Г.Ф. Винокурова, Б.Л. Степанов

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций для студентов ТПУ
всех специальностей

Томск 2009

УДК 515

Начертательная геометрия. Курс лекций для студентов ТПУ всех специальностей. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009.– 65 с.

Составители: доц., канд. техн. наук Г. Ф. Винокурова
доц. Б. Л. Степанов

Рецензент доц., канд. техн. наук Б. А. Франковский

Работа рассмотрена и рекомендована к изданию методическим семинаром кафедры начертательной геометрии и графики 28 августа 2008 г.

Зав. кафедрой, доц. ______________________С. П. Буркова

Лекция 1. Введение. Методы проецирования. Точка. Прямая линия

Введение

Литература

Винокурова Г.Ф., Степанов Б.Л. Начертательная геометрия. Инженерная графика: учебное пособие. – 2-е изд. – Томск: Изд. ТПУ, 2008. – 306 с.

А.А. Чекмарев Инженерная графика М.: Высш. шк ., 2000 г.

В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский Курс начертательной геометрии М.: Наука, 1988 М.: Высш. шк., 1999 г.

В.С. Левицкий Машиностроительное черчение и автоматизация выполнения чертежей М.:Высш. шк., 2000 г.

Цели и задачи дисциплины

Целью дисциплины является изучение правил изображения на плоскости пространственных фигур и решение инженерно-геометрических задач на плоскостном чертеже; выработка знаний и навыков, необходимых для выполнения и чтения чертежей отдельных деталей.

Учебная дисциплина «Начертательная геометрия. Инженерная графика» состоит из двух разделов.

В разделе «Начертательная геометрия» изучаются методы изображения пространственных фигур на плоскости и свойства фигур по их изображениям.

В разделе «Инженерная графика» изучаются правила выполнения и чтения чертежей отдельных деталей и сборочных единиц.

Краткая историческая справка

Основоположник начертательной геометрии – Гаспар Монж. Годы жизни – 1746 – 1818. Он обобщил ранее накопленный опыт по теории и практике изображений и создал стройную научную дисциплину о прямоугольных проекциях, которую назвал «Начертательная геометрия».

Первый учебник по начертательной геометрии опубликован во Франции в 1798 г.

С открытием в 1810 г. В Петербурге Института корпуса инженеров путей сообщения наряду с другими дисциплинами там начал преподаваться курс начертательной геометрии. Первым преподавателем по этому курсу был ученик Г. Монжа Карл Потье. С 1818 г. Лекции по начертательной геометрии стал читать профессор Я. А. Севастьянов, а в 1821г. был опубликован его учебник по начертательной геометрии – первый учебник, изданный на русском языке.

В октябре 1900 г. начались занятия в Томском технологическом институте (ныне Томском политехническом университете). Первую лекцию по начертательной геометрии 28(16)октября 1900 г. прочел Валентин Николаевич Джонс.

Методы проецирования

Изображения пространственных объектов на плоскости должны полно и точно отражать геометрические свойства объекта и позволять исследовать его части, что обусловливает ряд требований.

Наиболее важные из них: 1) *обратимость*, т. е. возможность восстановить объект по его изображению; 2) *простота* построения; 3) *наглядность*.

Изображение, удовлетворяющее этим требованиям, получают на основе *метода проецирования*.

Аппарат проецирования включает в себя центр проекций, проецируемый объект, проецирующие лучи и плоскость, на которой получается изображение.

1. Центральное проецирование – это общий случай проецирования геометрических объектов. Проецирование осуществляется из точки *S* – центра проецирования на плоскость *P* – плоскость проекций. Центр проецирования не должен находиться в плоскости проекций.

Чтобы получить центральную проекцию какой-либо точки (например точки *A* на рис. 1) необходимо провести проецирующий луч через центр проецирования *S* и точку *A*. Точка пересечения луча с плоскостью проекций (точка *a*) является центральной проекцией заданной точки *A* на выбранную плоскость *P*.

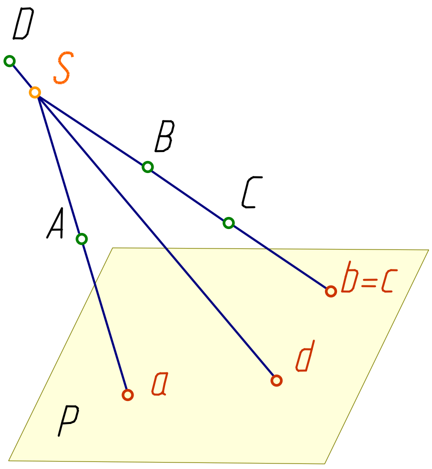


Рис. 1

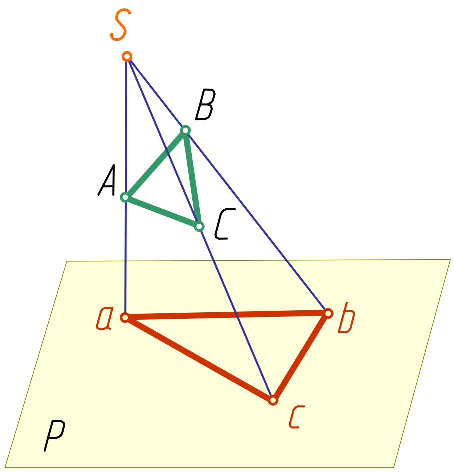


Рис. 2

Точки *a*, *b*, *c*,*d* являются центральными проекциями точек *A*, *B*, *C D* на плоскости *P*.

Свойства центрального проецирования:

1. При центральном проецировании:

- точка проецируется в точку;
- прямая, не проходящая через центр проецирования, проецируется в прямую (проецирующая прямая – в точку);

- плоская фигура, не принадлежащая проецирующей плоскости, проецируется в плоскую фигуру, рис. 2 (фигуры, принадлежащие проецирующей плоскости, проецируются в прямые линии);
- трехмерная фигура проецируется в двумерную фигуру.

2. При заданном центре проецирования фигуры на параллельных плоскостях подобны.

3. Центральное проецирование устанавливает однозначное соответствие между фигурой и ее изображением.

Центральные проекции имеют большую наглядность, но имеют и недостатки. Они заключаются, например, в сложности построения изображения предмета и определения его истинных размеров. Поэтому этот способ имеет ограниченное применение.

2. Параллельное проецирование можно рассматривать как частный случай центрального проецирования. При этом центр проецирования удален в бесконечность (S_∞). При параллельном проецировании применяют параллельные проецирующие прямые. Их проводят в заданном направлении относительно плоскости проекций. Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проекции называют *прямоугольными или ортогональными* $\angle\alpha=90°$, в других случаях – *косоугольными* $\angle\alpha\neq90°$ (рис. 3).

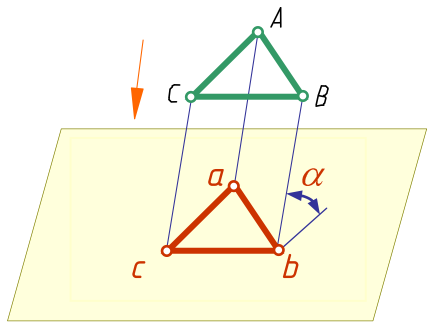


Рис. 3

Свойства параллельного проецирования:

При параллельном проецировании сохраняются все свойства центрального проецирования, которые дополняются новыми:

1. Параллельные проекции взаимно параллельных прямых параллельны, а отношение длин отрезков этих прямых равно отношению длин их проекций.

2. Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в такую же фигуру.

3. Параллельный перенос фигуры в пространстве или плоскости проекций не изменяет вида и размеров проекции фигуры.

Применяя приемы параллельного проецирования точки и линии, можно строить параллельные проекции поверхности и тела. Параллельные проекции, как и центральные, не обеспечивают обратимости чертежа.

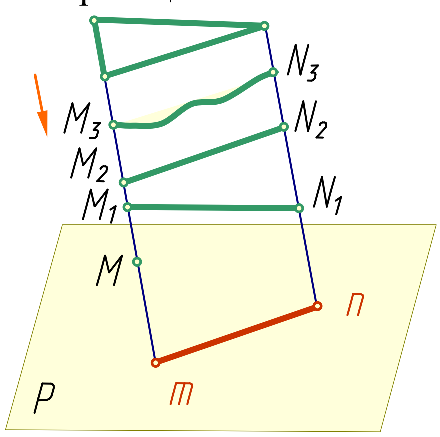


Рис. 4

При проецировании на одну плоскость проекций между проецируемой фигурой и ее проекцией не существует взаимооднозначного соответствия. Так, каждому проецируемому предмету при заданном его положении и выбранном направлении проецирования l соответствует единственная его проекция. Однако полученная фигура может быть проекцией бесконечного множества других фигур, которые отличаются друг от друга по величине и по форме. Из рис. 4 видно, что пространственной точке M соответствует единственная ее проекция на плоскости P – точка m. В то же время точка m является проекцией множества точек, лежащих на проецирующей прямой (M, M_1, M_2, M_3).

Прямолинейный отрезок mn может быть проекцией не только прямолинейного отрезка M_1N_1 или M_2N_2, но проекцией кривой линии M_3N_3 и любой плоской фигуры, расположенной в проецирующей плоскости.

Следовательно, изображение пространственной фигуры является не полным. Мы можем правильно понять чертеж тогда, когда он будет сопровождаться дополнительными пояснениями.

Рассмотрим некоторые способы дополнения проекционного изображения, позволяющие сделать его «обратимым», то есть однозначно определяющим проецируемый предмет.

Способ проекций с числовыми отметками

Этот способ лежит в основе построения чертежей планов местности и некоторых инженерных сооружений (плотин, дорог, дамб и т.п.). Способ заключается в том, что положение любой точки в пространстве определяется ее прямоугольной проекцией на некоторую горизонтальную плоскость, принятую за плоскость нулевого уровня (рис. 5). Рядом с проекциями точек (a, b, c) указывают их отметку. Она указывает расстояние от точки до плоскости проекций.

Способ векторных проекций

Академик Е.С. Федоров предложил изображать высоты точек при помощи параллельных отрезков на плоскости проекций. Начало этих отрезков находится в проекциях соответствующих точек (рис. 6). Направление всех высотных отрезков произвольно.

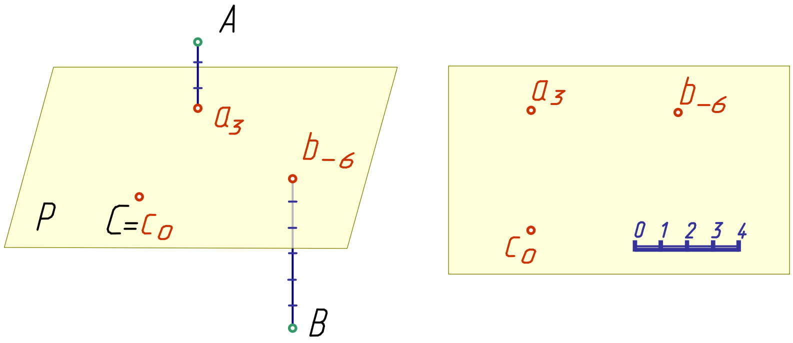


Рис. 5

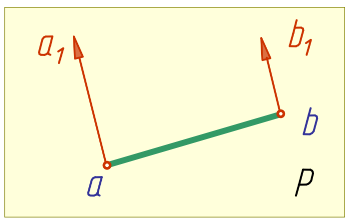


Рис. 6

Если точки расположены выше горизонтальной плоскости, высотные отрезки, а также числовые отметки считаются положительными, если ниже – отрицательными. Положительные и отрицательные высотные отрезки в «федоровских проекциях» отличаются противоположным направлением. Такие чертежи применяют в геологии, горном деле, топографии.

Метод прямоугольных проекций (метод Монжа)

Чертеж в системе прямоугольных проекций образуется при проецировании предмета не на одну, а на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Этот способ является частным случаем параллельного проецирования. Направление проецирования l перпендикулярно плоскости проекций. Из точки опускается перпендикуляр на плоскость проекций. Основание перпендикуляра является прямоугольной (ортогональной) проекцией точки.

Осуществлять проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости впервые предложил Гаспар Монж.

Такое проецирование обеспечивает обратимость чертежа. *Обратимость чертежа – однозначное определение положения точки в пространстве по ее проекциям.* Одну из плоскостей принято располагать горизонтально – ее называют горизонтальной плоскостью проекций H (от греч. *horizon* – разграничивающий), другую – ей перпендикулярно. Такую вертикальную плоскость называют фронтальной плоскостью проекций V (от лат. – *vertical is* – отвесный). Эти плоскости проекций пересекаются по линии, которая называется *осью проекций x* (рис. 7).

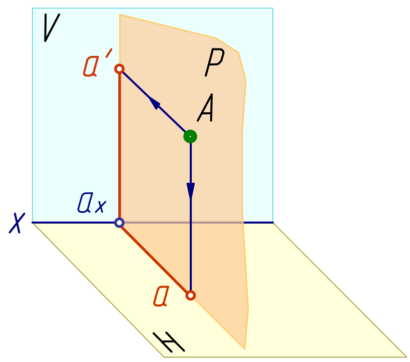


Рис. 7

Чтобы получить проекции точки на плоскости, опускаем из точки A в пространстве перпендикуляры (проецирующие лучи) до встречи с плоскостями H и V.

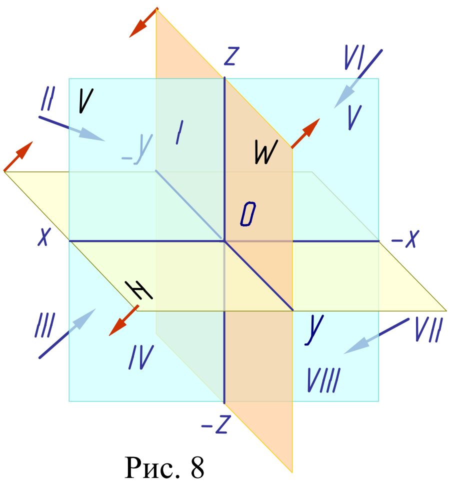


Рис. 8

Для полного выявления наружных и внутренних форм деталей и их соединений и для ряда других задач бывает необходимо три и более изображения. Введем в систему плоскостей H и V третью плоскость. Располагаем ее перпендикулярно этим плоскостям. Новая плоскость называется *профильной плоскостью проекций* и обозначается буквой W. Она пересекает плоскости H и V по осям y и z. Точку пересечения всех осей называют *началом координат* и обозначают буквой *O* (от латинского слова «*origo*» – начало). Оси *x, y, z* взаимно перпендикулярны.

Три взаимно-перпендикулярные плоскости делят пространство на восемь частей, восемь октантов (рис. 8) (от лат. *octo* – восемь).

В нашей стране принята европейская система расположения проекций. Ось *x* направлена от начала координат влево, *y* – вперед (к нам), *z* – вверх (*x* – ось широт, *y* – ось глубин, *z* – ось высот). Обратные направления координатных осей считаются отрицательными.

Точка

Опустим из точки *A* проецирующие лучи (перпендикуляры) до пересечения с плоскостями проекций *H, V* и *W*. Точки пересечения перпендикуляров с плоскостями проекций – это проекции точки на каждую из плоскостей проекций (рис. 9):

a – горизонтальная;

a′ – фронтальная;

a″ – профильная.

Преобразуем его так, чтобы горизонтальная и профильная плоскости проекций совпали с фронтальной плоскостью проекций, образуя одну плоскость чертежа (рис. 10). В результате получаем чертеж, называемый *эпюр Монжа* (от франц. *epure* – чертеж, проект) или *комплексный чертеж*.

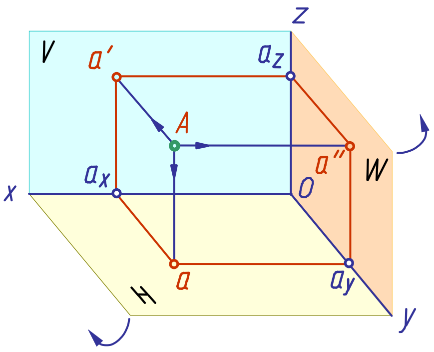


Рис. 9

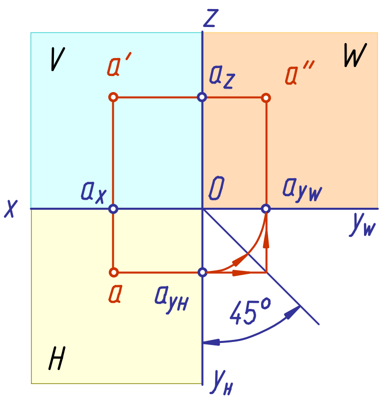


Рис. 10

Основные правила ортогонального проецирования точки

1. Положение точки в пространстве определяется тремя координатами

$$A(x, y, z).$$

2. Положение точки на плоскости определяется двумя координатами:

$$a(x, y); \qquad a'(x, z); \qquad a''(y, z).$$

3. Две проекции точки определяют положение ее третьей проекции; две проекции точки определяют ее положение в пространстве.

4. Две проекции находятся на одном перпендикуляре (линии связи) к оси проекций, их разделяющей.

Прямая линия

Линия – это множество всех последовательных положений движущейся точки.

Прямая линия – линия, образованная движением точки, не меняющей своего направления.

Прямая линия задается

- двумя точками, ей принадлежащими;
- одной точкой и направлением линии.

Прямая может занимать в пространстве различное положение.

Положение прямой в пространстве

Относительно плоскостей проекции прямая может занимать различные положения:

– не параллельное ни одной из плоскостей проекций *H, V, W;*

– параллельное одной из плоскостей проекций (прямая может и принадлежать этой плоскости);

– параллельное двум плоскостям проекций, то есть перпендикулярное третьей.

Прямая общего положения – прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций (рис. 11).

Прямые частного положения – прямые, параллельные или перпендикулярные плоскости проекций.

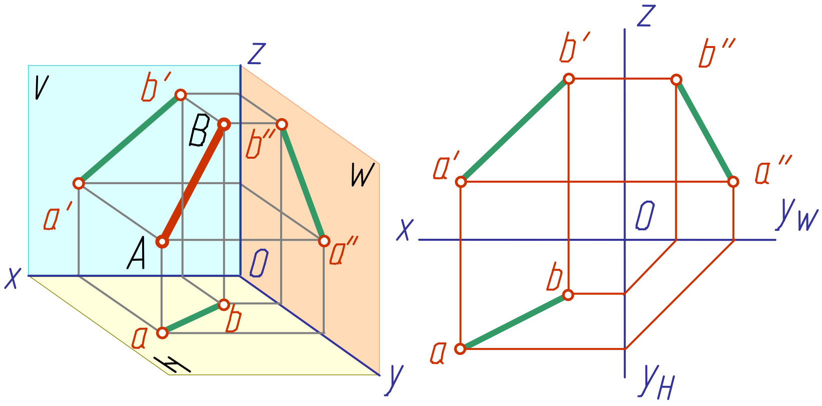


Рис. 11

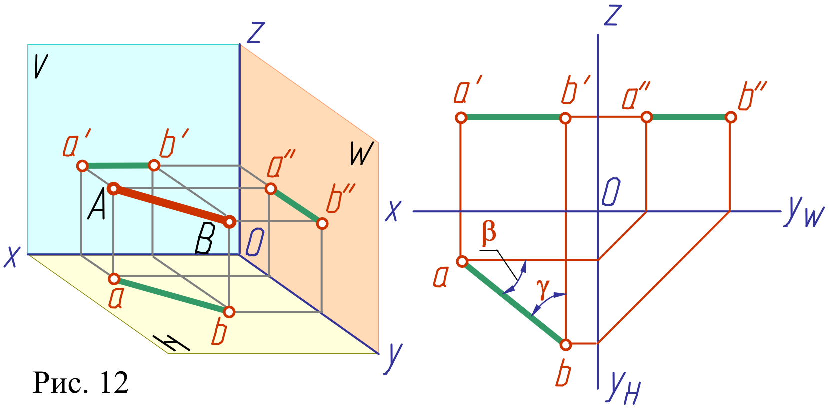
Прямые частного положения можно разделить на:

- прямые, параллельные плоскости проекций – *прямые уровня*;
- прямые, перпендикулярные плоскости проекций – *проецирующие прямые.*

Прямые, параллельные плоскости проекций (прямые уровня)

Горизонтальная прямая (*AB // H*)

Фронтальная проекция прямой $a'b'$ параллельна оси x; профильная проекция $a''b''$ параллельна оси y_W**;** длина горизонтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка (ab=AB); угол β**,** образованный горизонтальной проекцией и осью проекции x**,** равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций; угол γ**,** образованный горизонтальной проекцией и осью проекции y_H**,** равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций (рис. 12).



Свойства проекций

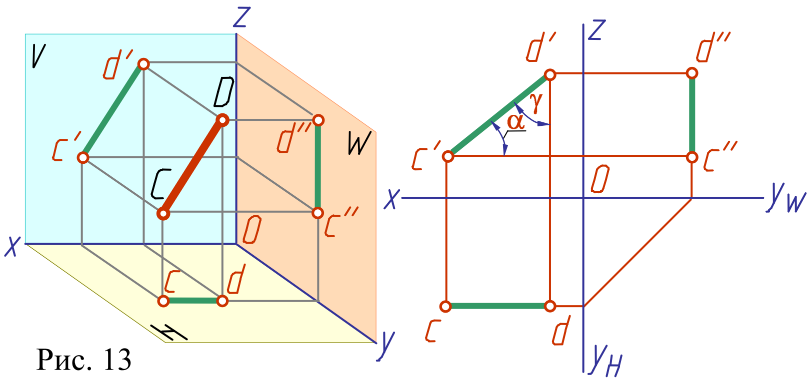
$|ab| = |AB|$;
$(a'b') \parallel (Ox)$;
$(a''b'') \parallel (Oy_w)$;

$(AB\hat{\ }V)=(ab\hat{\ }Ox)=\beta$;
$(AB\hat{\ }W)=(ab\hat{\ }Oy_н)=\gamma$.

Рис. 12

Фронтальная прямая ($CD \parallel V$)

Горизонтальная проекция прямой cd параллельна оси x; профильная проекция $c''d''$ параллельна оси z; длина фронтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка ($c'd'=CD$); угол α**,** образованный фронтальной проекцией и осью проекций x**,** равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций; угол γ**,** образованный фронтальной проекцией и осью z, равен углу наклона прямой к профильной плоскости проекций (рис. 13).



Свойст-ва проекций

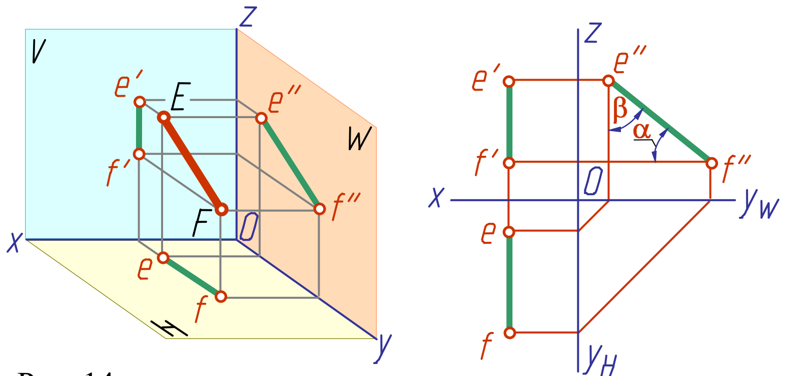
$|c'd'| = |CD|$;
$(cd) \parallel (Ox)$;
$(c''d'') \parallel (Oz)$;

$(CD\hat{\ }H)=(c'd'\hat{\ }Ox)=\alpha$;
$(CD\hat{\ }W)=(c''d''\hat{\ }Oz)=\gamma$.

Рис. 13

Профильная прямая ($EF \parallel W$)

Горизонтальная проекция прямой ef параллельна оси y_H; фронтальная проекция $e'f'$ параллельна оси z; длина профильной проекции отрезка равна длине самого отрезка ($e''f''=EF$); углы α и β, образованные профильной проекцией с осями y_W и z, равны углам наклона прямой к горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций соответственно, рис. 14.



Свойства проекций

$|e''f''| = |EF|$;
$(ef) \parallel (Oy_н)$;
$(e'f') = (Oz)$;
$(EF\hat{\ }H)=(e''f''\hat{\ }Oy_w)=\alpha$;
$(EF\hat{\ }V)=(e''f''\hat{\ }Oz) = \beta$.

Рис. 14

Если прямая параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость в натуральную величину проецируется сама прямая и углы наклона ее к двум другим плоскостям проекций. Проекции прямой на две другие плоскости проекций параллельны осям, определяющим данную плоскость проекций.

Прямые, перпендикулярные плоскости проекций (проецирующие)

Прямая AB ⊥ H – горизонтально-проецирующая прямая.

