}dS\,,$$

$$E\,\sigma = \varepsilon\frac{R^2\rho_0}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = 4\frac{\sigma E}{\rho_0 R^2}\,.$$

$$d\omega = \varepsilon dt = \frac{4\sigma E}{\rho_0 R^2}dt\,,$$

$$E(2\pi R) = \frac{d\Phi}{dt}\,, \qquad Edt = \frac{1}{2\pi R}d\Phi\,,$$

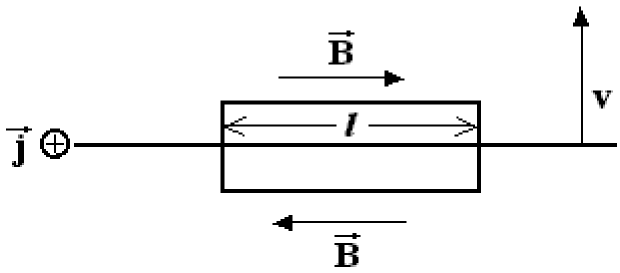
$$d\omega = \frac{4\sigma}{R^2\rho_0}\frac{1}{2\pi R}d\Phi$$

$$\omega = \frac{2\sigma\Delta\Phi}{\pi R^3 \rho_0},$$

$$\Delta\Phi = \pi R^2 B \rightarrow \omega = \frac{2\sigma\pi R^2 B}{\pi R^3 \rho_0} = \frac{2\sigma B}{R\rho_0}$$

$$\omega = \frac{2\sigma B}{Rq_0}.$$

3.15.



$$\oint \vec{B} d\ell = \mu_0 I$$

$$2B\ell = \mu_0 j \ell$$

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}$$

Электрон движется по окружности

$e\upsilon B = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$, R – радиус окружности = максимальное удаление от листа

$$R = \frac{2m\upsilon}{\mu_0 je} \qquad t = \frac{\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi m}{\mu_0 je}$$

3.16.

В данной цепи сопротивление R_5 можно выбросить, так как ток через него не проходит. Обозначим точки подсоединения R_5 через C и D. Рассмотрим две схемы, получающиеся из исходной путем разрыва между точками C и D (рис.3) и закорачивания этих же точек (рис.4).

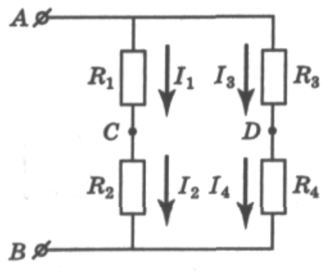


рис.3

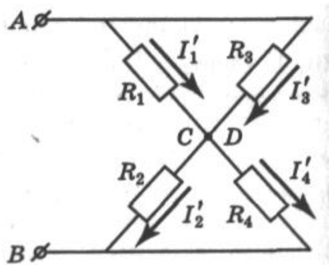


рис.4

Пусть напряжение между клеммами A и B равно U. Тогда силы токов в этих схемах

$I_1 = I_2 = \dfrac{U}{11}$,

$I_3 = I_4 = \dfrac{U}{77}$,

$I_1' = I_2' = \dfrac{U}{11}$, $\qquad I_3' = I_4' = \dfrac{U}{77}$,

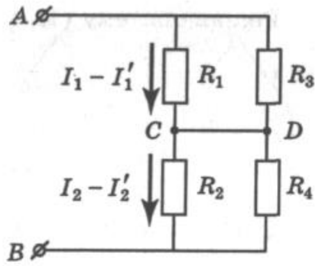


рис.5

Заметим, что силы токов через каждое из сопротивлений R_2, R_3, R_4 одинаковы для обеих схем. Ясно, что схема на рис.5 эквивалентна схеме на рис.4. Сила тока через перемычку CD

$I_5 = I_1 - I_2 = 0.$

Поскольку сила тока на участке CD равна нулю, независимо от величины R_5, то и R_{AB} не зависит от R_5. Таким образом, для расчета сопротивления R_{AB} можно использовать любую из схем на рис. 3 – 5. Воспользуемся схемой на рис.3 и найдем:

$$R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 9{,}625 \text{ кОм}.$$

(Совпадение с R_5 случайно!)

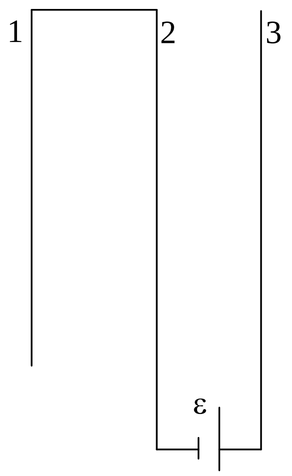
3.17.

d, S, ξ, q_0	Когда $q_0 = 0$ и ключ не замкнут $\xi = U_{2,3} = \frac{q_{03}d}{S\varepsilon_0}$;
$q_{03} - ?\text{q}_3 - ?$	$q_{03} = \frac{\xi S\varepsilon_0}{d}$

Пусть заряды на пластинах после замыкания ключа равны q_1, q_2, и q_3. По закону сохранения заряда

$$q_0 = q_1 + q_2 + q_3. \qquad (1)$$

Заряды каждой пластины создают электрические поля с напряженностями:



$$E_1 = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S}; E_2 = \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S}; E_3 = \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S}.$$

Между пластинами 2 и 3 поддерживается постоянная разность потенциалов, равная ξ:

$$\frac{d}{2\varepsilon_0 S}\left(-q_2 - q_1 + q_3\right) = \xi. \qquad (2)$$

Разность потенциалов между пластинами 1 и 2 равна нулю:

$$\frac{d}{2\varepsilon_0 S}\left(q_3 - q_1 + q_2\right) = 0. \qquad (3)$$

Из (1) и (3)

$$\left.\begin{aligned} q_2 + q_3 &= q_0 - q_1 \\ q_2 + q_3 &= q_1 \end{aligned}\right\} q_0 - q_1 = q_1 \to 2q_1 = q_{0i} \quad q_1 = \frac{q_0}{2} \ (4)$$

$$q_2 = q_1 - q_3 = \frac{q_0}{2} - q_3 \qquad (5)$$

Подставим (4) и (5) в (2): $q_3 - \frac{q_0}{2} - \frac{q_0}{2} + q_3 = \frac{2\varepsilon_0 S\xi}{d}$

$2q_3 = q_0 + \frac{2\varepsilon_0 S\xi}{d}$ $\boxed{q_3 = \frac{q_0}{2} + \frac{\varepsilon_0 S\xi}{d}}$.

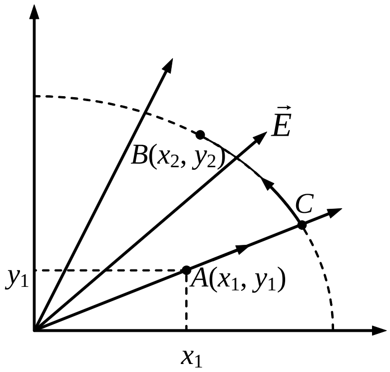
3.18.

1) точка A имеет координаты (x_1, y_1), точка B имеет координаты (x_2, y_2). Найдем

$$\Delta\varphi = \int_{AB} \vec{E}\vec{dl} = \int_{AC} \vec{E}\vec{dl} + \int_{CB} \vec{E}\vec{dl} = \int_{AC} \vec{E}\vec{dl} = \int_{AC} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{a}{r} dr =$$

$$= a\ln r\Big|_{r_1}^{r_2} = a\ln\frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

AC направлена вдоль $\vec{E}$, BC – по дуге окружности $\int\limits_{BC} \vec{E}\vec{dl} = 0$



3.19.

$$E = E_0 - 4\pi P$$

$$E' = 4\pi P = 4\pi P_0\left(\frac{x^2}{d^2} - 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad E_0 = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_+ = -4\pi P_0 \int\limits_0^d \left(\frac{x^2}{d^2} - 1\right) dx = -4\pi P_0\left(\frac{d^3}{3d} - d\right) = \frac{8\pi P_0}{3} d \\ \varphi_- = \ldots = -\frac{8\pi P_0}{3} d_0 \end{cases}$$

$$\Delta\varphi = \frac{16\pi P_0}{3} d$$

3.20.

