Лекционные наброски на тему “Бета и гамма функции”

Содержание.

1. Бета–функция

определяется равенством

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx. \tag{1}$$

Интеграл в правой части называется **интегралом Эйлера первого рода**. Если $a<1$ и $b<1$, то этот интеграл является несобственным на верхнем и нижнем пределах и сходится при $a>0$ и $b>0$. В противном случае интеграл расходится.

Симметрия. Покажем, что функция $B(a,b)$ является симметричной относительно перестановки ее аргументов, то есть

$$B(a,b) = B(b,a). \tag{2}$$

Действительно, выполнив замену переменной

$$t = 1-x, \quad dt = -dx,$$

получим заявленное утверждение:

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt = B(b,a).$$

Второе представление бета-функции. Выполнив подстановку $x = \cos^2\varphi$, получим

$$B(a,b) = -\int_{\pi/2}^{0} \cos^{2a-2}\varphi\,(1-\cos^2\varphi)^{b-1}\,2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \\ = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\varphi\ \sin^{2b-1}\varphi\,d\varphi. \tag{3}$$

Пример 1.

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi.$$

Пример 2.

$$B(1,b) = 2\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\ \sin^{2b-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{b}.$$

Пример 3.

$$B(a,a) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\varphi\ \sin^{2a-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2^{2a-2}}\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^{\pi} \sin^{2a-1}t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2^{2a-1}}\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}t\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2a-1}t\, dt\right).$$

Покажем, что второй интеграл в правой части последнего равенства совпадает с первым. Сделаем замену $x = \pi - t$ и воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin(\pi - x) = \sin x$:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2a-1}t\, dt = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^{2a-1}x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}x\, dx.$$

Из формулы (3) следует, что

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}t\, dt = B\left(\frac{1}{2},a\right).$$

Таким образом,

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right). \tag{4}$$

Рекуррентное соотношение. Преобразуем интеграл (1), используя формулу интегрирования по частям:

$$u = (1-x)^{b-1}, \quad du = -(b-1)(1-x)^{b-2}dx,$$

$$dv = x^{a-1}dx, \quad v = \frac{1}{a}x^a = \frac{1}{a}\left(x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)\right).$$

Тогда

$$B(a,b) = (1-x)^{b-1}\frac{x^a}{a}\bigg|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx.$$

Если $b > 1$, то первый член в правой части этого равенства обращается в ноль при подстановке пределов, а подынтегральную функцию второго члена можно представить в виде

$$x^a(1-x)^{b-2} = x^{a-1}(1-x)^{b-2}\big(1-(1-x)\big) =$$
$$= x^{a-1}(1-x)^{b-2} - x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Тогда

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a}\left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\right) =$$
$$= \frac{b-1}{a}\big(B(a,b-1) - B(a,b)\big),$$

что влечет

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1). \tag{5}$$

Учитывая свойство симметрии (2) бета – функции, получим

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b). \tag{6}$$

Сопоставляя выражения (5) и (6), получим

$$(b-1)B(a,b-1) = (a-1)B(a-1,b).$$

В терминах обозначений

$$p = b-1, \quad q = a-1$$

последнее равенство принимает вид

$$B(p,q+1)=\frac{q}{p}B(p+1,q). \tag{7}$$

Если $b=n$ – натуральное число, то из равенства (5) следует, что

$$B(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\frac{n-3}{a+n-3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}\cdot B(a,1).$$

Однако

$$B(a,1)=\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a}$$

и, следовательно,

$$B(a,n)=B(n,a)=\frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}.$$

Считая, что $a=m$ – натуральное число, получим равенство

$$B(m,n)=B(n,m)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{8}$$

Ещё одна формула для Эйлерова интеграла 1-го рода получается из определения (1) подстановкой

$$x=\frac{y}{y+1}:$$

$$\begin{aligned}B(a,b)&=\int_0^\infty\left(\frac{y}{y+1}\right)^{a-1}\frac{1}{(y+1)^{b-1}(y+1)^2}dy=\\&=\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy.\end{aligned} \tag{9}$$

2. Гамма–функция

определяется равенством

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \tag{10}$$

и называется **Эйлеровым интегралом второго рода**. Сходимость интеграла с нижним пределом 0 от функции, содержащей множитель x^{a-1}, обеспечена при $a > 0$, а сходимость интеграла (10) при $a > 0$ и $x \to +\infty$ достигается благодаря наличию быстро затухающего множителя e^{-x}.