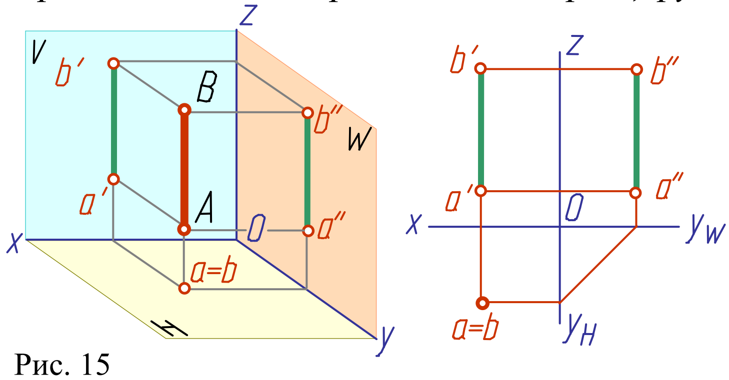


Рис. 15

Свойства проекций

Проекция $a'b'$ перпендикулярна оси x, проекция $a''b''$ перпендикулярна оси y_w, проекции a и b совпадают.

$(AB) \perp H$; $(AB) \parallel V$;

$(AB) \parallel W$; ab – точка;

$|a'b'| = |a''b''| = |AB|$;

$(a'b') \perp (Ox)$; $(a''b'') \perp (Oy_w)$.

Прямая CD ⊥ V – фронтально-проецирующая прямая.

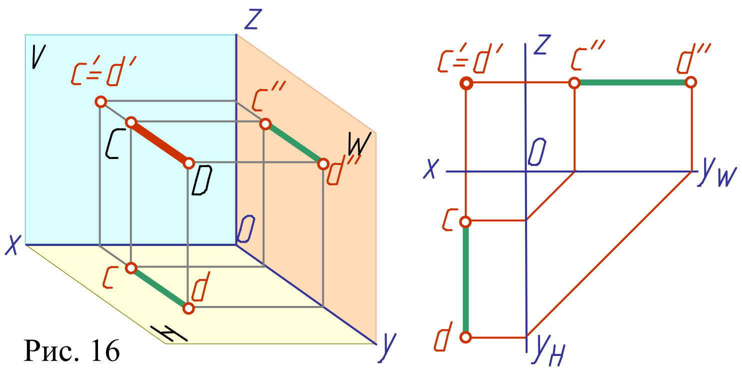


Рис. 16

Свойства проекций

Проекция cd перпендикулярна оси x, проекция $c''d''$ перпендикулярна оси z, проекции c' и d' совпадают.

$(CD) \perp V$; $(CD) \parallel H$;

$(CD) \parallel W$; $c'd'$ – точка;

$|cd| = |c''d''| = |CD|$;

$(cd) \perp (Ox)$; $(c''d'') \perp (Oz)$.

Прямая EF ⊥ W – профильно-проецирующая прямая.

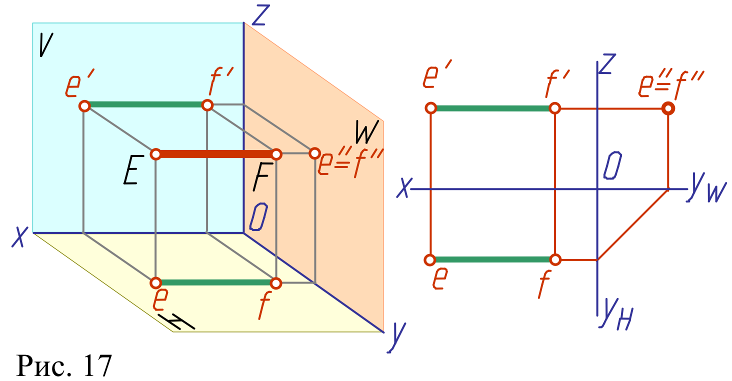


Рис. 17

Свойства проекций

Проекция ef перпендикулярна оси y_H, проекция $e'f'$ перпендикулярна оси z, проекции e'' и f'' совпадают.

$(EF) \perp W$; $(EF) \parallel H$;

$(EF) \parallel V$; $e''f''$ – точка;

$|ef| = |e'f'| = |EF|$;

$(ef) \perp (Oy_н)$; $(e'f') \perp (Oz)$.

Если прямая перпендикулярна плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в точку. Проекции прямой на две другие плоскости проекций перпендикулярны осям, определяющим данную плоскость проекций и равны натуральной величине отрезка прямой.

Лекция 2. Прямые. Преобразование чертежа прямой. Две прямые

Взаимное положение точки и прямой

Точка и прямая в пространстве могут быть различно расположены относительно друг друга и плоскости проекций.

Если точка в пространстве принадлежит прямой, то ее проекции принадлежат соответствующим проекциям этой прямой.

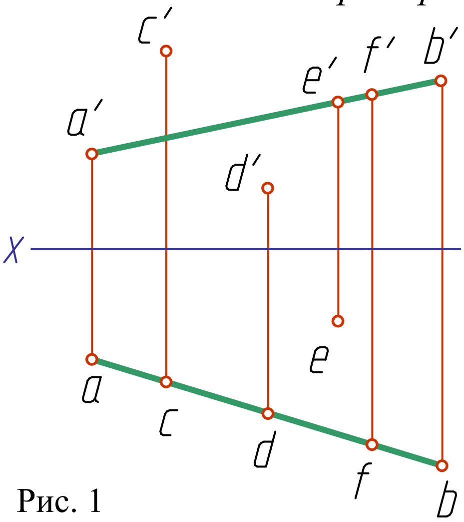


Рис. 1

Если это положение нарушается, то точка данной прямой не принадлежит.

Рассмотрим это положение на чертеже (рис. 1).

Точка *F* принадлежит прямой *AB*, так как горизонтальная проекция *f* точки принадлежит горизонтальной проекции *ab* прямой, а фронтальная проекция *f′* точки принадлежит фронтальной проекции *a′b′* прямой:

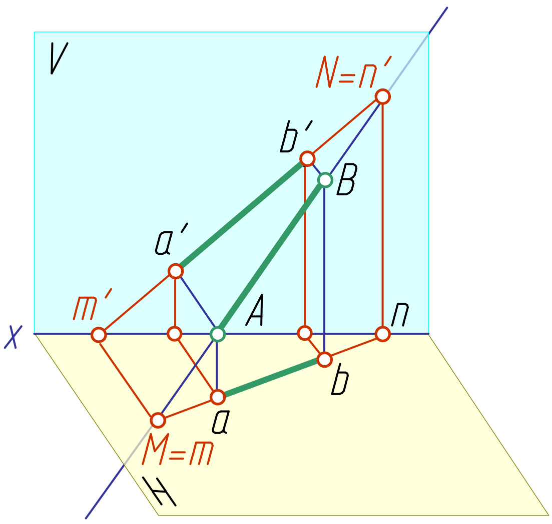
$$(\bullet)\ F \in (AB) \Rightarrow (f \in ab) \wedge (f' \in a'b').$$

Точка *C* лежит над прямой *AB*, точка *D* лежит под прямой *AB*, точка *E* лежит за прямой *AB*:

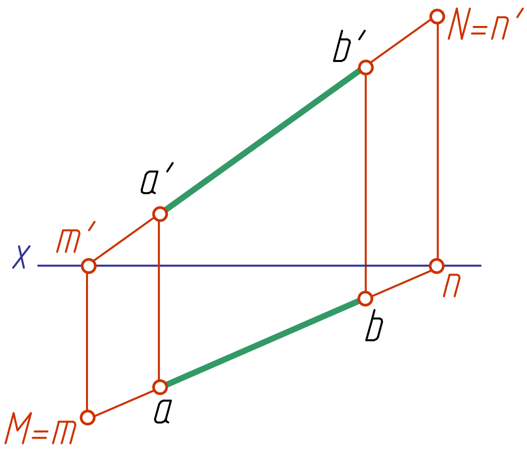
$$(\bullet)\ C \notin (AB) \Rightarrow (c \in ab) \wedge (c' \notin a'b');$$
$$(\bullet)\ D \notin (AB) \Rightarrow (d \in ab) \wedge (d' \notin a'b');$$
$$(\bullet)\ E \notin (AB) \Rightarrow (e \notin ab) \wedge (e' \in a'b').$$

Следы прямой

Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называются *следами прямой*. На рис. 2, *а* точка *M* – горизонтальный след прямой, точка *N* – фронтальный.



а



б

Рис. 2

Горизонтальная проекция m горизонтального следа прямой совпадает с самим следом – точкой M (рис. 2, *а*), а фронтальная проекция этого следа m' лежит на оси x**.** Фронтальная проекция n' фронтального следа прямой совпадает с фронтальным следом – точкой N, а горизонтальная проекция n лежит на той же оси проекций.

Чтобы построить на плоскостном чертеже горизонтальный след прямой (точки m и m'), надо продолжить фронтальную проекцию $a'b'$ прямой до пересечения с осью x (точка m')**.** Затем через нее провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением горизонтальной проекции ab. Точка m – горизонтальная проекция горизонтального следа.

Для построения проекций фронтального следа (точек n и n') необходимо продолжить горизонтальную проекцию ab прямой до пересечения с осью x (точка n). Затем через нее провести перпендикуляр к оси x до пересечения с продолжением фронтальной проекции $a'b'$. Точка n' – фронтальная проекция фронтального следа (рис. 2, *б*).

Прямая может пересекать и профильную плоскость проекций, то есть иметь профильный след. Этот след на профильной плоскости проекций совпадает со своей проекцией. Фронтальная и горизонтальная проекции его лежат соответственно на осях z и y.

Способ перемены плоскостей проекций

Для упрощения решения ряда графических задач желательно, чтобы геометрическая фигура (прямая, плоскость) занимала частное положение. Этого можно добиться разными способами, например, способом перемены плоскостей проекций.

Способ перемены плоскостей проекций состоит в том, что одну из плоскостей заменяют новой, которую располагают более рационально по отношению к заданному геометрическому объекту. При этом должны быть выдержаны следующие условия:

- новая плоскость располагается перпендикулярно оставшейся плоскости проекций;
- геометрическая фигура не меняет своего положения в пространстве;
- на новую плоскость проекций фигура проецируется с помощью перпендикулярных лучей.

Например, заменим фронтальную плоскость V на новую V_1, которую расположим перпендикулярно плоскости H и спроецируем на нее точку A. Ось x_1 – новая ось проекций (рис. 3).

При замене фронтальной плоскости проекций постоянной остается z-координата точки, так как расстояние от точки A до горизонтальной плоскости проекций H не изменилось. Следовательно, для построения новой проекции точки A точки a_1' (рис. 4) необходимо:

- провести новую ось x_1;
- через горизонтальную проекцию a перпендикулярно оси x_1 провести линию связи;
- от точки пересечения линии связи с осью x_1 отложить z-координату точки A;
- отметить новую проекцию точки A – точку a_1'.

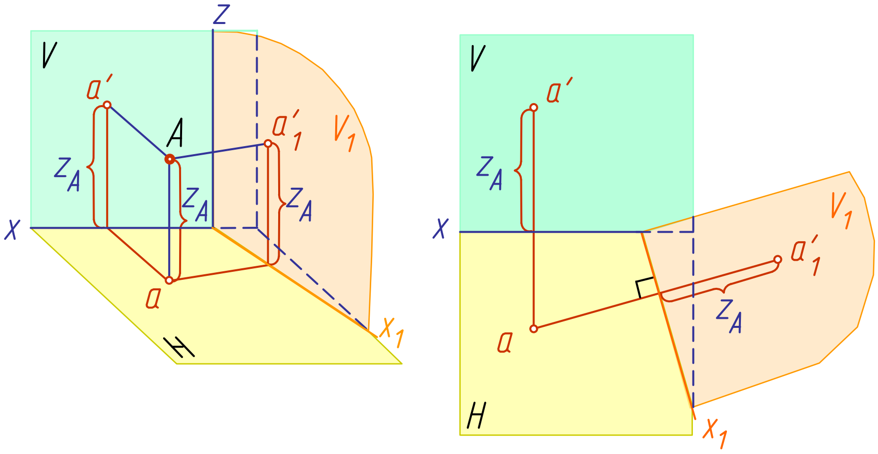


Рис. 3

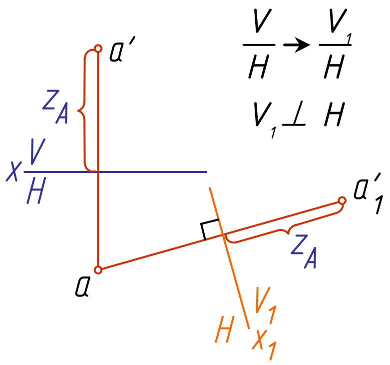


Рис. 4

Две основные задачи преобразования прямой

Прямую общего положения можно преобразовать в:

- прямую уровня;
- проецирующую прямую.

1 Преобразование прямой общего положения в прямую уровня

Такое преобразование позволяет определить натуральную величину отрезка прямой и углы наклона его к плоскостям проекций.

При решении задачи новую плоскость, например, V_1 (рис. 5), ставим в положение, параллельное отрезку. В этом случае новая ось проекций будет проходить параллельно горизонтальной проекции прямой:

$$\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H}; \quad V_1 \perp H; \quad V_1 \,//\, AB; \quad x_1 \,//\, ab.$$

Через горизонтальные проекции a и b, перпендикулярно новой оси x_1, проводим линии связи и на них откладываем z координаты точек (то есть расстояние от оси x до фронтальных проекций точек). Новая проекция $a'_1b'_1$ будет равна натуральной величине отрезка, а угол α равен углу наклона отрезка к плоскости H.

Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую

В данном случае прямую необходимо поставить в положение, перпендикулярное плоскости проекций, чтобы на эту плоскость прямая спроецировалась в точку (рис. 6).

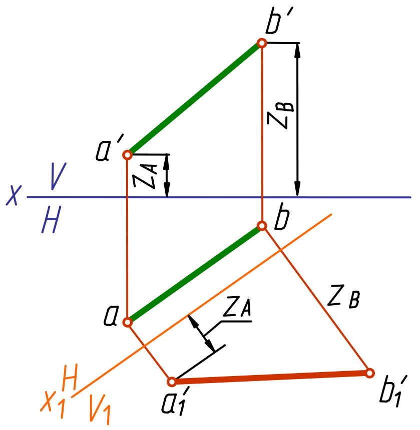


Рис. 5

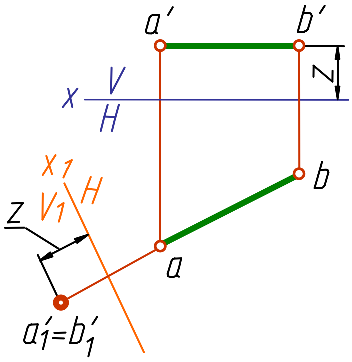


Рис. 6

Так как данная прямая параллельна горизонтальной плоскости проекций, то для преобразования ее в проецирующую прямую, необходимо заменить фронтальную плоскость V на новую V_1. Располагаем плоскость V_1 перпендикулярно AB. Тогда на плоскость V_1 прямая спроецируется в точку (a'_1=b'_1).

$$\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H}; \quad V_1 \perp H; \quad V_1 \perp AB; \quad x_1 \perp ab.$$

2. Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую

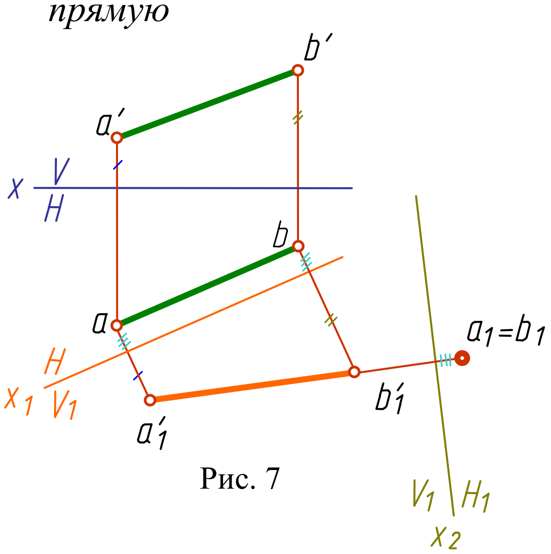


Рис. 7

Преобразовать прямую общего положения в проецирующую прямую за одну замену нельзя, так как невозможно расположить новую плоскость одновременно перпендикулярно прямой общего положения и оставшейся старой плоскости проекций.

Чтобы прямую общего положения AB (рис. 7) преобразовать в проецирующую, проводят две замены, то есть обе задачи, первую и вторую, решают последовательно. Сначала прямую общего положения преобразуют в прямую, параллельную плоскости проекций (прямую уровня), а затем эту прямую преобразуют в проецирующую.

$$1.\ \frac{V}{H} \to \frac{V_1}{H};\quad V_1 \perp H;\quad V_1 // AB;\ x_1 // ab;$$

$$2.\ \frac{V_1}{H} \to \frac{V_1}{H_1};\quad H_1 \perp V_1;\quad H_1 \perp AB;\ x_2 \perp a'_1 b'_1$$

Взаимное положение двух прямых

Прямые в пространстве могут занимать различные взаимные положения:

– пересекаться, то есть иметь одну общую точку;

– скрещиваться, то есть не иметь общей точки;

– быть параллельными, когда точка пересечения прямых удалена в бесконечность.

Пересекающиеся прямые. Если прямые пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой и точки пересечения проекций лежат на одной линии связи (рис. 8).

*Скрещивающиеся прямые***.** Если прямые в пространстве не пересекаются, а скрещиваются (рис. 9), то хотя на чертеже их одноименные проекции и пересекаются, но точки пересечения проекций не лежат на одной линии связи. Эти точки не являются общими для прямых. Точки 1, 2, 3 и 4 являются *конкурирующими*. ***Конкурирующими точками*** называются точки, лежащие на одной линии связи, но на разных прямых.

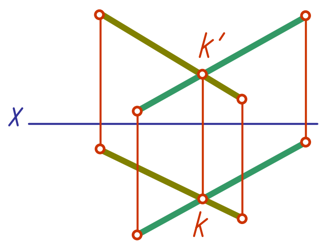


Рис. 8

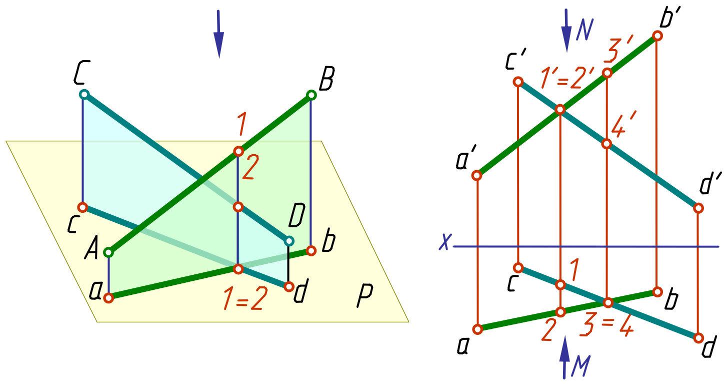


Рис. 9

Параллельные прямые. Если прямые общего положения в пространстве параллельны, то их одноименные проекции параллельны между собой (рис. 10). Прямые частного положения параллельны при условии параллельности одноименных проекций на той плоскости проекций, которой параллельны прямые (рис. 11).

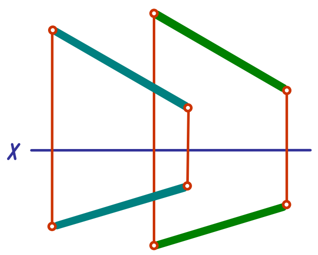


Рис. 10

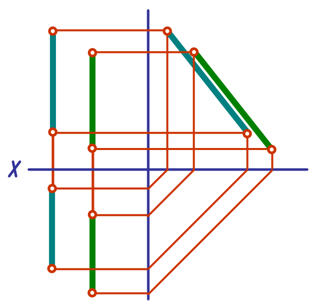


Рис. 11

Проекции плоских углов

В общем случае плоский угол проецируется на плоскость с искажением. Однако, если обе стороны угла параллельны какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость угол проецируется без искажения. Например, стороны угла *ABC* (рис. 12) параллельны горизонтальной плоскости *H*, поэтому угол спроецировался на нее без изменений.

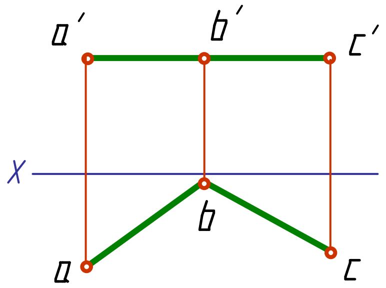


Рис. 12

Исключение составляет прямой угол. Он проецируется в истинную величину даже тогда, когда лишь одна из его сторон параллельна плоскости проекций.

Теорема о проецировании прямого угла

Прямой угол проецируется в виде прямого угла, если одна из его сторон параллельна плоскости проекций, а вторая ей не перпендикулярна.

Пусть сторона *DE* прямого угла *KED* параллельна плоскости *P*, а сторона *EK* ей не перпендикулярна (рис. 13). Требуется доказать, что его проекция – угол *ked* – равна 90°

*Доказательство***.** Спроецируем стороны угла *KED* на плоскость *P*. Для этого проведем проецирующие лучи из точек *K*, *E*, *D* перпендикулярно плоскости. Через прямые *EK* и *Ee* проведем дополнительную плоскость *Q*. Плоскость *Q* перпендикулярна плоскости *P*, так как она проходит через прямую *Ee*, перпендикулярную плоскости *P*.

$$(EK) \wedge (Ee) \subset Q; \;\; (Ee) \perp P \Rightarrow Q \perp P$$

Прямая *ED* перпендикулярна плоскости *Q*, так как она перпендикулярна к двум прямым этой плоскости *EK* и *Ee*.

$$(ED) \perp (EK); \; (ED) \perp (Ee) \Rightarrow (ED) \perp Q$$

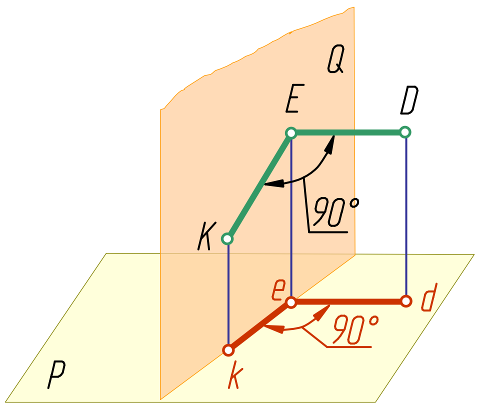


Рис. 13

Прямая *ed* также перпендикулярна к плоскости *Q*, так как прямая *ED* и ее проекция *ed* параллельны между собой.

$$(ED) \perp Q; \; (ed) \,//\, (ED) \;\Rightarrow (ed) \perp Q$$

Прямая *ed* перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, в том числе и прямой *ek*, то есть угол *ked* – прямой.

$$(ed) \perp (ek); \;\; \angle ked = 90°.$$

Лекция 3. Плоскость

Задание плоскости на чертеже

На чертеже плоскость может быть задана различными способами (рис. 1):

а – проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой;

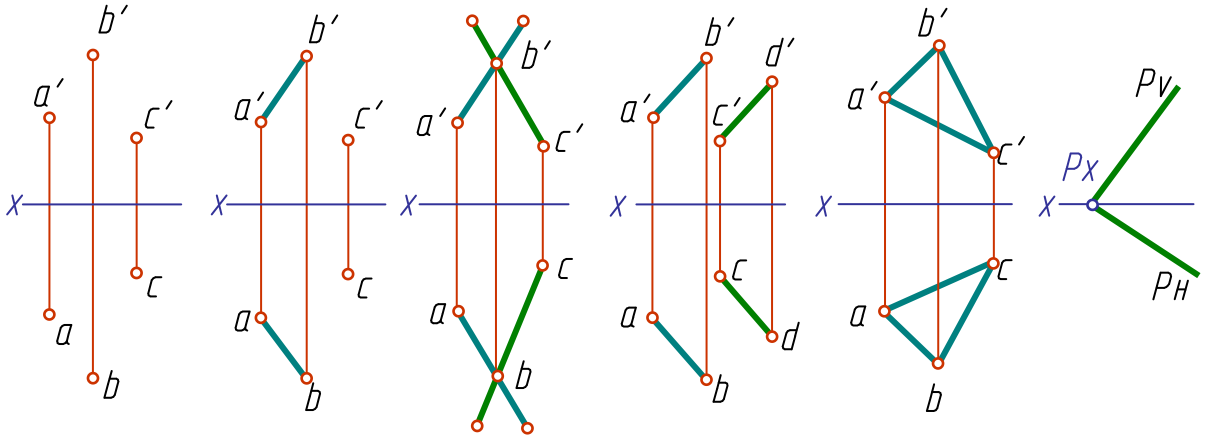
б – проекциями прямой и точки, не лежащей на этой прямой;

в – проекциями двух пересекающихся прямых;

г – проекциями двух параллельных прямых;

д – проекциями любой плоской фигуры;

е – следами плоскости.