Ток через источник одинаковый в схемах 2 и 3 и равен 0,3 А. Ток через нагреватель 0,05 А, через резистор 0,3 – 0,05 = 0,25 А, $I_R = 0{,}25$ А. При параллельном соединении резистора и нагревателя $U_R = U_H$, $I_R R = I_H R_H$ $\Rightarrow R = \dfrac{I_H R_H}{I_R} = \dfrac{0{,}05}{0{,}25} R_H = \dfrac{R_H}{5}$. При параллельном соединении резистора и нагревателя общее сопротивление $R_{общ} = \dfrac{R_H}{6}$. По закону Ома для 1 и 3 схемы находим сопротивление реостата:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + R_H} \qquad I_1 r + I_1 R_H = I_3 r + I_3 R_{общ}$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{r + R_{общ}} \qquad (I_3 - I_1)\, r = -I_3 R_{общ} + I_1 R_H$$

$$r = \frac{-I_3 R_{общ} + I_1 R_H}{I_3 - I_1}$$

$$r = \frac{-0{,}3\dfrac{R_H}{6} + 0{,}1 R_H}{0{,}3 - 0{,}1} = \frac{0{,}05}{0{,}2} R_H = 0{,}25 R_H = \frac{R_H}{4}$$

Найдем η. Схема 1

$$\eta_1 = \frac{I_1^2 R_H}{I_1^2 \left(r + R_H\right)} = \frac{R_H}{R_H + r} = \frac{R_H}{R_H + \dfrac{R_H}{4}} = \frac{4}{5} = 80\%$$

Схема 2 и 3

$$\eta_2 = \eta_3 = \frac{I_2^2 R_H}{I_3^2 \left(r + R_{общ}\right)} = \frac{0{,}05^2 R_H}{0{,}3^2 \left(\dfrac{R_H}{6} + \dfrac{R_H}{4}\right)} = 0{,}067 = 6{,}7\%$$

3.22.

$I = I_1 + I_3 = I_2 + I_4$

$U_{AB} = I_3 R + I_2 R = R(I_2 + I_3)$

$U_{AB} = I_1 3R + I_4 R$

$I_3 R + I_2 R = I_1 3R + I_4 R$

$I_3 + I_2 = 3I_1 + I_4$

$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$

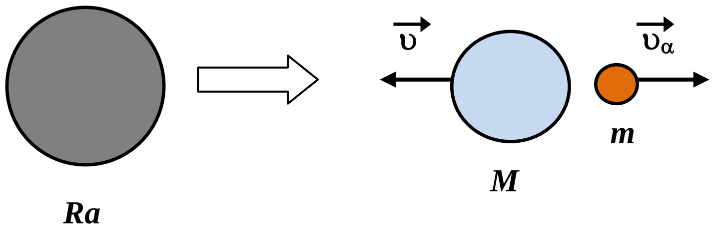
$I_2 - I_1 = 3I_1 - I_2$

$4I_1 = 2I_2$ $\qquad I_2 = 2I_1$

3.29.

$$Ra^{222} \to X^{218} + He^4$$

Из закона сохранения импульса следует:



$$m\upsilon_\alpha - M\upsilon = 0 \Rightarrow \upsilon = \frac{m}{M}\upsilon_\alpha$$

$$\delta = \frac{\dfrac{m\upsilon_\alpha^2}{2}}{\dfrac{m\upsilon_\alpha^2}{2} + \dfrac{M\upsilon^2}{2}} \cdot 100\% = \frac{m\upsilon_\alpha^2}{m\upsilon_\alpha^2 + \dfrac{m^2}{M^2}M\upsilon_\alpha^2} \cdot 100\%$$

$$\delta = \frac{m}{m + \dfrac{m^2}{M}} \cdot 100\% = \frac{m}{m\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)} \cdot 100\% = \frac{M}{m+M} \cdot 100\%$$

$$\delta = \frac{218}{4+218} \cdot 100\% = 98\%$$

3.32.

В первом контуре магнитный поток $\varPhi_1 = L_1 I$. Току первого ребра соответствует магнитный поток $\dfrac{\varPhi_1}{4} = \dfrac{L_1}{4} I$ (1)

Площадь второго контура пересекает собственный магнитный поток шести токов и 2 потока взаимной индукции $\Phi_{вз.}$ (от токов 1 и 4).

$6\frac{\Phi_1}{4} + 2\Phi_{вз} = L_2 I$ или с учетом (1)

$\frac{6}{4}L_1 I + 2\Phi_{вз} = L_2 I$, отсюда $2\Phi_{вз} = \left(L_2 - \frac{3}{2}L_1\right)I$ (2)

Площадь третьего контура пересекает собственный магнитный поток шести токов и шесть потоков взаимной индукции

$6\frac{\Phi_1}{4} + 6\Phi_{вз} = LI$ или с учетом (1) и (2):

$\frac{6}{4}L_1 I + 3\left(L_2 - \frac{3}{2}L_1\right)I = LI$, отсюда $L = \frac{3}{2}L_1 - \frac{9}{2}L_1 + 3L_2 = 3\left(L_2 - L_1\right)$.

3.33.

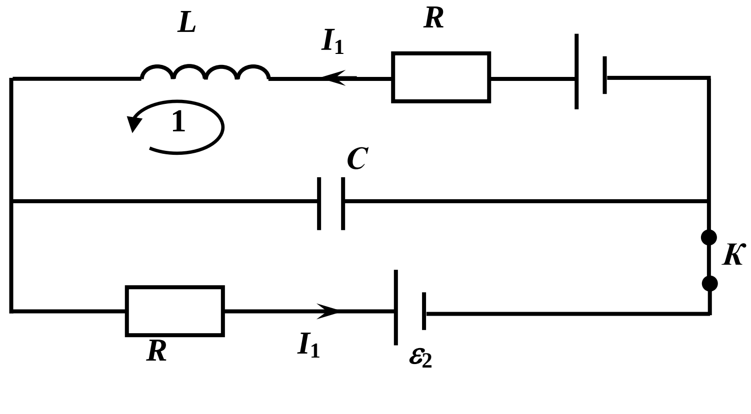
$$\Delta\varphi = \frac{\rho_0 R^2}{12\varepsilon_0}.$$

3.34.

$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2R}$, $W_{L_1} = \frac{LI_1^2}{2} = \frac{L\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2}{8R^2}$ – энергия катушки до отключения ε_2.

Правило Кирхгофа: $I_1 R + U_1 = \varepsilon_1$ (контур 1)

$U_1 = \varepsilon_1 + I_1 R = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \frac{3\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$, $q_1 = U_1 C$, $q_2 = U_2 C$



$U_2 = \varepsilon_1$

$$\Delta q = q_2 - q_1 = C\left(U_2 - U_1\right) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}C.$$

Работа источника $A = \Delta q \varepsilon_1 = \dfrac{\left(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2\right)C}{2}$.

$$A = Q + \Delta W_L + \Delta W_C$$

$$\Delta W_L = 0 - W_{L_1} = -\frac{L\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2}{8R^2}$$

$$\Delta W_C = W_2 - W_1 = \frac{CU_2^2}{2} - \frac{CU_1^2}{2} = \frac{C\varepsilon_1^2}{2} - \frac{C\left(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2}{8}$$

$$Q = A - \Delta W_L - \Delta W_C = \frac{C}{8}\left(-4\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1^2 + 9\varepsilon_1^2 - 6\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2\right) + \frac{L\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2}{8R^2} =$$

$$= \frac{\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)^2}{8}\left(C + \frac{L}{R^2}\right)$$

3.38.

$U_1 = 120$ В

$t_1 = 20$ мин

$U_2 = 110$ В

$t_2 = 28$ мин

$U_3 = 100$ В

---

t_3–?

$$-\begin{cases} Q = \dfrac{U_1^2}{R}t_1 - kt_1 & \times t_2 \\[2mm] Q = \dfrac{U_2^2}{R}t_2 - kt_2 & \times t_1 \end{cases}$$

$$Qt_2 - Qt_1 = \left(U_1^2 t_1 t_2 - U_2^2 t_2 t_1\right)\frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{Q\left(t_2 - t_1\right)}{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_2 t_1} \qquad (1)$$

Из первого уравнения выразим коэффициент k:

$$k = \frac{U_1^2}{R}\frac{\cancel{t_1}}{\cancel{t_1}} - \frac{Q}{t_1} = \left(\frac{U_1^2\left(t_2 - t_1\right)}{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_1 t_2} - \frac{1}{t_1}\right)Q = \frac{\left(U_2^2 t_2 - U_1^2 t_1\right)Q}{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_1 t_2}.$$

$Q = \frac{U_3^2}{R}t_3 - kt_3$, подставим коэффициент k и (1):

$$\cancel{Q} = t_3\left(\frac{U_3^2\left(t_2 - t_1\right)\cancel{Q} - \left(U_2^2 t_2 - U_1^2 t_1\right)\cancel{Q}}{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_1 t_2}\right)$$

$$1 = t_3\left(\frac{U_3^2\left(t_2 - t_1\right) - \left(U_2^2 t_2 - U_1^2 t_1\right)}{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_1 t_2}\right) \Rightarrow t_3 = \frac{\left(U_1^2 - U_2^2\right)t_1 t_2}{U_3^2\left(t_2 - t_1\right) - \left(U_2^2 t_2 - U_1^2 t_1\right)}$$

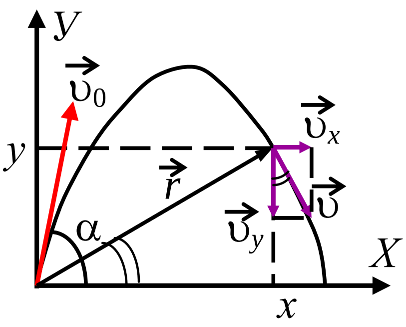
$$t_3 = \frac{\left(120^2 - 110^2\right)20\cdot 28}{100^2\cdot 8 - \left(110^2\cdot 28 - 120^2\cdot 20\right)} = 44{,}1 \text{ мин.}$$

3.39.