Пример 1.

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{+\infty} = 1.$$

Пример 2. Пусть n – натуральное число. Учитывая легко проверяемую формулу

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \qquad (\alpha > 0),$$

получим

$$\Gamma(n+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n! \tag{11}$$

Пример 3. Для вычисления $\Gamma(1/2)$ преобразуем интеграл (10), произведя замену переменной $x = t^2$. Тогда

$$\Gamma(a) = 2\int\limits_0^{+\infty} t^{2a-1}e^{-t^2}dt\,. \tag{12}$$

Затем подставим $a = 1/2$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t}e^{-t^2}2tdt = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\,.$$

Интеграл в правой части этого равенства известен под именем “интеграл Пуассона”:

$$2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{13}$$

Формула приведения (первая основная формула). Получим рекуррентное соотношение для Γ-функции. С этой целью запишем формулу (10) в виде

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx$$

и выполним интегрирование по частям, полагая

$$u = x^a, \quad dv = e^{-x}dx,$$

$$du = ax^{a-1}dx, \quad v = -e^{-x}.$$

Тогда

$$\Gamma(a+1) = -x^a e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = a\Gamma(a).$$

Если $a > 0$, то первый член в правой части этого равенства обращается в ноль, и мы получаем формулу приведения

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \qquad (a > 0), \tag{14}$$

которая позволяет выразить Γ-функцию через ее значение с меньшим на единицу аргументом.

Последовательное применение формулы (13) дает

$$\begin{aligned}\Gamma(a+1) = a(a-1)\Gamma(a-1) = a(a-1)(a-2)\Gamma(a-2) = \dots = \\ = a(a-1)(a-2)\dots(a-k)\Gamma(a-k),\end{aligned} \tag{15}$$

где $a - k > 0$.

Для натуральных значений аргумента

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\dots 1 \cdot \Gamma(1). \tag{16}$$

Поскольку $\Gamma(1) = 1$, то для любого натурального числа n

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (17)$$

Пусть теперь аргументом Γ –функции является полуцелое положительное число. В этом случае из формулы (15) следует, что

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}\,. \qquad (18)$$

Таким образом,

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\,. \qquad (19)$$

Примеры 4-5.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,, \qquad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}\,.$$

Приведем без доказательства **вторую основную формулу** для Γ-функции:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (0 < a < 1). \qquad (20)$$

3. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

Метод 1. Чтобы установить взаимосвязь между Эйлеровыми интегралами 1-го и 2-го родов, выполним в (10) подстановку $x = ty$, где $t > 0$. Тогда

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-ty}dy.$$

Затем сделаем замену $a \to a+b, \;\; t \to t+1$, что влечёт

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(t+1)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy.$$

Далее умножим обе части этого равенства на t^{a-1} и проинтегрируем результат по переменной t от 0 до $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \Gamma(a+b)\frac{t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}}dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy\right)t^{a-1}dt. \qquad (21)$$

Заметим, что согласно равенству (9),

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}}\,dt = B(a,b).$$

Далее изменим порядок интегрирования в правой части уравнения (21):

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-ty}dt\right)y^{a+b-1}e^{-y}dy =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\infty} (ty)^{a-1}e^{-ty}d(ty)\right)y^{b-1}e^{-y}dy =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx\right)y^{b-1}e^{-y}dy =$$

$$= \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \cdot \int_0^{+\infty} y^{b-1}e^{-y}dy = \Gamma(a)\Gamma(b).$$

Следовательно,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \qquad (22)$$

Метод 2. Запишем формулу (12) в виде

$$\Gamma(a) = 2\int_0^{+\infty} x^{2a-1}e^{-x^2}dx, \quad \Gamma(b) = 2\int_0^{+\infty} y^{2b-1}e^{-y^2}dy.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4\iint_D x^{2a-1}e^{-x^2}y^{2b-1}e^{-y^2}\,dxdy,$$

где областью интегрирования в двойном интеграле является первая четверть $(0 \le x \le +\infty,\ 0 \le y \le +\infty)$.