а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис 1

Следы плоскости

Следом плоскости называется линия пересечения плоскости с плоскостью проекций (рис. 2):

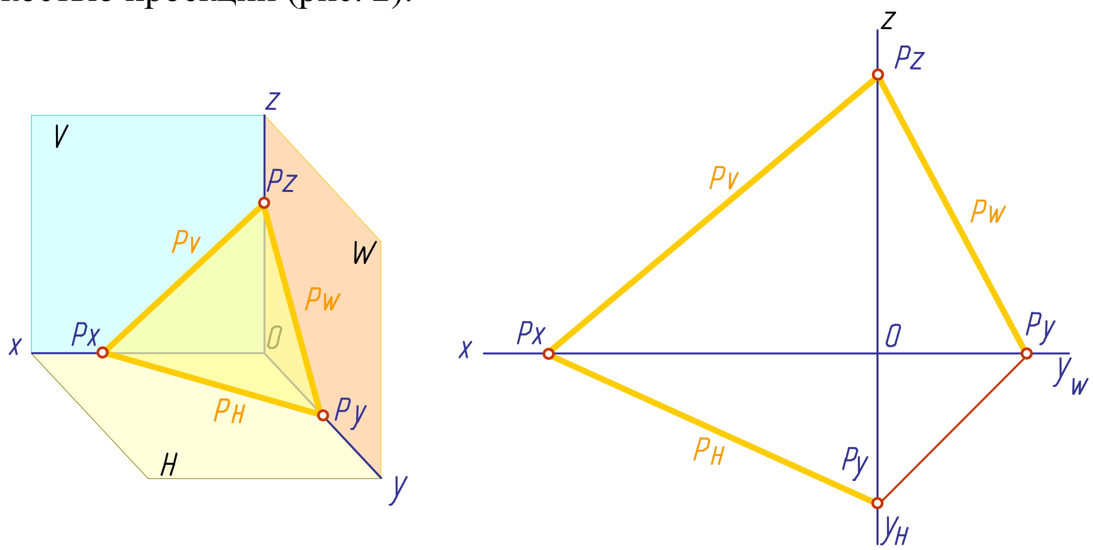


Рис. 2

P_V – фронтальный след плоскости *P*;

P_H – горизонтальный след плоскости *P*;

P_W –профильный след плоскости *P*.

Точки пересечения плоскости с осями проекций *(P_x, P_y, P_z)* называются *точками схода следов*.

Если прямая лежит в плоскости, то горизонтальный след прямой лежит на горизонтальном следе плоскости, а фронтальный след прямой – на фронтальном следе плоскости (рис. 3).

Следовательно, чтобы перейти от задания плоскости двумя пересекающимися прямыми к заданию плоскости следами, необходимо найти горизонтальные и фронтальные следы этих прямых (рис. 4). Если прямые лежат в плоскости P, то для построения горизонтального следа P_{H} необходимо найти горизонтальные проекции горизонтальных следов этих прямых (точки m_1 и m_2). Для построения следа P_{V} необходимо найти фронтальные проекции следов этих прямых (точки n_1 и n_2).

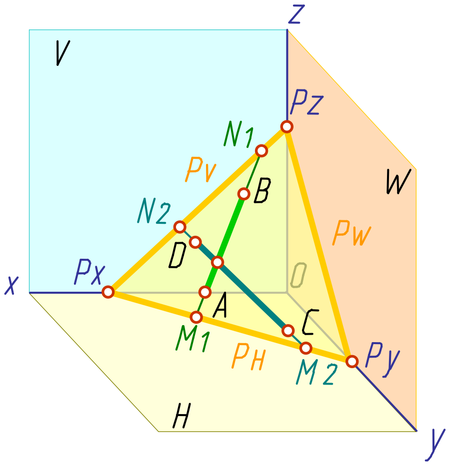


Рис. 3

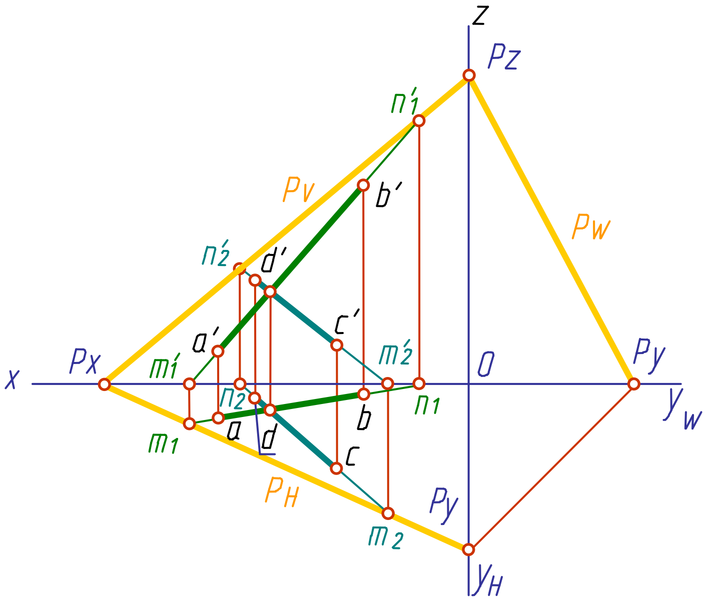


Рис. 4

Точка и прямая в плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

$$(\bullet)K \in (AB) \subset Q \Rightarrow (\bullet)K \in Q$$

Прямая принадлежит плоскости, если:

- она проходит через две точки, принадлежащие плоскости;

$$(\bullet)A \in Q \wedge (\bullet)B \in Q \Rightarrow (AB) \subset Q$$

- она проходит через одну точку этой плоскости параллельно прямой, лежащей в этой плоскости.

$$(\bullet)A \in Q \wedge (AB \,/\!/\, CD)(CD \subset Q) \Rightarrow (AB) \subset Q$$

Пример. Плоскость Q задана треугольником ABC (рис. 5).

Необходимо построить горизонтальную проекцию точки $K(k)$ и фронтальную проекцию точки $N(n')$, если они принадлежат плоскости Q.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей этой плоскости. Проведем через точку K прямую $A1$. построим фронтальную проекцию этой прямой ($a'1'$). Проведя через точку k' линию связи, найдем горизонтальную проекцию точки K – точку k (рис. 6).

Фронтальная проекция точки N(точка n') найдена с помощью прямой $B2$ (рис. 6).

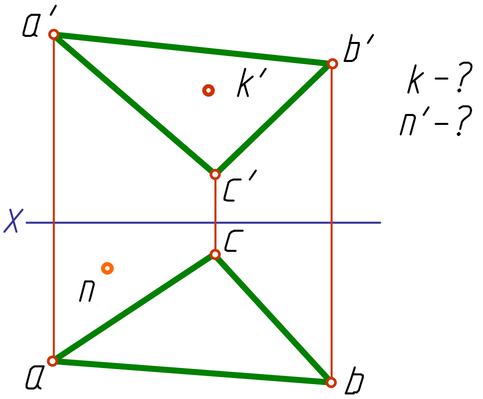


Рис. 5

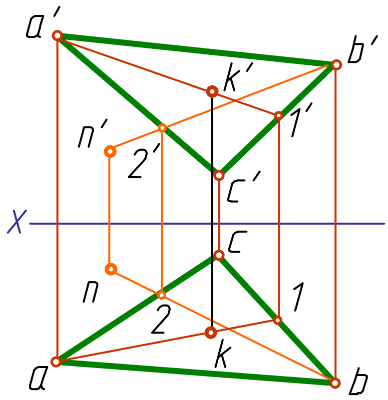


Рис. 6

Положение плоскости в пространстве

Плоскость, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется *плоскостью общего положения*.

Плоскости, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций, называются *плоскостями частного положения*. Они делятся на две группы.

Плоскость, перпендикулярную к плоскости проекций, называют *проецирующей* плоскостью.

Плоскость, параллельную плоскости проекций, называют *плоскостью уровня.*

Проецирующие плоскости

- Горизонтально-проецирующие (рис. 7).
- Фронтально-проецирующие (рис. 8).
- Профильно-проецирующие.

Если плоскость перпендикулярна плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в линию. Эту проекцию можно рассматривать и как след плоскости. На эту же плоскость проекций в натуральную величину проецируются углы наклона данной плоскости к двум другим плоскостям проекций.

Проецирующие плоскости обладают собирательным свойством: если точка, линия или фигура расположены в плоскости, перпендикулярной плоскости проекций, то на этой плоскости их проекции совпадают со следом проецирующей плоскости.

Горизонтально-проецирующая плоскость

Фронтально-проецирующая плоскость

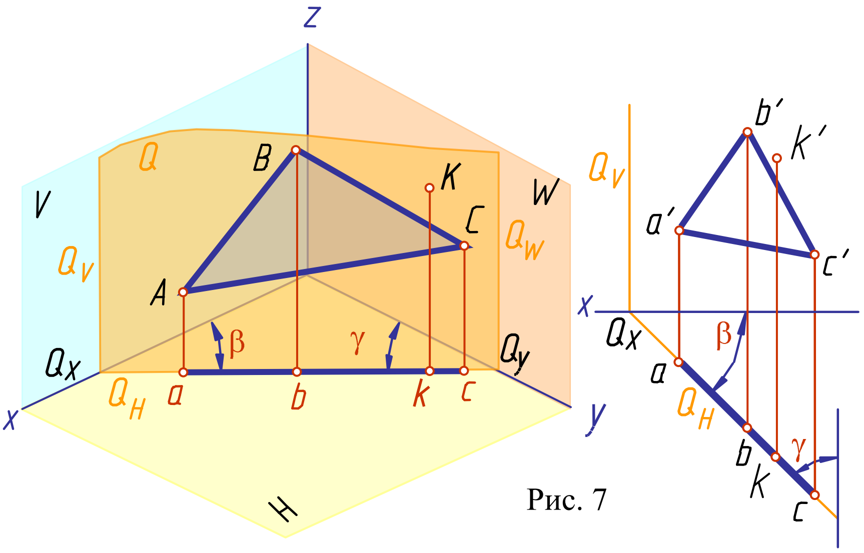


Рис. 7

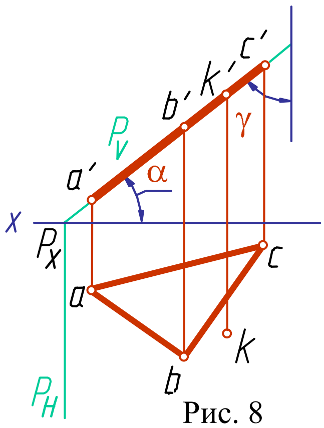


Рис. 8

Плоскости уровня

Горизонтальная (*рис. 9*) *Фронтальная* (*рис. 10*)

Если фигура параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость она проецируется в натуральную величину. Проекции фигуры на две другие плоскости проекций параллельны осям, определяющим данную плоскость проекций.

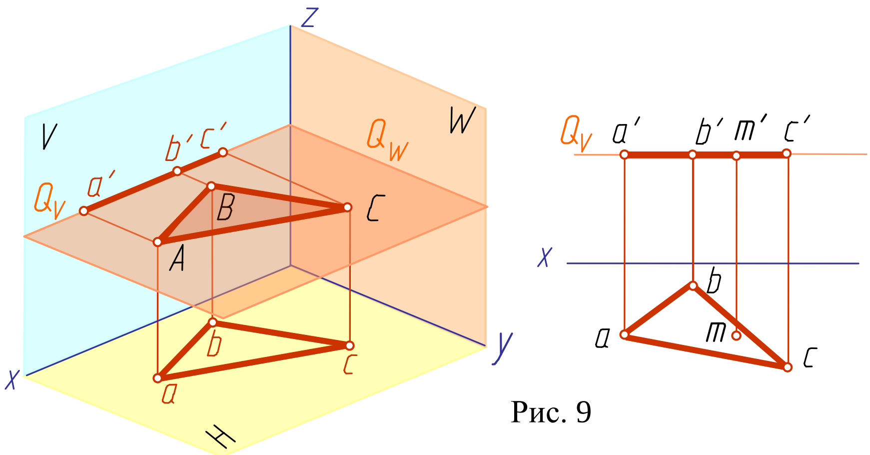


Рис. 9

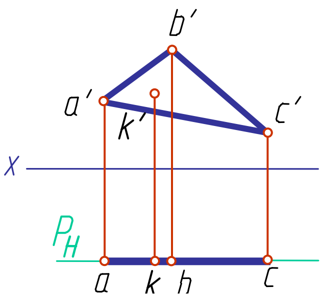


Рис. 10

Главные линии плоскости

Прямых, принадлежащих плоскости, очень много. Среди них есть прямые, занимающие особое, частное положение в плоскости. Эти линии называются *главными линиями плоскости*.

К ним относятся:

- Линии наименьшего наклона к плоскостям проекций (линии уровня) – горизонталь, фронталь и профильная прямая.
- Линии наибольшего наклона к плоскостям проекций.

Горизонталь – прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис. 11). Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси *x*, профильная – оси *y*.

Фронталь – прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций (рис. 12). Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси *x*, профильная – оси *z*.

Профильная прямая – прямая, лежащая в плоскости и параллельная профильной плоскости проекций. Горизонтальная проекция профильной прямой параллельна оси *y*, фронтальная – оси *z* (рис. 13).

Из трех линий наибольшего наклона к плоскостям проекций чаще всего интерес представляет линия наибольшего наклона к горизонтальной плоскости. Эту линию называют линией ската.

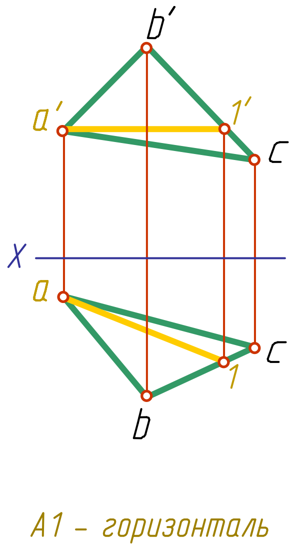


Рис. 11

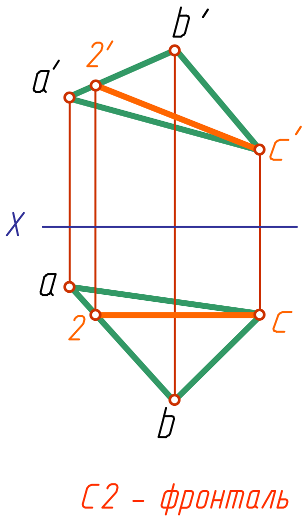


Рис. 12

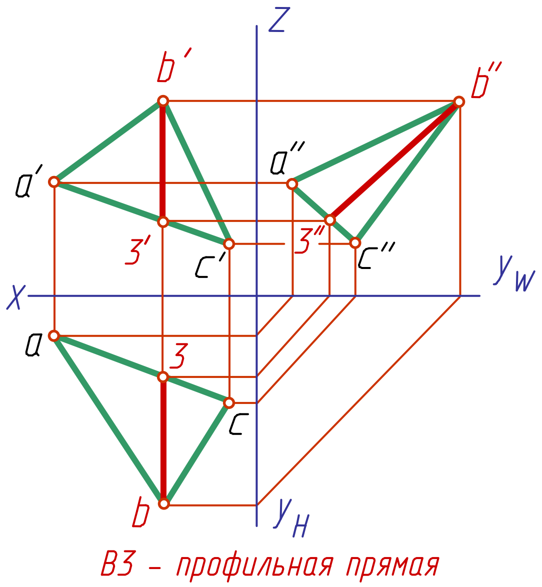


Рис. 13

Линия ската – это прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная ее горизонтальному следу или ее горизонтали.

Проведем плоскость *P* перпендикулярно плоскости *Q* и *H*. Плоскость *P* пересекает плоскость *Q* по линии ската *MN* (рис. 14).

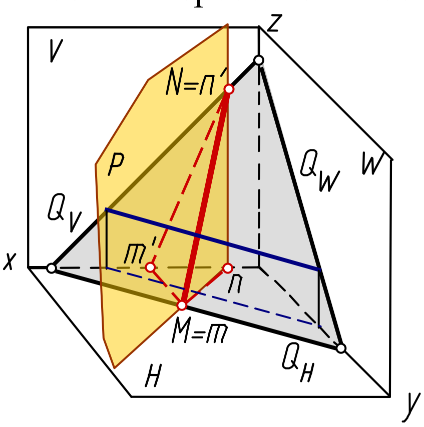


Рис. 14

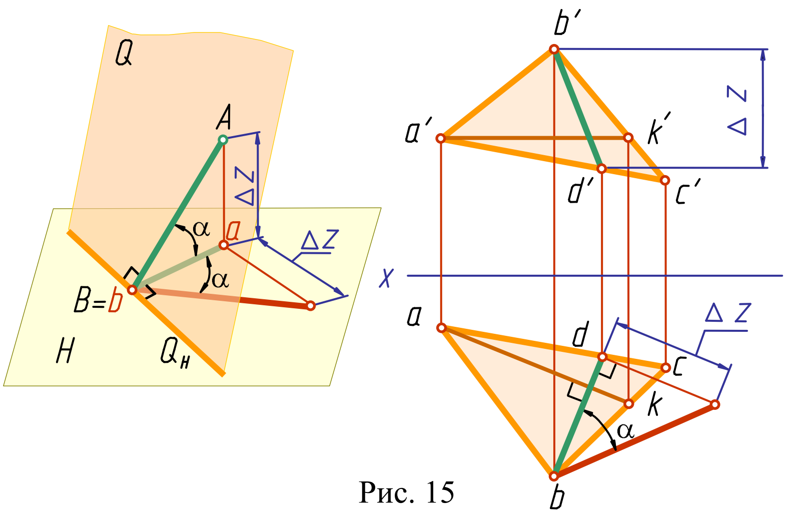


Рис. 15

Построив эту линию наибольшего наклона, можно определить величину двугранного угла между заданной плоскостью и плоскостью проекций. Этот угол будет равен линейному углу, который составляет линия наибольшего наклона со своей проекцией на эту плоскость (рис. 15).

Преобразование чертежа плоскости

Две основные задачи преобразования чертежа плоскости

Плоскость общего положения можно преобразовать:

- в проецирующую плоскость;
- плоскость уровня.

1. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость

В системе плоскостей V и H плоскость Q (ΔABC) занимает общее положение (рис. 16). Если мы заменим одну из плоскостей на новую и расположим эту плоскость перпендикулярно плоскости Q, то в новой системе плоскостей плоскость Q будет проецирующей.

Заменим, например, плоскость V на новую плоскость V_1. Расположим V_1 перпендикулярно плоскости H и плоскости Q. Плоскость V_1 будет перпендикулярна плоскости Q, если мы ее расположим перпендикулярно какой-нибудь линии плоскости. Для упрощения решения задачи в качестве этой линии возьмем горизонталь (линию, параллельную горизонтальной плоскости проекций).

Строим в плоскости Q горизонталь $A1$ и перпендикулярно ей проводим новую плоскость V_1. Ось x_1 проводим в любом месте перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали ($x_1 \perp a1$). Строим новую фронтальную проекцию плоскости Q. Горизонталь на новую плоскость спроецируется в точку ($a_1' = 1_1'$), а плоскость Q ($\Delta\ ABC$) – в линию $c'_1\, a'_1 b'_1$.

$$\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H}; \qquad V_1 \perp H; \qquad V_1 \perp Q\ (\Delta\ ABC);$$

$$V_1 \perp A1\ (A1 - \textit{горизонталь}); \qquad x_1 \perp (a1).$$

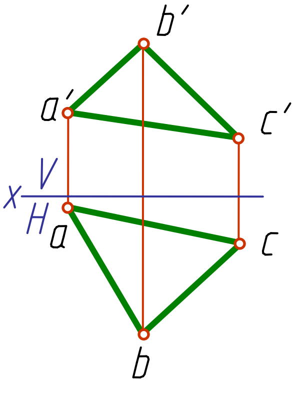


Рис. 16

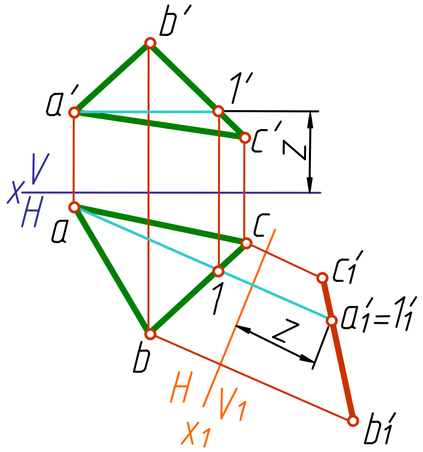


Рис. 17

Для преобразования плоскости Q в горизонтально-проецирующую плоскость, необходимо заменить плоскость H на новую, расположив ее перпендикулярно плоскости V и Q. Для этого в плоскости Q проводим фронталь и перпендикулярно ей строим новую горизонтальную плоскость.

Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня

При таком преобразовании мы определяем натуральную величину плоской фигуры (рис. 18).

В этом случае заменяется фронтальная плоскость V на новую V_1. Она проводится перпендикулярно плоскости H и параллельно плоскости P (Δ ABC). Ось x_1 строится параллельно линии abc. При такой замене координаты z не изменяются. Измеряем их на фронтальной плоскости проекций и откладываем на линиях связи от новой оси x_1.

$$\frac{V}{H} \to \frac{V_1}{H}; \quad V_1 \perp H; \quad V_1 // P(\Delta ABC); \quad x_1 // abc.$$

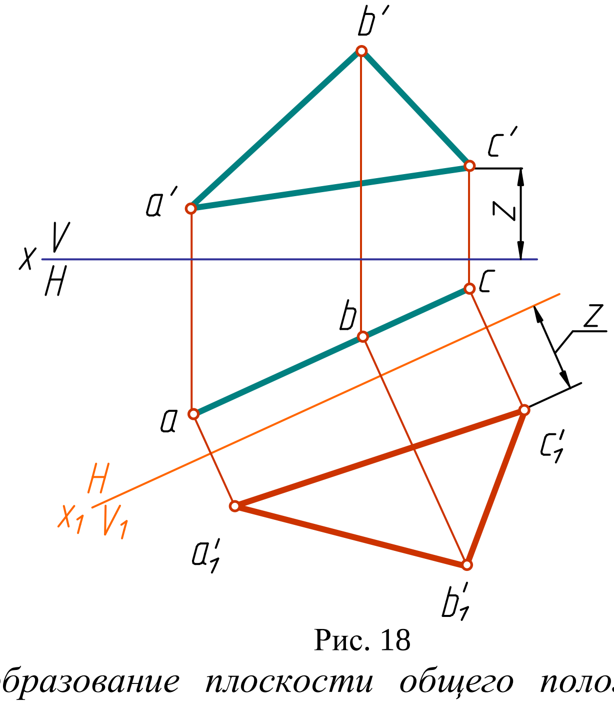


Рис. 18

2. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня

Для того, чтобы преобразовать плоскость общего положения в плоскость, которая будет параллельна одной из плоскостей проекций, необходимо провести две замены (рис. 19). Вначале преобразуем плоскость общего положения (рис. 19, *а*) в проецирующую плоскость (рис. 19, *б*), а затем проецирующую плоскость преобразуем в плоскость уровня (рис. 19, *в*).

$\frac{V}{H} \to x\frac{V_1}{H}$; $V_1 \perp H$; $V_1 \perp P(\Delta ABC)$;

$V_1 \perp A1$ ($A1$ – *горизонталь*); $x_1 \perp (a1)$;

$\frac{V_1}{H} \to \frac{V_1}{H_1}$; $H_1 \perp V_1$; $H_1 // P(\Delta ABC)$; $x_2 // c'_1 a'_1 b'_1$.

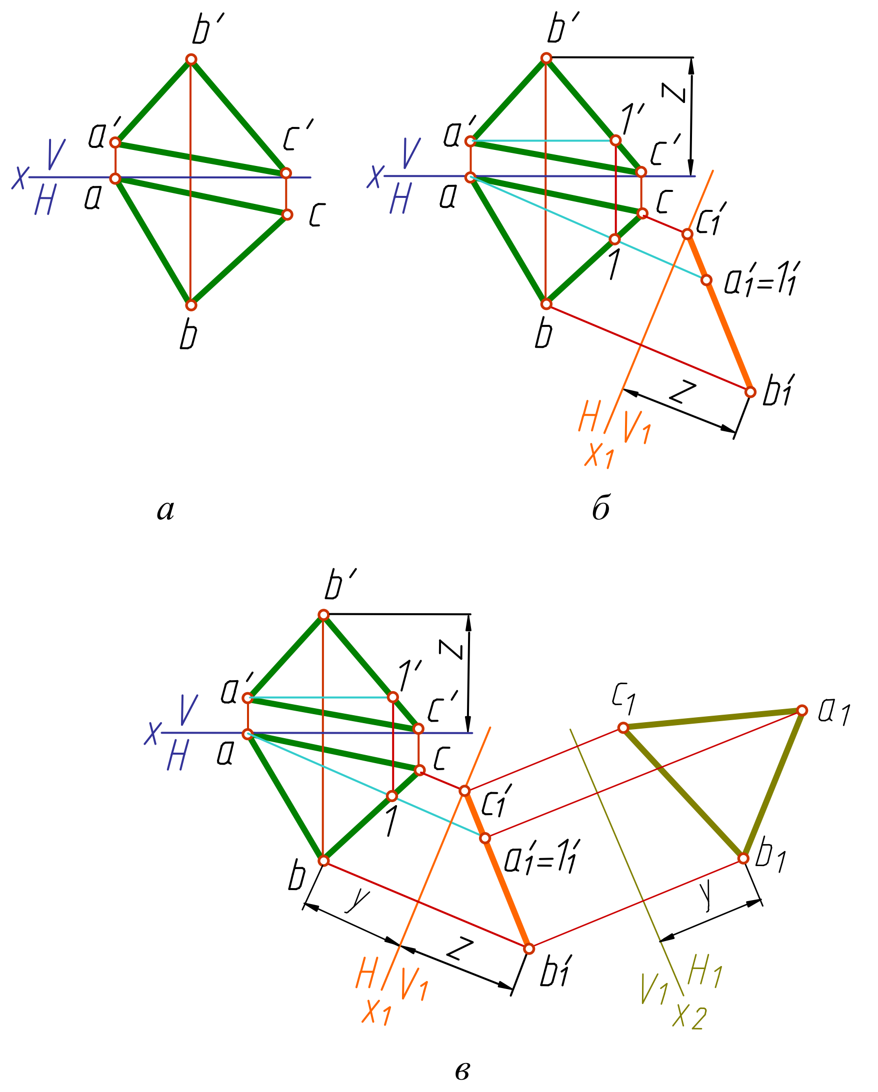


Рис. 19

Лекция 4. Взаимное положение прямой и плоскости. Взаимное положение плоскостей

Взаимное положение прямой и плоскости

Взаимное положение прямой и плоскости определяется количеством общих точек:

а) если прямая имеет две общие точки с плоскостью, то она принадлежит этой плоскости;

б) если прямая имеет одну общую точку с плоскостью, то прямая пересекает плоскость;

в) если точка пересечения прямой с плоскостью удалена в бесконечность, то прямая и плоскость параллельны.