$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{1 - \frac{IB}{k2\pi}} = 1{,}05$, радиус кольца увеличится на 5%.

Интернет-Олимпиада 2011

1.



Используя систему координат, показанную на рисунке, движение камня можно описать следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 t\cos\alpha \\ y = \upsilon_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0\cos\alpha \\ \upsilon_y = \upsilon_0\sin\alpha - gt. \end{cases}$$

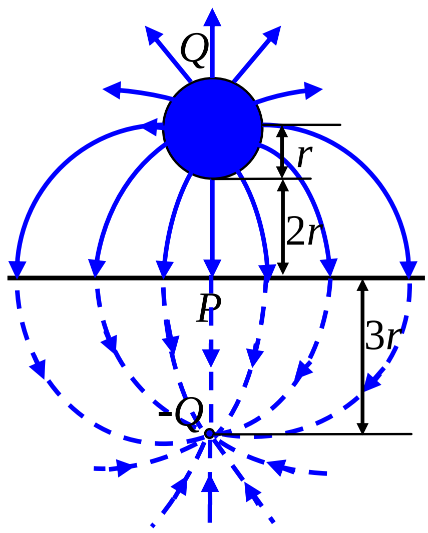
Из условия перпендикулярности вектора скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ и радиус-вектору $\boldsymbol{r}$ и подобия треугольников следует, что $\frac{y}{x} = -\frac{\upsilon_x}{\upsilon_y}$ или

$\frac{\upsilon_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}}{\upsilon_0 t\cos\alpha} = \frac{\upsilon_0\cos\alpha}{gt - \upsilon_0\sin\alpha}$. Здесь учтено, что в момент времени t проекция вектора скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ на ось Y $\upsilon_y < 0$. В результате получим квадратное уравнение для момента времени t, когда это происходит: $g^2t^2-\left(3g\upsilon_0\sin\alpha\right)t+2\upsilon_0^2=0.$

2.

Передадим системе очень малое количество теплоты δQ, приращение энтропии обозначим dS. Тогда согласно определению энтропии $dS=\dfrac{\delta Q}{T}$ это количество теплоты равно $\delta Q = T\,dS = T\,d\,(a + b\,T) = b\,T\,dT$. Следовательно, количество теплоты Q, полученное системой в этом процессе, определяется выражением: $Q=b\int\limits_{T_1}^{T_2}TdT=\dfrac{bT^2}{2}\Bigg|_{T_0}^{3T_0}=4bT_0^2.$

3.



Если близко к поверхности металлической плоскости поднести заряженный пластмассовый шар, то на поверхности проводника собираются заряды противоположного знака (индуцированные поверхностные заряды), в то время как одноименные заряды удаляются от неё. Так будет продолжаться до тех пор, пока результирующее электрическое поле в проводнике не исчезнет. Используем метод электрических изображений. В точке P электрическое поле E_1, созданное зарядом Q,

равно $E_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\left(3r\right)^2}=\dfrac{1}{36\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$. Электрическое поле, которое создается индуцированными поверхностными зарядами, эквивалентно полю зеркально отраженного заряда (-Q), расположенного в глубине под поверхностью на расстоянии $3r$ (см. рис.). Электрическое поле заряда-изображения в точке P имеет ту же величину, и направление, что и поле заряда Q так что, результирующее электрическое поле E будет равно $E=2E_1=\dfrac{1}{18\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$. Электрическое поле непосредственно у поверхности проводника связано с локальной плотностью заряда на его поверхности: $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Отсюда $\sigma = \varepsilon_0 E$. Таким образом, поверхностная плотность зарядов, индуцированных зарядом Q на поверхности проводящей бесконечно протяженной плоскости в точке, расположенной под зарядом, определяется формулой $\sigma = -\dfrac{1}{18\pi}\dfrac{Q}{r^2}$. Знак минус показывает, что индуцированный на поверхности плоскости заряд противоположен по знаку заряду Q.

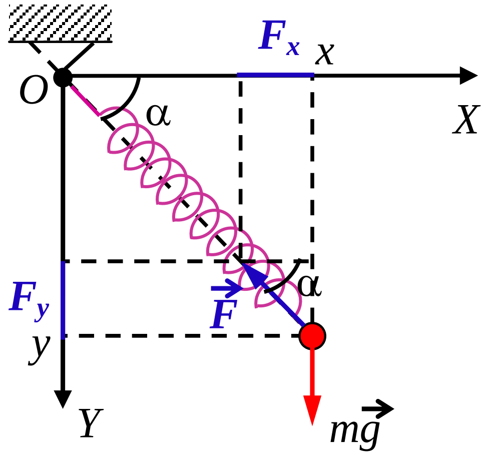
4.

Уравнение движения шарика в точке (x, y) по горизонтали и по вертикали следующие:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -k\Delta L\cos\alpha, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + mg = -k\Delta L\sin\alpha + mg,$$

где F_x и F_y – проекции силы упругости $\boldsymbol{F}$ на оси OX и OY, $\Delta L = \left(\sqrt{x^2+y^2} - L\right)$ - величина деформации пружины, $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\sin\alpha = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (см. рис.).



Следовательно, уравнения движения имеют вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx\frac{\sqrt{x^2+y^2}-L}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky\frac{\sqrt{x^2+y^2}-L}{\sqrt{x^2+y^2}} + mg.$$

Если $\sqrt{x^2+y^2} >> L$, можно пренебречь первоначальной длиной L пружины. Тогда уравнения движения приобретают простой вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky + mg \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y - g = 0.$$

Эти уравнения описывают гармонические колебания относительно начала координат в направлении оси OX и относительно положения равновесия y_0 в направлении оси OY. Использование начальныхусловий дает решение уравнений гармонических колебаний в виде

$$x(t) = L\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t,\quad y(t) = \frac{mg}{k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Шарик находится под точкой подвеса, когда $x(t) = 0$. Следовательно, для момента времени $y(t) = \dfrac{mg}{k} = y_0$.

5.

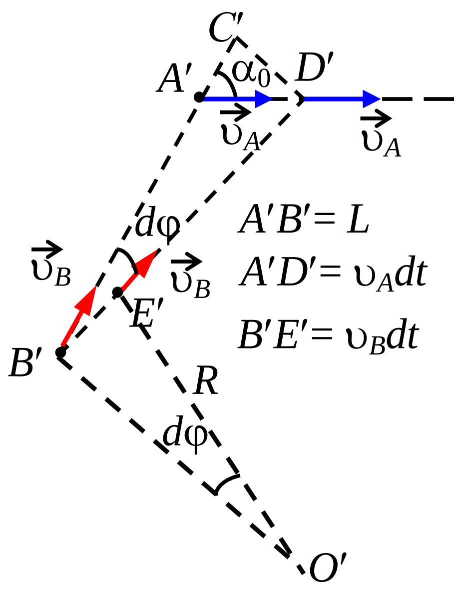
Пусть в некоторый момент скорость велосипедиста составляет угол α с направлением скорости автобуса, тогда скорость сближения велосипеда и автобуса $\upsilon = \upsilon_B - \upsilon_A \cos\alpha$. Минимальное расстояние между участниками получается в тот момент, когда скорость сближения $\upsilon = 0$; значение угла α_0 при этом определяется соотношением $\cos\alpha_0 = \upsilon_B/\upsilon_A$.