Переходя к полярным координатам, получим

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4\iint_D e^{-\rho^2}\rho^{2a+2b-2}\cos^{2a-1}\varphi\ \sin^{2b-1}\rho d\rho d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{+\infty} \rho^{2(a+b)-1}\, e^{-\rho^2}\, d\rho \cdot 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\varphi\, \sin^{2b-1}\varphi\, d\varphi.$$

С учетом формул (3) и (12) имеем

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b),$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Пример 1.

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi.$$

Примеры 2-3. Пусть m и n – натуральные числа. Тогда

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!},$$

$$B\left(m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+n+1)} =$$

$$= \frac{(2m-1)!!\ (2n-1)!!}{2^{m+n}\,(m+n)!}\pi.$$

4. Таблица основных формул.

1.	$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \qquad (a>0)$
2.	$\Gamma(a) = 2\int\limits_0^{+\infty} t^{2a-1}e^{-t^2}dt$
3.	$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$
4.	$\Gamma(a+1) = a(a-1)(a-2)\dots(a-k)\Gamma(a-k) \qquad (a>k)$
5.	$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

6.	$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(n+1)=n!$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$
7.	$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (0<a<1).$
8.	$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,$
9.	$B(a,b)=2\int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}\varphi \, \sin^{2b-1}\varphi \, d\varphi,$
10.	$B(a,b)=\int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy.$
11.	$B(a,b)=B(b,a)$
12.	$B(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right)$
13.	$pB(p,q+1)=qB(p+1,q)$
14.	$B(a,n)=B(n,a)=\frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}$
15.	$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$
16.	$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$
17.	$B\left(m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!\,(2n-1)!!}{2^{m+n}\,(m+n)!}\pi.$
18.	$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi,$ $B(a,1)=\frac{1}{a}.$