Задачи, в которых определяется взаимное расположение различных геометрических фигур относительно друг друга. Называются *позиционными* задачами.

Прямая параллельна плоскости

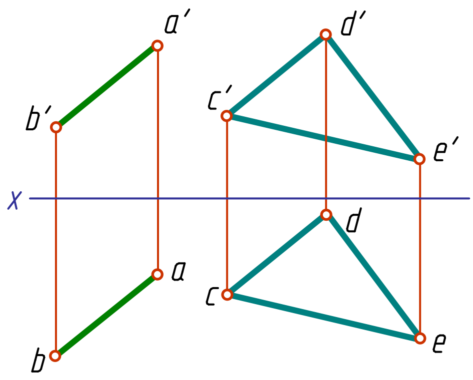


Рис. 1

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости. Чтобы построить такую прямую, надо в плоскости задать прямую и параллельно ей провести нужную прямую (рис. 1).

$$(AB)//(CD)\subset Q\Rightarrow(AB)//Q$$

Прямая будет также параллельна плоскости, если она лежит в плоскости, параллельной данной.

$$(AB)\subset P//Q\Rightarrow(AB)//Q$$

Прямая пересекает плоскость

Построить точку пересечения прямой с плоскостью – значит найти точку, принадлежащую одновременно заданной прямой и плоскости. Графически такая точка определяется как точка пересечения прямой с линией, лежащей в плоскости.

1. *Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью*

Если плоскость занимает проецирующее положение (например, она перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, рис. 2), то горизонтальная проекция точки пересечения должна одновременно принадлежать горизонтальному следу плоскости и горизонтальной проекции прямой, то есть быть в точке их пересечения. Поэтому сначала определяется горизонтальная проекция k точки K (точки пересечения прямой AB с горизонтально-проецирующей плоскостью Q (Δ CDE)), а затем ее фронтальная проекция.

2. *Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения*

На рис. 3 изображена плоскость общего положения *P* (Δ *CDE*) и горизонтально-проецирующая прямая *AB*, пересекающая плоскость в точке *K*. Горизонтальная проекция точки – точка *k* – совпадает с точками *a* и *b*. Для построения фронтальной проекции точки пересечения проведем через точку *K* в плоскости *P* прямую (например, 1–2). Сначала построим ее горизонтальную проекцию, а затем фронтальную. Точка *K* является точкой пересечения прямых *AB* и 1-2, то есть точка *K* одновременно лежит на прямой *AB* и в плоскости *P* и, следовательно, является точкой их пересечения.

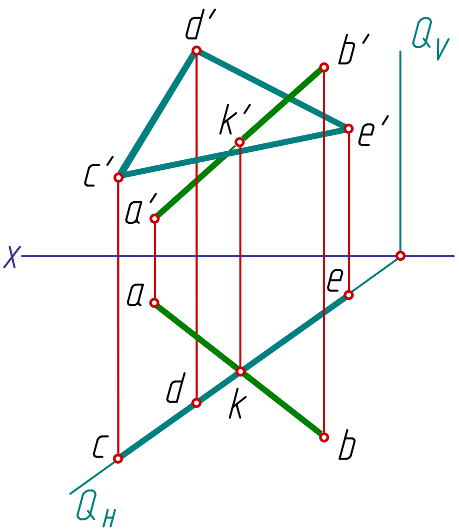


Рис. 2

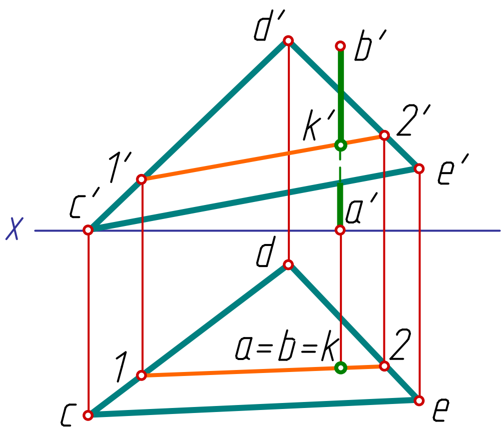


Рис. 3

3. *Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения*

В этом случае линия, лежащая в плоскости и пересекающаяся с данной прямой, может быть получена как линия пересечения вспомогательной секущей плоскости *P*, проведенной через прямую *AB*, с данной плоскостью *Q* (линия *MN*) (рис. 4).

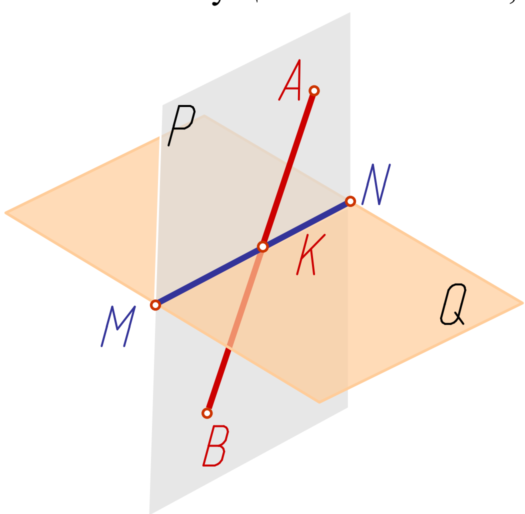


Рис. 4

Точку пересечения прямой с плоскостью строят по следующему плану.

1. Через прямую *AB* проводят вспомогательную плоскость *P*.

$$(AB) \subset P$$

2. Строят линию пересечения *MN* заданной плоскости *Q* и вспомогательной плоскости *P*.

$$(MN) = Q \cap P$$

3. Так как прямые *AB* и *MN* лежат в одной плоскости *P*, то определяют точку их пересечения (точку *K*), которая является точкой пересечения прямой *AB* с плоскостью *Q*.

$$(\bullet)K = (AB)\cap(MN)$$

4. Определяют взаимную видимость прямой *AB* и плоскости *Q*.

Задача: Определить точку пересечения прямой AB с плоскостью треугольника CDE (рис. 5). Точки задаются координатами:

A(9,1,2), *B*(2,7,6), *C*(11,7,4), *D*(2,4,2), *E*(5,0,7)

Задачу решаем по выше рассмотренному плану.

- Через прямую *AB* проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость *P*.

$$(AB)\subset P\perp V$$

- Строим линию пересечения *MN* заданной плоскости *Q (*Δ *CDE)* и вспомогательной плоскости *P*.

$$(12) = P\cap Q(\Delta CDE)$$

- Так как прямые *AB* и *MN* лежат в одной плоскости *P*, то определяем точку их пересечения (точку *K*), которая является точкой пересечения прямой *AB* с плоскостью *Q*.

$$(\bullet)K = (12)\cap(AB)$$

- Определяем взаимную видимость прямой *AB* и плоскости *Q*.

Для определения видимых участков прямой *AB* анализируем положение точек на скрещивающихся прямых (конкурирующих точек).

$(\bullet)1\in CD$	$(\bullet)4\in AB$
$(\bullet)3\in AB$	$(\bullet)5\in CD$
$Y_1 > Y_3$	$Z_4 > Z_5$

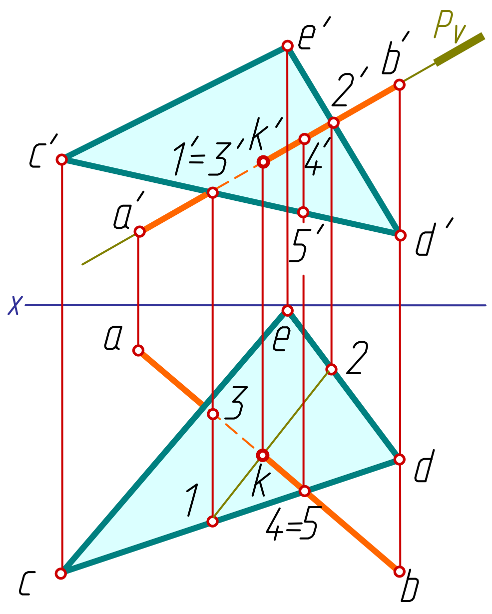


Рис. 5

Взаимное положение двух плоскостей

Параллельные плоскости.

Плоскости будут параллельными:

- если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис. 6);
- если плоскости параллельны, то параллельны их одноименные следы (рис. 7).

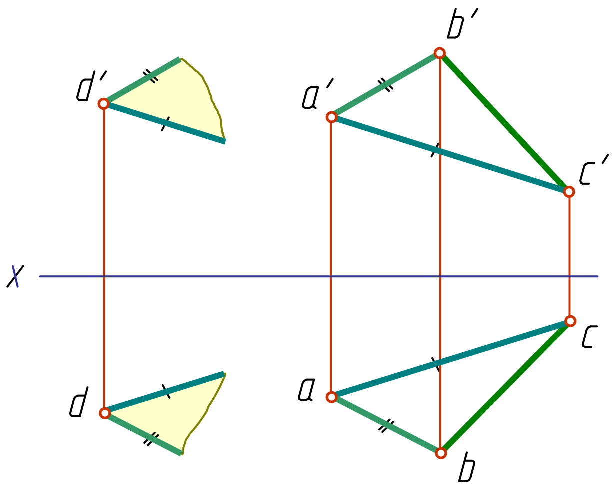


Рис. 6

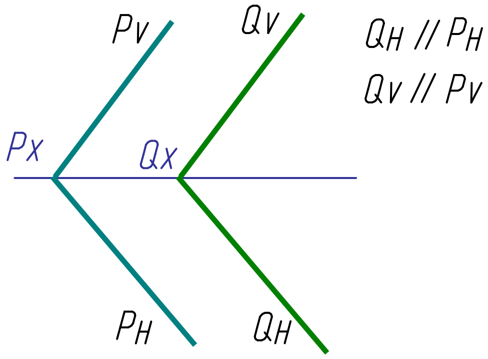


Рис. 7

Плоскости пересекаются

Для построения линии пересечения двух плоскостей необходимо

- или найти две точки, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям;
- или найти одну точку, принадлежащей двум плоскостям, и направление линии пересечения.

В обоих случаях задача заключается в нахождении точек, общих для двух плоскостей.

Плоскости в пространстве могут занимать различное положение. рассмотрим три случая построения линии их пересечения.

1. *Линия пересечения двух проецирующих плоскостей*

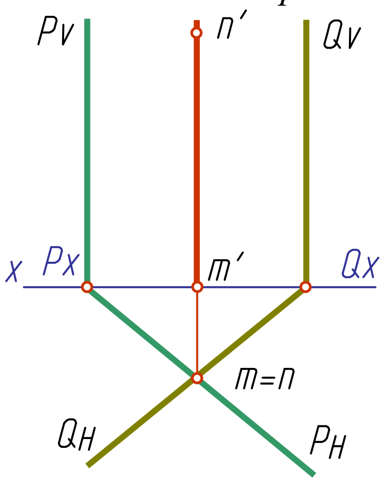


Рис. 8

Если плоскости занимают частное положение, например, как на рис. 8, являются горизонтально-проецирующими, то проекцией линии пересечения на плоскость проекций, которой данные плоскости перпендикулярны (в данном случае горизонтальной), будет точка. Фронтальная проекция линии пересечения перпендикулярна оси проекций.

2. *Линия пересечения плоскости общего положения и проецирующей плоскости*

В этом случае одна проекция линии пересечения совпадает с проекцией проецирующей плоскости на той плоскости проекций, которой

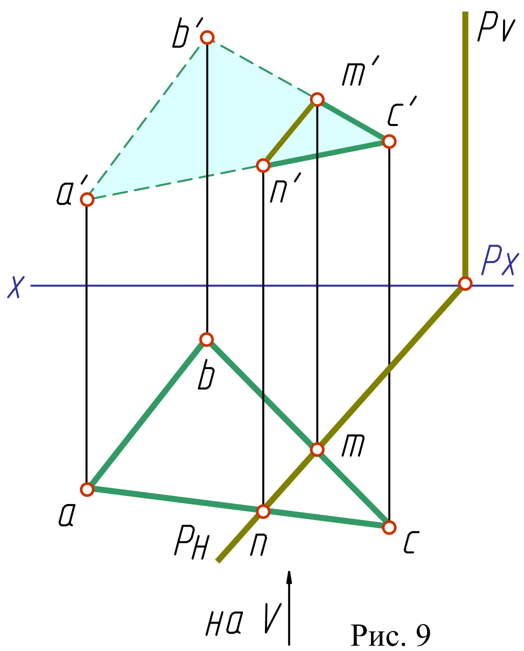


Рис. 9

она перпендикулярна. На рис. 9 показано построение проекций линии пересечения горизонтально-проецирующей плоскости, заданной следами, с плоскостью общего положения (треугольник *ABC*).

На горизонтальной проекции (рис. 9) в пересечении следа плоскости P_H и сторон *AC* и *BC* треугольника *ABC* находим горизонтальные проекции *n* и *m* линии пересечения. По линиям связи находим фронтальные проекции точек *M* и *N* линии пересечения.

При взгляде по стрелке на плоскость *V* по горизонтальной проекции видно, что часть треугольника правее линии пересечения *MN (mn)* находится перед плоскостью *P*, то есть будет видимой на фронтальной плоскости проекций. Остальная часть – за плоскостью *P*, то есть невидима.

Линия пересечения двух плоскостей общего положения

Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения осуществляется с помощью дополнительных плоскостей-посредников.

Общий прием построения линии пересечения таких плоскостей заключается в следующем. Вводим вспомогательную плоскость (посредник) и строим линии пересечения вспомогательной плоскости с двумя заданными. В пересечении построенных линий находим общую точку двух плоскостей. Чтобы найти вторую общую точку, повторяем построение с помощью еще одной вспомогательной плоскости.

$(12) = Q \cap \Delta ABC$

$(34) = Q \cap \Delta EFK$

$(\bullet) M = (12) \cap (34)$

$(56) = P \cap \Delta ABC$

$(78) = P \cap \Delta EFK$

$(\bullet) N = (56) \cap (78)$

Соединяем полученные точки *M* и *N* и определяем взаимную видимость фигур.

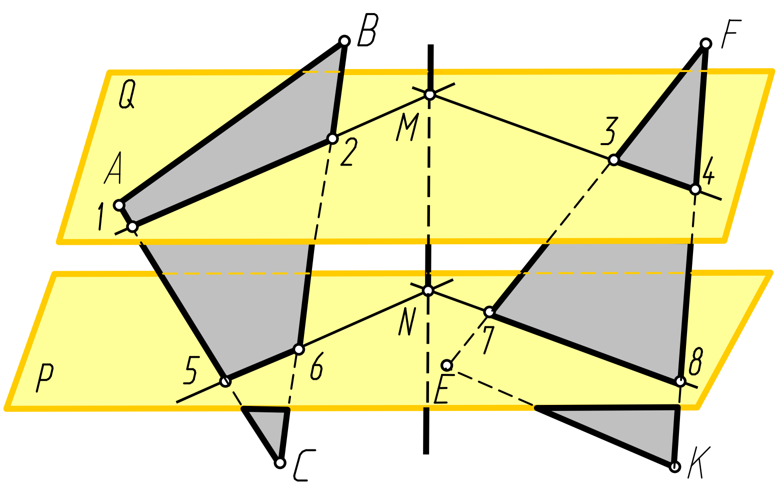


Рис. 10

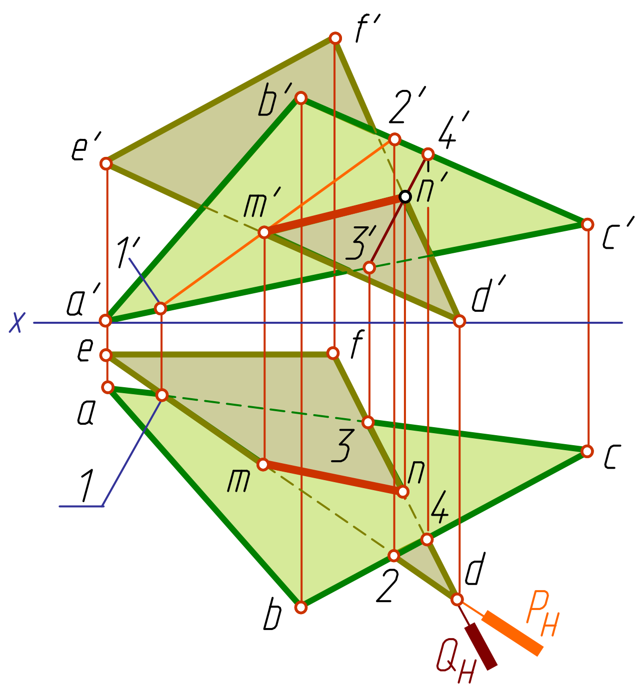
При решении подобных задач удобнее в качестве посредников применять проецирующие плоскости.

Задача. Построить линию пересечения двух плоских фигур, заданных треугольниками с координатами вершин:

$$\triangle ABC \text{ - } A(16,2,0),\ B(10,9,7),\ C(1,4,3)$$
$$\triangle DEF \text{ - } D(5,9,0),\ E(16,1,5),\ F(9,1,9)$$

На рис. 11 дано построение линии пересечения двух треугольников. Решение выполняем в следующей последовательности. Проводим две вспомогательные горизонтально-проецирующие плоскости – плоскость P через сторону ED и плоскость Q через сторону DF треугольника DEF. Плоскость P пересекает треугольник ABC по прямой 1-2. В пересечении фронтальных проекций $1'$-$2'$ и $d'e'$ находим фронтальную проекцию точки $M(m')$ линии пересечения. Плоскость Q пересекает треугольник ABC по прямой 3-4. В пересечении фронтальных проекций $3'$-$4'$ и $b'c'$ находим фронтальную проекцию точки $N(n')$ линии пересечения. Горизонтальные проекции этих точек, а следовательно, и линии пересечения, находим, проводя линии связи.

Соединяем точки M и N. Взаимную видимость треугольников на плоскостях проекций определяем с помощью конкурирующих точек.



1. $(ED) \subset P \perp H$
2. $(12) = P \cap \triangle ABC$
3. $(\bullet) M = (12) \cap (ED)$
4. $(FD) \subset Q \perp H$
5. $(34) = Q \cap \triangle ABC$
6. $(\bullet) N = (34) \cap (FD)$

Рис. 11

Лекция 5. Поверхности

Способы задания поверхности

Существуют различные способы задания поверхности.

1. ***Аналитический способ***

Поверхность в этом случае описана математическим выражением и представляется как геометрическое место точек или линий, удовлетворяющих уравнению $F(x, y, z) = 0$.

Например, поверхность шара задана уравнением: $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=r^2}$.

2. Задание поверхности ***каркасом***.

Этот способ используется при задании сложных поверхностей. Поверхность задается семейством линий, принадлежащих поверхности (каркасом). Каркасы могут быть сетчатые, линейчатые, точечные.

При задании поверхности каркасом необходимо иметь ряд ее параллельных сечений, которые можно рассматривать как положения образующей переменного вида. Такой способ применяется при изготовлении кузовов автомобилей, в самолетостроении и судостроении.

Способ задания поверхности каркасом с помощью линий пересечения поверхности плоскостями уровня применяется в топографии, горном и дорожном деле. Проекции линии уровня на плоскость проекций с соответствующими отметками представляют собой карту рельефа местности. Поверхность, отнесенная к земной поверхности, называется *топографической* (рис. 1).

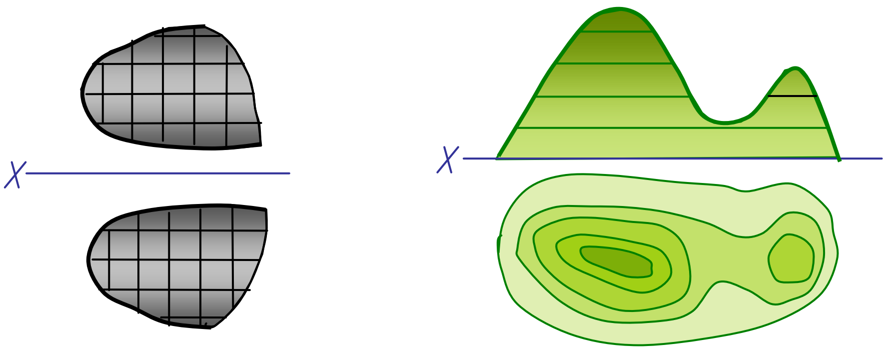


Рис. 1

3. ***Кинематический способ***

В начертательной геометрии поверхности рассматриваются как множество последовательных положений движущейся линии. Такой способ образования поверхности называется *кинематическим.*

Линия (кривая или прямая) движется в пространстве и создает поверхность. Она называется

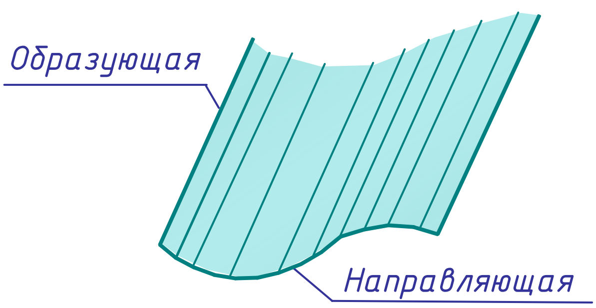


Рис. 2

образующей. Как правило, образующая движется по второй линии. Эта линия называется *направляющей* (рис. 2).

Классификация поверхностей

Поверхности можно разделить на несколько классов в зависимости от формы образующей, а также от формы, числа и расположения направляющих:

1. Поверхности закономерные и незакономерные.
2. Линейчатые (образованные перемещением прямой линии) и нелинейчатые (криволинейные) поверхности.
3. Поверхности развертывающиеся (или торсы) и неразвертывающиеся.

Развертывающиеся поверхности – поверхности, которые после разреза их по образующей могут быть односторонне совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.

Неразвертывающиеся поверхности – поверхности, которые не могут быть совмещены с плоскостью без наличия разрывов и складок.

4. Поверхности с образующей постоянной формы и поверхности с образующей переменной формы.
5. Поверхности с поступательным, вращательным или винтовым движением образующей.

Задание поверхности на чертеже

Чтобы задать поверхность на комплексном чертеже, достаточно иметь на нем такие элементы поверхности, которые позволяют построить каждую ее точку. Совокупность этих элементов называется *определителем поверхности.*

Определитель поверхности состоит из двух частей:

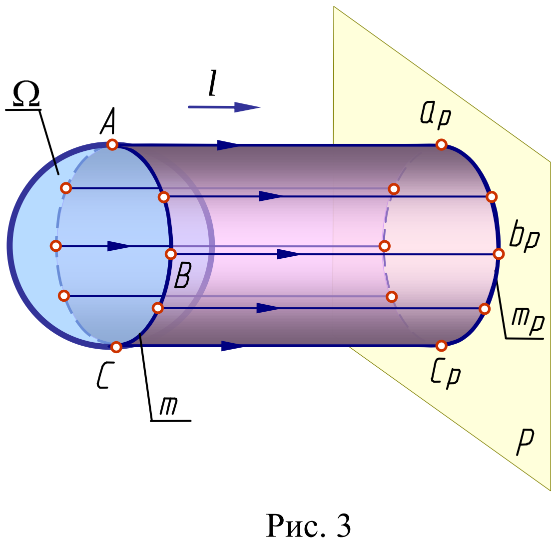


Рис. 3

- *геометрической части,* включающей постоянные геометрические элементы (точки, линии), которые участвуют в образовании поверхности;
- *алгоритмической части,* задающей закон движения образующей, характер изменения ее формы.

Когда какая-нибудь поверхность Ω проецируется с помощью параллельных лучей на плоскость проекций *P*, то проецирующие прямые, касающиеся поверхности Ω**,** образуют цилиндрическую поверхность (рис. 3). Эти проецирующиеся прямые касаются поверхности Ω в точках, образующих некоторую линию m, которая называется *контурной линией*.