6.

Учитывая ответ на предшествующее задание (№5), найдем малый угол $d\varphi$ поворота вектора скорости велосипеда за малый промежуток времени dt. В прямоугольном треугольнике $B'C'D'$ (см. рис.):

$(L + \upsilon_A \cos\alpha_0\, dt)\, d\varphi = \upsilon_A \sin\alpha_0\, dt \Rightarrow \quad d\varphi = \dfrac{\upsilon_A \sin\alpha_0 dt}{L+\upsilon_A\cos\alpha_0 dt} = \dfrac{\upsilon_A\sin\alpha_0 dt}{L}$

здесь учтено, что $L \gg A'C' = \upsilon_A \cos\alpha_0\, dt$ и $C'D' = \upsilon_A \sin\alpha_0\, dt$.



Следовательно, угловая скорость $\omega = d\varphi / dt$ поворота вектора скорости $\boldsymbol{\upsilon_B}$ велосипеда равна $\omega = \dfrac{\upsilon_A\sin\alpha_0}{L} = \dfrac{\upsilon_A}{L}\sqrt{1-\cos^2\alpha_0} = \dfrac{\sqrt{\upsilon_A^2-\upsilon_B^2}}{L}$.

7.

Учитывая ответ на предществующее задание (№6), найдем ускорение велосипеда $a = \omega\upsilon_B = \dfrac{\upsilon_B}{L}\sqrt{\upsilon_A^2 - \upsilon_B^2}$. Здесь учтено, что скорость велосипеда в неподвижной системе отсчета по модулю постоянна; значит, тангенсальное ускорение a_τ велосипеда равно $a_\tau = \dfrac{d\upsilon_B}{dt} = 0.$ Тогда ускорение велосипедиста связано с поворотом вектора его скорости и равно нормальному ускорению $a = a_n = \dfrac{\upsilon_B^2}{R} = \omega\upsilon_B$, где R – радиус кривизны траектории движения велосипеда, $\omega = d\varphi\ /\ dt$ – угловая скорость поворота вектора скорости велосипеда.

8.

Учитывая ответ на предществующее задание (№7), найдем радиус кривизны R траектории движения велосипеда:

$$R = \frac{\upsilon_B^2}{a} = \frac{\upsilon_B^2}{\upsilon_B\sqrt{\upsilon_A^2 - \upsilon_B^2}\Big/L} = \frac{\upsilon_B L}{\sqrt{\upsilon_A^2 - \upsilon_B^2}}.$$

Здесь учтено, что скорость велосипеда в неподвижной системе отсчета по модулю постоянна; значит, тангенсальное ускорение a_τ велосипеда равно $a_\tau = \dfrac{d\upsilon_B}{dt} = 0.$ Тогда ускорение велосипедиста связано с поворотом вектора его скорости и равно нормальному ускорению $a = a_n = \dfrac{\upsilon_B^2}{R}$, где R – радиус кривизны траектории движения велосипеда.

9.

Согласно первому началу термодинамики $\delta Q = dU + \delta A$, где $\delta Q = \nu C\, dT = \nu\alpha T^2\, dT$, $dU = \nu\, C_V\, dT$, C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме, $\delta A = pdV$. Следовательно, первое начало термодинамики для рассматриваемого процесса можно записать в виде
$\nu\alpha T^2\, dT = pdV + \nu\, C_V\, dT.$

10.

Учитывая ответ на предществующее задание $\nu\alpha T^2\, dT = pdV + \nu\, C_V\, dT$ и, используя уравнение Клайперона-Менделеева $pV = \nu RT \;\Rightarrow\; p = \dfrac{\nu RT}{V}$, перепишем первое начало термодинамики в виде

$\nu\alpha T^2\, dT = \nu RT\dfrac{dV}{V} + \nu\, C_V\, dT \Rightarrow \alpha T^2\, dT = RT\dfrac{dV}{V} + C_V\, dT$. Разделив левую и правую части уравнения на RT, получим уравнение $\dfrac{\alpha}{R}TdT = \dfrac{C_V}{R}\dfrac{dT}{T} + \dfrac{dV}{V}$.

11.

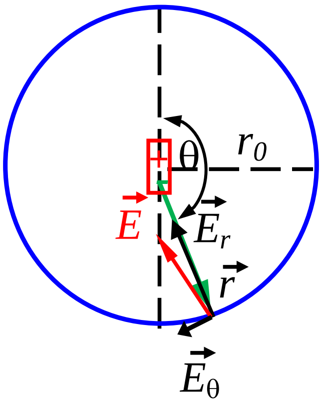
Учитывая ответ на предществующее задание $\dfrac{\alpha}{R}TdT = \dfrac{C_V}{R}\dfrac{dT}{T} + \dfrac{dV}{V}$ и выражение для молярной теплоемкости при постоянном объеме $C_V = iR/2$, после интегрирования получим $\dfrac{\alpha T^2}{2R} = \dfrac{i}{2}\ln T + \ln V + const \Rightarrow$ $\dfrac{\alpha T^2}{2R} = \ln VT^{\frac{i}{2}} + const \Rightarrow VT^{\frac{i}{2}}\exp\left(-\dfrac{\alpha T^2}{2R}\right) = const.$

12.

Учитывая ответ на предществующее задани: $VT^{\frac{i}{2}}\exp\left(-\dfrac{\alpha T^2}{2R}\right) = const$ и, используя уравнение Клайперона-Менделеева в виде $\dfrac{pV}{T} = const$, получим уравнение процесса в пременных (p, T): $p^{-1}T^{\frac{i+2}{2}}\exp\left(-\dfrac{\alpha T^2}{2R}\right) = const.$

13.

Напряженность электрического поля диполя можно рассматривать по его потенциалу $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e\cos\theta}{r^2}$, где p_e – модуль электрического момента диполя, r – расстояние от диполя, θ - полярный угол между осью диполя и направлением в точку наблюдения. Пользуясь взаимосвязью между потенциалом и напряженностью электростатического поля, найдем проекции E_r и E_θ вектора $\boldsymbol{E}$ напряженности поля диполя на полярный радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ и на вектор, проведенный в этой точке поля перпендикулярно $\boldsymbol{r}$ в сторону возрастания полярного угла θ (см. рис.)

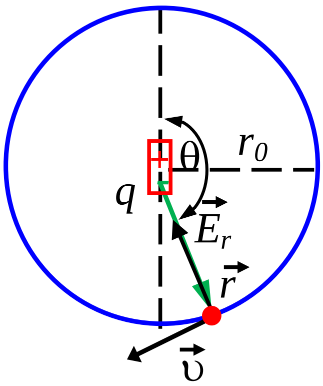


$E_r = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{r^3}$, $E_\theta = -\dfrac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e\sin\theta}{r^3}$. Если рассматриваемая точка находится на кольце, то $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{r_0^3}$, $E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e\sin\theta}{r_0^3}$.

14.

Учтем ответ на предществующее задание $E_r = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{r^3}$.

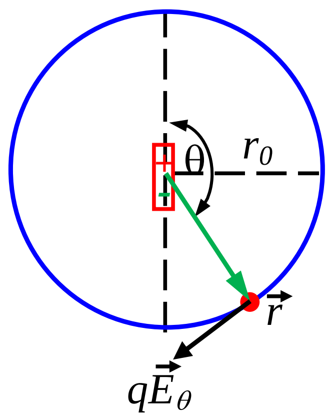
Тогда проекция действующей на бусинку силы на напрвление полярного радиус-вектора ***r*** равна $F_r = qE_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_eq\cos\theta}{r^3}$, $F_r < 0$ при углах $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ и направлена к диполю (см. рис.).



Следовательно, выражение для проекции нормального ускорения $a_n(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения имеет вид $a_n(\theta) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_e\cos\theta}{mr_0^3}$.

15.

Учтем ответ на задание №13 $E_\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p_e\sin\theta}{r_0^3}$. Тогда проекция тангенсальной (касательной) составляющей силы, действующей на заряженную бусинку, равна $F_\tau = qE_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e q\sin\theta}{r^3}$. Отсюда видно,что проекция $F_\tau > 0$ при углах $\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$ и направлена по касательной к траектории движения в сторону возрастания полярного угла θ (см. рис.).



Проекция $F_\tau < 0$ при углах $\pi < \theta \le \frac{3\pi}{2}$ направлена по касательной к траектории движения в сторону убывания полярного угла θ; $F_\tau = 0$ при угле $\theta = \pi$. Следовательно, выражение для проекции тангенциального ускорения $a_\tau(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения имеет вид $a_\tau(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e q\sin\theta}{m r_0^3}$.