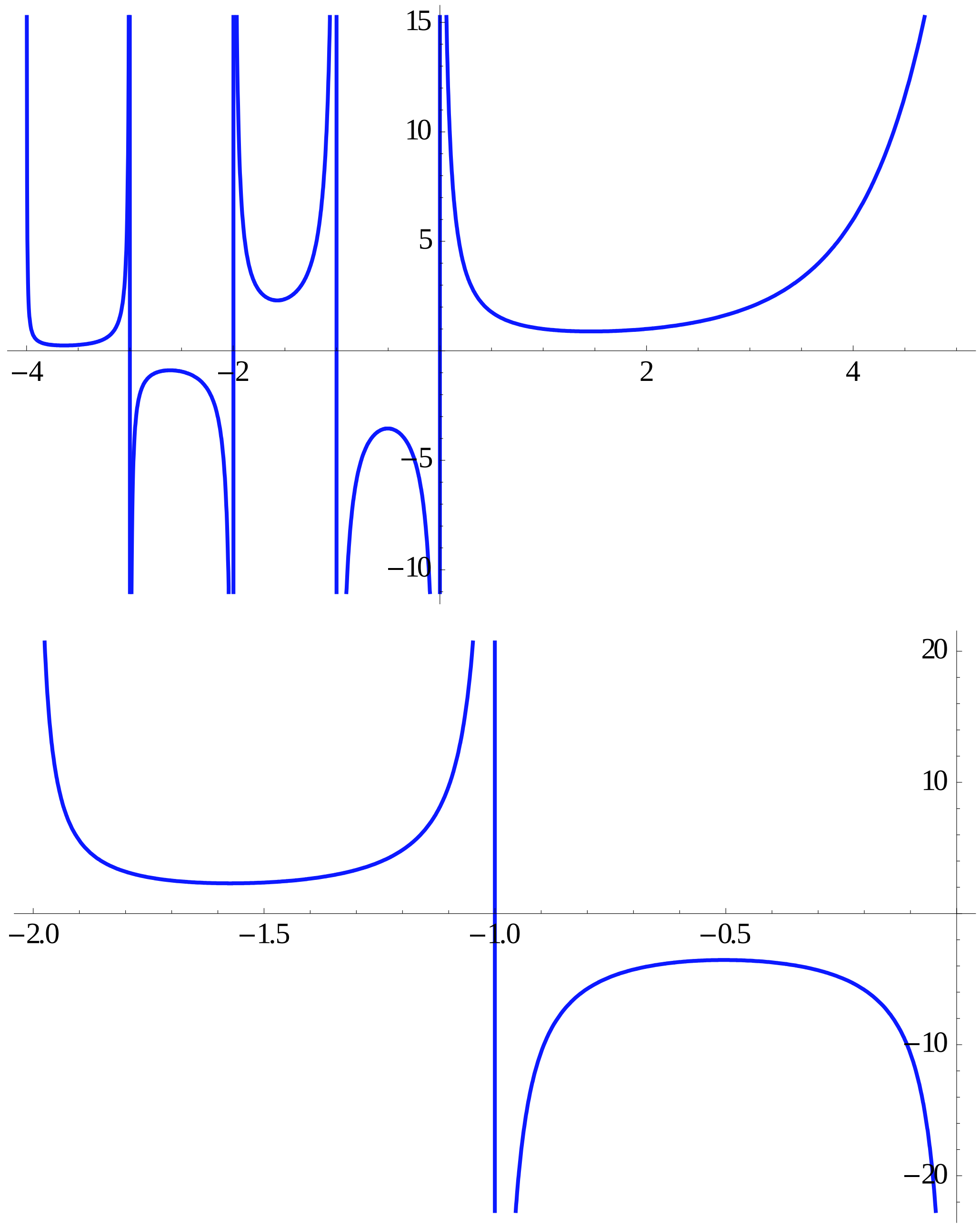


Рис. 1-2. Графики гамма функции.

$$\Gamma(201) = 78865786736479050355236321393218506229513597768717\\
3263294742533244359449963403342920304284011984623904177212\\
1389196388302576427902426371050619266249528299311134628572\\
7076331723739698894392244562145166424025403329186413122742\\
8294853277524242407573903240321257405579568660226031904170\\
324062351700858796178922222789623703897374720000000000000\\
00000000000000000000000000000000000 \approx 7.88657867364791 \times 10^{374}$$

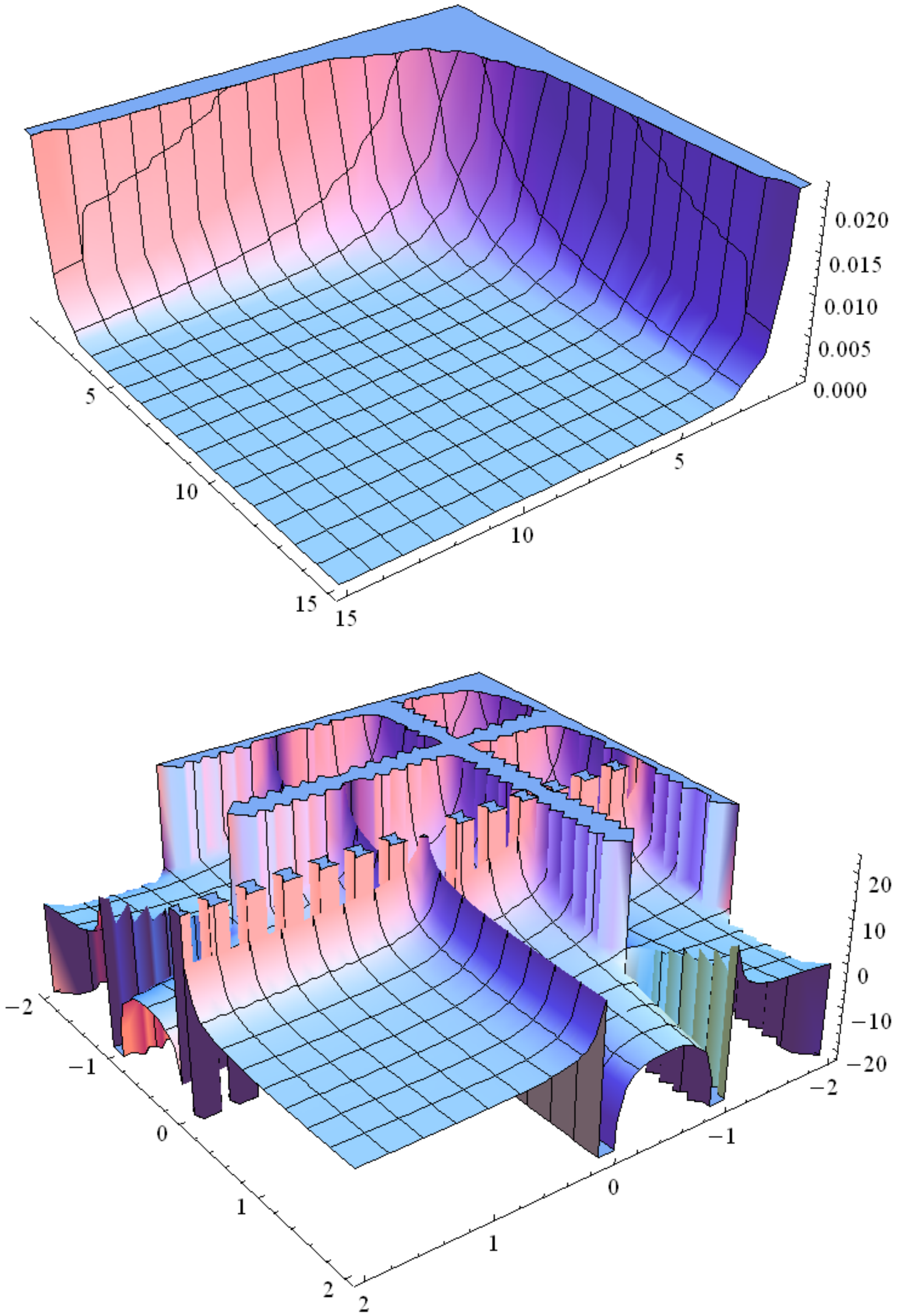


Рис. 3-4. Графики бета функции.

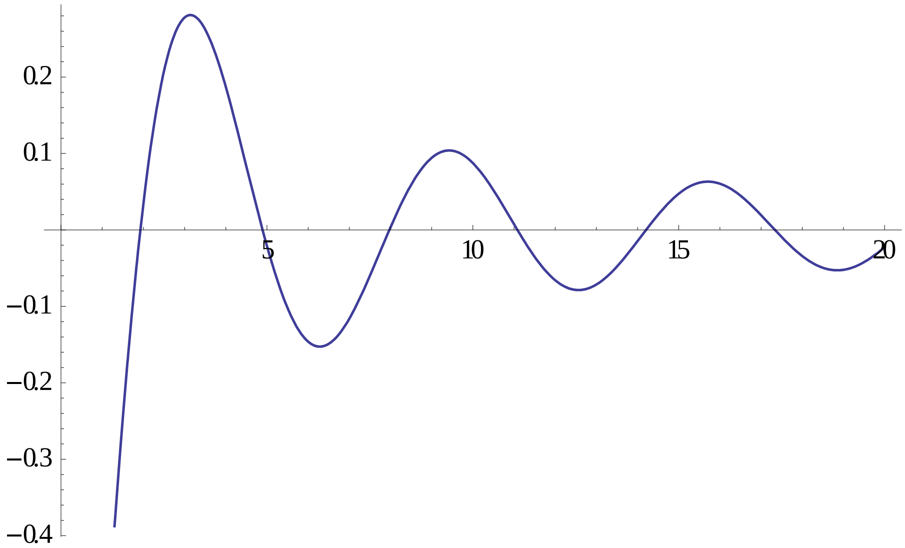
Таблица значений $\Gamma(n/2)$ при $n = 1, 2, \ldots, 15$.

$$\sqrt{\pi}, 1, \frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1, \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, 2, \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, 6, \frac{105\sqrt{\pi}}{16}, 24, \frac{945\sqrt{\pi}}{32}, 120, \frac{10395\sqrt{\pi}}{64}, 720, \frac{135135\sqrt{\pi}}{128}$$

5. Примеры других специальных функций

Интегральный синус:

$$\operatorname{si} x = \int \frac{\sin x}{x} dx.$$



Интегральный косинус:

$$\operatorname{ci} x = \int \frac{\cos x}{x} dx.$$

Интегральный логарифм:

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$