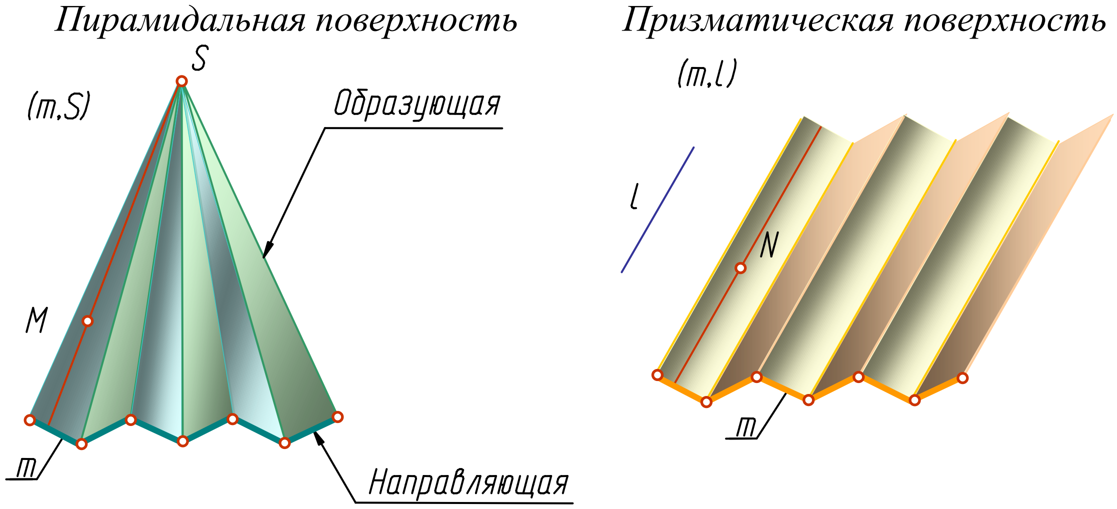
Проекция контурной линии m на плоскость P, m_p, называется *очерком поверхности*.

Чтобы сделать чертеж более наглядным строят *очерк поверхности*, а также ее наиболее важные линии и точки.

Линейчатые поверхности

Гранные поверхности

Гранной поверхностью называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. Гранные поверхности можно разделить на два вида: пирамидальные (рис. 4, *а*) и призматические (рис. 4, *б*).



а *б*

Рис. 4

Пирамидальной называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят через некоторую неподвижную точку S. Определитель поверхности – ломаная направляющая m и точка S.

Призматической называется поверхность, образованная перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей. При этом все образующие проходят параллельно некоторому заданному направлению l. Определитель поверхности – ломаная направляющая m и направление l.

Точка на поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-нибудь линии, принадлежащей поверхности.

Линия принадлежит поверхности, если она проходит через точки, принадлежащие поверхности.

Следовательно, если точка принадлежит поверхности, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям линии этой поверхности.

Точки M и N принадлежат соответственно пирамидальной и призматической поверхностям, так как принадлежат прямым, расположенным на этих поверхностях.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью, называется *телом*.

Многогранники

Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Рассмотрим два многогранника – пирамиду и призму.

Пирамида представляет собой многогранник, у которого одна грань – основание (произвольный многоугольник). Остальные грани (боковые) – треугольники с общей вершиной S, называемой вершиной пирамиды.

Для задания на чертеже пирамиды достаточно задать ее основание и вершину. Чтобы построить проекции точки на поверхности пирамиды, нужно через эту точку провести вспомогательную прямую, принадлежащую поверхности пирамиды (рис. 5).

Ω – пирамида $SABC$. (•) $M\ (m') \in \Omega$. m – ?

(•) $M \in S1$ (•) $M \in 2\text{–}3$ (•) $M \in B4$

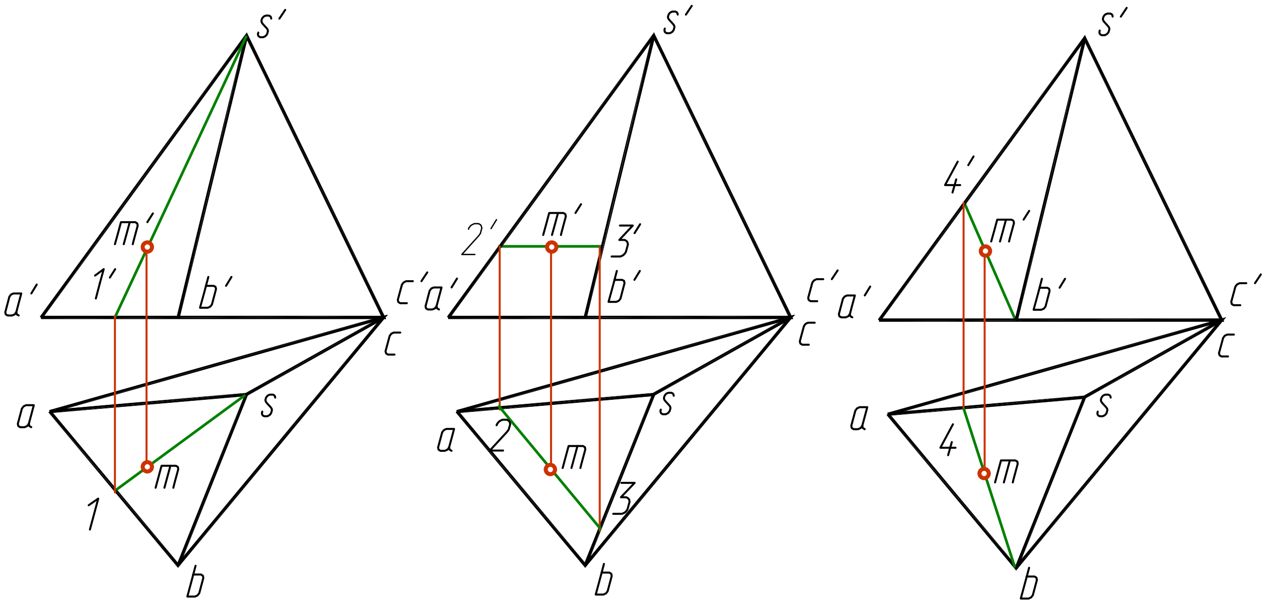
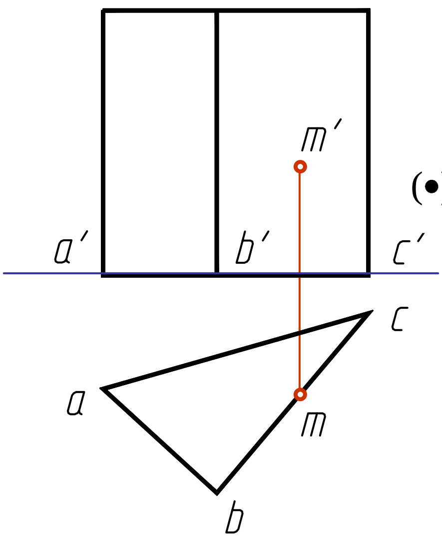


Рис. 5

Призмой называется многогранник, у которого основания – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами. Боковые грани призмы – параллелограммы. Если ребра боковых граней перпендикулярны основанию, то призму называют прямой (рис. 6), если нет – наклонной (рис. 7). Для задания призмы достаточно задать одно ее основание и боковое ребро. Чтобы построить недостающую проекцию точки, лежащей на грани призмы, нужно через эту точку провести прямую.

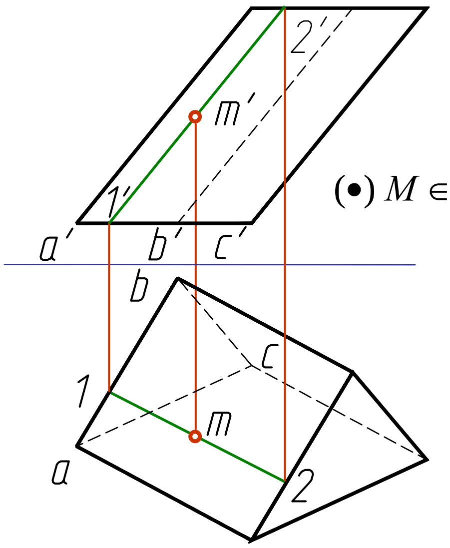
Σ – призма *ABC*. (•) *M* (*m*′) ∈ Σ.
m – ?



(•) *M* ∈ *грани ВС*

Рис. 6

Σ – призма *ABC*. (•) *M* (*m*′) ∈ Σ.
m – ?



(•) *M* ∈1–2

Рис. 7

Пересечение многогранников плоскостями

В пересечении гранных поверхностей плоскостями получаются многоугольники. Их вершины определяются как точки пересечения ребер гранных поверхностей с секущей плоскостью.

Многоугольник сечения может быть построен двумя способами:

1. Вершины многоугольника находятся как точки пересечения прямых (ребер) с секущей плоскостью;
2. Стороны многоугольника находятся как линии пересечения плоскостей (граней) многогранника с секущей плоскостью.

В качестве примера построим сечение призмы (рис. 8) и пирамиды (рис. 9) фронтально-проецирующими плоскостями.

Секущая плоскость является фронтально - проецирующей, следовательно, все линии, лежащие в этой плоскости (в том числе и фигура сечения на фронтальной проекции), совпадут с фронтальным следом Q_V плоскости Q. Таким образом, фронтальные проекции фигур сечения 1′2′3′ определятся при пересечении фронтальных проекций ребер призмы и пирамиды со следом Q_V. Горизонтальные проекции точек 1, 2 и 3 находим при помощи линий связи на горизонтальных проекциях соответствующих ребер.

Грани прямой призмы на плоскость, которой они перпендикулярны, проецируются в линии, ребра – в точки. Поэтому все точки и линии, находящиеся на гранях и ребрах призмы проецируется соответственно на эти линии и точки. Проекция фигуры сечения призмы совпадает с горизонтальной проекцией самой призмы (рис. 8).

Ω – призма *ABC*. *Q*⊥*V*

Ω∩Q = Δ 123

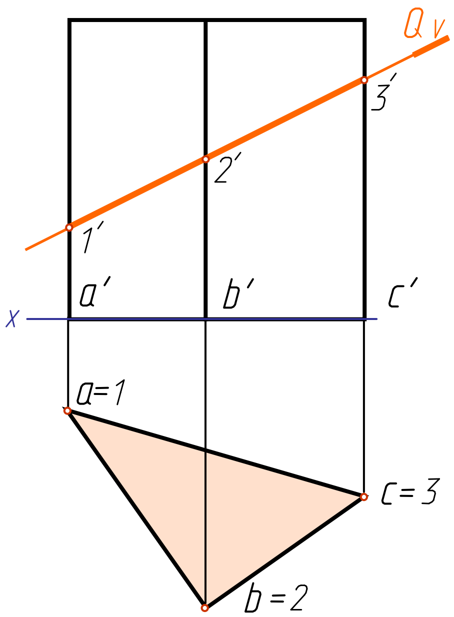


Рис. 8

Ω – пирамида *SABC*. *Q*⊥*V*

Ω∩Q = Δ 123

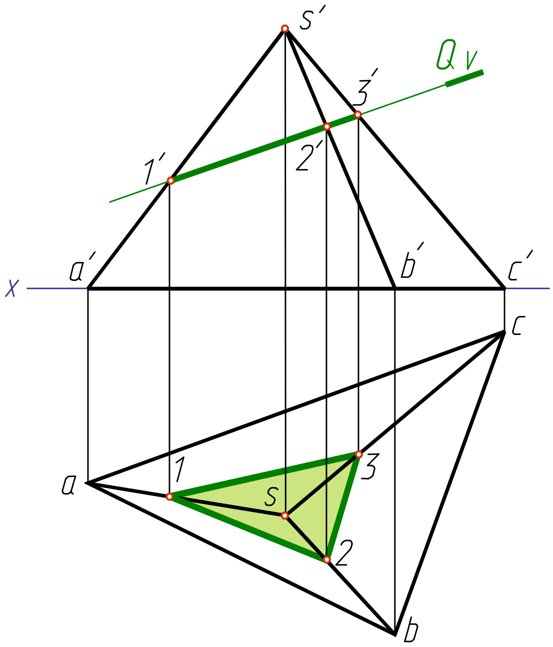
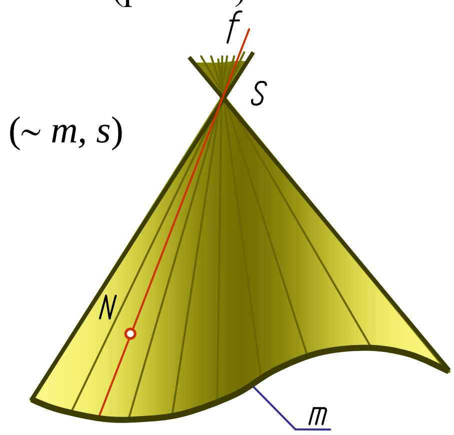


Рис. 9

Криволинейные поверхности

Коническая поверхность образуется движением прямолинейной образующей по криволинейной направляющей. При этом образующая проходит через некоторую неподвижную точку *S*, которая называется вершиной (рис. 10).



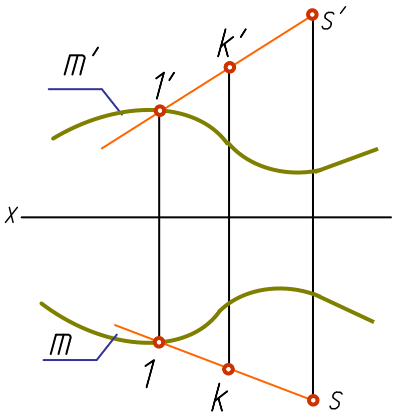
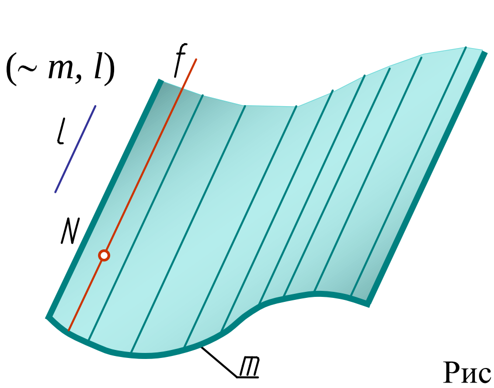


Рис. 10

Коническая поверхность определена на чертеже, если заданы направляющая и вершина. Тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью, называется *конусом*. Конус будет круговым, если в его основании лежит круг.

Точка *N* принадлежит конической поверхности, так как она принадлежит образующей *f* этой поверхности; почка *K* принадлежит конической поверхности, так как она принадлежит образующей *S1* (*k*∈*s1*, *k*′∈*s*′*1*′) данной поверхности (рис. 10).

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямолинейной образующей параллельно заданной прямой линии *l* по криволинейной направляющей (рис. 11).



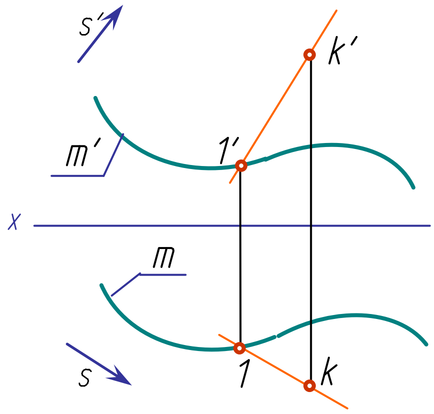


Рис. 11

Цилиндрическая поверхность определена, если задана направляющая и образующая. Для построения чертежа цилиндрической поверхности удобно выбирать в качестве направляющей линию пересечения цилиндрической поверхности с плоскостью проекций или другой плоскостью, ей параллельной.

Цилиндрическая поверхность также может быть незамкнутой или замкнутой. Тело, ограниченное цилиндрической замкнутой поверхностью и двумя параллельными плоскостями, называется *цилиндром*. Цилиндрические поверхности различают по виду нормального сечения, например, круговой цилиндр, эллиптический цилиндр и т.д.

Точка *N* принадлежит цилиндрической поверхности, так как она принадлежит образующей *f* этой поверхности; точка *K* принадлежит цилиндрической поверхности, так как она принадлежит образующей, проходящей через точку *1* параллельно направлению *S* данной поверхности (рис. 11).

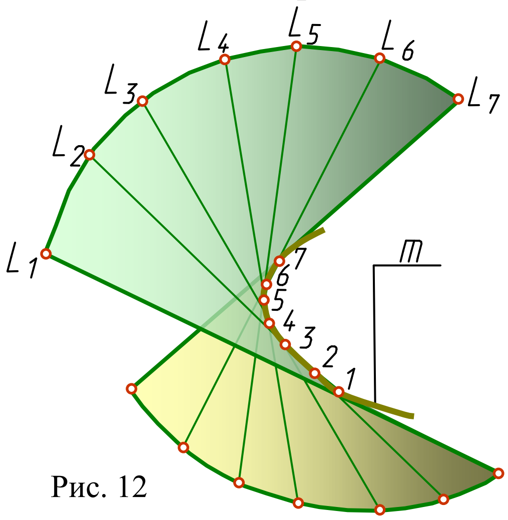


Рис. 12

Торс (поверхность с ребром возврата) образуется движением прямолинейной образующей, касающейся во всех своих положениях некоторой пространственной кривой, называемой *ребром возврата* (от франц. *tors* – витой, крученный).

Ребро возврата *m* является направляющей торса. Торс состоит из двух полостей, разделенных ребром возврата (рис. 12).

Если ребро возврата вырождается в точку, поверхность торса превращается в коническую. В случае, когда ребро возврата вырождается в бесконечно удаленную точку, торсовая поверхность превращается в цилиндрическую.

Лекция 6. Поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образованная вращением образующей вокруг неподвижной оси (рис. 1). Эта поверхность определяется на чертеже заданием образующей и оси вращения.

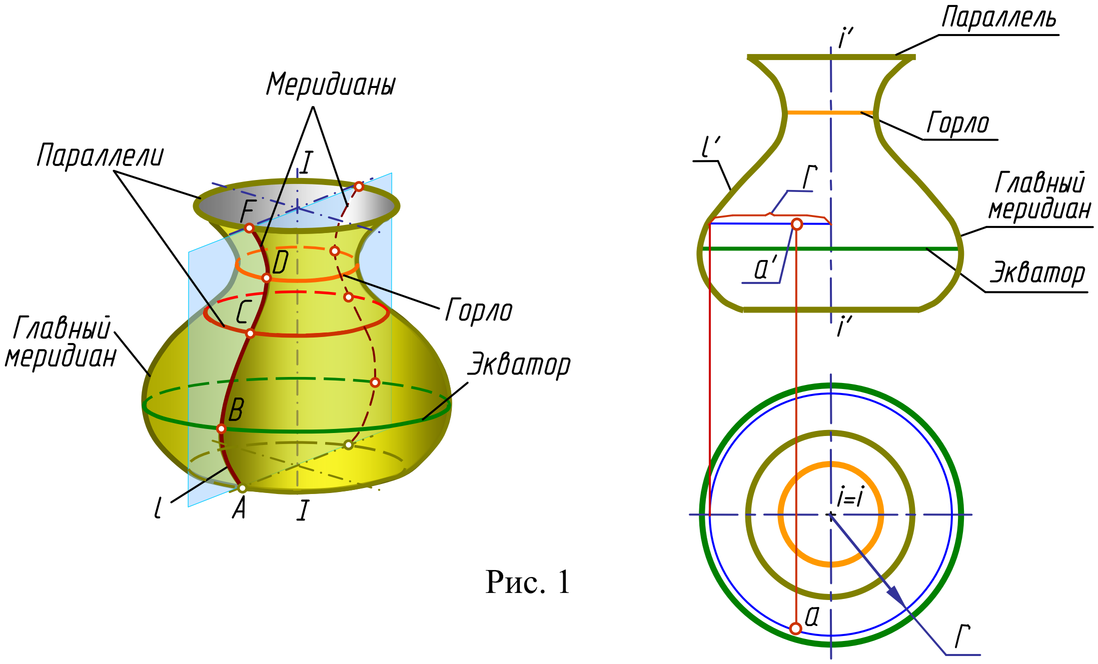


Рис. 1

Каждая точка образующей *l* описывает при своем вращении окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси вращения, с центром на оси. Эти окружности называются *параллелями*. Наибольшая из этих параллелей называется *экватором*, наименьшая – *горлом*.

Плоскость, проходящую через ось поверхности вращения, называют *меридианальной*. Линию ее пересечения с поверхностью – *меридианом*. Меридиан, параллельный фронтальной плоскости проекций, называется *главным меридианом*. Все меридианы равны между собой.

На чертеже ось вращения *II* располагают перпендикулярно к одной из плоскостей проекций, например горизонтальной. Тогда все параллели проецируются на эту плоскость в истинную величину. Экватор и горло определят горизонтальный очерк поверхности. Фронтальным очерком такой поверхности будет главный меридиан, то есть меридиан, расположенный во фронтальной плоскости.

Точки на поверхностях вращения могут быть построены с помощью параллелей, то есть окружностей на поверхности.

Цилиндр вращения

Цилиндром вращения называется поверхность, образованная вращением прямой вокруг параллельной ей оси.

Если ось цилиндра перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальные проекции точек, лежащих на его поверхности, будут расположены на окружности, в которую спроецируется цилиндр на горизонтальную плоскость H (рис. 2).

Задача. Найти недостающие проекции точек М и К (рис. 2).

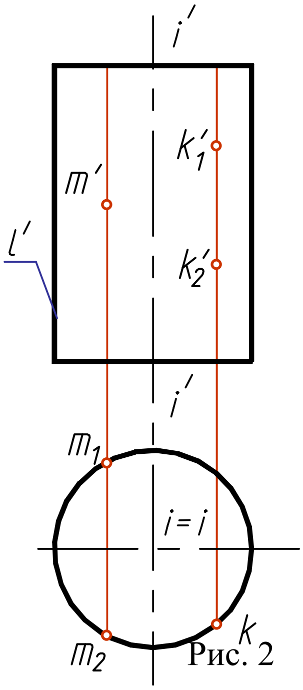


Рис. 2

$\varphi(I,\ II)$

$M\ (m')$

$K(k)$

$m\ (m_1,\ m_2) - ?$

$k'\ (k'_1,\ k'_2) - ?$

Для того, чтобы найти горизонтальную проекцию точки M, проведем линию связи от фронтальной проекции $M(m')$ до пересечения с горизонтальной проекцией цилиндра (окружностью). Задача имеет два ответа: точки m_1 и m_2.

Однозначно определить положение фронтальной проекции точки K по одной только горизонтальной проекции k невозможно. По линии связи, проведенной от горизонтальной проекции этой точки, на поверхности цилиндра может находиться бесчисленное множество точек. В этом случае необходима дополнительная информация о положении точки K.

При пересечении цилиндра вращения плоскостью, параллельной оси вращения, в сечении получаются две прямые – образующие (рис. 3).

Если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения, в результате сечения получится окружность (рис. 4).

В общем случае, когда секущая плоскость наклонена к оси вращения цилиндра, в сечении получается эллипс (рис. 5).

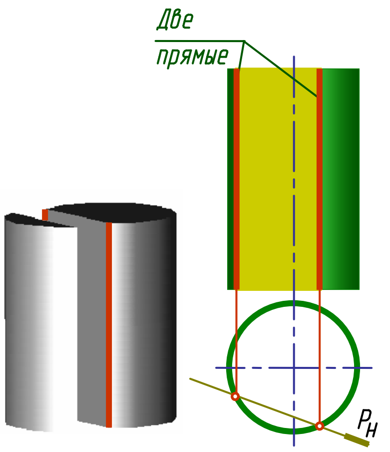


Рис. 3

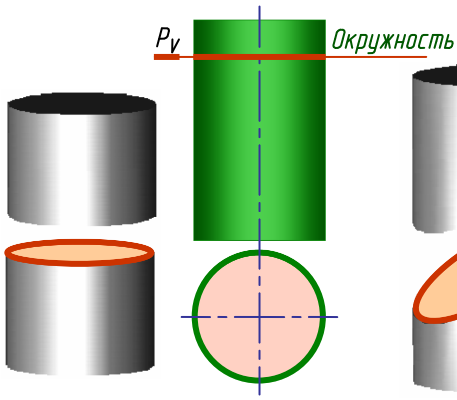


Рис. 4

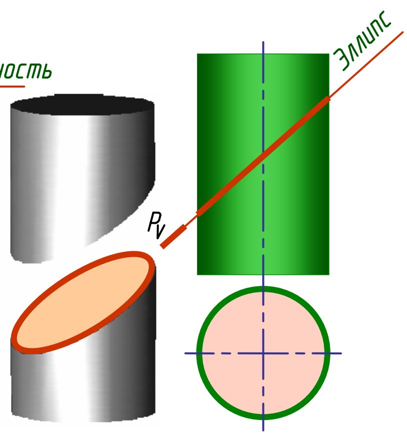
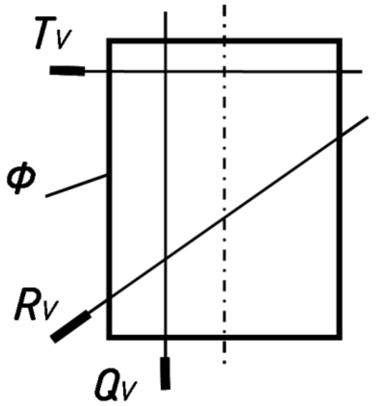


Рис. 5



$Q(Q_V) \cap \Phi =$ 2 образующие

$T(T_V) \cap \Phi =$ окружность

$R(R_V) \cap \Phi =$ эллипс

Рис. 6

Сечение цилиндра плоскостью

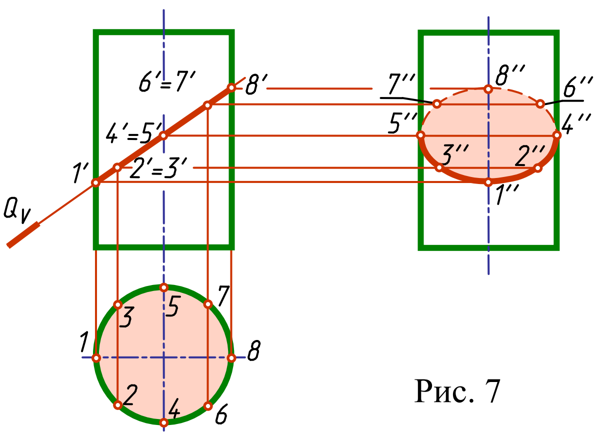


Рис. 7

В общем случае построение линии пересечения поверхности плоскостью заключается в нахождении общих точек, то есть точек, принадлежащих одновременно секущей плоскости и поверхности.