16.

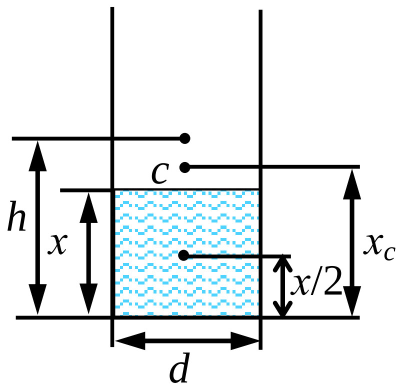
Используем выражение для проекции: $a_\tau(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e q\sin\theta}{m r_0^3}$ (см. ответ на задание №15) и $a_n(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e\cos\theta}{m r_0^3}$ (см. ответ на задание №14).

Получаем выражение для модуля полного ускорения $a(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ между осью диполя и направлением в точку наблюдения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e q\sin\theta}{m r_0^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e q\cos\theta}{m r_0^3}\right)^2} \Rightarrow$

$$a(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_e q}{m r_0^3}\sqrt{3+\cos^2\theta}.$$

17.

Если x – высота столба жидкости, то ее масса $m = \frac{\pi d^2}{4}\rho x = qx$, где $q = \frac{\pi d^2}{4}\rho$ - линейная плотность жидкости (см. рис.).



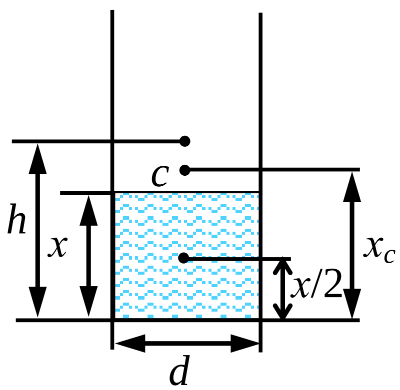
Запишем формулу для определения общего центра масс x_c относительно основания мензурки: $x_c = \dfrac{Mh + m\,x/2}{M+m} = \dfrac{Mh + q\,x^2/2}{M+qx}$.

Для максимальной устойчивости общий центр тяжести должен лежать как можно ниже. Следователльно, $\dfrac{dx_c}{dx} = \dfrac{qx(M+qx) - q\left(Mh + q\,x^2/2\right)}{(M+qx)^2} = 0$

$\Rightarrow\ qMx + q^2x^2 - qMh - q^2\,x^2/2 = 0$. Получили квадратное уравненние для определения высоты x_m столба жидкости: $\dfrac{q}{2}x_m^2 + Mx_m - Mh = 0$, откуда находим $x_m = \dfrac{-M + \sqrt{M^2 + 4(q/2)Mh}}{q} = \dfrac{M}{h}\left(\sqrt{1 + \dfrac{2qh}{M}} - 1\right)$.

18.

Если x – высота столба жидкости, то ее масса $m = \dfrac{\pi d^2}{4}\rho x = qx$, где $q = \dfrac{\pi d^2}{4}\rho$ - линейная плотность жидкости (см. рис.).



Запишем формулу для определения общего центра масс x_c относительно основания мензурки: $x_c = \dfrac{Mh + m\,x/2}{M+m} = \dfrac{Mh + q\,x^2/2}{M+qx}$.

Для максимальной устойчивости общий центр тяжести должен лежать как можно ниже. Следователльно, $\dfrac{dx_c}{dx} = \dfrac{qx\left(M+qx\right) - q\left(Mh + q\,x^2/2\right)}{\left(M+qx\right)^2} = 0$

$\Rightarrow\ qMx + q^2x^2 - qMh - q^2\,x^2/2 = 0.$ Получили квадратное уравненние для определения высоты x_m столба жидкости: $\dfrac{q}{2}x_m^2 + Mx_m - Mh = 0,$ откуда

находим $$x_m = \frac{-M + \sqrt{M^2 + 4\left(q/2\right)Mh}}{q} = \frac{M}{h}\left(\sqrt{1+\frac{2qh}{M}} - 1\right) \Rightarrow$$

$$x_m = \frac{0{,}1\cdot 4}{3{,}14\cdot 0{,}06^2\cdot 10^3}\left(\sqrt{1+\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}06^2\cdot 10^3\cdot 0{,}1}{4\cdot 0{,}1}} - 1\right) \approx 56\,мм.$$

19.

Передадим системе малое количество теплоты δQ, бесконечно малое приращение температуры обозначим dT. Первое начало термодинамики $\delta Q = dU + \delta A$ для рассматриваемого процесса можно представить в виде: $C\,dT = \nu\ C_V\,dT + p dV = \nu\ C_V\,dT + \nu RT\dfrac{dV}{V}$, где $\delta A = pdV$ – элементарная работа, совершенная идеальным газом против внешних сил, $dU = \nu\,C_V\,dT$ – бесконечно малое приращение внутренней энергии газа, $C_V = \dfrac{3}{2}R$ – молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при постоянном объеме, p – давление идеального газа, равное $p = \dfrac{\nu RT}{V}$ согласно уравнению Клайперона-Менделеева $pV = \nu RT$. Отсюда получаем уравнение $\left(C - \nu C_V\right)dT = \nu RT\dfrac{dV}{V} \Rightarrow \left(C - \nu C_V\right)\dfrac{dT}{T} = \nu R\dfrac{dV}{V}$. Проинтегрируем это равенство, учитывая, что $(C - \nu\,C_V) = const$, температура меняется от величины T до $T + \Delta T$, а объем – от величины V до 20 V. В результате получаем: $$\left(C - \nu C_V\right)\int_T^{T+\Delta T}\frac{dT}{T} = \nu R\int_V^{20V}\frac{dV}{V} \Rightarrow$$

$$\left(C-\nu C_V\right)\ln\frac{T+\Delta T}{T}=\nu R\ln 20 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{T+\Delta T}{T}\right)^{\left(C-\nu C_V\right)}=20^{\nu R} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{T+\Delta T}{T}=20^{\frac{\nu R}{C-\nu C_V}} \Rightarrow \Delta T=T\left(20^{\frac{\nu R}{C-\nu C_V}}-1\right).$$

20.

Передадим системе малое количество теплоты δQ, бесконечно малое приращение температуры обозначим dT. Первое начало термодинамики $\delta Q = dU + \delta A$ для рассматриваемого процесса можно представить в виде: $C\,dT = \nu\, C_V\, dT + pdV = \nu\, C_V\, dT + \nu RT\dfrac{dV}{V}$, где $\delta A = pdV$ – элементарная работа, совершенная идеальным газом против внешних сил, $dU = \nu\, C_V\, dT$ – бесконечно малое приращение внутренней энергии газа, $C_V=\dfrac{3}{2}R$ – молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при постоянном объеме, p – давление идеального газа, равное $p=\dfrac{\nu RT}{V}$ согласно уравнению Клайперона-Менделеева $pV = \nu RT$. Отсюда получаем уравнение $\left(C-\nu C_V\right)dT=\nu RT\dfrac{dV}{V} \Rightarrow \left(C-\nu C_V\right)\dfrac{dT}{T}=\nu R\dfrac{dV}{V}$. Проинтегрируем это равенство, учитывая, что $(C - \nu\, C_V) = const$, температура меняется от величины T до $T + \Delta T$, а объем – от величины V до $20\,V$. В результате получаем: $\left(C-\nu C_V\right)\displaystyle\int_T^{T+\Delta T}\frac{dT}{T}=\nu R\int_V^{20V}\frac{dV}{V} \Rightarrow$

$$\left(C-\nu C_V\right)\ln\frac{T+\Delta T}{T}=\nu R\ln 20 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{T+\Delta T}{T}\right)^{\left(C-\nu C_V\right)}=20^{\nu R} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{T+\Delta T}{T}=20^{\frac{\nu R}{C-\nu C_V}} \Rightarrow \Delta T=T\left(20^{\frac{\nu R}{C-\nu C_V}}-1\right).$$

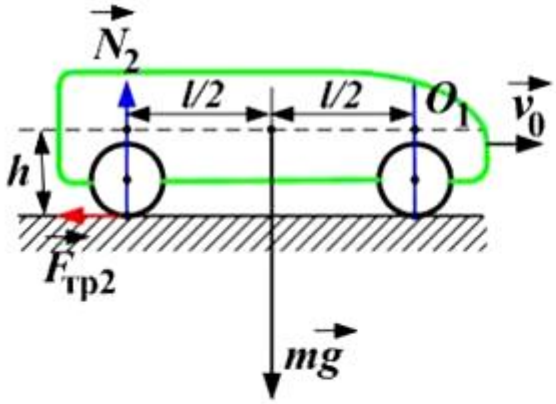
Тогда увеличение температуры ΔT гелия равно

$$\Delta T=T\left(20^{\frac{\nu R}{C-\nu C_V}}-1\right)=300\left(20^{\frac{8,31}{1000-1,5\cdot 8,31}}-1\right)\approx 7,66.$$

Следовательно, ответ в виде целого числа равен $100\cdot\Delta T = 766$.

Интернет-Олимпиада 2012

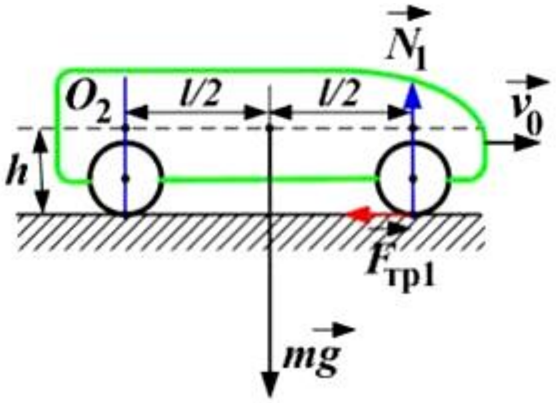
1.



Для случая торможения только задними колесами запишем уравнение моментов сил относительно точки O_1: $N_2 l - \frac{mgl}{2} + \mu N_2 h = 0$, откуда сила реакции полотна дороги на эти колеса $N_2 = \frac{mg}{2(1+\mu h/l)}$.

Работа силы трения $F_{тр2} = \mu N_2$ при этом определяется выражением $A_2 = \mu N_2 L_2 \cos\pi = -\frac{\mu mgL_2}{2(1+\mu h/l)}$.

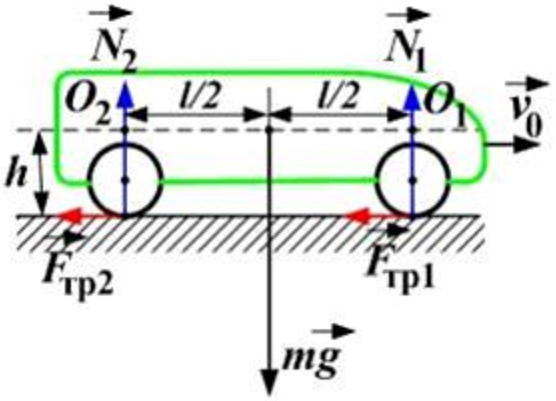
2.



Для случая торможения только передними колесами запишем уравнение моментов сил относительно точки O_2: $\frac{mgl}{2} - N_1 l - +\mu N_1 h = 0$, откуда сила реакции полотна дороги на эти колеса $N_1 = \frac{mg}{2(1-\mu h/l)}$.

Работа сил трения $F_{тр1} = \mu N_1$ при этом определяется выражением $A_1 = \mu N_1 L_1 \cos\pi = -\frac{\mu mgL_1}{2(1-\mu h/l)}$.

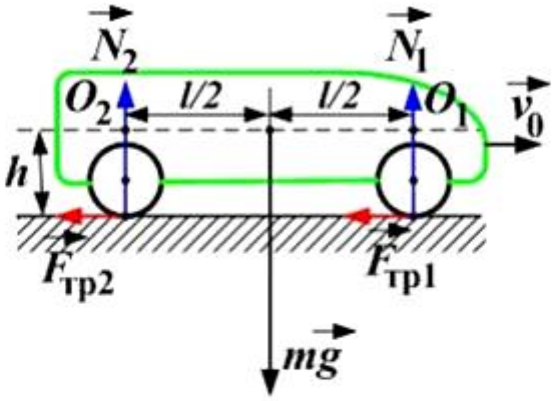
3.



При торможении всеми четырьмя колесами общая сила реакции $N_1 + N_2$ полотна дороги на передние и задние колеса равна $N_1 + N_2 = mg$. Тогда общая работа A_3 сил трения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$ равна $A_3 = \mu(N_1 + N_2)\ \ L_3\cos\pi = -\mu\ \ mg\ L_3$, где L_3 – длина тормозного пути в том случае, когда колодками одновременно зажимают и передние и задние колеса.

4.

Для случая торможения задними колесами работа силы трения равна $A_2 = -\dfrac{\mu mgL_2}{2(1+\mu h/l)}$ (см. ответ на задание №1). Аналогично, при торможении передними колесами работа сил трения равна $A_1 = -\dfrac{\mu mgL_1}{2(1-\mu h/l)}$ (см. ответ на задание №2).



При торможении всеми четырьмя колесами: $A_3 = -\mu mgL_3$, где L_3 – длина тормозного пути в том случае, когда колодками одновременно зажимают и передние, и задние колеса (см. ответ на задание №3). Поскольку согласно закону сохранения и превращения энергии кинетическая энергия при торможении преобразуется в тепло, равное модулю работы силы трения, то при одинаковой начальной скорости υ_0 автомобиля для всех случаев выполняются равенства: $\dfrac{m\upsilon_0^2}{2} = |A_1| = |A_2| = |A_3|$.

Следовательно

$$\frac{\mu mgL_2}{2(1+\mu h/l)} = \frac{m\upsilon_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{(1+\mu h/l)\upsilon_0^2}{\mu g}$$

$$\frac{\mu mgL_1}{2(1-\mu h/l)} = \frac{m\upsilon_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{(1-\mu h/l)\upsilon_0^2}{\mu g}$$

$$L_1 + L_2 = \frac{2\upsilon_0^2}{\mu g} = 4\frac{\upsilon_0^2}{2\mu g} = 4L_3,$$

так как $\mu mgL_3 = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad L_3 = \dfrac{\upsilon_0^2}{2\mu g}$. Тогда окончательно получаем $L_3 = \dfrac{L_1 + L_2}{4}$.

5.

При охлаждении чайник с горячей водой отдает окружающей среде бесконечно малое количество теплоты $\delta Q = (cm + C_0)\, dt$. Коэффициент теплоотдачи k выключенного из сети нагретого чайника определяется количеством теплоты, переданным в единицу времени через поверхность чайника при разности температур между поверхностью и окружающей средой в 1 К. Следовательно, справедливо равенство ($cm + C_0$) dt = -k($t - t_0$) $d\tau$, где t – температура чайника с горячей водой массой m в момент времени τ, dt – изменение его температуры за время $d\tau$.

6.

При охлаждении чайника с горячей водой справедливо равенство ($cm + C_0$) dt = -k($t - t_0$) $d\tau$, где m – масса воды в чайнике, dt – изменение его температуры за время $d\tau$ (см. ответ на задание №5). Перепишем уравнение:

$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{k\left(t - t_0\right)}{cm + C_0}$. В начале охлаждения при температуре $t = t_f$:

$B = \frac{dt}{d\tau} = -\frac{k\left(t_f - t_0\right)}{cm + C_0}$. Скорость уменьшения температуры нагретого чайника после отключения от сети $B = \frac{dt}{d\tau}$ равна угловому коэффициенту графика зависимости $t(\tau)$ в точке $\tau = 0$.

7.

Учитывая ответ на задание №5 ($cm + C_0$) dt = -k($t - t_0$) $d\tau$, после интегрирования уравнения $\int\limits_{t_f}^{t} \frac{dt}{\left(t - t_0\right)} = -\frac{k}{cm + C_0}\int\limits_{0}^{\tau} d\tau$ получим:

$$t - t_0 = \left(t_f - t_0\right)\exp\left(-\frac{k\tau}{cm + C_0}\right).$$

Следовательно, зависимость температуры t чайника с горячей водой массой m от времени τ при охлаждении после отключения от сети определяется выражением

$$t = t_0 + \left(t_f - t_0\right)\exp\left(-\frac{k\tau}{cm + C_0}\right).$$

8.