Для нахождения этих точек применяют способ дополнительных секущих плоскостей:

1.Проводят дополнительную плоскость.

2.Строят линии пересечения дополнительной плоскости с поверхностью и дополнительной плоскости с заданной плоскостью.

3.Определяют точки пересечения полученных линий.

Дополнительные плоскости проводят таким образом, чтобы они пересекали поверхность по наиболее простым линиям.

Нахождение точек линии пересечения начинают с определения характерных (опорных) точек. К ним относятся

- верхние и нижние, левая и правая и точки границы видимости;
- точки, характеризующие данную линию пересечения (для эллипса – точки большой и малой осей).

Для более точного построения линии пересечения необходимо построить еще и дополнительные (промежуточные) точки.

Прямой круговой конус

Сечение конуса плоскостью

В зависимости от направления секущей плоскости в сечении конуса вращения могут получиться различные линии.

• Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, в его сечении получается *две прямые* – образующие (треугольник) (рис. 8, *а*).

• В результате пересечения конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, получается *окружность* (рис. 8, *б*).

Если секущая плоскость наклонена к оси вращения конуса и не проходит через его вершину, в сечении конуса могут получиться эллипс, парабола или гипербола (рис. 8, *в, г, д*) – в зависимости от величины угла наклона секущей плоскости.

• *Эллипс* получается в том случае, когда угол β наклона секущей плоскости меньше угла наклона α образующих конуса к его основанию ($0<\beta < \alpha$), т.е. когда плоскость пересекает все образующие данного конуса (рис. 8, *в*).

• Если углы α и β равны (то есть секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса), в сечении получается *парабола* (рис. 8, *г*).

• Если секущая плоскость направлена под углом, который изменяется в пределах $90° \geqslant \beta > \alpha$, то в сечении получается *гипербола*. В этом случае секущая плоскость параллельна двум образующим конуса. Гипербола имеет две ветви, так как коническая поверхность двухполостная (рис. 8, *д*).

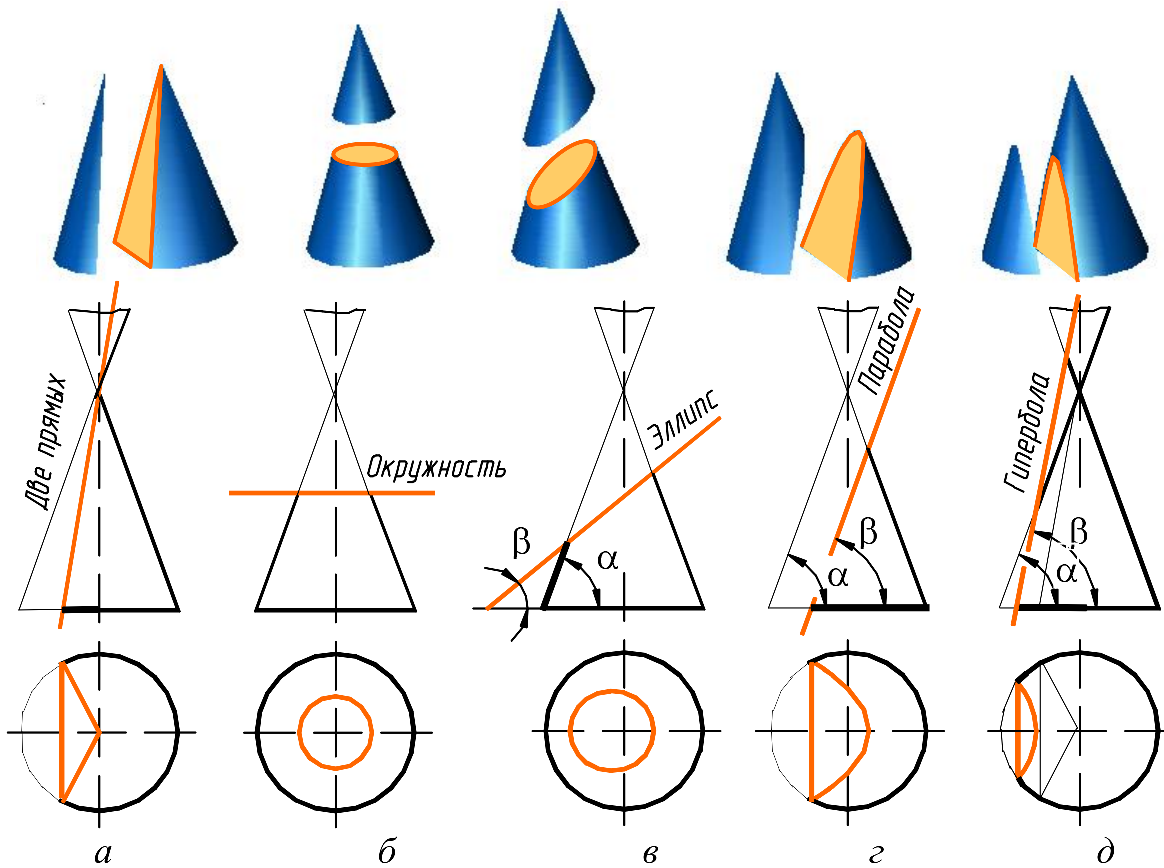


Рис. 8

Точка на конусе

Для конуса наиболее простыми линиями являются прямые (образующие) и окружности.

Горизонтальную проекцию точки A найдем с помощью образующей. Проведем через точку A и вершину конуса S вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость $P(P_V)$. Она пересекает конус по двум образующим SM и SN. Их фронтальные проекции совпадают. Строим горизонтальные проекции образующих. Затем проводим через точку a' линию связи. На пересечении линии связи и горизонтальных проекций образующих определим горизонтальную проекцию точки. Задача имеет два ответа: точки a_1 и a_2 (рис. 9).

(●)$A \in SN$ или (●)$A \in SM$

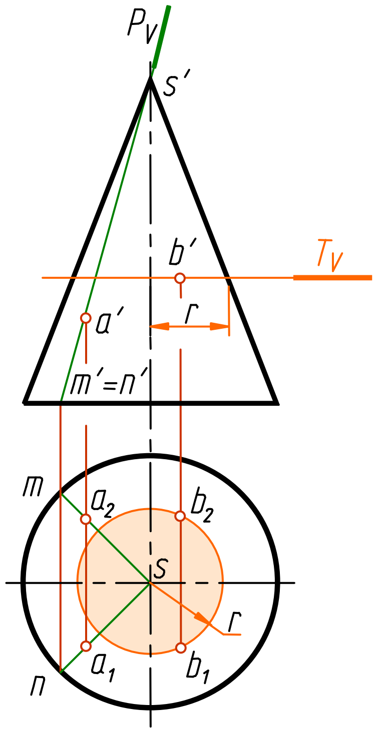


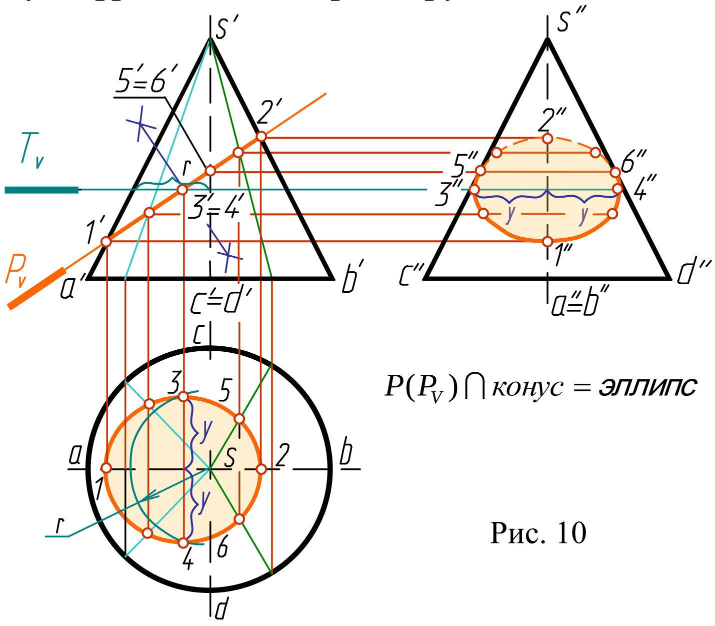
Рис. 9

Горизонтальную проекцию точки B найдем, построив окружность, на которой она лежит. Для этого через точку проведем горизонтальную плоскость $T(T_V)$, которая пересекает конус по окружности радиуса r.

(●)$B \in$ Окр. r

Строим горизонтальную проекцию этой окружности. Через точку b' проведем линию связи до ее пересечения с окружностью. Задача также имеет два ответа – точки b_1 и b_2.

Рассмотрим пример построения проекций линии пересечения конуса фронтально - проецирующей плоскостью $P(P_V)$. В этом случае в сечении получается эллипс (рис. 10).



$P(P_V) \cap$ *конус* = *эллипс*

Рис. 10

Сначала определим характерные (опорные) точки.

Фронтальная проекция линии сечения совпадает с фронтальным следом плоскости P_V. Нижняя точка 1 лежит на образующей AS, верхняя – 2 на образующей BS. Эти точки определяют положение большой оси эллипса. Малая ось эллипса перпендикулярна большой оси. Чтобы найти малую ось, разделим отрезок 1-2 на две равные части. Точки 3 и 4 определяют малую ось эллипса. Точки 5 и 6, расположенные на образующих *CS* и *DS,* являются точками границы видимости для профильной плоскости проекций. Проекции точек 1, 2, 5 и 6 находятся на соответствующих проекциях образующих. Чтобы найти проекции точек 3 и 4, проводим дополнительную секущую плоскость $T(T_V)$. Она рассекает конус по окружности радиуса *r.* На этой окружности находятся проекции данных точек. Для точного построения необходимо определить дополнительные (случайные точки). Проекции этих точек находим аналогично точкам 3 и 4 или проводя через эти точки образующие. Соединяем полученные проекции точек. Определяем видимость. На горизонтальной плоскости все точки, лежащие на поверхности конуса, видимы. На профильной – точки 5, 3, 1, 4, 6 видимы, остальные – нет.

Шаровая поверхность

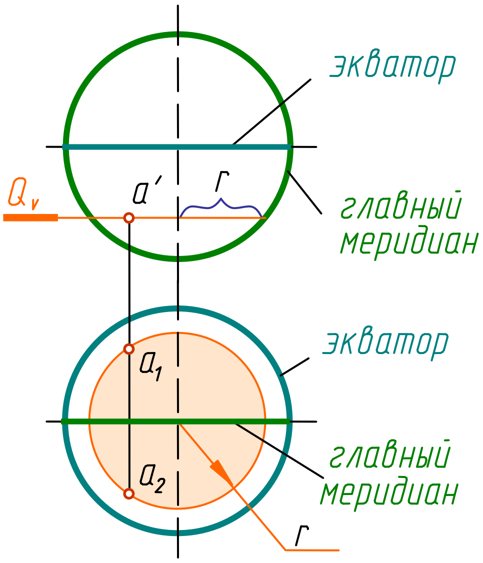


Рис. 11

Шаровой поверхностью (или сферой) называется поверхность, образованная при вращении окружности вокруг своего диаметра.

Если шаровая поверхность пересекается плоскостью, то в сечении всегда получается окружность, которая может спроецироваться:

- *в прямую*, если секущая плоскость перпендикулярна плоскости проекций;

- *в окружность*, если секущая плоскость параллельна плоскости проекций. Например, окружность с радиусом *r*, равным расстоянию от оси вращения шара до очерка (рис. 11);

- *в эллипс*, если секущая плоскость не параллельна плоскости проекций.

Чтобы построить проекции точки, лежащей на поверхности шара, необходимо через нее провести секущую плоскость, параллельную плоскости проекций, затем построить окружность, на которой находится эта точка.

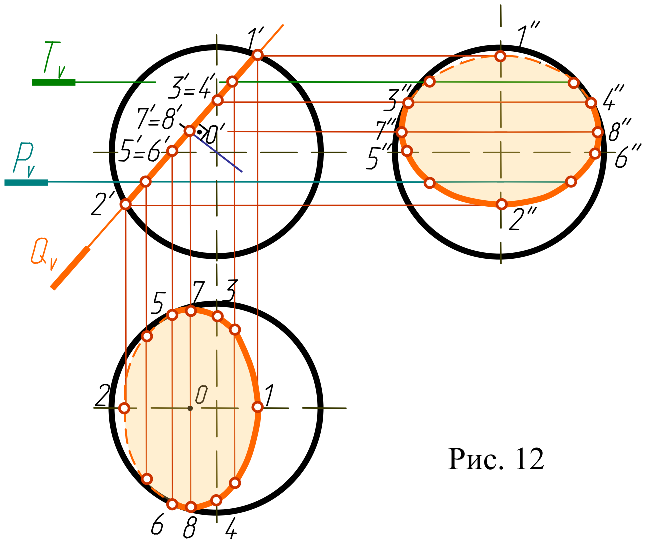
$$(\bullet)A \in Окр.\, r$$

Сечение шаровой поверхности плоскостью

Пересечем поверхность шара фронтально-проецирующей плоскостью $Q(Q_V)$ (рис. 12). Построение начинаем с определения характерных точек.

$$(\bullet)1,2 \in гл.\, меридиану$$

Точки 1 и 2 находятся на главном меридиане. Эти точки – концы малой оси эллипса, а также это самая высокая и самая низкая точки. Их горизонтальные и профильные проекции строим по фронтальным проекциям.



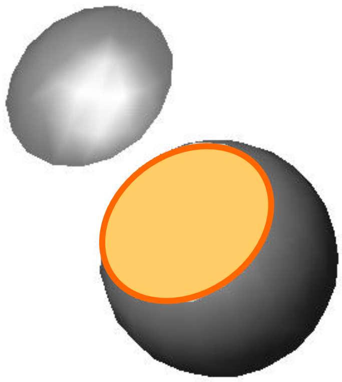


Рис. 12

(●)3,4 ∈ *профильному очерку*

Точки 3 и 4 находятся на профильном меридиане и определяют видимость на профильной плоскости проекций. Горизонтальные проекции точек находим по профильным проекциям.

(●)5,6 ∈ *экватору*

Точки 5 и 6 принадлежат экватору и являются точками границы видимости на горизонтальной проекции. Профильные проекции точек находим по горизонтальным проекциям.

Чтобы найти положение большой оси эллипса (точки 7 и *8*) разделим отрезок 1′2′ пополам. Фронтальные проекции точек (точки 7′ и 8′) совпадают с серединой этого отрезка. В этой же точке находится фронтальная проекция центра окружности сечения. На горизонтальную плоскость диаметр окружности проецируется без искажения. Поэтому точки 7 и 8 будут находиться на расстоянии R от центра окружности сечения (рис. 12).

Для большей точности строим несколько дополнительных точек.

Полученные точки соединяем плавной кривой линией с учетом ее видимости.

Тор

Тор – поверхность, полученная вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр.

Если ось вращения проходит вне окружности, то поверхность называется «открытый тор» или «тор – кольцо» (рис. 13); если ось касает тор» (рис. 15 – 16). Тор, изображенный на рис. 15, называется также «тор-яблоко», а на рис. 16 – «тор-лимон». Сфера – частный случай торовой поверхности.

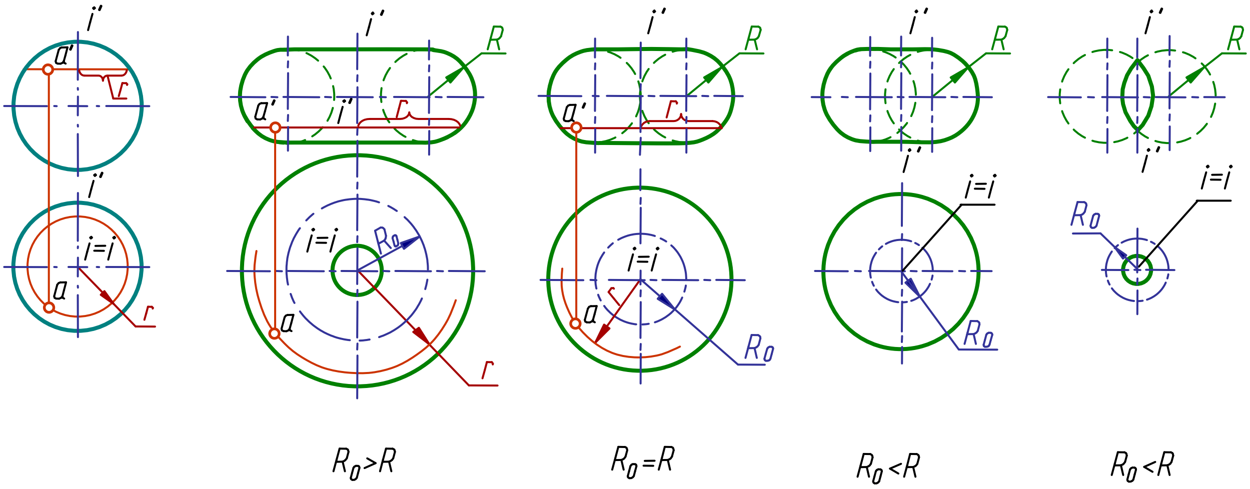


Рис. 13 Рис. 14 Рис. 15 Рис. 16

(•)$A \in$ *окр.*r

Поверхности, образованные вращением кривых второго порядка:

а) *эллипсоид вращения* – поверхность, полученная вращением эллипса вокруг оси (рис. 17). Поверхность, образованная вращением эллипса вокруг его большой оси, называется вытянутым эллипсоидом вращения (рис. 17, *б*), при вращении вокруг малой оси – сжатым эллипсоидом вращения (рис. 17, *а*, *в*);

б) *параболоид вращения* – поверхность, образованная вращением параболы вокруг ее оси (рис. 18);

в) *двухполостный гиперболоид вращения* – поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг ее действительной оси (рис. 19).

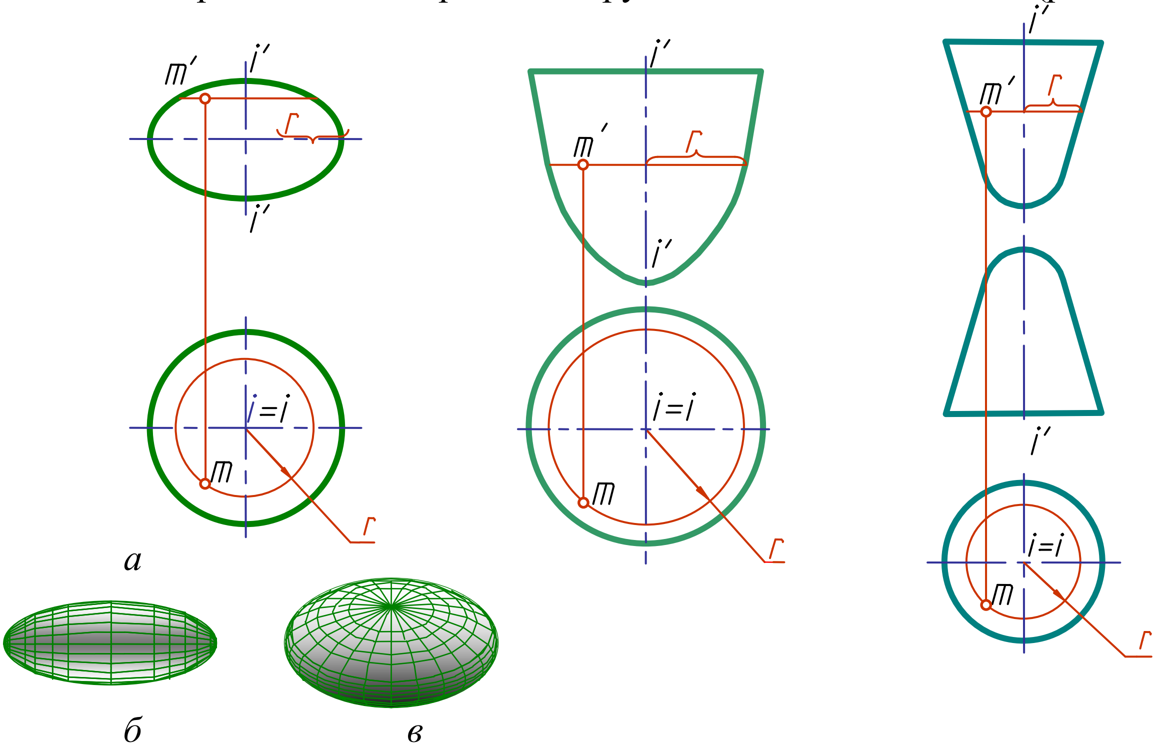


Рис. 17 Рис. 18 Рис. 19

Лекция 7. Винтовые поверхности. Пересечение поверхностей

Винтовая линия

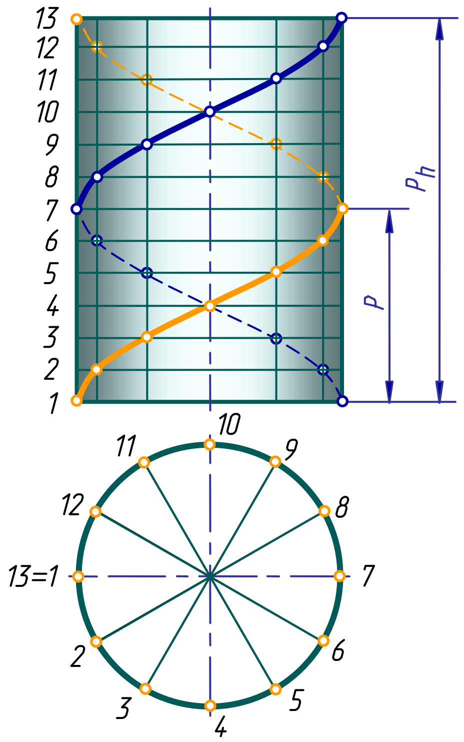


Рис. 1

Винтовая линия (гелиса) – это пространственная кривая, образованная движением точки, совершающей одновременно поступательное и вращательное движение.

Рассмотрим цилиндрическую винтовую линию (рис. 1) и построим две ее проекции.

Для этого используем две проекции цилиндра, каждую из которых делим на двенадцать равных частей. При перемещении точки из первого положения во второе ее горизонтальная проекция перемещается по окружности на одну двенадцатую часть, а фронтальная – вверх на одну двенадцатую.

Совершая полный оборот, точка в пространстве опишет винтовую линию. Высота, на которую поднимается точка по прямой за полный оборот, называется *шагом винтовой линии*. Если ось винтовой линии перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция винтовой линии есть окружность, а фронтальная – синусоида.

На одной поверхности цилиндра может быть несколько винтовых линий.

Винтовые поверхности

Винтовой поверхностью называется поверхность, образованная при перемещении какой-либо линии (образующей) по винтовой линии (направляющей).

Если образующей винтовой поверхности является прямая линия, то поверхность называется *линейчатой винтовой поверхностью* или *геликоидом* (от франц. helic – спираль, винтовая линия). Геликоид называется прямым или наклонным в зависимости от того, перпендикулярна образующая оси геликоида или наклонна.

Рассмотрим некоторые виды линейчатых винтовых поверхностей.

1.*Прямой геликоид* образуется движением прямолинейной образующей l по двум направляющим. Одна из направляющих является цилиндрической винтовой линией m, а другая – ее осью II. Причем во всех своих положениях образующая l параллельна плоскости, которая называется плоскостью параллелизма, перпендикулярной оси *II* (рис. 2). У прямого геликоида образующая *l* пересекает ось *II* под прямым углом.

2. *Наклонный геликоид* отличается от прямого геликоида тем, что его образующая *l* пересекает ось геликоида под постоянным углом α, не равным прямому углу. Во всех своих положениях образующая *l* параллельна образующим некоторого конуса вращения. У этого конуса угол между образующей и осью, параллельной оси геликоида, равен φ. Он называется *направляющим конусом наклонного геликоида* (рис. 3).

Его направляющими являются цилиндрическая винтовая линия *m* и ее ось *II*. Образующие геликоида параллельны соответствующим образующим направляющего конуса.

Если образующие геликоида пересекают его ось, то геликоид называется *закрытым*, если нет – *открытым*.

3. *Открытый геликоид* образуется при винтовом движении прямолинейной образующей *l*, касающейся во всех свих положениях поверхности малого цилиндра и параллельно плоскости параллелизма, проведенной перпендикулярно оси геликоида (рис. 4).

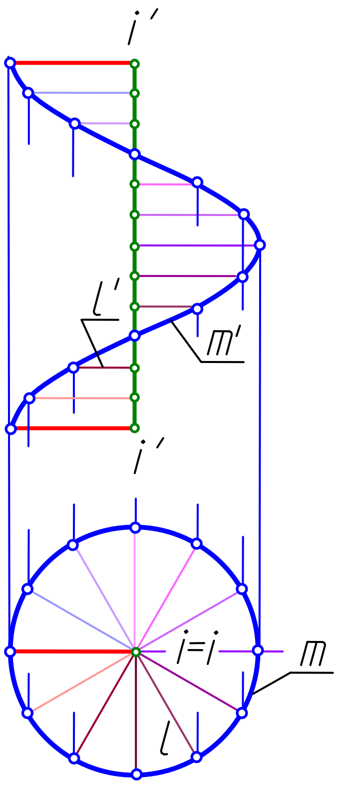


Рис. 2

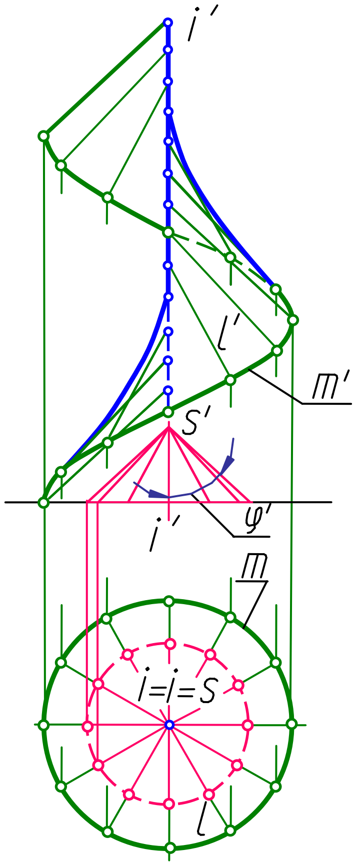


Рис. 3

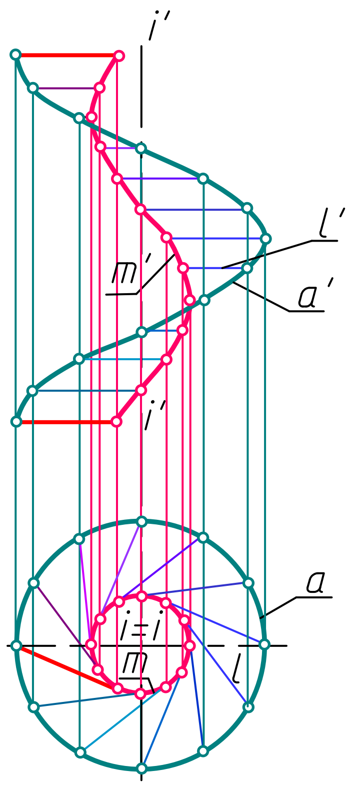


Рис. 4

Пересечение поверхностей

Линия пересечения двух поверхностей – это геометрическое место точек, принадлежащих одновременно обеим поверхностям.

Общим способом построения точек, принадлежащих кривой взаимного пересечения поверхностей, является способ вспомогательных поверхностей (плоскостей) посредников.

Принцип решения задачи

Пусть даны некоторые взаимно пересекающиеся поверхности Φ и Ω (рис. 5). Введем плоскость – посредник Q, которая пересечет поверхности по линиям M и N. Взаимное пересечение этих линий даст точки *1* и *2*, принадлежащие линии пересечения. Проводя ряд посредников, получаем семейство точек линии пересечения.

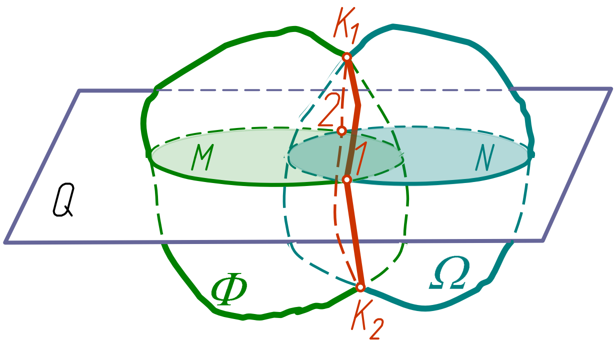


Рис. 5

Точки K_1 и K_2 находятся в точках пересечения очерков поверхностей и являются самой высокой и самой низкой точками линии пересечения.

Способы построения линий пересечения поверхностей:

В качестве посредников наиболее часто применяют *плоскости* частного положения и шаровые поверхности – *сферы*.

В зависимости от вида поверхностей посредников можно выделить следующие способы построения линии пересечения двух поверхностей:

а) способ вспомогательных секущих плоскостей;

б) способ вспомогательных сфер.

При построении линии взаимного пересечения поверхностей необходимо сначала определить опорные точки кривой. Эти точки дают пределы линии пересечения. Между ними и следует определять промежуточные (случайные) точки.

Способ вспомогательных секущих плоскостей

Для построения линии пересечения заданных поверхностей конуса и шара (рис. 6) в качестве вспомогательных плоскостей необходимо использовать фронтальную плоскость P и ряд горизонтальных плоскостей (S, T, R).

Построение начинаем с определения проекций характерных точек (рис. 7). Проводим фронтальную плоскость $P(P_H)$. Эта плоскость пересекает поверхности по очеркам. Фронтальные проекции высшей и низшей точек (*1′* и *2′*) находим как точки пересечения очерков.

$P\ (P_H)\ //\ V$; $\quad P \cap \Psi =$ треугольник;

$\qquad\qquad\qquad\ P \cap \Phi =$ окружность;

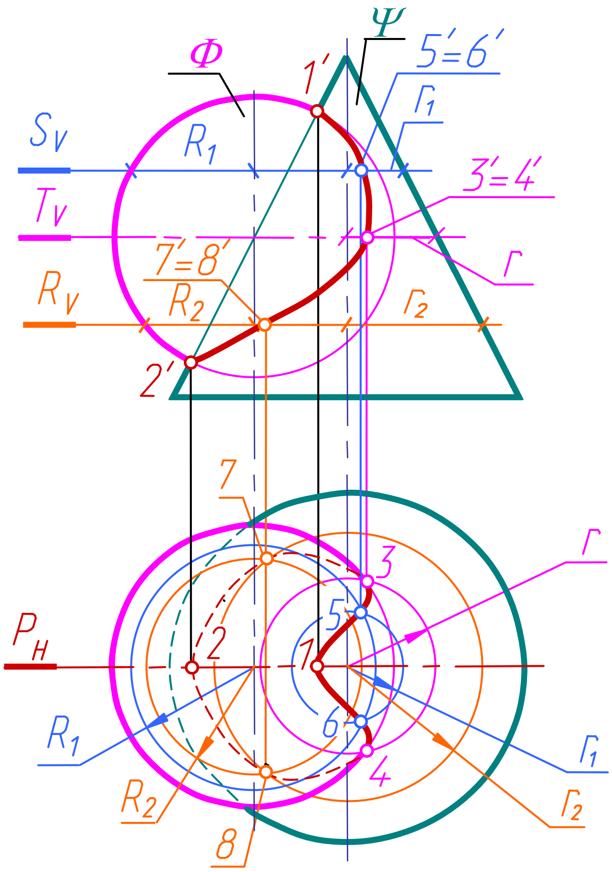


Рис. 7

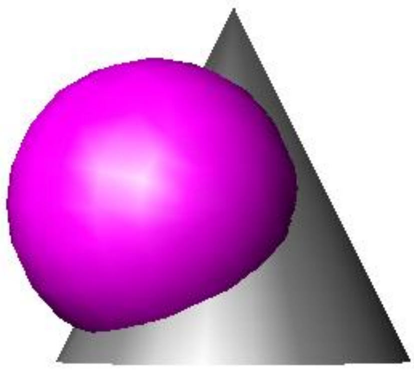


Рис. 6

(•) *1′*, *2′* = треугольник ∩ окружность – самая высокая и самая низкая точки линии пересечения.

Горизонтальные проекции *1* и *2* определяем, проведя линии связи до пересечения с P_H.

Вспомогательные горизонтальные плоскости пересекают сферу и конус по окружностям.

Точки *3* и *4*, лежащие на экваторе сферы, находим с помощью горизонтальной плоскости $T(T_V)$. Она проходит через центр сферы. Плоскость пересекает сферу по экватору и конус по окружности радиуса *r*. В пересечении горизонтальных проекций этих линий и находим горизонтальные проекции *3* и *4*.

$T\ (T_V)\ //\ H$; $\quad T \cap \Phi =$ окр. *max* радиуса (экватор);

$\qquad\qquad\qquad T \cap \Psi =$ окр. радиуса *r*;

$\qquad\qquad\qquad$ (•) *3*, *4* = экв. сферы ∩ окр. радиуса *r*

Фронтальные проекции точек *3′* и *4′* находим, проведя линии связи до пересечения с T_V.

Горизонтальные проекции точек *3* и *4* являются точками границы видимости линии пересечения на этой проекции.

Промежуточные точки (точки *5, 6, 7, 8*) находим с помощью вспомогательных горизонтальных плоскостей $S(S_V)$ и $R(R_V)$.

$S(S_V)$ // H; $S \cap \Phi$ = окр. рад. R_1; $S \cap \Psi$ = окр. рад. r_1;

(•) *5, 6* = окр. рад $R_2 \cap$ окр. рад. r_2.

(•) *5′, 6′* находим, проведя линии связи до пересечения с S_V.

$R(R_V)$ // H; $R \cap \Phi$ = окр. рад. R_2; $R \cap \Psi$ = окр. рад. r_2;

(•) *7, 8* = окр. рад $R_2 \cap$ окр. рад. r_2.

(•) *7′, 8′* находим, проведя линии связи до пересечения с R_V.

Полученные точки соединим плавной кривой линией с учетом видимости.

Пересечение соосных поверхностей

Соосными поверхностями вращения – называются поверхности, у которых совпадают оси вращения.

Линии пересечения соосных поверхностей – окружности, плоскости которых перпендикулярны оси поверхностей вращения. При этом если ось поверхностей вращения параллельна плоскости проекций, то линии пересечения на эту плоскость проецируются в отрезки прямых линий (рис. 8).

Это свойство используют для построения линии взаимного пересечения двух поверхностей вращения с помощью вспомогательных сфер.

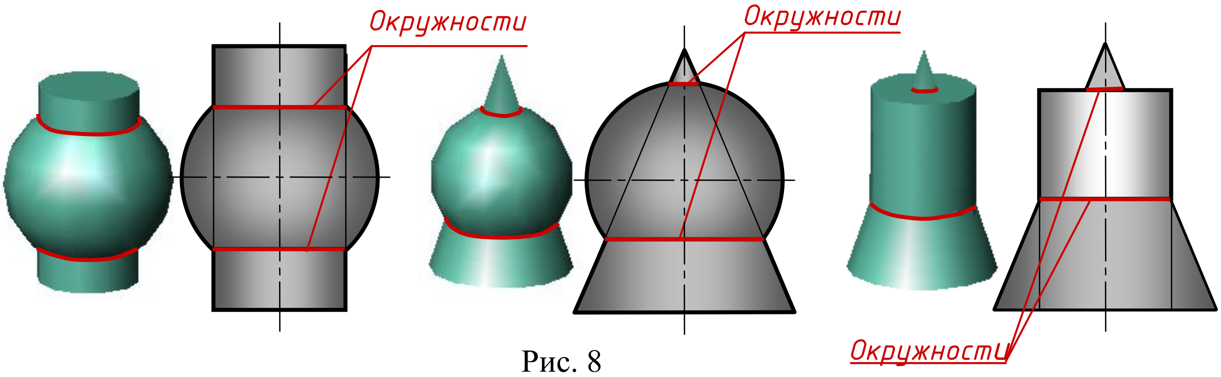


Рис. 8

Способ концентрических сфер

Способ вспомогательных сфер следует применять при следующих условиях:

а) пересекающиеся поверхности должны быть поверхностями вращения;

б) оси этих поверхностей должны пересекаться, точку пересечения принимают за центр вспомогательных сфер;

в) плоскость, образованная осями поверхностей (плоскость симметрии), должна быть параллельна одной из плоскостей проекций.

Используя этот способ, можно построить линию пересечения поверхностей на одной проекции.

Рассмотрим пример построения линии пересечения двух цилиндров (рис. 9).

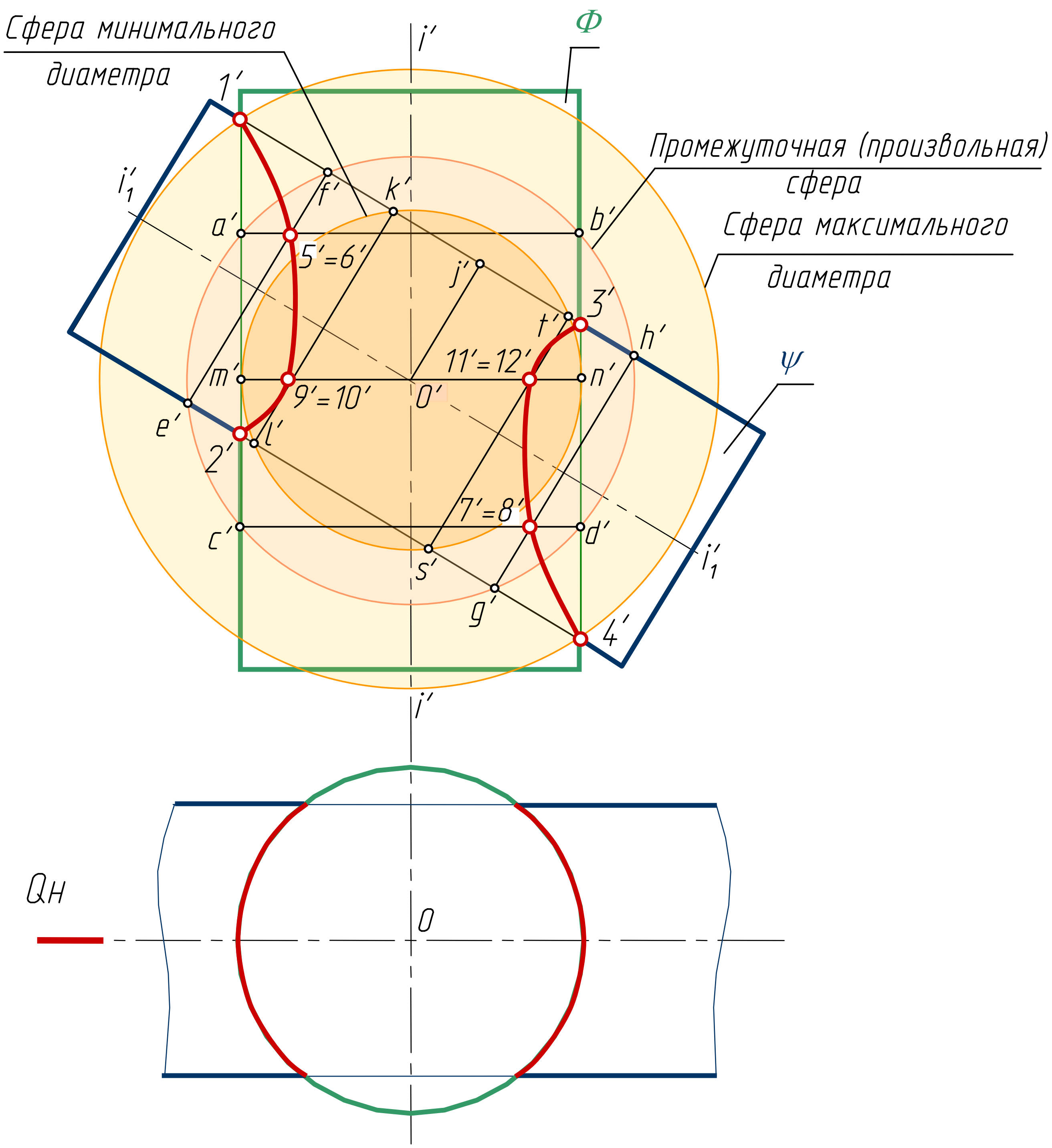


Рис. 9

Построим фронтальную проекцию линии пересечения.

Проводим фронтальную плоскость $Q(Q_H)$, которая является плоскостью симметрии поверхностей. Эта плоскость пересекает поверхности по очеркам. Точки $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ определяем как точки пересечения контурных образующих поверхностей, принадлежащих плоскости Q.

$Q\ (Q_H) \cap \Phi =$ прямоугольник; $Q\ (Q_H) \cap \Psi =$ прямоугольник;

$(\bullet)1', 2', 3', 4' =$ прямоугольник $\Phi \cap$ прямоугольник Ψ.

$(\bullet)1'$ – самая высокая; $(\bullet)2'$ – самая низкая.

Остальные точки находим способом вспомогательных концентрических сфер.

За центр сфер выбираем точку пересечения осей (точку o') и проводим сферу произвольного радиуса. Эта сфера будет одновременно соосна вертикальному и наклонному цилиндрам и пересечет их по окружностям. Плоскости окружностей перпендикулярны осям вращения цилиндров. Фронтальные проекции окружностей – отрезки прямых $a'b'$ и $c'd'$ на вертикальном цилиндре, $e'f'$ и $g'h'$ на наклонном цилиндре. Точки их пересечения (точки $5'$, $6'$, $7'$, $8'$) принадлежат обоим цилиндрам, следовательно, являются точками линии пересечения.

Сфера $R_{пр} \cap \Phi = a'b'$; Сфера $R_{пр} \cap \Phi = c'd'$;

Сфера $R_{пр} \cap \Psi = e'f'$; Сфера $R_{пр} \cap \Psi = g'h'$;

$(\bullet)5', 6' = a'b' \cap e'f'$; $(\bullet)7', 8' = c'd' \cap g'h'$.

Проведя несколько сфер разного радиуса можно построить достаточное количество точек линии пересечения поверхностей. Размеры вспомогательных сфер выбираются в определенных пределах. Минимальная сфера должна касаться большей поверхности и пересекать меньшую. То есть минимальная сфера вписывается в большую поверхность. С помощью такой сферы найдены точки $9'$, $10'$, $11'$, $12'$. Это самые глубокие точки линии пересечения.

Сфера $R_{min} \cap \Phi = k'l'$; Сфера $R_{min} \cap \Phi = s't'$;

Сфера $R_{min} \cap \Psi = m'n'$;

$(\bullet)9', 10' = m'n' \cap k'l'$; $(\bullet)11', 12' = m'n' \cap s't'$.

Радиус максимальной сферы будет равен расстоянию от центра o' до само удаленной точки пересечения контурных образующих (точки $1'$ и $4'$).

Радиус промежуточных сфер находится в пределах $R_{max} > R_{пром} > R_{min}$.

Горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальной проекцией вертикального цилиндра (рис. 9).

Возможные случаи пересечения криволинейных поверхностей

Существуют четыре варианта пересечения поверхностей.

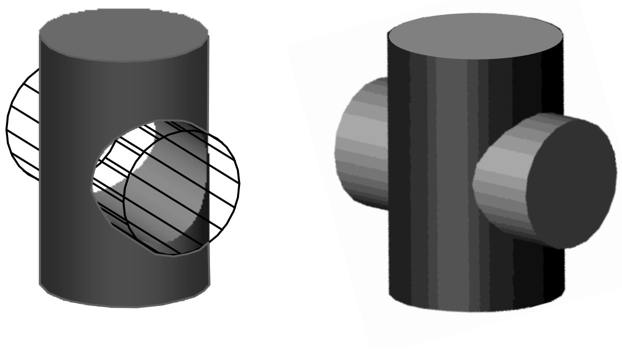


Рис. 10

Проницание

Все образующие первой поверхности пересекаются со второй поверхностью, но не все образующие второй поверхности пересекаются с первой. В этом случае линия пересечения поверхностей распадается на две замкнутые кривые линии (рис. 10).

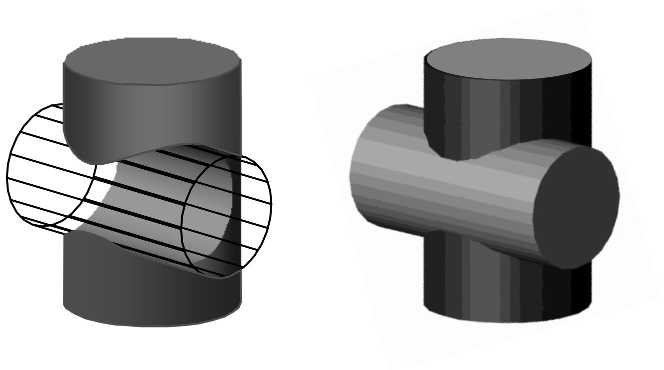


Рис. 11

Врезание

Не все образующие той и другой поверхности пересекаются между собой. В этом случае линия пересечения – одна замкнутая кривая линия (рис. 11).

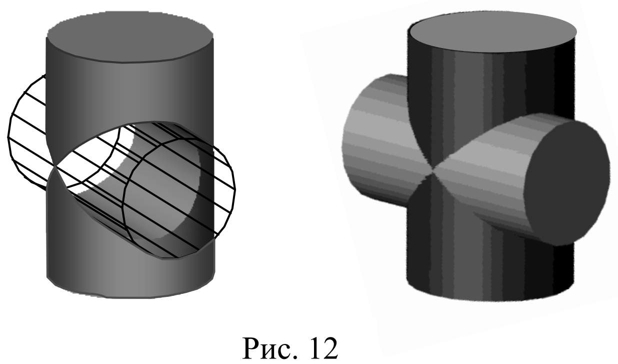


Рис. 12

Касание

Все образующие одной поверхности пересекаются со второй, но не все образующие второй поверхности пересекаются с первой. Поверхности имеют в одной точке (точка K на рис. 12) общую плоскость касания. Линия пересечения распадается на две замкнутые кривые линии, пересекающиеся в точке касания.

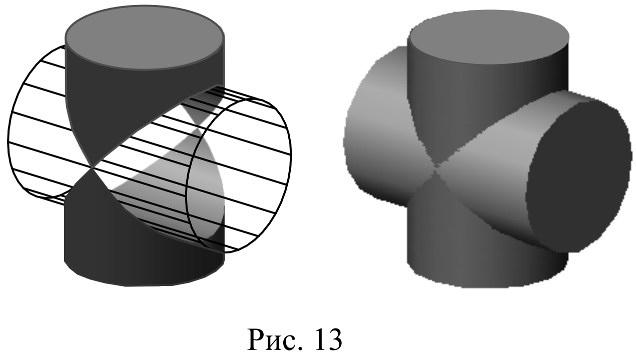


Рис. 13

Двойное касание

Все образующие обеих поверхностей пересекаются между собой. В этом случае линия пересечения распадается на две плоские кривые, которые пересекаются в точках касания (рис. 13).

Теорема Монжа

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые. Плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

Если оси пересекающихся поверхностей вращения параллельны какой – либо плоскости проекций, то на эту плоскость кривые линии проецируются в прямые.

На рис. 14-15 два цилиндра описаны вокруг сферы, а на рис. 16 два сжатых эллипсоида вращения вписаны в сферу. Во всех этих случаях поверхности пересекаются по эллипсам.

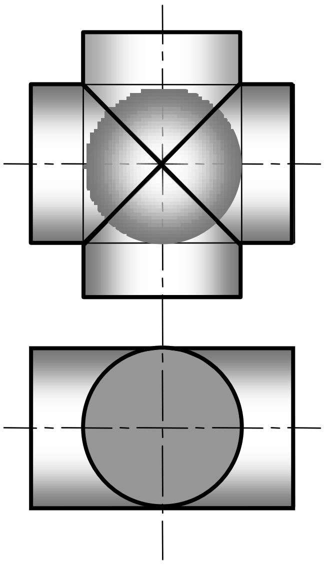


Рис. 14

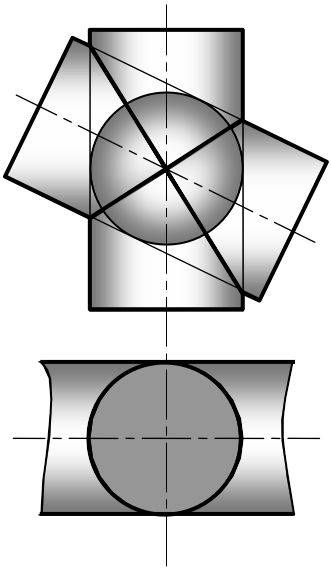


Рис. 15

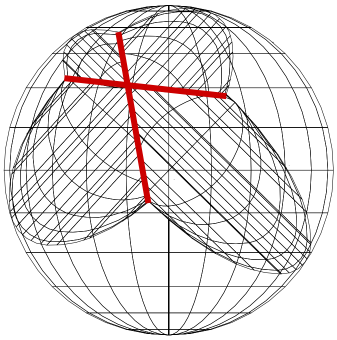


Рис. 16

Теорема о двойном касании

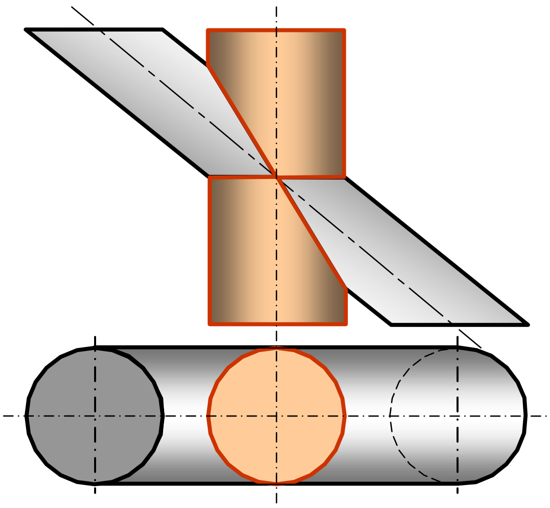


Рис. 17

Если две поверхности второго порядка имеют две общие точки (точки касания), то линия их взаимного пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Причем плоскости этих кривых пройдут через прямую, соединяющую точки касания.