Согласно ответам на предшествующие задания №6 и №7, скорость уменьшения температуры нагретого чайника с горячей водой массой m после отключения от сети равна $B = -\frac{k\left(t_f - t_0\right)}{cm + C_0}$ и зависимость его температуры t от времени τ определяется выражением $t = t_0 + \left(t_f - t_0\right)\exp\left(-\frac{k\tau}{cm + C_0}\right)$. Выразим зависимость разности температур нагретого чайника с водой и окружающей среды от времени через скорость охлаждения:

$$t - t_0 = (t_f - t_0)\exp\left(-\frac{k\tau}{cm + C_0}\right) = (t_f - t_0)\exp\left(-\frac{|B|\tau}{t_f - t_0}\right).$$

Тогда, если τ равно характерному времени τ_0, за которое разность температур $t_f - t_0$ уменьшится в $e = 2{,}7$ раз, то $t - t_0 = \dfrac{t_f - t_0}{e}$. Следовательно, после преобразований получаем $e = \exp\left(\dfrac{|B|\tau}{t_f - t_0}\right)$. Тогда

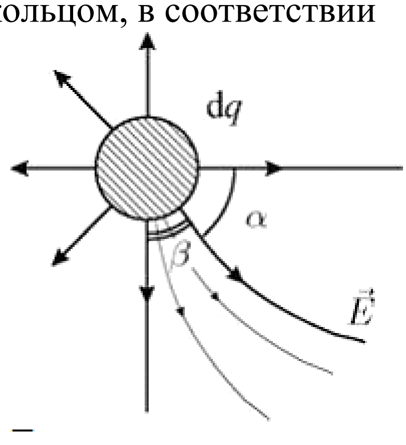
$$\tau_0 = \frac{t_f - t_0}{|B|} = \frac{80 - 20}{0{,}080} = 750\,c.$$

9.

Поле, создаваемое равномерно заряженным кольцом, является неоднородным. Поток вектора напряженности Φ_E в этом случае выражается интегралом $\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_S E_n dS,}$ где E_n – проекция вектора напряженности $\boldsymbol{E}$ на нормаль $\boldsymbol{n}$ к поверхности элементарного участка диска площадью dS, зависящая от положения этого участка на диске. Интегрирование выполняется по всей пронизываемой линиями напряженности поверхности диска площадью $S = \pi R^2$.

10.

Поток $\Phi_{полн}$, создаваемый всем заряженным кольцом, в соответствии с принципом суперпозиции, складывается из потоков $d\Phi_{полн}$, создаваемых элементами заряженного кольца. Электрическое поле элемента кольца в непосредственной близости от него почти не отличается от поля равномерно заряженной прямолинейной нити. Силовые линии этого поля изображены на рисунке. Так как угол $\alpha = 45^0$, то через диск проходят лишь те силовые линии, которые выходят из кольца под углом



$0° \le \beta \le \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 45°.$ Вследствие симметрии поля вокруг прямолинейной заряженной нити этим углам β соответствует лишь 1/8 полного потока поля нити, равного согласно принципу суперпозиции и теореме

Гаусса $\Phi_{полн} = \int d\Phi_{полн} = \int \frac{dq}{\varepsilon_0} = \int\limits_0^{4\pi R} \frac{\tau dl}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R\tau}{\varepsilon_0}$, где $dq = \tau\, dl$ – заряд малого участка нити длиной dl, а ε_0 – электрическая постоянная.

В результате поток Φ^* вектора напряженности электрического поля заряженного кольца через произвольное параллельное диску сечение трубки, ограниченной силовыми линиями, которые проходят через кольцо и край диска, равен $\boxed{\Phi^* = \frac{1}{8}\Phi_{полн} = \frac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}.}$

11.

Из теоремы Гаусса для электростатического поля в вакууме следует, что поток поля остается постоянным внутри выделенной в пространстве трубки, образующими которой являются силовые линии. В самом деле, в объеме такой трубки, ограниченной двумя сечениями, нет электрических зарядов, и, в соответствии с теоремой Гаусса, поток через границу этого объема равен нулю. Поток через боковую поверхность трубки равен нулю по определению силовых линий. Следовательно, потоки через сечения трубки равны по модулю. Применим свойство постоянства потока. Учитывая, что поток вектора напряженности Φ_E неоднородного поля равномерно заряженного кольца через поверхность диска площадью $S = \pi R^2$ выражается интегралом $\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_S E_n dS$, (см. ответ задания №9) и поток Φ^* этого вектора через произвольное параллельное диску сечение, ограниченной силовыми линиями, выходящими из кольца под углом $\alpha = 45^0$ к его оси и касающимися края диска, равен $\Phi^* = \frac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}$ (см. ответ задания №10), получим искомый поток $\boxed{\Phi_E = \frac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}}.$

12.

Из соображения симметрии следует, что искомая сила направлена перпендикулярно плоскости диска. Поэтому для ее нахождения следует сложить лишь те составляющие сил, приложенных к каждому заряду dq элемента диска, которые направлены перпендикулярно плоскости диска:

$$F = \int E_n dq = \sigma \int E_n dS = \sigma \Phi_E,$$

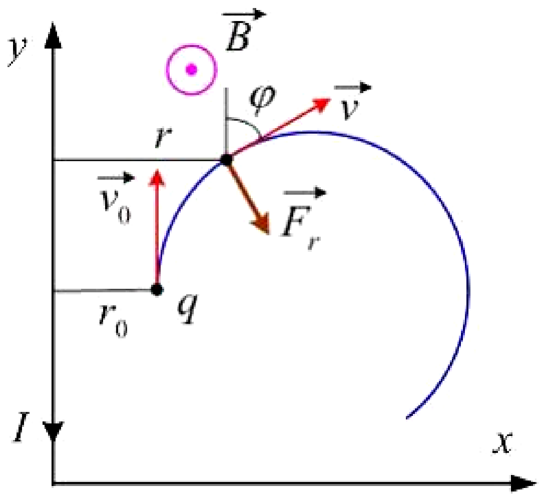
где $\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{q}{\pi R^2}$ – поверхностная плотность равномерно заряженного диска зарядом q, dq – заряд элементарного участка заряженной поверхности диска площадью dS, E_n - проекция вектора напряженности электрического поля заряженного кольца на нормаль ***n*** к поверхности диска, $\Phi_E = \dfrac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0}$ - поток напряженности электрического поля заряженного кольца через поверхность диска площадью S (см. ответ задания №11). Здесь учтено, что диск при вычислении потока рассматривался в указанной ситуации исключительно как геометрический объект (не содержащий каких-либо зарядов) и не рассматривались тонкости определения и вычисления потока электростатического поля через заряженную поверхность, которых в этой ситуации много. Например, казалось бы, заряд на плоскости не может повлиять на поток в месте своего расположения (так как из него выходит «поровну» силовых линий как по одну, так и по другую сторону плоскости диска). Но эти силовые линии затем могут «развернуться» и пересечь диск в другом месте, создав там дополнительный поток. Однако все подобные эффекты соответствуют только внутренним силам взаимодействия между частями диска и не влияют на силу взаимодействия диска с кольцом.

В результате сила взаимодействия определяется выражением:

$$F = \frac{\sigma\pi R\tau}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{\pi R^2}\frac{\pi R\tau}{2\varepsilon_0} = \frac{q\tau}{2R\varepsilon_0}.$$

13.

Длинный прямолинейный провод, по которому течет ток I, создает вблизи некоторой точке, удаленной от него на расстояние r, магнитное поле, модуль индукции которого находится по формуле: $B(r) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$. На движущуюся заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца.



На рисунке показаны направление тока, текущего в проводнике, начальная скорость частицы $\boldsymbol{\upsilon_0}$, скорость $\boldsymbol{\upsilon}$ в произвольный момент времени, направление индукции магнитного поля ***B***, а также сила Лоренца $\boldsymbol{F_r}$:

Поскольку векторы $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\boldsymbol{F_r}$ лежат в одной плоскости, траектория движения лежит в плоскости XY декартовой системы координат, указанной на рисунке.

Запишем уравнение движения частицы в проекции на ось $У$.

При этом учтем, что проекция силы Лоренца $F_r = q\upsilon B(r)\sin 90^0 = q\upsilon B(r)$ на выбранную ось равна

$$F_{ry} = -F_r \sin\varphi = -q\upsilon B(r)\sin\varphi = -q\upsilon_x B(r) = -q\frac{dx}{dt}B(r) = -q\frac{dr}{dt}\frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где φ - угол, который образует скорость частицы υ с осью $У$. Тогда уравнение движения частицы в проекциях на выбранную ось, записанное на основе второго закона Ньютона, принимает вид:

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2} = -q\frac{dr}{dt}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}}.$$

14.