На рис. 17 два цилиндра (цилиндр вращения и эллиптический цилиндр) пересекаются по двум плоским кривым (окружности и эллипсу).

Лекция 8. Аксонометрия

Аксонометрические проекции

Комплексный чертеж является графически простым и удобно измеряемым. Но по нему не всегда легко представить предмет в пространстве. Необходим чертеж, дающий и наглядное представление. Он может быть получен при проецировании предмета вместе с осями координат на одну плоскость. В этом случае на одной проекции можно получить наглядное и метрически определенное изображение. Такие виды изображений называют *аксонометрическими проекциями*.

Слово «*аксонометрия*» (от гр. *axon* – ось и *metreo* –измеряю) переводится как «измерение по осям».

Способ аксонометрического проецирования состоит в том, что фигура вместе с осями прямоугольных координат (к которым она отнесена в пространстве) проецируется на некоторую плоскость. Эту плоскость называют *плоскостью аксонометрических проекций, или картинной плоскостью*.

При проецировании фигуры проецирующие лучи могут выходить из одной точки – центральная аксонометрия или быть параллельными друг другу – параллельная аксоносметрия. В дальнейшем мы будем рассматривать только параллельную аксонометрию.

Построим аксонометрическую проекцию точки A, отнесенной к трем взаимно перпендикулярным плоскостям проекций (рис. 1).

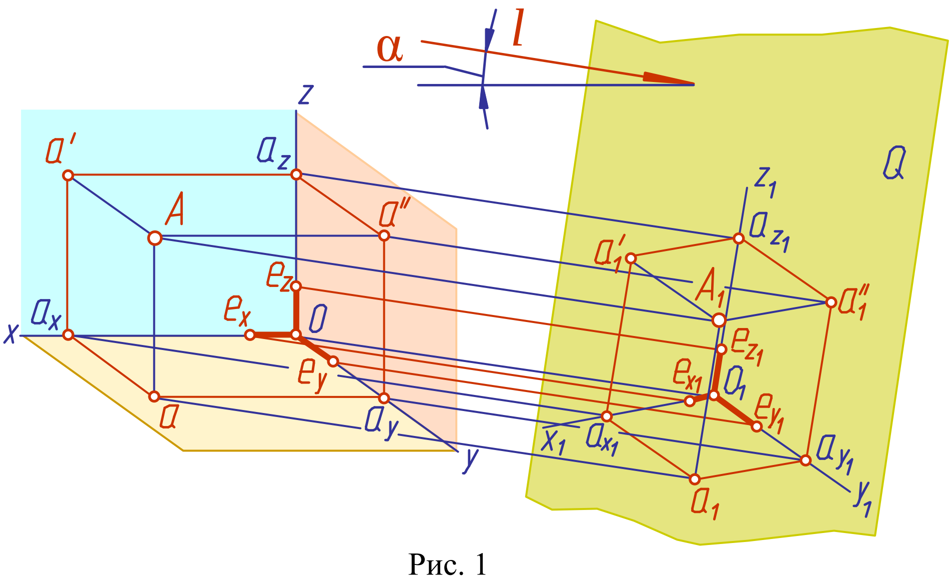


Рис. 1

Введем некоторые наименования:

Q – плоскость аксонометрических проекций (картинная плоскость);

l – направление проецирования;

α – угол наклона направления проецирования l к плоскости аксонометрических проекций Q (картинной плоскости).

Из точек o, a_x, a_y, a_z проведем проецирующие лучи до пересечения с плоскостью Q и найдем аксонометрические проекции этих точек o_1, a_{x1}, a_{y1}, a_{z1}.

x_1, y_1, z_1 – аксонометрические оси координат (аксонометрические оси);

A_1 – аксонометрическая проекция точки A;

a_1, a_1', a_1'' – вторичные проекции точки A;

В зависимости от положения плоскостей проекций H, V, W, плоскости аксонометрических проекций Q и направления проецирования l координаты точки будут проецироваться с различными искажениями. Чтобы учесть эти факторы на осях координат отложим масштабные отрезки и построим их аксонометрические проекции.

e_x, e_y, e_z – масштабные отрезки;

e_{x1}, e_{y1}, e_{z1} – аксонометрические (вторичные) проекции масштабных отрезков.

При построении аксонометрии фигуры учитывают не длины масштабных отрезков, а отношение длины аксонометрической проекции масштабного отрезка к его действительной величине. Эти отношения называются *коэффициентом искажения по оси*.

Обозначим эти коэффициенты:

по оси x $\quad m=\dfrac{e_{x1}}{e_x}$, $\quad$ по оси y $\quad n=\dfrac{e_{y1}}{e_y}$, $\quad$ по оси z $\quad k=\dfrac{e_{z1}}{e_z}$.

В зависимости от направления проецирования по отношению к плоскости аксонометрических проекций Q аксонометрические проекции делятся на:

- прямоугольные, если угол проецирования $\alpha = 90^\circ$;
- косоугольные, если $\alpha \neq 90^\circ$.

Доказано, что сумма квадратов коэффициентов искажения удовлетворяет уравнениям:

- для косоугольной аксонометрии – $m^2+n^2+k^2=2+\mathrm{ctg}^2\alpha$;
- для прямоугольной аксонометрии – $m^2+n^2+k^2=2$.

Основная теорема аксонометрии

Занимаясь теорией аксонометрии, немецкий геометр К. Польке в 1853 году предложил и доказал для частного случая теорему, названную основной теоремой аксонометрии: «Любые три отрезка, выходящие из одной точки на плоскости, могут быть приняты за параллельные проекции трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков в пространстве».

Доказательство этой теоремы в общем виде было дано в 1864 г. другим немецким геометром Г. Шварцем. С этого времени основная теорема аксонометрии стала называться теоремой Польке – Шварца.

Из рассмотренного выше можно вывести определение аксонометрии:

Аксонометрией называется изображение предмета на плоскости, отнесенное к определенной системе координат и выполненное в определенном масштабе с учетом коэффициентов искажения.

В зависимости от соотношения между коэффициентами искажения по осям различают следующие аксонометрические проекции:

1. Изометрические, если $m = n = k$.
2. Диметрические, если $m = k \neq n$ или $m = n \neq k$.
3. Триметрические, если $m \neq n \neq k$.

Наименование проекций произошло от древнегреческих слов:

«*isos*» – одинаковый (изометрическая проекция – проекция с одинаковыми коэффициентами искажения по всем трем осям);

«*di*» – двойной (диметрическая проекция – проекция с одинаковыми коэффициентами искажения по двум осям);

«*treis*» – три (триметрическая проекция – проекция с разными коэффициентами искажения по всем трем осям).

Прямоугольная параллельная изометрия

В прямоугольной изометрической проекции коэффициенты искажения по всем трем осям одинаковы ($m=n=k$) и равны 0,82, а аксонометрические оси x_1, y_1, z_1 образуют друг с другом углы в 120º (рис. 2). Но на практике изометрию для упрощения выполняют приведенной, принимая коэффициенты $m=n=k=1$. При этом изображение увеличивается в 1,22 раза.

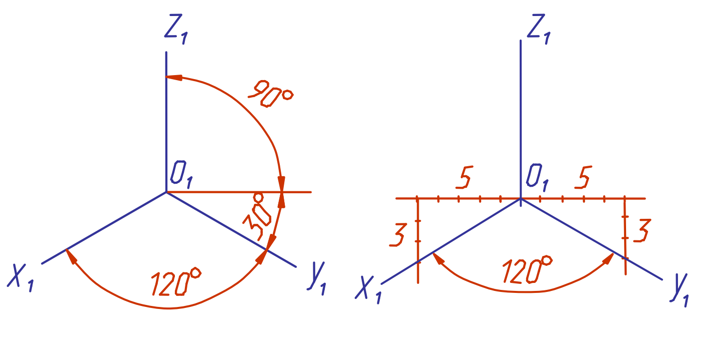


Рис. 2

Если даны ортогональные проекции точки A (рис. 3), то для построения изометрической проекции этой точки проводим аксонометрические оси (рис. 4). Далее от начала координат точки O_1 по оси x_1 откладываем отрезок o_1a_{x1}, равный координате x_A точки A. Координату x_A берем с комплексного чертежа.

Из точки a_{x1} проводим прямую, параллельную оси y_1, и на ней откладываем отрезок, равный координате y_A точки A, получаем точку a_1; из точки a_1 проводим отрезок, параллельный оси z_1 и равный координате z_A точки A. Полученная точка A_1 – изометрическая проекция точки A.

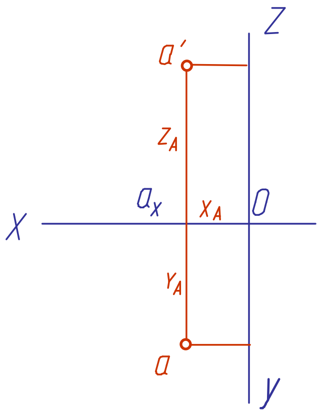


Рис. 3

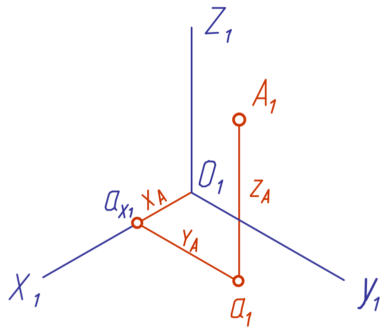


Рис. 4

Прямоугольная параллельная диметрия

В прямоугольной диметрии коэффициенты искажения по оси x_1 и z_1 принимают равными – $m=k=0{,}94$, а по оси y_1 – в два раза меньше – $n=1/2\,m=0{,}47$.

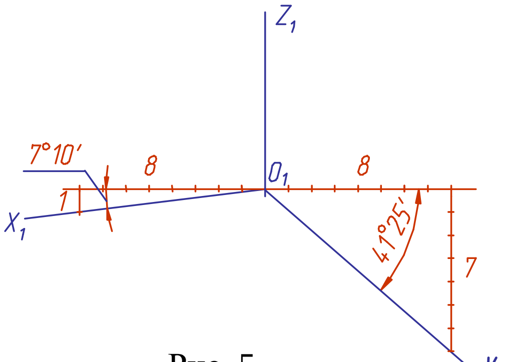


Рис. 5

Ось z_1–вертикальная, ось x_1 расположена под углом 7°10′. Ось y_1 расположена под углом 41º25′ к горизонтальной прямой (рис. 5). На практике выполняют приведенную диметрию, принимая коэффициенты искажения $m=k=1$, а $n=0{,}5$. Изображение увеличивается в 1,06 раза.

Если дана ортогональная проекция точки A (рис. 6), то для построения диметрической проекции этой точки проводим аксонометрические оси под заданными углами.

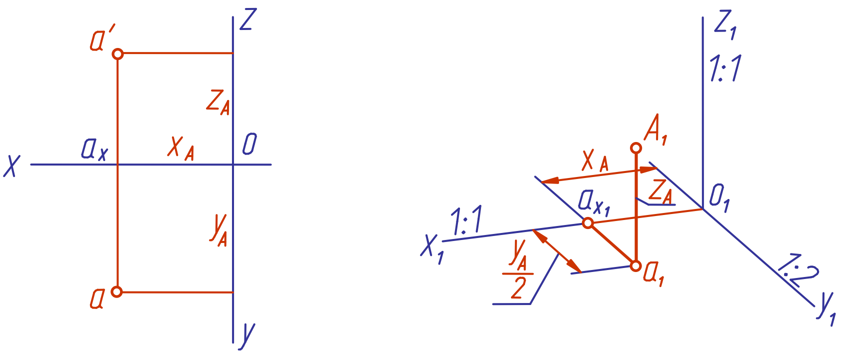


Рис. 6

Откладываем по оси x_1 от начала координат отрезок o_1a_{x1}, равный координате x_A точки A. Из точки a_{x1} проводим прямую, параллельную оси y_1, и на ней откладываем отрезок, равный половине координаты y_A точки A, так как коэффициент искажения по оси y_1 равен 0,5. Из точки a_1 проводим отрезок a_1A_1, равный координате z_A. Получаем точку A_1 – диметрическую проекцию точки A.

Линии штриховки сечений в аксонометрических проекциях проводят параллельно одной из диагоналей проекций квадратов, лежащих в соответствующих координатных плоскостях, стороны которых параллельны аксонометрическим осям (рис. 7 – для изометрии, рис. 8 – для диметрии).

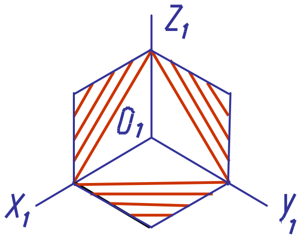


Рис. 7

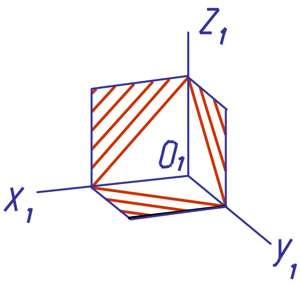


Рис. 8

Изометрическая проекция окружности

При построении приведенной аксонометрии размеры увеличиваются в 1,22 раза. Поэтому величина большой оси эллипса составляет 1,22D, а величина малой оси – 0,71D.

На рис. 9 показан графический способ определения размеров осей эллипса. Вычерчиваем окружность диаметра D, хорда AB = 0,71D (величина малой оси эллипса). Приняв за центр точки A и B, радиусом, равным AB, проводим дуги до их взаимного пересечения. Полученные точки E и F соединяем прямой линией. EF=1,22D – величина большой оси эллипса.

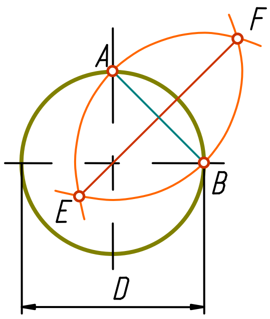


Рис. 9

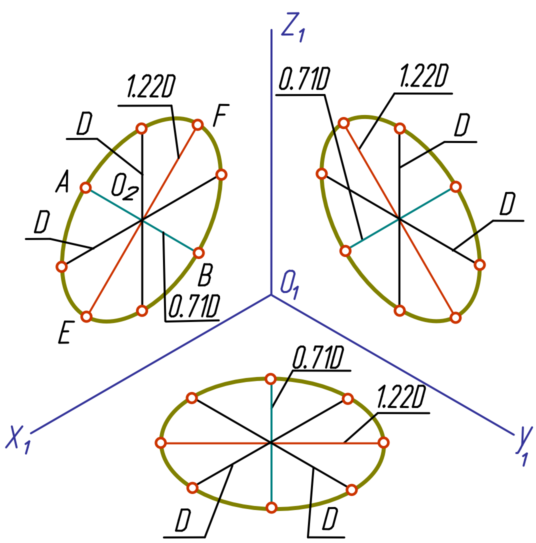


Рис. 10

Построим аксонометрические оси x_1, y_1, z_1. В плоскости $x_1O_1z_1$ выбираем произвольную точку O_2. Через нее проводим прямые параллельно осям x_1 и z_1. На них откладываем отрезки, равные диаметру окружности. На линии, проведенной параллельно оси y_1 (направление малой оси эллипса), откладываем отрезок, равный AB (малую ось эллипса). Перпендикулярно малой оси строим большую ось эллипса, равную EF (рис. 10).

Соединив полученные 8 точек, получим эллипс. Для построения эллипса можно использовать и другие способы.

Диметрическая проекция окружности

В изометрии величины большой и малой осей эллипса остаются одинаковыми независимо от плоскости, в которой расположена окружность. В диметрии постоянной остается только величина большой оси, равная 1,06D. В плоскостях горизонтальной H и профильной W малая ось эллипса составляет 0,35D, а в плоскости фронтальной V малая ось равна 0,94D.

Для определения величин осей эллипса графическим способом построим прямоугольный треугольник (рис. 11).

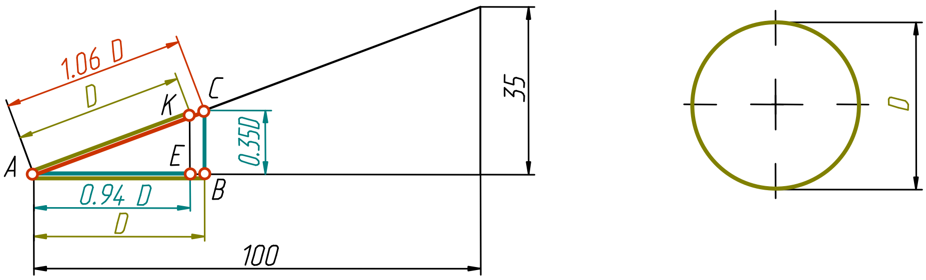


Рис. 11

Катеты треугольника равны 100 мм и 35 мм. Гипотенуза при этом равна 106 мм. Отложим по большому катету значение, равное диаметру окружности D (отрезок AB). Отрезок BC будет равен 0,35D, то есть значению малой оси эллипса для плоскостей H и W.

Отрезок AC равен 1,06D, то есть значению большой оси эллипса. Если мы отложим величину диаметра D по гипотенузе (отрезок AK), затем из точки K опустим перпендикуляр на большой катет треугольника, то отрезок AE будет равен значению 0,94D, то есть величине малой оси эллипса для плоскости V.

Изображение окружности в прямоугольной диметрической проекции показано на рис. 12.

Например, для построения окружности в плоскости V через точку O_2 параллельно осям x_1 и z_1 проводим прямые и на них откладываем величины, равные диаметру окружности. На линии, проведенной параллельно оси y_1 откладываем значение, равное 0,94D (величину малой оси эллипса). Перпендикулярно малой оси строим большую ось эллипса, равную 1,06D. Полученные точки соединяем плавной линией.

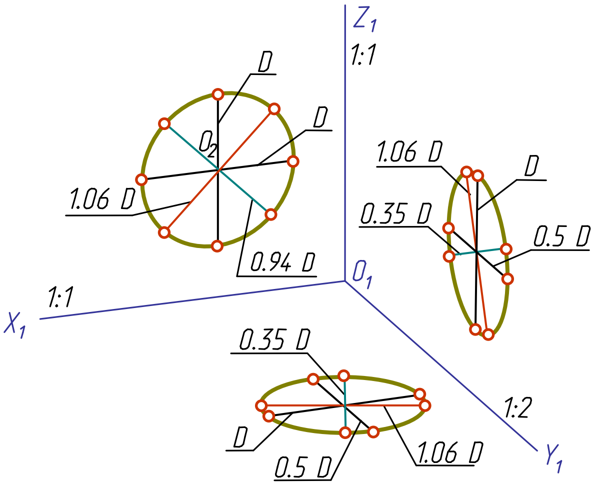


Рис. 12

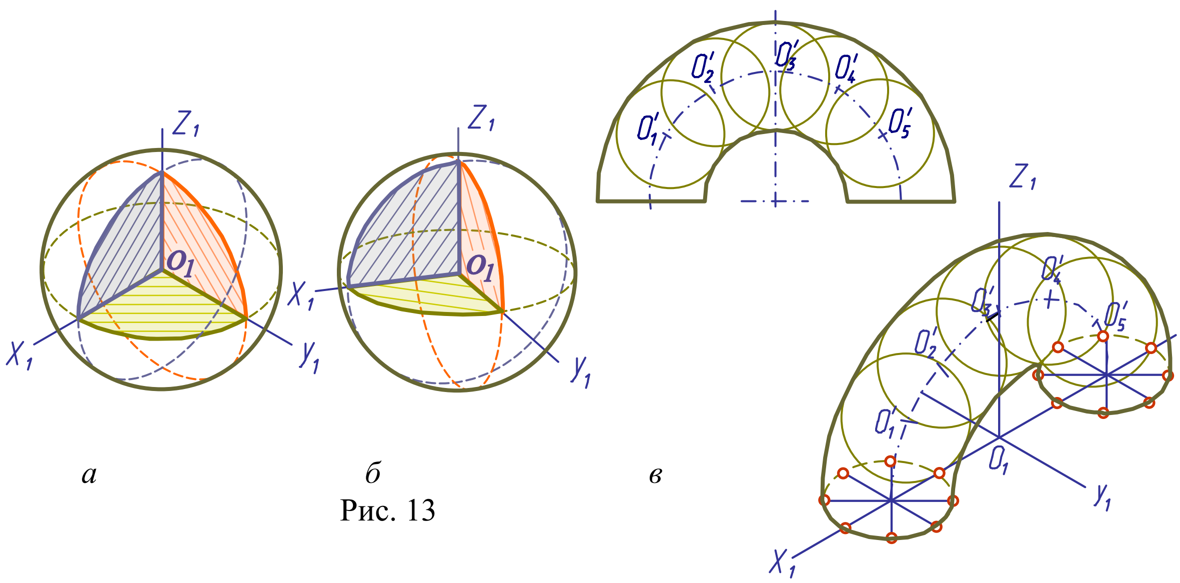
Изображение шара и тора в аксонометрии

В прямоугольной параллельной аксонометрии шар изображается окружностью.

При построении шара по натуральным показателям искажения его аксонометрической проекцией будет окружность, диаметр которой равен диаметру изображаемого шара.

При построении изображения шара по приведенным показателям диаметр окружности увеличивается в соответствии с увеличением коэффициентов приведения: в изометрии – в 1,22 раза (рис. 13, *а*), в диметрии – в 1,06 раза (рис. 13, *б*).

На рис 13, *в* показана изометрическая проекция тора, выполненная с помощью вписанных в него вспомогательных сфер.



а *б* *в*

Рис. 13

Косоугольная аксонометрия

Косоугольная фронтальная изометрия и диметрия применяются в основном тогда, когда изображается большое количество окружностей, расположенных в одной плоскости.

При этой системе аксонометрическую плоскость располагают параллельно фронтальной плоскости проекций (рис. 14). Тогда коэффициенты искажения по осям o_1x_1 и o_1z_1 равны 1 ($m = k = 1$), а угол между ними равен 90°.

Углы между осью o_1y_1 и осями o_1x_1 и o_1z_1 равны 135° (рис. 15), а коэффициент искажения равен 0,5 ($n = 0,5$) для диметрии и 1 ($n = 1$) для изометрии.

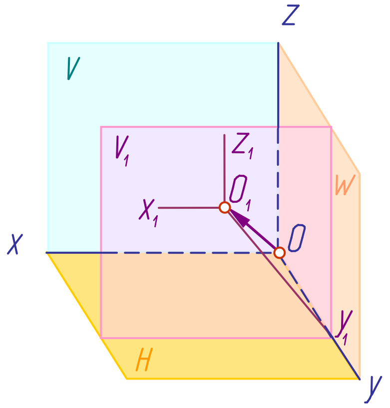


Рис. 14

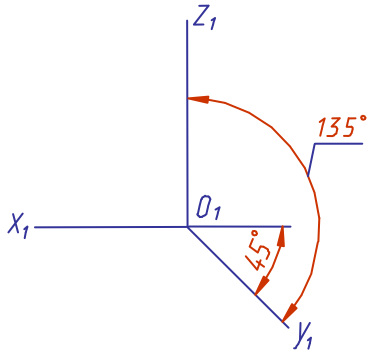


Рис. 15

Деталь располагают по отношению к осям так, чтобы сложные плоские фигуры (окружности, дуги плоских кривых) находились в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций. Тогда они изображаются без искажения. Окружности, лежащие в других плоскостях, проецируются в эллипсы.

Если при выполнении косоугольной диметрии втулки (рис. 16) плоскости ее торцов расположить параллельно плоскости V, построение аксонометрии детали значительно упрощается, так как окружности (проекции торцов втулки) проецируются в окружности (рис. 17).

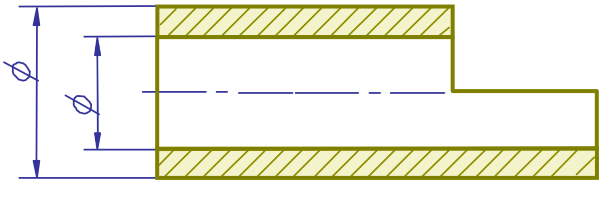


Рис. 16

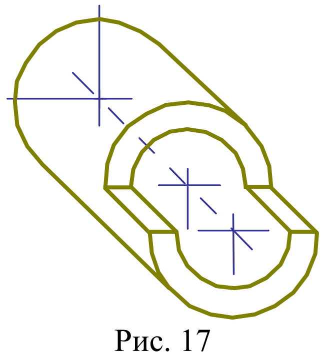


Рис. 17

Содержание

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Курс лекций

Составители: Галина Федоровна Винокурова
Борис Леонидович Степанов

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

ИЗДАТЕЛЬСТВО **ТПУ**, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.