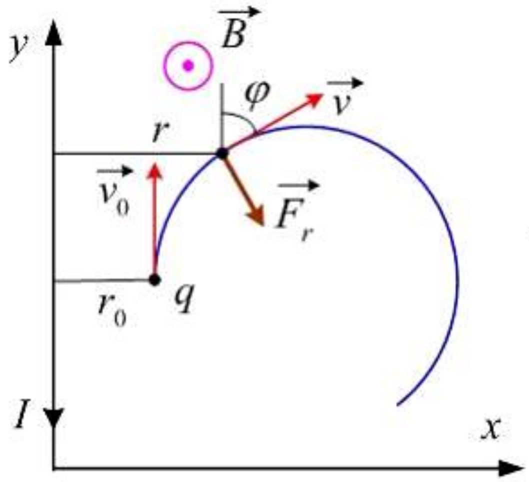
Уравнение движения частицы в проекциях на ось y имеет вид

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -q\frac{dr}{dt}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ (см. ответ на задание №13), или}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu_0 qI}{2\pi r}\frac{dr}{dt} = 0.$$

Интегрируя это уравнение с учетом того, что в момент времени $t = 0$ производная $\frac{dy}{dt} = \upsilon_0$, а расстояние $r = r_0$, получаем $\frac{dy}{dt} = \upsilon_0 - \frac{\mu_0 qI}{2\pi m}\ln\frac{r}{r_0}$.

Поскольку сила Лоренца не меняет модуль скорости $\upsilon = \upsilon_0$, то проекция скорости частицы на ось y равна $\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \upsilon_0\cos\varphi$ (см. рис.). Тогда для нахождения зависимости расстояния частицы от провода в процессе движения от угла, который образует ее скорость υ с осью y, перепишем уравнение



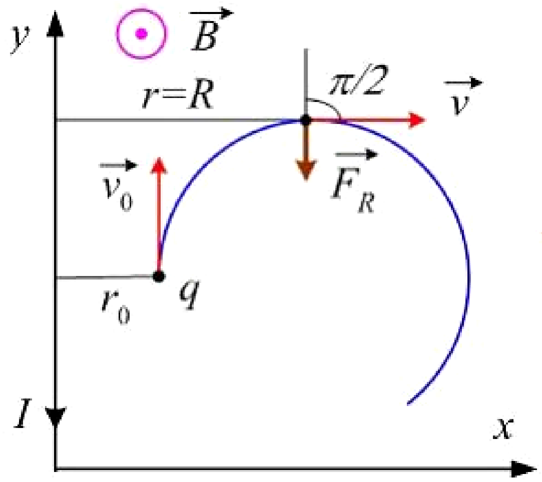
$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_0 - \frac{\mu_0 qI}{2\pi m}\ln\frac{r}{r_0} \text{ следующим образом:}$$

$$\boxed{r = r_0 \exp\left[2\pi\frac{m\upsilon_0}{\mu_0 qI}(1-\cos\varphi)\right]}.$$

15.

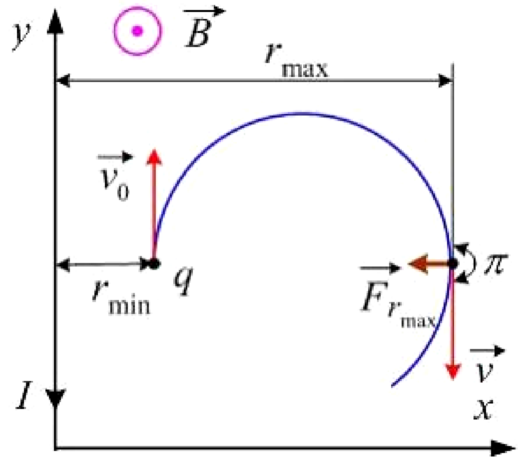
Из выражения зависимости расстояния частицы от провода в процессе движения от угла φ, который образует ее скорость υ с осью *y*, $r = r_0 \exp\left[2\pi \frac{m\upsilon_0}{\mu_0 qI}(1-\cos\varphi)\right]$ (см. ответ на задание №14), учитывая условие перпендикулярности скорости частицы проводу при равенстве расстояния $r = R$ (см. рис.) Получаем, что расстояние R, на котором касательная к траектории движения становится перпендикулярной к проводу, равно

$$\boxed{r = R = r_0 \exp\left[\frac{2\pi m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]}.$$



16.

Из выражения зависимости расстояния частицы от провода в процессе движения от угла φ, который образует ее скорость υ с осью *y*, $r = r_0 \exp\left[2\pi \frac{m\upsilon_0}{\mu_0 qI}(1-\cos\varphi)\right]$ (см. ответ на задание №14), учитывая, что $\varphi = 0$ при минимальном расстоянии $r = r_{\min}$ и $\varphi = \pi$ при максимальном расстоянии $r = r_{\max}$ (см. рис.). Получаем соответственно $r_{\min} = r_0$ и $r_{\max} = r_0 \exp\left[\frac{4\pi m\upsilon_0}{\mu_0 qI}\right]$.



17.

Так как рассматриваемый необратимый адиабатический процесс происходит без теплообмена с окружающей средой: $Q = 0$, и, в соответствии с условием задачи, считается, что при его протекании работа не совершается: $A = 0$, то из первого начала термодинамики $Q = \Delta U + A$ следует сохранение внутренней энергии фотонного газа: $\Delta U = 0 \Leftrightarrow U = \text{const}$. Тогда имеем:

$$\Delta U = 12\alpha T^3 V \Delta T_e + 3\alpha T^4 \Delta V = 0.$$

Отсюда следует $\boxed{\Delta T_e = -\dfrac{T}{4V}\Delta V.}$

18.

Применяя к фотонному газу известное термодинамическое соотношение $\delta Q = TdS = dU + pdV$, с учетом $p(T) = \alpha T^4 = \dfrac{4\sigma}{3c}T^4$ и внутренней энергии фотонного газа, заполняющего при температуре T полость объемом V, $U(V, T) = 3\alpha T^4 V = \dfrac{4\sigma}{3c}T^4 V$ получаем

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} = \frac{16\sigma}{c}T^2VdT + \frac{4\sigma}{c}T^3dV + \frac{4\sigma}{3c}T^3dV = \frac{16\sigma}{c}T^2VdT + \frac{16\sigma}{3c}T^3dV =$$
$$= d\left(\frac{16\sigma}{3c}T^3V\right).$$

Считая, что энтропия $S \to 0$ при условии $T \to 0$ (см. третье начало термодинамики или теорему Нернста-Планка: энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения к нулю Кельвина: $\lim\limits_{T\to 0} S = 0.$), находим, что энтропия фотонного газа определяется выражением вида: $\boxed{S = \dfrac{16\sigma}{3c}T^3V = 4\alpha T^3V.}$

19.

В случае обратимого адиабатического процесса должна сохраняться энтропия фотонного газа: $S = const \Leftrightarrow \Delta S = 0$. Поэтому, учитывая ответ на предшествующее задание №18, получаем $\Delta S = 12\alpha T^2V\Delta T_0 + 4\alpha T^3\Delta V = 0$. Отсюда изменение температуры ΔT_0 фотонного газа в случае обратимого адиабатического процесса равно $\Delta T_0 = -\dfrac{T}{3V}\Delta V$.

20.

Согласно ответу задания №17 при необратимом адиабатическом охлаждении, если считать, что при его протекании работа не совершается: $A = 0$, изменение температуры равно

$$\Delta T_e = -\frac{T}{4V}\Delta V.$$

В случае обратимого адиабатического процесса изменение температуры равно (см. ответ на задание №19)

$$\Delta T_0 = -\frac{T}{3V}\Delta V.$$

Тогда отношение $\cdot\Delta T_e / \Delta T_0$ равно

$$\frac{\Delta T_e}{\Delta T_e} = \frac{\left(-T\Delta V\right)/\left(4V\right)}{\left(-T\Delta V\right)/\left(3V\right)} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Следовательно ответ в виде целого числа равен $100\cdot\Delta T_e / \Delta T_0 = 75$. Как следует из полученных результатов, охлаждение фотонного газа зависит от того, какой адиабатический процесс (обратимый или необратимый)над ним осуществляется. При этом обратимое адиабатическое расширение фотонного газа обеспечивает его более интенсивное охлаждение, чем необратимое.

Учебное издание

КОРОТЧЕНКО Константин Борисович
КРАВЧЕНКО Надежда Степановна
МОРЖИКОВА Юлия Борисовна
РУДКОВСКАЯ Вера Фёдоровна
СИНИЦЫН Евгений Александрович
ТОЛМАЧЕВА Нелла Дмитриевна
ШАМШУТДИНОВА Варвара Владимировна

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Зарегистрировано в Издательстве ТПУ
Размещено на корпоративном портале ТПУ
в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru