

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

**В.В.Гурин**

**МЕХАНИКА**  
**Лекции**

Издательство  
Томского политехнического университета  
2011

УДК 621.81

ББК

Г95

**Гурин В.В.**

Г95      **Механика: лекции / В.В.Гурин.**– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 276 с., ил.

Изложены теоретические основы анализа и синтеза механизмов, принципов их геометрического и прочностного расчетов.

Курс лекций условно разбит на три раздела.

В первом из них рассмотрены общие вопросы теории механизмов.

Второй раздел посвящен основам сопротивления материалов – науке о прочности и жесткости инженерных конструкций.

В третьем разделе расчеты и проектирование наиболее распространенных соединений, зубчатых передач и валов.

Подготовлен на кафедре теоретической и прикладной механики Томского политехнического университета, предназначен для студентов машиностроительных специальностей технических вузов.

УДК 621.81

ББК

ISBN 0-00000-000-0

© Гурин В.В., 2011

© Томский политехнический университет, 2011

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2011

## **Лекция № 1 (2 часа).**

### **Место и значение курса «Механика» в ряду общеинженерных дисциплин. Основы теории механизмов. Структура элементов механизмов**

#### **Место и значение курса «механика» в ряду общеинженерных дисциплин**

Среди средств, обеспечивающих технологические процессы, важнейшая роль принадлежит машинам. В настоящее время нет такой отрасли, в которой машины не использовались бы в самых широких масштабах. Однако конкретные виды машин с развитием техники меняются. В настоящее время разработаны классификации машин, дающие возможность не только разобраться в огромном количестве уже находящихся в эксплуатации машин, но и прогнозировать машины будущего. Знание общих закономерностей процесса новых создания и модернизации существующих машин совершенно необходимо каждому современному инженеру, чтобы оптимально решать вопросы технологии, механизации и автоматизации производственных процессов. Инженер должен знать не только общие принципы устройства механизмов, но и принципы их расчетов и проектирования.

Комплекс указанных вопросов в той степени, в которой они необходимы инженерам немашиностроительных профилей, рассмотрен в данном учебнике, предназначенном для студентов технических вузов при изучении курса «Механика».

Курс состоит из трех разделов.

В *первом* из них рассмотрены общие вопросы *теории механизмов*.

*Второй* раздел посвящен *основам сопротивления материалов* – науке о прочности и жесткости инженерных конструкций.

В *третьем* разделе рассмотрены расчеты и проектирование наиболее распространенных соединений, *передаточных механизмов* с непосредственным контактом звеньев и валов

Все разделы, тесно взаимосвязаны между собой и играют большую роль в формировании современного инженера.

# 1 Основы теории механизмов

## 1.1 Общие сведения

В разделе «Основы теории механизмов», структурно являющимся первой частью курса «Теория механизмов и машин и детали машин», изучается структура, кинематика и динамика механизмов независимо от их конкретного применения.

Раздел начинается с рассмотрения положений *общей* механики, применяемых при изучении механических систем, предназначенных для *преобразования движения* одного или нескольких тел в требуемые движения других тел в соответствии с функциями того устройства, основой которого является эта система и называемых *механизмами*. Главное *назначение* механизма – осуществление *технической операции в результате движения его элементов*. *Определенность движения* механизма может обеспечиваться *кинематическими* (конструктивными) средствами (механизмы с *полными* связями) или средствами *динамики* (механизмы с *неполными* связями). К механизмам с полными связями относится, например, механизм двигателя внутреннего сгорания, к механизмам с неполными связями – механизм вибрационного конвейера.

*Машиной* называют искусственное устройство, *выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации*. При помощи машин различные формы движения (механическое движение, электричество, тепловая энергия) используются для облегчения физического и умственного труда человека, увеличения его производительности и расширения производственных возможностей. Использование какой-либо формы движения и совершение некоторой полезной работы являются *признаками* машины. Этим машина отличается от *сооружений и приборов*.

*Сооружение* – строительная конструкция, которая в идеальном случае должна представлять собой *неизменяемую* систему (ферму, раму и т.д.).

*Прибор* – устройство для *регистрации* параметров физических процессов, осуществления технических измерений и т.п., но *не для совершения работы* (часы, манометр, электроизмерительный приборы).

В технике так же находят широкое применение *механические приспособления*, назначение которых заключается в передаче и преобразовании сил (домкраты, рычажные и винтовые прессы и т.д.).

Из изложенного выше очевидно, что понятие «механизм» является более широким, чем понятие «машина», «прибор» или «приспособление», так как любое из вышеназванных устройств является одновременно и механизмом, но не наоборот. Таким образом, можно говорить о механизмах машин, приборов и приспособлений.

По функциональному назначению машины можно разделить на следующие группы.

1. *Машины-двигатели*, преобразующие один вид энергии в другой (электродвигатели, двигатели внутреннего сгорания и т.д.).

2. *Транспортные машины*, осуществляющие перемещение тел (автомобили, конвейеры, грузоподъемные машины).

3. *Технологические* или *рабочие машины*, изменяющие состояние, свойства или форму материала (металлообрабатывающие станки, проходческие и выемочные горные машины, дробилки, мельницы).

4. *Вычислительные машины*, выполняющие математические операции (компьютеры).

5. *Контрольно-управляющие машины*, осуществляющие контроль и автоматическую корректировку технологического процесса.

Обычно для обеспечения технологического процесса требуются наборы индивидуальных машин, каждая из которых обеспечивает определенную часть технологического процесса.

Набор индивидуальных машин, работающих согласованно в соответствии с требованиями технологического процесса, называют *комплексом машин*.

Совокупность кинематически связанных, но сохранивших свои индивидуальные особенности машин, с помощью которых комплексно механизмируют все основные операции технологического процесса, называют *комплексом машин*.

Совокупность нескольких взаимодействующих машин, связанных конструктивно, что приводит к изменению конструкции индивидуальных машин и потере ими своей обособленности, называют *машинным агрегатом*.

В классическом исполнении машинный агрегат состоит из трех устройств:

- двигательного,
- передаточного,
- рабочего.

Машинные агрегаты, выполняющие все операции без непосредственного участия человека, называются *машинами-автоматами*.

Комплекс машин-автоматов, осуществляющих заданный технологический процесс, называется *автоматической линией*.

Несколько автоматических линий при централизованном управлении образуют *автоматический цех* или *завод-автомат*.

## 1.2 Структура элементов механизмов

### 1.2.1 Звенья механизмов

Рассмотрим основные понятия и определения.

*Звеном* называют твердое тело, входящее в состав механизма и обладающее подвижностью относительно других звеньев. Звенья могут состоять из одной или нескольких жестко связанных между собой частей, называемых *деталью*.

На рис. 1.2.1 представлена схема передаточного механизма измерительного прибора. Конструкция шатуна 2 этого механизма, представленная на рис. 1.2.2, позволяет изменять его длину для установки стрелки прибора на нулевую отметку шкалы. Шатун состоит из двух стержней, двух цилиндрических втулок, соединительной муфты и двух гаек. При движении шатуна указанные детали перемещаются как единое целое, и, следовательно, образуют *одно* звено механизма.

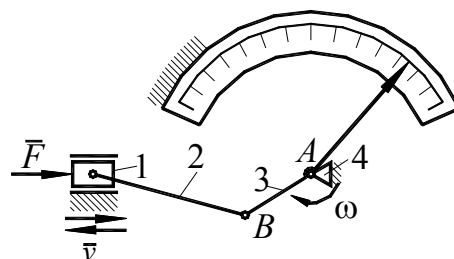


Рис. 1.2.1

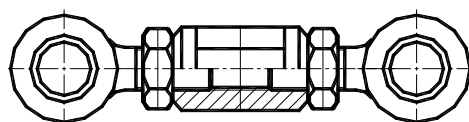


Рис. 1.2.2

Каждую деталь или группу деталей, образующих неизменяемую систему, называют *подвижным звеном*, а неподвижные детали механизма – *стойкой*. Все элементы, образующие стойку, на схеме механизма отмечены штриховкой. Места соединения (соприкосновения) звеньев друг с другом являются их геометрическими элементами. Шатун (рис. 1.2.1) имеет два таких элемента, представляющих собой цилиндрические поверхности. Одним геометрическим элементом шатун соединен с кривошипом (звеном 3), а вторым – с ползуном (звеном 1).

Для звена, подлежащего изучению в теории механизмов, характерным и главным являются *форма геометрических элементов* и их *взаимное расположение*, поскольку именно эти факторы определяют вид относительного движения звеньев. Все другие факторы, (материал звена, его конструкция, способ изготовления и т.д.) в теории механизмов не рассматривают. Кроме того, пренебрегают деформациями звеньев, а также не учитывают зазоры, возникающие в местах соединения звеньев вследствие износа соприкасающихся поверхностей и процессе работы механизма или неточности изготовления.

В зависимости от характера движения относительно неподвижного звена (называемого *стойкой* механизма), звенья называют:

— *кривошипом* – звено рычажного механизма, совершающее полный оборот вокруг оси, связанной со стойкой;

— *коромыслом* – звено рычажного механизма, совершающее неполный оборот вокруг оси, связанной со стойкой;

— *шатун*ом – звено рычажного механизма, совершающее плоскопараллельное движение;

— *ползуном* – звено рычажного механизма, поступательно перемещающееся относительно стойки или другого звена;

— *кулисой* – подвижное звено рычажного механизма, являющееся направляющей для ползуна.

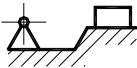
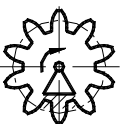
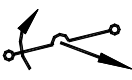
*Кулачок* – звено, профиль которого, имея переменную кривизну, определяет движение ведомого звена.

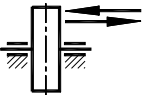
*Зубчатое колесо* – вращающееся звено, имеющее зубчатый контур.

Перечисленные звенья и их условные изображения представлены в табл. 1.2.1.

Таблица 1.2.1

*Основные типы звеньев механизмов*

| Наименование    | Эскиз                                                                               | Движение           | Особенности                                |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------------------------------|
| Стойка          |   | отсутствует        | -                                          |
| Кривошип        |  | вращательное       | полный оборот                              |
| Кулачок         |  | вращательное       | профиль определяет движение ведомого звена |
|                 |  | поступательное     |                                            |
| Колесо зубчатое |  | вращательное       | зубчатый контур                            |
| Коромысло       |  | колебательное      | неполный оборот, возвратное движение       |
| Шатун           |  | плоскопараллельное | нет пар, связанных со стойкой              |
| Ползун          |  | поступательное     | возвратное движение                        |

| Наименование | Эскиз                                                                             | Движение                       | Особенности                                         |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Кулиса       |  | колебательное,<br>вращательное | направляющая для<br>ползуна                         |
|              |  | поступательное                 | возвратное движение,<br>направляющая для<br>ползуна |

*Входным* (ведущим) называют звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения ведомых звеньев.

*Выходным* (ведомым) называют звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм.

В современном машиностроении широкое применение получили механизмы, в состав которых входят упругие, гибкие, жидкие и газообразные тела.

К *упругим* звеньям относят пружины, мембраны и другие звенья, упругие деформации которых оказывают существенное влияние на работу механизма.

К *гибким* звеньям относят ремни, цепи, канаты и др.

К *жидким* и *газообразным* звеньям относят масло, воду, расплавленный металл, газ, воздух и т.п., перемещаемые по специальным коммуникациям внутри машины или прибора.

*Примечание.*

1. В данном разделе изучаются механизмы только с *твердыми* звеньями. Изучение механизмов с *деформируемыми* звеньями выходит за рамки учебной программы раздела по теории механизмов. Этому вопросу посвящены специальные курсы.

### 1.2.2 Кинематические пары и их классификация

*Кинематической парой* называют соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. Кинематическую пару могут образовать не только подвижные звенья, но и звенья, одно из которых неподвижно и служит в механизме стойкой.

Между входным и выходным звеньями могут быть расположены *промежуточные звенья* (например, ролики или шарики в подшипниках). Сложные соединения с промежуточными звеньями сохраняют кинематическую тождественность требуемого относительного движения звеньев и с точки зрения кинематики механизма эквивалентны обычно-



венным кинематическим парам. Такие сложные совокупности пар называют *кинематическими соединениями*.

Звенья кинематической пары могут *соприкасаться поверхностями*, по линии и точками, называемыми *элементами кинематической пары*.

Если элементами кинематической пары являются *точки* или *линии*, то пары называют *высшими*, а если – *поверхности*, то – *низшими*.

В низших парах происходит относительное скольжение элементов при поступательном, вращательном или винтовом движениях, а в высших возможно качение и скольжение элементов этих пар.

Примеры *низших* кинематических пар — цилиндрического (а) и шарового (б) шарниров, сочленяющих звенья 1, 2 и 3, 4, представлены на рис. 1.2.3. Элементами пар здесь являются цилиндрические поверхности пальца звена 2 и охватывающей его втулки, сферические поверхности звеньев 3 и 4.

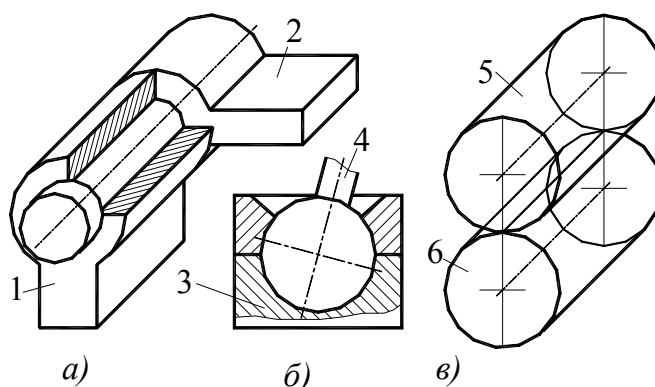


Рис. 1.2.3

*Высшая* пара показана на рис. 1.3, в. Элементами пары являются линии контакта звеньев 5 и 6. При нарушении или изменении вида контакта между элементами кинематической пары она перестает существовать или преобразуется в пару иного вида.

Существование пары обеспечивается условиями замыкания, сохраняющими постоянство и характер контакта звеньев.

В *низших* парах обычно осуществляется *геометрическое замыкание*, обусловленное формой соприкасающихся поверхностей, например, охват втулкой пальца (рис. 1.2.3, а).

В *высших* кинематических парах часто используют *силовое замыкание*, при котором контакт элементов пары обеспечивают гравитационные силы или усилия, создаваемые пружинами.

Кинематические пары могут быть *плоскими* или *пространственными*.

В первом случае относительное движение сочлененных звеньев возможно лишь в *параллельных* плоскостях, во втором случае – и в *непараллельных* плоскостях. Примером пространственной пары является шаровой шарнир (рис. 1.2.3, б).

Прочность и износостойкость элементов кинематических пар зависят от формы и конструктивного исполнения их.

*Низшие* пары более износостойки, чем высшие. Это объясняется тем, что поверхности касания элементов низших пар всегда больше, чем

в высших. Следовательно, передача одной и той же силы в низшей паре происходит при меньшем удельном давлении и меньших контактных напряжениях, чем в высшей (контактные напряжения возникают при контакте под нагрузкой двух тел в каждом из них). Износ при прочих равных условиях пропорционален удельному давлению, поэтому элементы звеньев низших пар изнашиваются медленнее, чем высших.

Нагрузочная способность *высших* кинематических пар сравнительно невелика, поскольку усилия в ней передаются через малые контактные площадки, возникающие в местах соприкосновения звеньев под воздействием нагрузок. Однако эти пары оказываются более рациональными в отношении потерь мощности на преодоление трения, ввиду того, что трение скольжения в них полностью или частично можно заменить трением качения. *Высшие* пары имеют большое разнообразие форм элементов, поэтому механизмы, в состав которых входят, кроме *низших* пар, также и *высшие*, могут осуществлять требуемые производственные движения с меньшим числом звеньев, меньшими габаритами и при более простой конструкции, чем механизмы с одними *низшими* парами.

Так как требуемые законы движения ведомых звеньев обусловлены формой и конструкцией кинематических пар и их элементов, то для рационального проектирования новых типов машин необходимо знать теорию и классификацию кинематических пар. При проектировании механизмов необходимо отчетливо видеть взаимосвязь относительных движений звеньев и конструкций кинематических пар, образуемых этими звеньями. Кинематические пары можно классифицировать по числу условий связей, налагаемых на относительное движение двух звеньев, образующих пару, или по числу степеней свободы. При использовании такой классификации конструктор получает сведения о возможных относительных движениях звеньев и о характере взаимодействия сил между элементами пары. Каждое условие связи в кинематической паре не только устраняет относительную подвижность, но и позволяет передавать от звена к звену силу или момент.

Известно, что *свободное твердое тело в пространстве* имеет *6 степеней свободы* (рис. 1.2.4):

— *три поступательных* движения вдоль осей прямоугольной системы координат  $x, y, z$ ;

— *три вращательных* движения вокруг осей  $x, y, z$ .

Если одно из звеньев кинематической пары связать с неподвижной системой координат  $x, y, z$ , то для второго звена, согласно

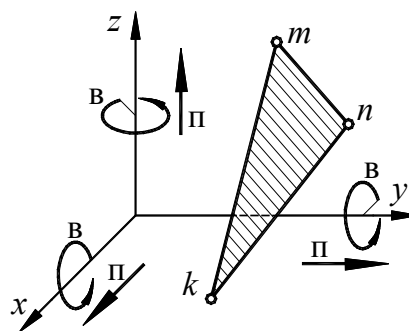


Рис. 1.2.4

геометрии элементов пары, установится число степеней свободы  $w$ , определяемое формулой:

$$w = 6 - s,$$

где  $s$  – число связей, налагаемых элементами пары на относительное движение ее звеньев.

Очевидны неравенства  $0 < s < 6$ , так как при  $s=0$  звено абсолютно свободно и пара отсутствует, а при  $s=6$  два тела жестко связаны и образуют одно звено.

Следовательно, число связи *пространственной* кинематической пары  $s$  может быть в пределах от 1 до 5.

Соответственно все кинематические пары по классификации И.И.Артоболевского подразделяют на пять классов по числу связей.

К *первому классу* относят пары, налагающие на относительное движение звеньев одну связь ( $s=1$ ).

Ко *второму классу* относят пары с двумя связями ( $s=2$ ).

К *третьему классу* относят пары, налагающие на относительное движение звеньев три связи ( $s=3$ ).

К *четвертому классу* относят пары, налагающие на относительное движение звеньев четыре связи ( $s=4$ ).

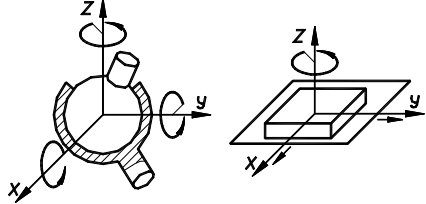
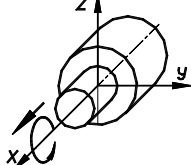
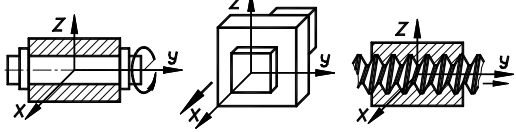
К *пятому классу* относят пары, налагающие на относительное движение звеньев пять связей ( $s=5$ ).

Классификация кинематических пар по числу связей  $s$  представлена в табл. 1.2.2, где приведены примеры пар всех классов. На эскизах кинематических пар стрелками указаны возможные относительные перемещения (поступательные и вращательные) по осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Таблица 1.2.2

*Классификация кинематических пар по числу связей*

| Класс и число связи $s$ | Пример кинематической пары |
|-------------------------|----------------------------|
| I<br>$s=1$              |                            |
| II<br>$s=2$             |                            |

| Класс и число связи $s$ | Пример кинематической пары                                                         |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| III<br>$s=3$            |  |
| IV<br>$s=4$             |  |
| V<br>$s=5$              |  |

В винтовой паре поступательное движение  $y$  вдоль оси  $y$  вращения винта неразрывно связано с вращательным движением  $\varphi$  функцией  $y = c\varphi$ , где  $c = \operatorname{tg} \alpha$  – постоянный коэффициент, величина которого определяется углом  $\alpha$  наклона винтовой линии. Это дополнительное условие связи повышает на разряд класс пары и соответственно снижает ее род.

По числу  $w$  степеней свободы пары называют: *пяти-, четырех-, трех-, двух- и одноподвижная*.

Кинематическая пара является *обратимой*, если она реализует один и тот же вид относительного движения для каждого из образующих ее звеньев. Примером обратимой пары может служить *вращательная* пара. Действительно, вращение вала в неподвижном подшипнике или подшипника относительно неподвижного вала приводит к тому, что точки соприкасающихся поверхностей вала и подшипника описывают *одинаковые* траектории – окружности.

Свойством *обратимости* обладают *все низшие* кинематические пары.

*Все высшие* кинематические пары относятся к *необратимым*.

На рис. 1.2.5 показана *высшая* кинематическая пара, образованная окружностью 1 и прямой 2. Если точки

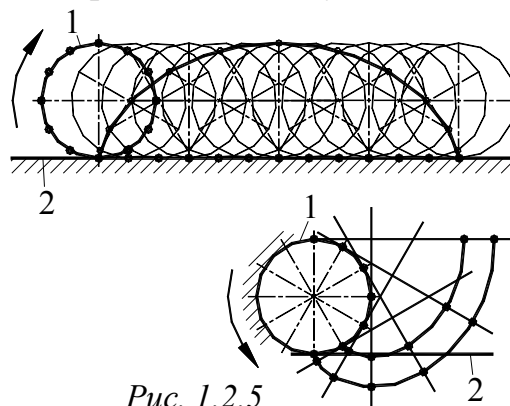


Рис. 1.2.5

окружности, катящегося по неподвижной прямой, описывают *циклоиды*, то точки прямой, перекатывающейся по неподвижной окружности, описывают *эвольвенты*. Рассматриваемая пара является *необратимой*.

Возможность реализации самых разнообразных движений путем соответствующего выбора профилей соприкасающихся звеньев является основным достоинством *высших* кинематических пар. Именно поэтому такие пары находят наиболее широкое применение в механизмах.

Пользуясь *условными изображениями* наиболее распространенных кинематических пар (табл. 1.2.1), komponуют так называемые *структурные схемы* механизмов.

*Структурная схема* представляет собой *символический* чертеж механизма, позволяющий установить количество его звеньев, число и класс кинематических пар, а также вид движения, которое совершает каждое звено относительно стойки. Поскольку такая схема является как бы «скелетом» механизма, на ней не показывают никаких лишних деталей, затрудняющих понимание схемы.

Выполненную в *масштабе* структурную схему называют *кинематической схемой*.

## Лекция № 2 (2 часа).

### Кинематические цепи и их классификация. Кинематика механизмов

#### 1.2.3 Кинематические цепи и их классификация

*Кинематической цепью* называют *связанную систему звеньев, образующих кинематические пары*.

Кинематические цепи подразделяют на:

- *открытые* и *замкнутые*,
- *простые* и *сложные*,
- *плоские* и *пространственные*.

*Открытой* кинематической цепью называют такую, в которой имеются звенья, входящие только в одну кинематическую пару (рис. 1.2.6, а).

В *замкнутой* кинематической цепи каждое звено входит не менее чем в две кинематические пары (рис. 1.2.6, б).

В машиностроении применяют, в основном, замкнутые кинематические цепи.

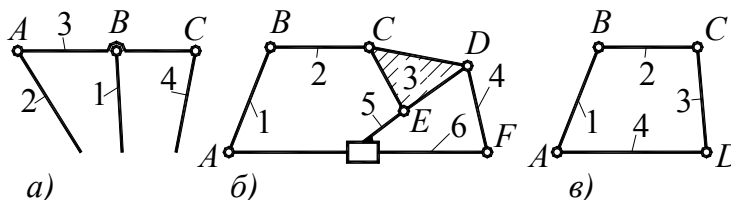


Рис. 1.2.6

Кинематическую цепь называют *простой*, если каждое ее звено (1-4) входит не более чем в две кинематические пары (рис. 1.6, в).

В *сложной* цепи имеется хотя бы одно звено, образующее с другими звеньями более двух кинематических пар (рис. 1.6, б).

Если траектории точек всех звеньев цепи лежат в параллельных плоскостях, то такую цепь называют *плоской*.

В *пространственных* цепях указанные траектории либо представляют собой пространственные кривые, либо находятся в непараллельных плоскостях.

Если точки звеньев описывают траектории на сферах с единым неподвижным центром, механизм называют *сферическим*.

*Рычажным* механизмом называют такой, в котором звенья образуют лишь *нижние* кинематические пары.

Механизм, имеющий только вращательные пары, называют *шарнирным*.

#### 1.2.4 Степень подвижности кинематической цепи

*Число степеней свободы кинематической цепи* относительно одного из ее звеньев условно называют *степенью подвижности кинематической цепи*.

Для определения степени подвижности любой кинематической цепи необходимо подсчитать число степеней свободы всех подвижных звеньев, полагая их не связанными между собой. Затем из этого числа следует вычесть число связей, наложенных на звенья кинематическими парами.

Пусть  $n$  – число звеньев пространственной кинематической цепи,  $p_k$  – число кинематических пар  $k$ -го класса ( $k=1, 2, \dots, 5$ ).

Общее число степеней свободы  $n$  звеньев без учета связей равно  $6n$ , а общее число связей, наложенных на звенья кинематическими парами  $k$ -го класса, равно  $kp_k$ . Поэтому *степень подвижности кинематической цепи* равна:

$$w = 6n - \sum_{k=1}^5 kp_k,$$

или в развернутом виде:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 \quad (1.2.1)$$

Равенство (1.2.1) носит название *формулы подвижности* или *структурной формулы пространственной кинематической цепи общего вида* – формулы Сомова-Малышева.

*Связи*, налагаемые на движение звеньев кинематическими парами, подразделяют на *индивидуальные*, характерные для данного звена цепи,

и *общие*, накладывающие одинаковые ограничения на движение всех звеньев. Например, кинематическая цепь (рис. 1.2.6, в), звенья которой соединены между собой с помощью лишь вращательных пар V-го класса с параллельными осями, является плоской. Звенья такой цепи движутся параллельно некоторой направляющей плоскости, перпендикулярной к осям вращательных пар. Следовательно, все звенья цепи не могут перемещаться вдоль оси, перпендикулярной к направляющей плоскости, и вращаться вокруг двух осей, определяющих эту плоскость, т.е. на звенья данной цепи наложены три *общие* связи.

*Структурная формула (1.2.1) в этом случае не применима.*

Число степеней свободы отдельно взятого звена такой цепи с учетом лишь общих связей равно трем, а суммарно для  $n$  звеньев –  $3n$ . Однако каждая пара ограничивает движение звеньев дополнительными связями, число которых для рассматриваемой цепи на три единицы меньше класса пары. Следовательно, кинематические пары I, II и III классов в данной цепи не могут быть, а пары IV и V классов накладывают соответственно одну и две связи.

Таким образом, в этом случае имеет место формула *Чебышева*:

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (1.2.2)$$

Структурные формулы для кинематических цепей с другим числом общих связей могут быть получены по аналогии с формулой (1.2.2).

## 1.3 Механизмы и их классификация

### 1.3.1 Общие сведения о механизме. свойства механизмов

*Механизмом* в классической теории механизмов называют *кинематическую цепь*, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев все остальные звенья совершают вполне определенные движения относительно одного из них. Это определение применимо к механизмам, звенья которых можно рассматривать как *абсолютно твердые тела*.

Определение механизма в более широком понимании приведено в разделе 1.1.

Звенья, к которым приложены силы, приводящие механизм в движение, называют *входными (ведущими)*. При исследовании механизмов законы движения этих звеньев обычно являются заданными.

Все остальные подвижные звенья называют *ведомыми*. Законы движения ведомых звеньев однозначно определяются законами движения звеньев ведущих. Ведомые звенья, осуществляющие те движения, для воспроизведения которых создается тот или иной механизм, являются *рабочими*, или *исполнительными*.

Поскольку любой механизм представляет собой кинематическую цепь, то *степень его подвижности* определяют по структурной формуле соответствующей кинематической цепи в зависимости от числа общих связей, наложенных на движение звеньев. В этом плане механизмы подразделяют на пять *семейств*: при этом *номер семейства* (0, I, II, III, IV) *соответствует числу общих связей*.

Структурные формулы для механизмов всех пяти семейств приведены ниже.

| Семейство механизма | Структурная формула            |
|---------------------|--------------------------------|
| 0                   | $w=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1$ |
| I                   | $w=5n-4p_5-3p_4-2p_3-p_2$      |
| II                  | $w=4n-3p_5-2p_4-p_3$           |
| III                 | $w=3n-2p_5-p_4$                |
| IV                  | $w=2n-p_5$                     |

Около 75% всех известных механизмов являются *плоскими*, принадлежащими к семействам III или IV.

*Степень подвижности* механизма или число его степеней свободы *должна быть равна* тому *количеству его ведущих звеньев*, которое необходимо для определенности движения ведомых звеньев. Если, например, механизм обладает одной степенью подвижности, то в этом механизме должно быть одно ведущее звено. Если же степень подвижности равна трем ( $w=3$ ), то механизм должен иметь три звена с заданными законами движения.

### 1.3.2 Конструктивно-функциональная классификация механизмов

Для систематизированного изучения всего многообразия механизмов, используемых в современных машинах и приборах, обратимся к так называемой *практической классификации*, которая в общих чертах учитывает основные кинематические свойства и конструктивные особенности механизмов, а в некоторых случаях и их функциональное назначение. Согласно этой классификации механизмы можно разделить на пять основных видов:

- рычажные,
- фрикционные,
- кулачковые,
- зубчатые,
- с гибкими звеньями.



Кроме того, существует большое число различных составных или комбинированных механизмов, представляющих собой те или иные сочетания механизмов указанных выше пяти видов.

### 1.3.3 Рычажные механизмы

Среди механизмов этого вида широкое распространение получили плоские *кривошипно-шатунные* и *кривошипно-кулисные* механизмы.

На рис. 1.3.1 показаны схемы двух разновидностей *кривошипно-шатунных* механизмов.

Назначение механизма, показанного на рис. 1.3.1, *а*, – преобразование вращательного движения звена 1 в возвратно-поступательное движение звена 3, или наоборот. Звено 1, образующее со стойкой 4 вращательную кинематическую пару, называют *кривошипом*; звено 3, образующее со стойкой 4 поступательную кинематическую пару, – *ползуном*. Такой механизм называют *кривошипно-ползунным*. Если линия  $xx$  движения ползуна проходит через центр вращения кривошипа, то механизм называют *центральным* или *аксильным*, в противном случае – *дезаксильным*. Основная цель введения *дезаксила* (смещения) – уменьшение давления на направляющую  $xx$ .

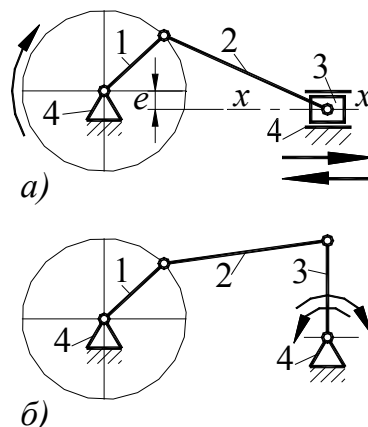


Рис. 1.3.1

Механизм, показанный на рис. 1.3.1, *б*, служит для преобразования вращательного движения кривошипа 1 в возвратно-вращательное движение звена 3 или наоборот. Качающееся звено 3 называют *коромыслом* или *балансиром*. Поэтому механизм называют *кривошипно-балансирным* или *кривошипно-коромысловым*.

В обоих механизмах звено 2 совершает сложное плоское движение и образует с другими подвижными звеньями вращательные кинематические пары. Такое звено называют *шатунном*.

На рис. 1.3.2 изображены *кривошипно-кулисные* механизмы.

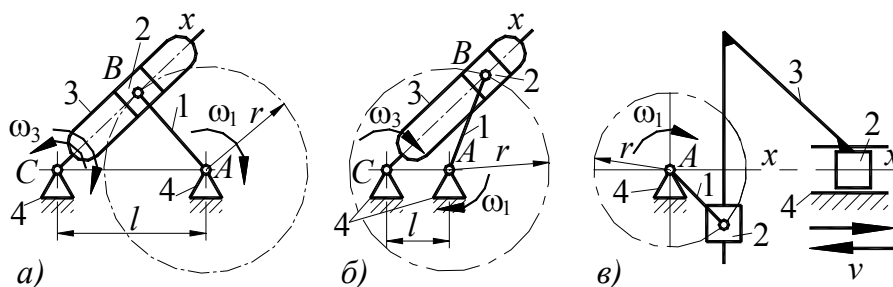


Рис. 1.3.2

Звено 3 этих механизмов, представляющее собой подвижную направляющую для звена 2, называют *кулисой*, а звено 2 – *кулисным камнем*. Все рассмотренные *плоские* рычажные механизмы принадлежат семейству III и обладают одной степенью подвижности.

В технике используются так же и *пространственные* рычажные механизмы.

### 1.3.4 Кулачковые механизмы

*Кулачковые* механизмы находят широкое применение, особенно в приборах и машинах автоматического действия. В большинстве случаев они предназначены для преобразования вращательного или возвратно-поступательного движения ведущего звена в возвратно-поступательное или возвратно-вращательное движение ведомого звена с остановками последнего заданной продолжительности. Иногда применяют *неподвижные* кулачки – в этом случае все движения совершает ведомое звено.

На рис. 1.3.3 приведены схемы простейших кулачковых механизмов. В зависимости от вида движения звено 2 называется либо *толкателем*, если оно совершает возвратно-поступательное движение (рис. 1.3.3, а, б, г), либо *коромыслом*, если его движение возвратно-вращательное (рис. 1.3.3, в).

Высшая кинематическая пара в кулачковых механизмах замыкается обычно с помощью *пружин* (рис. 1.3.4, а), однако встречаются механизмы и с *геометрическим замыканием* (рис. 1.3.4, б).

*Плоские* кулачковые механизмы принадлежат III семейству, поэтому степень их подвижности определяется по структурной формуле Чебышева.

Если толкатель снабжен *роликом*, то этот ролик не влияет на характер движения ведомого звена. Такие звенья, а так-

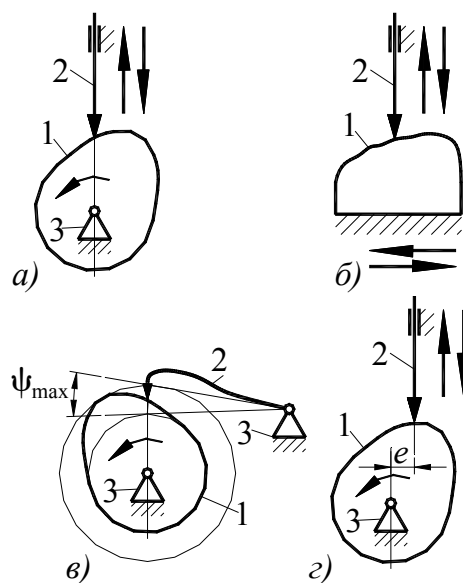


Рис. 1.3.3

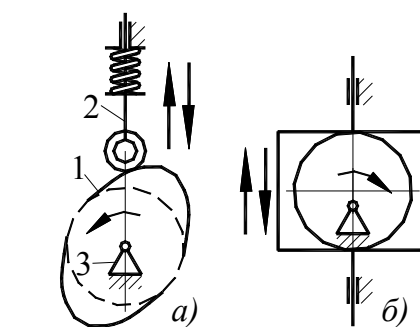


Рис. 1.3.4

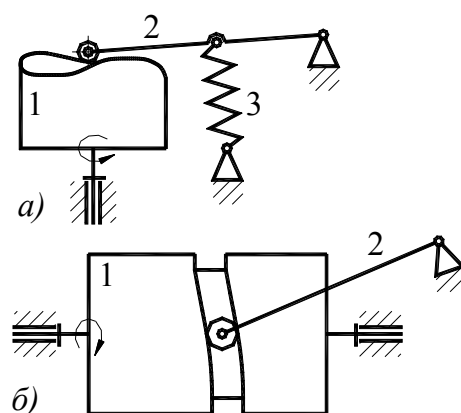


Рис. 1.3.5

же привносимые ими дополнительные степени свободы и связи, называют *лишними* и в структурных формулах не должны учитываться.

В технике находят применение также *пространственные* кулачковые механизмы (рис. 1.3.5).

Основным достоинством кулачковых механизмов является их кинематическая универсальность, т.е. способность воспроизведения практически любого требуемого закона движения толкателя (коромысла) за счет выбора соответствующего профиля кулачка.

Более подробно типы и структура кулачковых механизмов рассмотрены в разделе 3.2.1.

### 1.3.5 Фрикционные механизмы

В этих механизмах движение от ведущего звена к ведомому передается за счет сил трения, возникающих в местах контакта указанных звеньев.

Среди фрикционных механизмов особое место занимают механизмы с одной степенью подвижности, называемые *передачами*.

Простейшая фрикционная передача с параллельными осями состоит из трех звеньев: двух колес (катков) цилиндрической формы и стойки (рис. 1.3.6). Замыкание этой пары *силовое*, поэтому одну из опор выполняют *плавающей*.

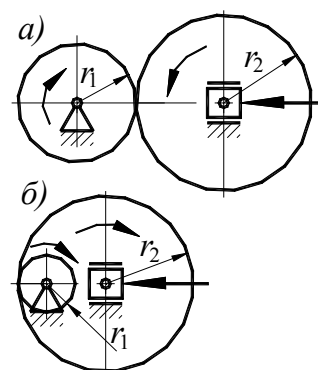


Рис. 1.3.6

Если точка контакта катков располагается *между* центрами их вращения, что соответствует *внешнему* или *наружному* касанию, направления вращения катков *противоположны* (рис. 1.3.6, а). В случае *внутреннего* касания катки вращаются *в одну* сторону (рис. 1.3.6, б).

Возможность *проскальзывания* катков во время их работы под нагрузкой – основной *недостаток* фрикционных механизмов. Иногда этот недостаток превращается в *достоинство* – при использовании фрикционной передачи в качестве *предохранительного* механизма от перегрузок рабочего механизма.

### 1.3.6 Зубчатые механизмы

Зубчатые механизмы представляют собой передачи, в которых движение передается зацеплением зубьев ведущего и ведомого звеньев.

Если угловая скорость ведомого вала меньше, чем у ведущего, то передачу называют *понижающей* (*редуктором*); в противном случае ее называют *повышающей* (*мультипликатором*).

Различают передачи с *внешним* (рис. 1.3.7, а) и *внутренним* зацеплениями (рис. 1.3.7, б).

По *взаимному расположению геометрических осей валов* применяются зубчатые передачи с *параллельными* осями (цилиндрические передачи), с *пересекающимися* осями (конические передачи) и со *скрещающимися* осями (передачи винтовыми и гипоидными колесами, червячные передачи).

На рис. 1.3.7 показаны *цилиндрические* (рис. 1.3.7, а, б) и *коническая* (рис. 1.3.7, в) зубчатые передачи.

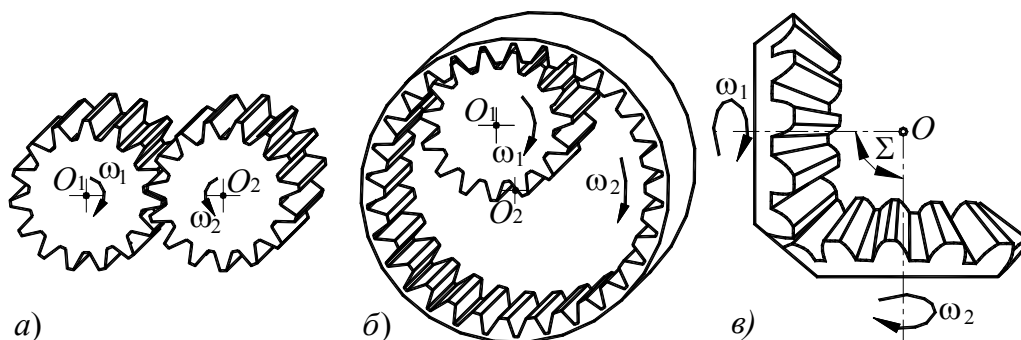


Рис. 1.3.7

### 1.3.7 Червячная передача

Червяк 1 представляет собой видоизмененное косозубое колесо с большим углом наклона зубьев (витков), в то время как угол наклона зубьев *червячного колеса* 2 сравнительно невелик (рис. 1.3.8).

Большинство применяемых червячных передач имеют угол перекрещивания осей, равный  $90^\circ$ . Такие передачи называют *ортogonalными* червячными передачами.

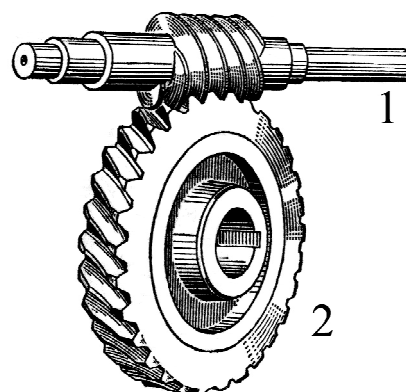


Рис. 1.3.8

### 1.3.8 Механизмы с гибкими звеньями

Механизмы с *гибкими* звеньями применяют для передачи вращательного движения между валами при больших межосевых расстояниях как с постоянным, так и переменным соотношением их угловых скоростей. Ведущее и ведомое звенья таких механизмов не имеют между собой непосредственного контакта, а их относительное движение осуществляется посредством гибкого звена, которое может быть как замкнутым, так и разомкнутым.

По характеру соединения гибкого звена с ведущим и ведомым звеньями рассматриваемые механизмы подразделяют на:

- передачи *трением*,
- передачи *зацеплением*.

В передачах *трением* в качестве гибкого звена используют *плоские и клиновые ремни, стальные ленты, металлические канаты, шнуры*.

Передача состоит из ведущего 1 и ведомого 2 шкивов, а также замкнутого звена 3, надетого на шкивы с предварительным натяжением (рис. 1.3.9, а).

Необходимым условием нормальной работы передач трением является *натяжение гибкой связи*, что достигается обычно при помощи натяжных роликов 4 (рис. 1.3.9, б).

В передачах *зацеплением* гибким звеном служит либо *цепь*, либо *зубчатый ремень*, либо *перфорированная лента*.

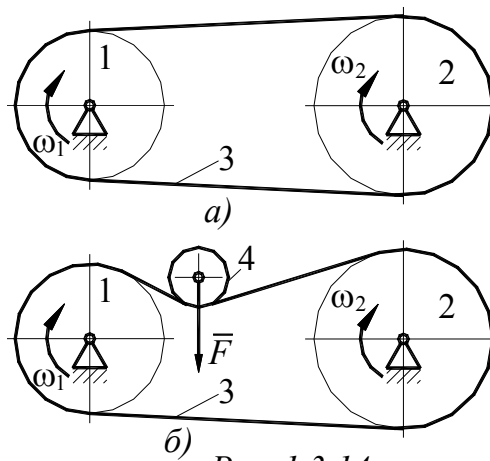


Рис. 1.3.14

Преимущества этих передач перед передачами трением соответствуют преимуществам зубчатых передач перед фрикционными.

Нередко гибкое звено используют и в качестве *рабочего органа* (например, ленточные, цепные и пластинчатые конвейеры).

## 1.4 Кинематика механизмов

### 1.4.1 Общие положения

*Кинематический анализ* механизмов в общем случае предусматривает решение *трех основных задач*, а именно:

- определение положений звеньев и построение траекторий отдельных точек;
- определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев;
- определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев.

Эти задачи могут быть решены *графическими, графоаналитическими и аналитическими* методами. Выбор того или иного метода зависит как от необходимой степени точности решения, так и от целевого назначения расчета.

Первые два метода уступают по точности третьему, однако они более наглядны и сравнительно просты.

### 1.4.2 Структурная классификация плоских рычажных механизмов

Как уже отмечалось выше, в любом механизме должно быть одно или несколько *ведущих звеньев*.

По классификации Ассура-Артоболевского каждое из таких звеньев и стойка образуют начальный механизм I класса. Начальный механизм является двухзвенным и обладает одной степенью подвижности, поскольку его звенья 1 и 2 образуют либо одну вращательную (рис. 1.4.1, а), либо поступательную (рис. 1.4.1, б, в) кинематические пары V класса.

Двухзвенные механизмы, имеющие вращательную пару, достаточно широко представлены в технике. Это механизмы приборов роторного типа и таких машин, как электродвигатели, генераторы, турбины, центробежные насосы, вентиляторы и т.д.

Более сложные механизмы могут быть получены присоединением к одному или нескольким начальным механизмам так называемых структурных групп.

Структурной группой или группой Ассура называют кинематическую цепь, получающую нулевую подвижность после присоединения ее к стойке.

Таким образом, если учесть кинематические пары, образуемые звеньями данной группы между собой, а также со звеньями других групп или начального механизма, то для группы выполняется условие:

$$w=0.$$

Рассмотрим группы, содержащие только пары V класса, для которых:

$$w = 3n - 2p_5 = 0.$$

Тогда:

$$p_5 = \frac{3}{2}n \quad (1.4.1)$$

Так как число пар не может быть дробным, то число звеньев группы должно быть четным.

Очевидно, введение одной или нескольких структурных групп в механизм не отразится на степени его подвижности.

Структурную группу с  $n=2$  и  $p_5=3$  называют группой II класса второго порядка (двухповодковая группа, или диада).

В табл. 1.4.1 приведены пять модификаций (видов) таких групп, которые отличаются друг от друга последовательностью расположения вращательных (В) и поступательных (П) кинематических пар, а также их количественным соотношением.

В диаде первой модификации все пары вращательные.

Диада второй модификации отличается от диады третьей модификации лишь расположением поступательной пары.

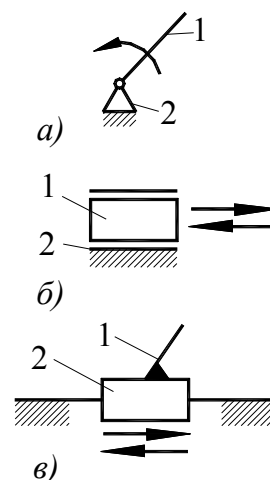


Рис. 1.4.1

В диадах четвертой и пятой модификаций из трех кинематических пар две – поступательные и диады различаются только расположением *вращательной* пары.

Таблица 1.4.1

*Структурные группы II класса второго порядка*

| Модификация<br>(вид) группы | Пер-<br>вая                                                                       | Вторая                                                                            | Третья                                                                            | Четвертая                                                                           | Пятая                                                                               |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Эскиз группы                |  |  |  |  |  |
| Символ группы               | BVV                                                                               | BVP (ПВВ)                                                                         | ВПВ                                                                               | ПВП                                                                                 | ППВ (ВПП)                                                                           |

Кинематическая цепь из двух звеньев и трех поступательных пар не является структурной группой, так как в случае присоединения ее к стойке она образует клинчатый механизм IV семейства с одной степенью подвижности.

Сочетание диады *первой* модификации с *начальным* механизмом, подвижное звено которого образует со стойкой вращательную пару, дает *шарнирный четырехзвенник* (рис. 1.3.1, б). Последний в зависимости от соотношения длин звеньев может быть либо кривошипно-балансирным, либо двухкривошипным, либо двухбалансирным механизмом.

Присоединение диады *второй* модификации к аналогичному *начальному* механизму дает либо кривошипно-ползунный механизм (рис. 1.3.1, а), либо механизм с ведущей кулисой (рис. 1.3.2, б). В первом случае подвижное звено начального механизма образует с одним из звеньев группы вращательную пару, во втором – поступательную.

Диады остальных модификаций в сочетании с тем или иным *начальным* механизмом дают также кулисные механизмы.

Кинематическая цепь, состоящая из четырех звеньев ( $n=4$ ) и шести пар ( $p_5=6$ ), может дать структурную группу III класса третьего порядка (трехповодковая группа или триада), либо группу IV класса второго порядка. Отличительным признаком групп III класса (рис. 1.4.2, а) является треугольное звено 4, называемое *баланси́мым*.

Для групп IV класса (рис. 1.4.2, б) характерно наличие подвижного четырехстороннего контура.

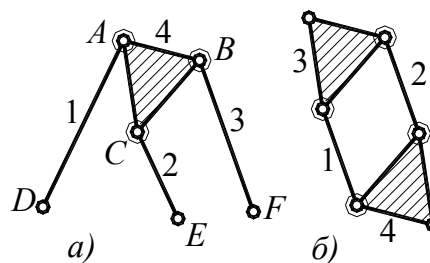


Рис. 1.4.2

На рис. 1.4.2 группы III и IV классов изображены с одними вращательными кинематическими парами.

Очевидно, можно получить различные модификации этих групп, если вращательные пары сочетать с поступательными.

Структурные группы более высоких классов в существующих механизмах находят весьма ограниченное применение.

Итак, *структурные группы* подразделяют на *классы* и *порядки*. *Класс группы* с числом звеньев более двух ( $n > 2$  и  $p_5 > 3$ ) определяется *наивысшим по классу замкнутым контуром, входящим в ее состав*.

Класс контура при этом соответствует числу внутренних для группы кинематических пар. Двухзвенные группы ( $n = 2$  и  $p_5 = 3$ ), как уже было отмечено выше, относятся ко II классу.

На рис. 1.4.2 внутренние для группы кинематические пары обозначены двумя концентрическими окружностями.

*Порядок структурной группы* соответствует числу свободных геометрических элементов кинематических пар, с помощью которых группу можно присоединить к начальному механизму, стойке или звеньям других структурных групп.

Разложение кинематической цепи механизма на структурные группы и начальные механизмы называют *структурным анализом*.

Исследуя структуру механизма, необходимо определить число звеньев, число и класс кинематических пар, степень подвижности, а также установить класс и порядок структурных групп, входящих в его состав. Основой для такого исследования служит *структурная схема механизма*, не содержащая пассивных связей и лишних степеней свободы.

*Степень подвижности механизма* должна соответствовать количеству его *ведущих* звеньев, которые должны входить в кинематические пары со *стойкой*.

При исследовании *структуры* механизма рекомендуется:

- отсоединение структурных групп начинать со звеньев, наиболее удаленных от ведущих;

- стремиться к тому, чтобы отделять в первую очередь самые простые структурные группы – диады;

- следить за тем, чтобы степень подвижности кинематической цепи механизма до и после отделения каждой структурной группы оставалась неизменной;

- помнить о том, что каждая кинематическая пара и каждое звено могут входить только в одну структурную группу или в один начальный механизм.



Если в плоском механизме имеются высшие кинематические пары, то исследование его структуры выполняется по схеме заменяющего механизма.

*Класс механизма* соответствует классу *наивысшей группы*, входящей в его состав. В качестве примера рассмотрим структурную схему шестизвенного механизма (рис. 1.4.3).

Пять подвижных звеньев ( $n=5$ ) и стойка 6 этого механизма образуют семь кинематических пар V класса, из которых шесть являются вращательными и одна – поступательной.

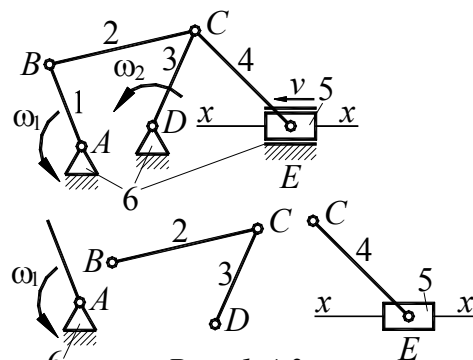


Рис. 1.4.3

Вращательные пары образованы звеньями 6 и 1, 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 3 и 6, 4 и 5, а поступательная пара – ползуном 5 и направляющей (стойкой) 6.

Ведущим звеном механизма является звено 1.

Таким образом, *степень подвижности* механизма равна:

$$w = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 1,$$

то есть механизм должен иметь *одно* ведущее звено.

Отсоединяем два звена 4 и 5, которые наиболее удалены от ведущего. Эти звенья с тремя кинематическими парами представляют собой структурную группу II класса второго порядка второй модификации. Поскольку оставшаяся часть механизма, состоящая из трех подвижных звеньев (1, 2, 3) и четырех вращательных пар, имеет одну степень подвижности, группа выделена правильно.

Следующие два звена 2 и 3 с тремя кинематическими парами B, C и D образуют структурную группу II класса второго порядка первой модификации. После отделения этой группы остались кривошип 1 и стойка 6, представляющие собой начальный механизм.

Из-за того, что обе структурные группы II класса, то к этому же классу принадлежит и сам механизм.

### 1.4.3 План положений механизма

Кинематическому анализу рычажного механизма должно предшествовать исследование его *структуры*. Поэтому число и вид структурных групп, из которых состоит ведомая часть механизма, а также последовательность их присоединения известны.

Кроме того, заданными должны быть размеры всех звеньев.

Начинать расчет следует с группы, которая образует кинематические пары с *ведущим* звеном и *стойкой*. В этом случае положения геометрических элементов крайних пар группы оказываются известными, и

задача сводится к определению аналогичных параметров точек, принадлежащих внутренним парам.

Указанное правило справедливо и для последующих групп механизма.

Построение планов *положений* механизма является *первой задачей кинематики* рычажного механизма, которую можно сформулировать следующим образом: *по известным размерам звеньев механизма, задаваясь положением его ведущего звена, найти положения всех остальных звеньев.*

Для получивших преимущественное распространение в технике механизмов II класса одним из методов решения этой задачи является *метод геометрических мест*. Суть этого метода рассмотрим на примерах определения положений звеньев диад трех модификаций.

На рис. 1.4.4 приведена диада с тремя вращательными парами  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Как уже было отмечено выше, положения точек  $B$  и  $D$ , принадлежащих крайним парам группы, должны быть известны. Следовательно, для определения положений звеньев достаточно найти положение точки  $C$  внутренней в группе кинематической пары.

С геометрической точкой  $C$  совпадают две физические точки  $C_2$  и  $C_3$ , принадлежащие соответственно звеньям 2 и 3. Геометрическим местом возможных положений точки  $C_2$  является окружность  $\alpha\alpha$  радиуса  $BC$  с центром в точке  $B$ , а точки  $C_3$  – окружность  $\beta\beta$  радиуса  $CD$  с центром в точке  $D$ . Положение точки  $C$  определится, очевидно, точкой пересечения окружностей  $\alpha\alpha$  и  $\beta\beta$ . Из двух возможных положений этой точки ( $C$  и  $C'$ ) истинное следует выбрать с учетом последовательности ее положений при движении механизма.

У диады второй модификации (рис. 1.4.5) известны положения точки  $B$  вращательной пары и направляющей  $xx$ , которая представляет собой геометрический элемент поступательной пары. Как и в предыдущей диаде, определив положение внутренней вращательной пары (точки  $C$ ), найдем положения звеньев группы. Геометрическим местом

положений точки  $C$  звена 2 будет окружность  $\alpha\alpha$  радиуса  $BC$  с центром в точке  $B$ . Поскольку точка  $C$  звена 3 находится на постоянном расстоянии  $h_3$  от направляющей  $xx$ , то геометрическим местом положений этой точки будет прямая  $\beta\beta$ , параллельная  $xx$ . Точки пересечения окружности  $\alpha\alpha$  с прямой  $\beta\beta$  дадут возможные положения точки  $C$ .

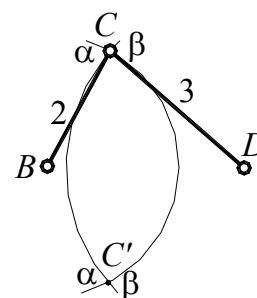


Рис. 1.4.4

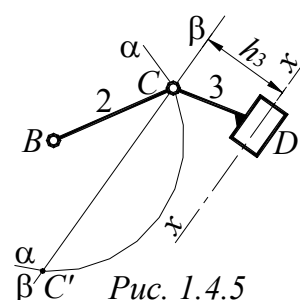


Рис. 1.4.5

В диаде третьей модификации (рис. 1.4.6) должны быть известными положения точек  $B$  и  $D$  вращательных пар, а также кратчайшие расстояния  $h_2$  и  $h_3$  от этих точек до направляющей  $xx$ . Необходимо определить положение направляющей, которое соответствует положению прямой, касательной к окружностям  $\alpha\alpha$  и  $\beta\beta$  радиусов  $h_2$  и  $h_3$ , проведенным из точек  $B$  и  $D$  как из центров. В диаде этой модификации задача по определению положений звеньев в общем случае также имеет несколько решений. Поэтому, определяя положение точки, принадлежащей внутренней паре, необходимо учитывать последовательность положений звеньев при движении механизма. Изображая кинематическую схему механизма, прежде всего, отмечают положения неподвижных геометрических элементов поступательных и вращательных кинематических пар. Затем ведущее звено устанавливают в заданное положение, и методами, изложенными выше, находят положения звеньев структурных групп.

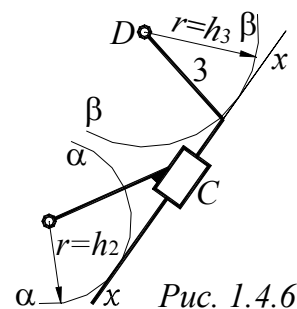


Рис. 1.4.6

На рис. 1.4.7 представлен ряд *последовательных* положений звеньев механизма, соответствующих полному циклу его движения, называемый *планом положений механизма*. Непрерывные линии, соединяющие на плане последовательные положения одноименных точек, дают размеченные *траектории движения этих точек*.

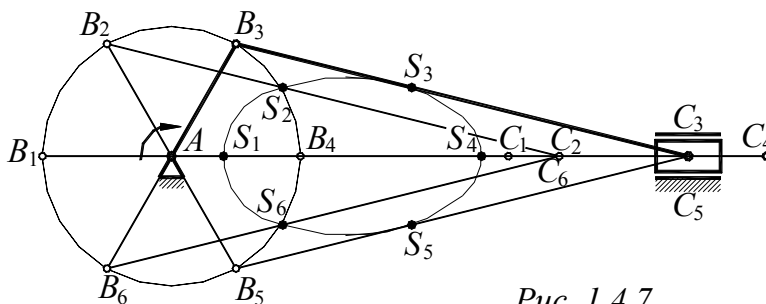


Рис. 1.4.7

Для большей наглядности и точности планы положений механизма рекомендуется строить в масштабе  $\mu_l$ . Под *масштабом* в теории механизмов понимается отношение какой-либо величины, измеренной в соответствующих единицах, к длине изображающего ее отрезка, измеренного в миллиметрах ( $\mu_l$  — масштаб длин и линейных перемещений).

#### 1.4.4 Планы скоростей механизма

Целью *второй задачи* кинематического анализа в общем случае является определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев.

Так же как и при построении плана положений механизма построение планов скоростей следует начинать с группы, которая образует кинематические пары с ведущим звеном и стойкой.

В этом случае скорости геометрических элементов крайних пар группы оказываются известными, и задача сводится к определению аналогичных параметров точек, принадлежащих внутренним парам.

Указанное правило справедливо и для последующих групп механизма.

*Планом скоростей* механизма называют векторные изображения скоростей характерных точек механизма, соответствующие заданному положению механизма, т.е. совокупности векторов, которые изображают *абсолютные* скорости точек звеньев, а отрезки, соединяющие концы векторов, – *относительные* скорости соответствующих точек звеньев *при данном положении механизма*. Векторы абсолютных скоростей на каждом плане откладывают от одной точки – *полюса*, обозначаемого на плане скоростей как  $p_v$ .

Определение скоростей звеньев механизмов методом планов отличается универсальностью и простотой. Так же преимуществом данного векторного метода является то, что в результате построения планов получают не только *величины*, но и *направления* скоростей заданных точек звеньев механизма.

Звенья плоских рычажных механизмов могут совершать поступательное, вращательное и сложное плоскопараллельное движение. Скорости точек этих звеньев определяются по формулам общей механики.

Рассмотрим звено  $BCD$  плоского механизма (рис. 1.4.8, а).

Пусть  $\bar{v}_B$ ,  $\bar{v}_C$ , и  $\bar{v}_D$  — скорости соответственно точек  $B$ ,  $C$  и  $D$ . *Мгновенный центр скоростей звена* (точка  $P_v$ ) находится в пересечении перпендикуляров, восставленных в этих точках к направлениям их скоростей. Поскольку отрезки  $p_vB$ ,  $p_vC$  и  $p_vD$  являются мгновенными радиусами вращения рассматриваемых точек, то *мгновенная угловая скорость звена* удовлетворяет условиям:

$$\omega = \frac{v_B}{P_vB} = \frac{v_C}{P_vC} = \frac{v_D}{P_vD} \quad (1.4.2)$$

Выберем произвольную точку  $p_v$  (рис. 1.4.8, б) и проведем из нее лучи  $\overline{p_vb} = \overline{v_B}$ ;  $\overline{p_vc} = \overline{v_C}$ ;  $\overline{p_vd} = \overline{v_D}$ .

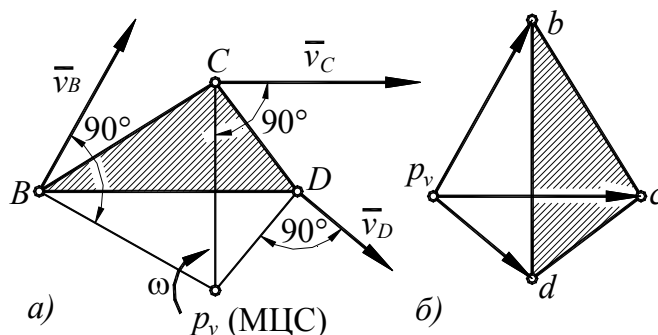


Рис. 1.4.8

Равенство  $\overline{p_v b} = \overline{v_B}$ ; показывает, что вектор  $\overline{p_v b}$  изображает в некотором масштабе  $\mu_v \left( \frac{\text{м / с}}{\text{мм}} \right)$  вектор скорости точки  $B$ , т.е.  $v_B = \mu_v (p_v b)$ , где круглыми скобками обозначена длина отрезка в миллиметрах.

Соединяя концы лучей между собой, получаем фигуру  $p_v bcd$ , называемую *планом скоростей звена BCD*.

Точка  $p_v$  называется *полюсом плана*.

Как известно из общей механики:

$$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{v_{CB}}, \quad (1.4.3)$$

но

$$\overline{p_v c} = \overline{v_C}, \quad \overline{p_v b} = \overline{v_B},$$

следовательно, вектор скорости точки  $C$  в относительном вращательном движении звена вокруг точки  $B$ :

$$\overline{v_{CB}} = \overline{bc}.$$

Модуль этой скорости равен:

$$v_{CB} = \mu_v (bc).$$

Поскольку векторы  $\overline{p_v b}$ ,  $\overline{p_v c}$ , и  $\overline{p_v d}$  перпендикулярны соответствующим мгновенным радиусам вращения  $p_v B$ ,  $p_v C$  и  $p_v D$  и пропорциональны им, то фигура  $p_v bcd$  подобна фигуре  $p_v BCD$  и повернута относительно нее на  $90^\circ$  в сторону вращения звена.

*План скоростей звена* расположен сходственно со звеном, так как чередование букв при обходе треугольников  $bcd$  и  $BCD$  по контуру в одном и том же направлении одинаково.

Итак, *план скоростей звена* имеет следующие свойства:

1) векторы абсолютных скоростей точек звена своим началом имеют полюс плана;

2) векторы *относительных* скоростей соединяют на плане концы векторов *абсолютных* скоростей соответствующих точек;

3) план скоростей звена подобен его очертанию, сходственно с ним расположен, но повернут на  $90^\circ$  в сторону мгновенного вращения звена.

Планы скоростей, построенные из одного полюса для всех звеньев механизма в данном его положении, можно условно назвать *планом скоростей механизма*.

Однако свойство подобия к такому чертежу в целом неприменимо, хотя для отдельных звеньев оно остается в силе.

Для построения *планов скоростей механизма* необходимо знать размеры всех звеньев механизма и задан закон движения его ведущего звена.

Методику построения планов скоростей *характерных точек механизма* рассмотрим на примере построения указанных планов для шарнирного четырехзвенника (рис. 1.4.9, а).

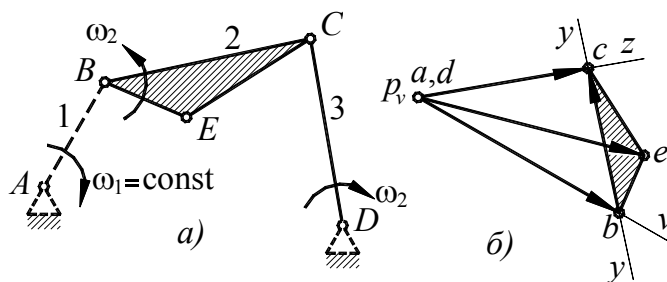


Рис. 1.4.9

Для заданного положения механизма шарнирного четырехзвенника построением планов скоростей и ускорений определим скорости характерных точек ( $B, C, D, E$ ) механизма, а также угловые скорости ( $\omega_2, \omega_3$ ) его звеньев.

Определяем скорость точки  $B$  кривошипа:

$$v_B = \omega_1 l_{AB}.$$

Из произвольного полюса  $p_v$  (рис. 1.4.9, б) проводим прямую  $p_v v$ , перпендикулярную кривошипу  $AB$ , в сторону его вращения. На прямой  $p_v v$  откладываем отрезок  $(p_v b)$ , изображающий в выбранном масштабе скорость точки  $B$ .

Далее переходим к построению плана скоростей для диады 2-3 первой модификации. Так как скорости точек  $B$  и  $D$  известны, остается найти скорость точки  $C$ . Но с точкой  $C$  совпадают две точки, из которых одна ( $C_2$ ) принадлежит шатуну, а другая ( $C_3$ ) – коромыслу. Очевидно:

$$v_{C_2} = v_{C_3} = v_C.$$

Относя точку  $C$  сначала к звену 2, а затем к звену 3, получим:

$$\underline{v_C} = \underline{v_B} + \underline{v_{CB}};$$

$$\underline{v_C} = \underline{v_D} + \underline{v_{CD}},$$

откуда:

$$\underline{\underline{v_B}} + \underline{\underline{v_{CB}}} = \underline{\underline{v_D}} + \underline{\underline{v_{CD}}}. \quad (1.4.4)$$

Здесь и далее две черты под вектором показывают, что известны его *модуль* и *направление*, а одна черта – только *направление* вектора или *линия его действия*.

Получено исходное векторное уравнение для построения плана скоростей структурных групп II класса второго порядка первой модификации.

Так как первый вектор левой части уравнения (1.4.4) уже построен, то через точку  $b$  плана проводим линию  $uu$  действия вектора  $\underline{v_{CB}}$  перпендикулярно  $BC$ . Вектор  $\underline{v_D}$  равен нулю; следовательно, он обратился в точку  $d$ , совпадающую с полюсом плана.

Через точку  $d$  ( $p_v$ ) проводим линию  $p_v z$  действия вектора  $\overline{v_{CD}}$  перпендикулярно  $CD$ . Точка  $C$  пересечения прямых  $uu$  и  $p_v z$  определяет положение конца вектора скорости точки  $C$  механизма, а так как  $v_D = 0$ , то  $v_C = v_{CD}$ . Таким образом,

$$v_C = v_{CD} = \mu_v(p_v c);$$

$$v_{CB} = \mu_v(bc).$$

Абсолютная скорость точки  $E$  шатуна при известных скоростях его точек  $B$  и  $C$  определяется на основании свойства подобия плана скоростей. Для этого на отрезке  $(bc)$  плана как на основании необходимо построить треугольник  $bce$ , подобный треугольнику  $BCE$  и сходственно с ним расположенный. Соединив вершину  $e$  треугольника  $bce$  с полюсом  $p_v$ , получим вектор скорости точки  $E$ , модуль которой будет равен:

$$v_F = \mu_v(p_v e).$$

Угловую скорость шатуна 2 найдем по линейной скорости  $v_{CB}$  относительного движения точки  $C$  вокруг точки  $B$ :

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}} = \frac{\mu_v(bc)}{\mu_l(BC)}.$$

Направление угловой скорости  $\omega_2$  определяется вектором  $\overline{v_{CB}}$ , если этот вектор, не меняя его направления, перенести с плана скоростей в точку  $C$  механизма.

Угловая скорость звена 3:

$$\omega_3 = \frac{v_{CD}}{l_{CD}} = \frac{\mu_v(p_v c)}{\mu_l(CD)}.$$

На рис. 1.4.9, *a* направления угловых скоростей  $\omega_2$  и  $\omega_3$  показаны круговыми стрелками.

### 1.4.5 кинематический анализ механизмов для передачи вращательного движения

#### 1.4.5.1 Общие положения

Основным кинематическим параметром любого колесного механизма (фрикционного или зубчатого) является *передаточное отношение*, представляющее собой отношение угловой скорости  $\omega_1$  звена ведущего к угловой скорости  $\omega_2$  звена ведомого, то есть:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{1.4.15}$$

Передаточное отношение может быть выражено через конструктивные параметры механизма. Так, в случае фрикционной передачи с параллельными осями (рис. 1.3.6) передаточное отношение может быть выражено через радиусы  $r_1$  и  $r_2$  фрикционных катков.

В передаче *внешнего* касания (рис. 1.3.6, а) *направления вращения* ведущего 1 и ведомого 2 катков *противоположны*, поэтому угловую скорость одного из них можно рассматривать как положительную, а другого – как отрицательную величину.

При *отсутствии проскальзывания* скорость контактирующих точек обоих колес одинакова. Поэтому, обозначая указанную скорость через  $v$  и полагая, что  $\omega_1 > 0$ , а  $\omega_2 < 0$ , получаем:

$$v = \omega_1 r_1 = -\omega_2 r_2,$$

откуда:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}. \quad (1.4.16)$$

При передаче *внутреннего* касания (рис. 1.3.6, б) *направления вращения* катков *одинаковы*, поэтому:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.4.17)$$

В зубчатых передачах роль радиусов фрикционных катков играют радиусы  $r_1$  и  $r_2$  так называемых *начальных окружностей* находящихся в зацеплении зубчатых колес. Точки касания этих окружностей имеют *одинаковую* скорость. Кроме того, числа зубьев  $z_1$  и  $z_2$  указанных колес пропорциональны величинам  $r_1$  и  $r_2$ .

Поэтому:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \mp \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (1.4.18)$$

где «минус» относится к *внешнему*, а знак «плюс» – к *внутреннему* зацеплению.

#### 1.4.5.2 Механизмы с последовательным соединением колес

Особенность такого соединения (рис. 1.4.15, а) заключается в том, что на каждом валу имеется по одному колесу (1-3) и каждое промежуточное колесо касается двух других, находящихся на соседних валах.

Передаточное отношение от ведущего вала  $D$  к ведомому валу  $B$  выражается как:

$$i_{DB} = i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_3} = i_{12} i_{23}$$

или



$$i_{13} = \left( -\frac{r_2}{r_1} \right) \left( -\frac{r_3}{r_2} \right) = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

В общем случае:

$$i_{1n} = (-1)^k \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}, \quad (1.4.19)$$

где  $k$  – число пар сопряженных колес внешнего касания (зацепления).

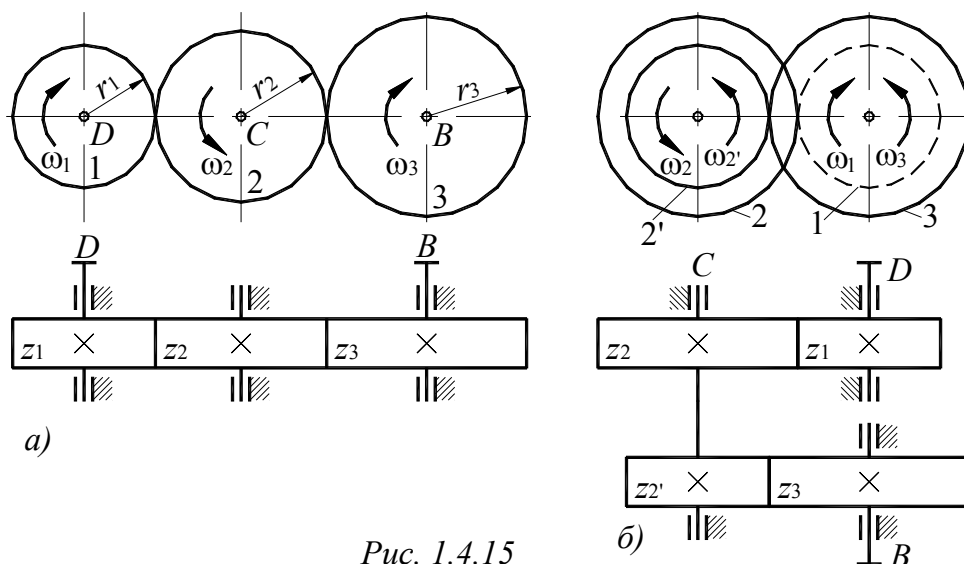


Рис. 1.4.15

Из формулы (1.4.19) следует, что промежуточные колеса не влияют на величину передаточного отношения рассмотренного механизма. Поэтому такие колеса называют *паразитными*. Назначение *паразитных* колес сводится к изменению направления вращения ведомого звена механизма, а также к уменьшению габаритов последнего при значительных межосевых расстояниях.

### 1.4.5.3 Механизмы со ступенчатым соединением колес

При таком соединении (рис. 1.4.15, б) на каждом промежуточном валу закреплено по два колеса, а на ведущем  $D$  и ведомом  $B$  – по одному.

Передаточное отношение механизма с учетом того, что  $\omega_2 = \omega_{2'}$ , определяется как:

$$i_{DB} = i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_{2'}}{\omega_3} = i_{12} i_{2'3},$$

или в общем случае:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{12}i_{2'3}i_{3'4}\dots i_{(n-1)'n} = (-1)^k \frac{r_2r_3r_4\dots r_n}{r_1r_2'r_3'\dots r_{(n-1)'}} =$$

$$= (-1)^k \frac{z_2z_3z_4\dots z_n}{z_1z_2'z_3'\dots z_{(n-1)'}} \quad (1.4.20)$$

где  $n$  – число пар сопряженных колес внешнего касания (зацепления).

Таким образом, *ступенчатое* соединение колес позволяет реализовать большое передаточное отношение, поскольку его величина оказывается равной *произведению* передаточных отношений отдельных ступеней.

### Лекция № 3 (2 часа).

## Трение в кинематических парах. Механический коэффициент полезного действия

### 1.5 Трение в кинематических парах

#### 1.5.1. Основные понятия

*Трением* называется сопротивление относительно перемещению соприкасающихся тел, возникающее в месте их соприкосновения.

По кинематическим признакам различают:

- *трение скольжения* (трение первого рода), возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого,
- *трение качения* (трение второго рода), возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Трение скольжения

По *характеру смазки* трущихся поверхностей различают:

- *сухое* трение – смазка отсутствует;
- *граничное* трение – поверхности разделены очень тонким слоем смазки (0,1 мкм и менее);
- *жидкостное* трение – поверхности полностью разделены слоем смазки;
- *полусухое* трение – сочетание сухого и граничного;
- *полужидкостное* трение – сочетание жидкостного и граничного.

Рассмотрим особенности *сухого* и *полусухого* трения *скольжения*.

По *величине относительного перемещения* соприкасающихся тел различают:

- *неполную силу трения покоя*,
- *полную силу трения покоя*,
- *силу трения движения*.

*Неполная сила трения покоя* соответствует микроскопическим, частично обратимым относительным перемещениям соприкасающихся тел.

Такие перемещения, обусловленные упругими и пластическими деформациями этих тел, называются *предварительными смещениями*.

*Полная сила трения покоя* соответствует предельной величине предварительного смещения и равна максимальному значению неполной силы трения покоя.

Полная и неполная сила трения покоя направлена в сторону, противоположную сдвигающему усилию, и равна ему по модулю. Если сдвигающее усилие становится больше полной силы трения покоя, то начинается относительное движение соприкасающихся тел.

*Сила трения движения* соответствует относительному движению соприкасающихся тел. Эта сила не зависит от движущей силы и направлена в сторону, противоположную относительной скорости скольжения.

Отношение силы трения к силе нормального давления между трущимися поверхностями называется *коэффициентом трения*.

Согласно сказанному выше необходимо различать три вида коэффициента трения:

— *коэффициент трения в зоне предварительных смещений*, равный отношению неполной силы трения покоя  $F_{\text{нп}}$  к силе нормального давления  $F_n$ :

$$f_{\text{пс}} = \frac{F_{\text{нп}}}{F_n} \quad (1.6.1)$$

— *коэффициент трения покоя*:

$$f_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{ст}}}{F_n} \quad (1.6.2)$$

где  $F_{\text{ст}}$  — полная сила трения покоя;

— *коэффициент трения движения*:

$$f = \frac{F_{\text{д}}}{F_n} \quad (1.6.3)$$

где  $F_{\text{д}}$  — сила трения движения.

Из этих формул следует, что *коэффициент трения скольжения* — безразмерная величина.

Коэффициент трения в зоне *предварительных смещений*  $f_{\text{пс}}$  является *переменной* величиной, зависящей от сдвигающего усилия или от характера движения тел в момент их контакта и изменяющейся в пределах от нуля до коэффициента трения покоя (или движения):

$$0 \leq f_{\text{пс}} \leq f_{\text{ст}}.$$

Коэффициенты *трения покоя* и *движения* зависят от многих факторов:

- природы материала,
- наличия пленок на его поверхности (смазка, окисел, загрязнение),
- продолжительности неподвижного контакта,
- скорости приложения сдвигающего усилия,
- жесткости и упругости соприкасающихся тел,
- скорости скольжения,
- температурного режима,
- давления,
- характера соприкосновения,
- качества поверхности,
- шероховатости.

При прочих равных условиях коэффициент трения покоя несколько больше коэффициента трения движения:

$$f_{\text{ст}} \geq f.$$

Коэффициент трения движения в большинстве случаев уменьшается при увеличении скорости скольжения.

Для органических материалов (кожа, резина) коэффициент трения с увеличением скорости обычно возрастает.

Так как в приводимых в литературе данных о коэффициентах трения не могут быть учтены все указанные выше факторы, то в ответственных случаях рекомендуется специальное определение коэффициентов трения с учетом реальных условий работы узла трения.

В большинстве случаев можно считать, что график зависимости коэффициента трения от относительного смещения  $s$  трущихся тел выражается ломаной линией (рис. 1.6.1), где отрезок  $\delta$  изображает максимальную величину *предварительного* смещения.

На основании выражений (1.6.2) и (1.6.3) получаем следующие формулы Амонтона-Кулона для *приближенного* определения *полной* силы трения покоя и силы трения движения:

$$F_{\text{ст}} = f_{\text{ст}} F_n$$

и

$$F_{\text{д}} = f F_n$$

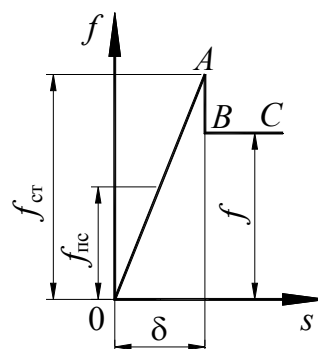


Рис. 1.6.1

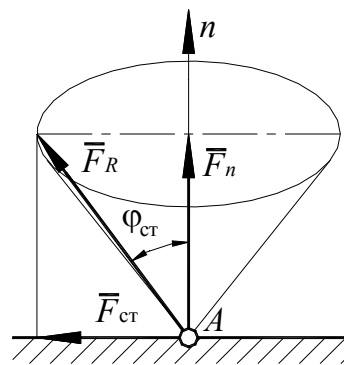


Рис. 1.6.2

(1.6.4)

Полная реакция поверхности в данной точке в общем случае складывается из нормальной реакции и силы трения (рис. 1.6.2). Угол отклонения полной реакции поверхности в данной точке от нормали к этой поверхности в той же точке называют *углом трения*.

Различают *угол трения покоя*  $\varphi_{\text{ст}}$  и *угол трения движения*  $\varphi$ .

Из рис. 1.6.2 следует, что:

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{ст}}}{F_n} = \frac{f_{\text{ст}} F_n}{F_n} = f_{\text{ст}},$$

откуда:

$$\varphi_{\text{ст}} = \arctg f_{\text{ст}}. \quad (1.6.5)$$

Аналогично получаем:

$$\varphi = \arctg f. \quad (1.6.6)$$

Все возможные направления полной реакции в данной точке поверхности заключаются в пределах так называемого *конуса трения*, вершина которого совпадает с данной точкой, а образующая составляет с нормалью поверхности угол, равный углу трения ( $\varphi_{\text{ст}}$  – при относительном равновесии и  $\varphi$  – при скольжении).

Рассмотрим *особенности* трения при *внезапном контакте* движущихся относительно друг друга тел.

Если тело  $A$  движется с некоторой скоростью  $v$  относительно тела  $B$ , не касаясь этого тела, и затем внезапно прижимается к телу  $B$  некоторой силой  $\overline{F}_n$ , то на поверхности контакта возникает трение первого рода.

Так как в начале контакта тело  $A$  уже движется относительно тела  $B$ , то обычно считают, что на тело  $A$  начинает сразу действовать сила трения движения  $F_t = f F_n$ , направленная в сторону, противоположную относительной скорости этого тела.

Однако такое допущение приводит в ряде случаев к парадоксам, противоречащим законам классической механики. Парадоксы снимаются, если принять, что коэффициент трения между движущимися относительно друг друга поверхностями при их внезапном контакте *не сразу* становится равным динамическому коэффициенту трения, а достигает этой величины в течение некоторого весьма малого промежутка времени, соответствующего *предварительным смещениям* контактирующих поверхностей, причем в начале этого промежутка коэффициент сцепления равен нулю.

Если связи, наложенные на вступившие в контакт тела, таковы, что после контакта возможно относительное движение этих тел, то конечное значение коэффициента сцепления равно коэффициенту трения движения  $f$ , но в процессе изменения этого коэффициента от 0 до  $f$  он может (не всегда) принять значение  $f_{\text{ст}}$  коэффициента трения покоя. (В

данном случае величина  $f_{ст}$  может меньше отличаться от  $f$ , чем при плавном взаимном скольжении тел. Это объясняется, в частности, тем, что коэффициент трения покоя возрастает с увеличением времени предварительного (до начала взаимного скольжения тел) контакта).

Эту возможность необходимо учитывать для надежности расчета в тех случаях, когда в проектируемом механизме не должно быть самозаклинивания, например, тормозных механизмов.

Подобное поведение коэффициента трения вытекает из механической теории трения, если учесть деформации трущихся тел.

## 1.6.2 Трение в низших кинематических парах

### 1.6.2.1 Трение в поступательной паре

Рассмотрим ползун на наклонной и горизонтальной плоскости (рис. 1.6.3).

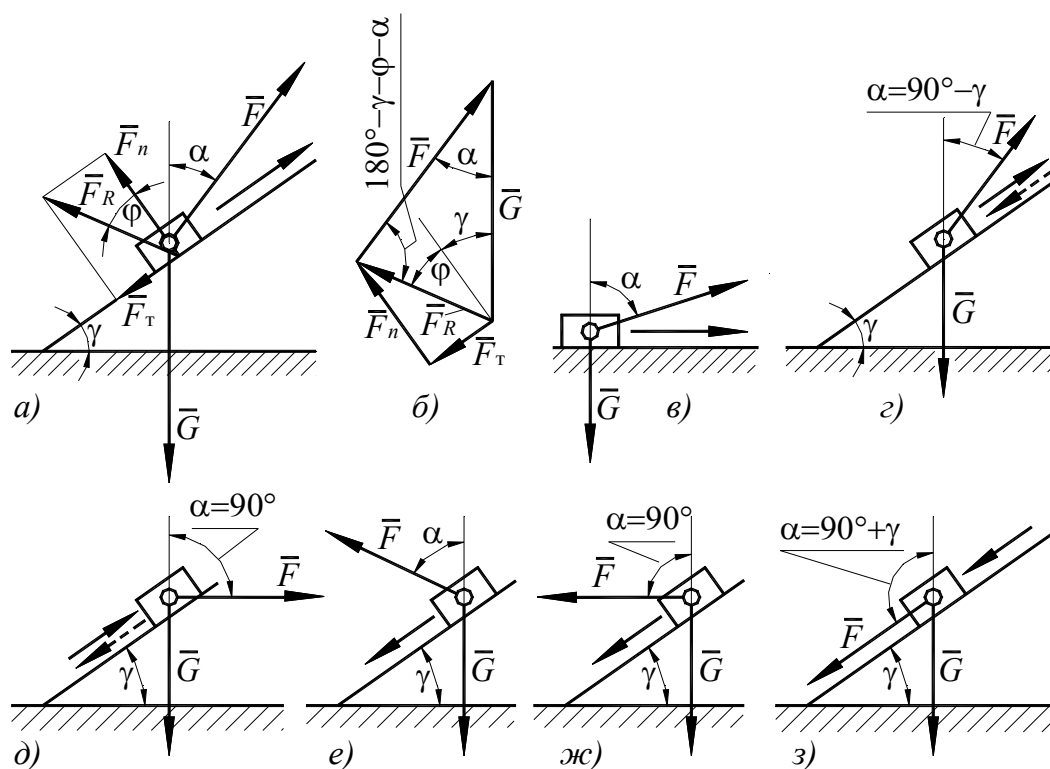


Рис. 1.6.3

Введем обозначения:

$\bar{G}$  – вес ползуна;

$\bar{F}$  – движущая или тормозящая сила;

$\alpha$  – угол наклона плоскости;

$\beta$  – угол, образуемый силой  $\bar{F}$  с вертикалью;

$f$  – коэффициент трения;

$\varphi$  – угол трения.

Рассмотрим равномерное движение ползуна по наклонной плоскости вверх (рис. 1.6.3, а).

Кроме сил  $\overline{F}$  и  $\overline{G}$ , на ползун действуют нормальная реакция  $\overline{F}_n$  наклонной плоскости и сила трения  $\overline{F}_t$ , направленная в сторону, противоположную движению ползуна, и равная по модулю:

$$F_t = fF_n = F_n \operatorname{tg} \varphi.$$

Полная реакция  $\overline{F}_R = \overline{F}_n + \overline{F}_{tr}$  отклонена от нормали к наклонной плоскости на угол  $\varphi$ .

При равномерном движении ползуна:

$$\overline{F} + \overline{G} + \overline{F}_R = 0.$$

Согласно этому векторному равенству строим замкнутый многоугольник сил (рис. 1.6.3, б), из которого, применяя теорему синусов, находим:

$$F = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)}. \quad (1.6.7)$$

При равномерном движении ползуна вниз по наклонной плоскости сила  $\overline{F}$  играет роль тормозящей силы, а сила трения  $\overline{F}_t$  меняет свое направление на прямо противоположное. В этом случае:

$$F = G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta - \varphi)}. \quad (1.6.8)$$

При движении ползуна по горизонтальной плоскости (рис. 1.6.3, в) следует положить  $\alpha = 0$ , что дает:

$$F = G \frac{\sin \varphi}{\sin(\beta + \varphi)}. \quad (1.6.9)$$

При

$$\sin(\beta + \varphi) = 1 \text{ или } \beta = 90^\circ - \varphi$$

получаем минимальное значение движущей силы:

$$F_{\min} = G \sin \varphi = G \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}. \quad (1.6.10)$$

Если сила  $\overline{F}$  направлена вдоль наклонной плоскости, то (рис. 1.6.3, з):

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

и:

$$F = G \frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi} = G(\sin \alpha \pm f \cos \alpha), \quad (1.6.11)$$

причем верхние знаки соответствуют направлению движения, показанному сплошной линией, а нижние – направлению, показанному пунктиром. Если сила  $\overline{F}$  направлена горизонтально, то  $\beta = 90^\circ$  (рис. 1.6.3, д) и:

$$F = G \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi), \quad (1.6.12)$$

где верхние знаки соответствуют движению вверх, а нижние – вниз.

Во всех рассмотренных случаях равномерное движение вниз возможно при  $\alpha > \varphi$ .

Если  $\alpha = \varphi$ , то при равномерном движении вниз имеем:

$$F = 0.$$

Если  $\alpha < \varphi$ , то наклонную плоскость называют *самотормозящей*.

В этом случае равномерное движение вниз возможно при наличии движущей силы  $\overline{F}$  (рис. 1.6.3, е), которая определяется формулой:

$$F = G \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha + \varphi)}. \quad (1.6.13)$$

При  $\beta = 90^\circ$  (рис. 1.6.3, ж) имеем:

$$F = G \operatorname{tg}(\varphi - \alpha), \quad (1.6.14)$$

а при  $\beta = 90^\circ + \alpha$  (рис. 1.6.3, з):

$$F = G \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha} = G(f \cos \alpha - \sin \alpha). \quad (1.6.15)$$

### 1.6.2.2. Трение в клинчатом ползуне

Рассмотрим еще один пример поступательной пары – *клинчатый ползун* (рис. 1.6.4, а).

Обозначим через  $\alpha$  половину угла при вершине желоба, а через  $\overline{G}$  вертикальную нагрузку на ползун. Тогда:

$$\overline{G} + \overline{F}_{n_1} + \overline{F}_{n_2} = 0,$$

где  $\overline{F}_{n_1}$  и  $\overline{F}_{n_2}$  – нормальные реакции направляющих плоскостей.

Из многоугольника сил (рис. 1.6.4, в) находим:

$$F_{n_1} = F_{n_2} = \frac{G}{2 \sin \alpha}.$$

При движении ползуна вдоль желоба по каждой из направляющих плоскостей возникает сила трения  $F = fF_n$ , поэтому сила  $F$ , необходимая для поддержания равномерного движения ползуна (рис. 1.6.4, б), определяется равенством:



$$F = 2F_T = 2fF_n = \frac{f}{\sin \alpha} G = f'G, \quad (1.6.16)$$

где

$$f' = \frac{f}{\sin \alpha} > f. \quad (1.6.17)$$

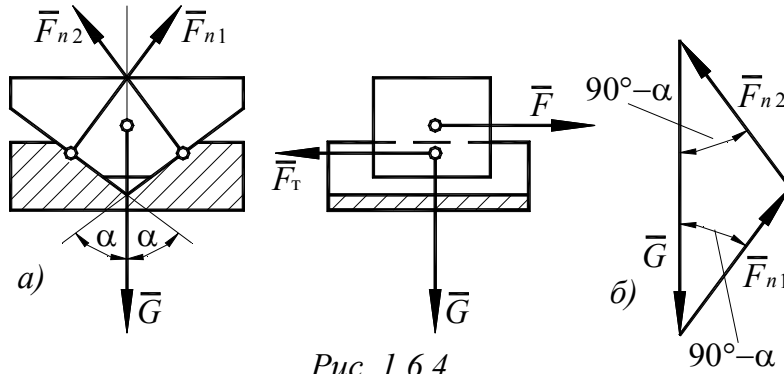


Рис. 1.6.4

Величину  $f'$  называют *приведенным коэффициентом трения клинчатого ползуна*. Для других конструкций приведенный коэффициент трения выражается другими зависимостями.

### 1.6.2.3. Трение в винтовой паре

Рассмотрим винт с прямоугольной резьбой (рис. 1.6.5, а).

Пусть под действием вращающего момента  $T$  винт совершает движение, при котором осевое перемещение винта и осевое усилие  $\overline{F}_a$  противоположны по направлению.

Введем обозначения:

- $r$  – средний радиус резьбы;
- $\alpha$  – угол подъема винтовой линии;
- $f$  – коэффициент трения;
- $\varphi$  – угол трения.

Кроме того, через  $\overline{F}_{n_v}$  и  $\overline{F}_{T_v}$  обозначим элементарные силы нормального давления и трения между резьбой гайки и винта.

Составляя уравнение проекций на ось  $z$  и уравнение моментов относительно этой оси, получим:

$$-F_a + \sum F_{n_v} \cos \alpha - \sum f F_{n_v} \sin \alpha = -F_a + (\cos \alpha - f \sin \alpha) \sum F_{n_v} = 0;$$

$$T - \sum r F_{n_v} \sin \alpha - \sum r f F_{n_v} \cos \alpha = T - r (\cos \alpha + f \sin \alpha) \sum F_{n_v} = 0.$$

Исключая из этих уравнений  $\sum F_{n_v}$ , находим:

$$T = F_a r \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = F_a r \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}$$

или, окончательно:

$$T = F_a r \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (1.6.18)$$

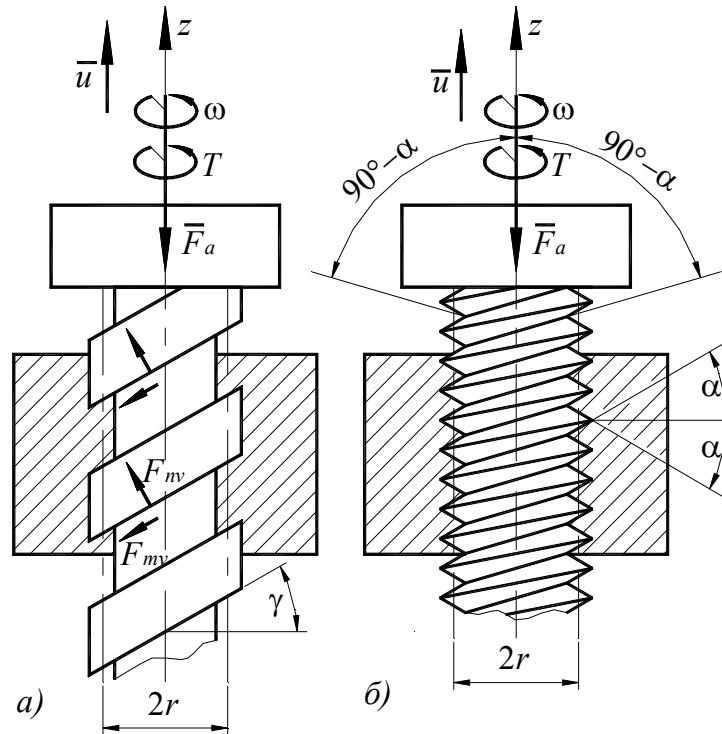


Рис. 1.6.5

Мощность, развиваемая моментом  $T$ , играющим роль момента движущих сил, определяется так:

$$P_d = T\omega = F_a r \omega \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Мощность, развиваемая силой  $\overline{F_a}$ , играющей роль полезного ее противления:

$$P_{п.с} = F_a u,$$

где  $u$  – скорость поступательного движения винта вдоль оси вращения-скольжения.

Как известно из кинематики:

$$u = \omega r \operatorname{tg} \alpha,$$

поэтому КПД винта равен:

$$\eta = \frac{P_{п.с}}{P_d} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \quad (1.6.19)$$

В случае *треугольной* резьбы (рис. 1.6.5, б) можно приближенно считать, что движение винта аналогично движению клинчатого ползуна по желобу. Тогда в полученных выше формулах коэффициент трения  $f$  и угол трения  $\varphi$  необходимо заменить величинами  $f'$  и  $\varphi'$ , причем:

$$f' = \frac{f}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{f}{\cos \beta} \quad (1.6.20)$$

и

$$\varphi' = \arctg f'. \quad (1.6.20')$$

#### 1.6.2.4. Трение во вращательной паре

Вращательная пара может быть различных видов. Если пара воспринимает нагрузки, нормальные к оси вращения, то элементами этой пары являются *цапфа* 1 и *подшипник* 2 (рис. 1.6.6).

Пусть равнодействующая  $\bar{Q}$  внешних нагрузок направлена параллельно оси  $\Delta$ . Если бы сила  $\bar{Q}$  была направлена по оси  $\Delta$  и вал не вращался, то точка максимального контакта цапфы и подшипника находилась бы в положении  $A$  и сила  $\bar{Q}$  уравнивалась бы нормальной реакцией подшипника. Сообщим валу вращение в направлении, указанном стрелкой. Тогда точка максимального контакта цапфы и подшипника переместится в положение  $B$  (цапфа набежит на подшипник), а полная реакция  $\bar{F}_R$  подшипника, состоящая из нормальной реакции  $\bar{F}_n$  и силы трения  $\bar{F}_{тр}$ , будет направлена по касательной к так называемому *кругу трения*. Обозначая радиус круга трения через  $\rho$ , а радиус цапфы – через  $r$ , имеем:

$$\rho = r \sin \varphi' = r \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \quad (1.6.21)$$

где  $\varphi'$  – угол отклонения полной реакции от нормали (угол трения);

$f'$  – коэффициент трения в подшипнике.

При малых значениях коэффициента трения  $f'$  можно принять:

$$\rho = \frac{rf'}{1 + \frac{f'^2}{2}} = rf' \left( 1 - \frac{f'^2}{2} \right) \quad (1.6.22)$$

При  $f' \ll 1$  получаем еще более простую зависимость:

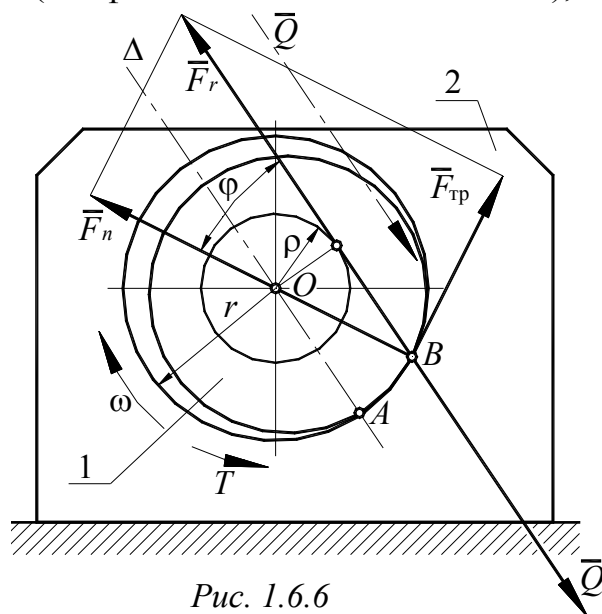


Рис. 1.6.6

$$\rho = rf' \quad (1.6.23)$$

Так как поступательные перемещения цапфы исключены, то главный вектор всех действующих на цапфу сил (активных и реактивных) равен нулю, откуда  $\overline{F_R} = -\overline{Q}$ , то есть полная реакция подшипника всегда параллельна равнодействующей  $\overline{Q}$  внешних нагрузок.

Если линия действия силы  $\overline{Q}$  касается круга трения, как показано на рис. 1.6.6, то есть силы  $\overline{F_R}$  и  $\overline{Q}$  направлены по одной прямой, то они образуют уравновешенную систему, и вал вращается равномерно или находится в покое. Если линия действия силы проходит вне круга трения, как показано пунктиром, то силы  $\overline{F_R}$  и  $\overline{Q}$  образуют пару сил одного направления с угловой скоростью, и вал вращается ускоренно. Если же линия действия силы  $\overline{Q}$  пересекает круг трения, то вал вращается замедленно или находится в покое.

Момент трения во вращательной паре:

$$T_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} r = F_R \rho = f Q r \quad (1.6.24)$$

Коэффициент трения  $f'$ , входящий в формулу (1.6.24), отличается от коэффициента трения плоских поверхностей и определяется экспериментально для различных условий работы вращательной пары. Этот коэффициент зависит от распределения давлений по поверхности контакта цапфы и подшипника.

Для *неприработавшихся* цапф можно принять по Вейсбаху:

$$f' = \frac{\pi}{2} f \quad (1.6.25)$$

для *приработавшихся* цапф – по Рейе:

$$f' = \frac{4}{\pi} f \quad (1.6.26)$$

где  $f$  – коэффициент трения соответствующих плоских поверхностей при тех же прочих условиях.

Если вращательная пара воспринимает нагрузку  $F_a$ , направленную вдоль оси вращения, то элементами этой пары являются *пятя* 1 и *подпятник* 2 (рис. 1.6.7, а).

Определим момент сил трения в случае плоской *кольцевой пяты*. Полагая, что сила  $\overline{F_a}$  равномерно распределяется по всей площади прилегания, равной  $\pi(R^2 - r^2)$ , находим удельное давление, т.е. силу, отнесенную к единице поверхности:

$$q = \frac{F_a}{\pi(R^2 - r^2)}.$$

Момент силы трения на элементарной площадке, расположенной на расстоянии  $\rho$  от оси вращения (на рис. 1.6.7, б эта площадка заштрихована), определится так:

$$dT_{\text{тр}} = fqr d\varphi d\rho.$$

Полный момент трения в пяте определится как сумма элементарных моментов:

$$T_{\text{тр}} = \sum dT_{\text{тр}} = \int_r^R \int_0^{2\pi} fqr^2 d\rho d\varphi = fqr^2 \int_r^R 2\pi \rho d\rho = \frac{2}{3} f F_a R (R^3 - r^3),$$

или

$$T_{\text{тр}} = \frac{2}{3} f q \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{2}{3} f F_a R \left( \frac{R}{R+r} + \frac{r}{R} \right). \quad (1.6.27)$$

Для сплошной пяты, полагая  $r=0$ , имеем:

$$T_{\text{тр}} = \frac{2}{3} f F_a R. \quad (1.6.28)$$

### 1.6.3. Трение в высших кинематических парах

В высших кинематических парах может иметь место как трение скольжения, рассмотренное выше, так и трение качения. Часто встречается смешанный случай, когда перекачивание одного тела по другому сопровождается проскальзыванием.

#### 1.6.3.1 Трение качения

Сопротивление, возникающее при качении одного тела по другому, называемое *трением качения*, обусловлено деформациями этих тел. Из-за этих деформаций точка приложения нормальной реакции в контакте тел смещается так, что возникает пара сил  $(\bar{F}_n - \bar{F}_n')$ , препятствующая качению, и называемая *парой трения качения* (рис. 1.6.8).

Максимальную величину  $k$  плеча этой пары, зависящую от материала данных тел и их упругих свойств, называют *коэффициентом трения ка-*

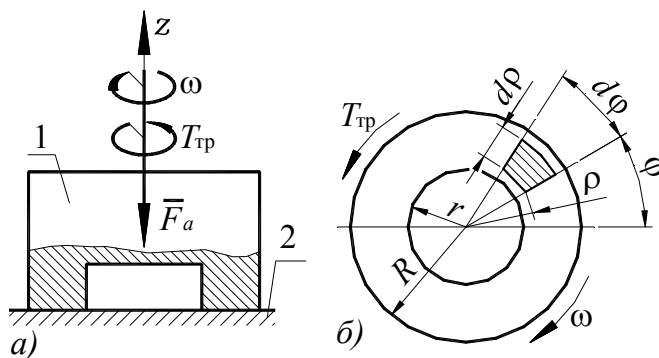


Рис. 1.6.7

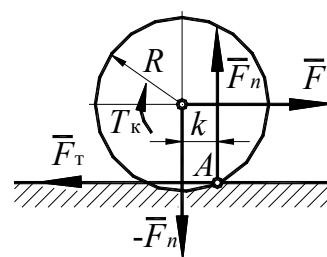


Рис. 1.6.8

чения (имеет размерность длины). (Величина  $k$  зависит также от радиусов кривизны перекатывающихся поверхностей в местах их контакта и от нормального давления между этими поверхностями).

Максимальная величина момента пары трения качения

$$T_k = kF_n \quad (1.6.29)$$

Минимальная величина силы  $F$ , необходимая для качения катка (если эта сила приложена в центре катка):

$$F = \frac{k}{R} F_n \quad (1.6.30)$$

где  $R$  – радиус катка.

Условия равновесия катка выражаются так:

$$FR \leq T_k = kF_n$$

и

$$F \leq F_{T \max},$$

$$F \leq \frac{k}{R} F_n; \quad (1.6.31)$$

$$F \leq fF_n$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения.

### 1.6.3.2 Трение гибких тел

В технике широкое применение находят механизмы с гибкими звеньями (ременные и канатные передачи, ленточные конвейеры, ленточные тормоза и др.). Трение между гибким и твердым телами обладает некоторыми особенностями; оно зависит не только от коэффициента трения между этими телами, но и от упругих свойств гибкого тела, его деформаций, а также от формы поверхности, по которой происходит скольжение.

Рассмотрим задачу о трении между гибким и твердым телами в самой простой постановке.

Пусть гибкая, нерастяжимая нить, охватывающая неподвижный круглый шкив, скользит по этому шкиву (рис. 1.6.9). На элемент  $CD$  нити, которому соответствует центральный угол  $d\varphi$ , действуют натяжения  $\bar{S}$  и  $\bar{S}'$  в начале и конце этого элемента, сила трения  $\bar{F}$  между элементом и шкивом и нормальная реакция  $\bar{F}_n$  шкива.

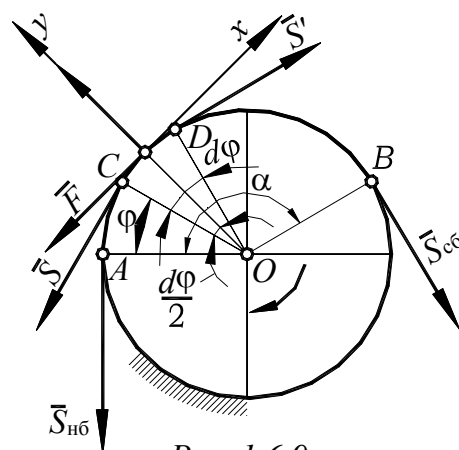


Рис. 1.6.9

Составим уравнения равновесия этих сил в проекциях на оси  $x$  и  $y$ , расположенные, как указано на чертеже:

$$\sum F_x = S' \cos \frac{d\varphi}{2} - S \cos \frac{d\varphi}{2} - F = 0;$$

$$\sum F_y = F_n - S' \sin \frac{d\varphi}{2} - S \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Учитывая, что  $d\varphi$  – величина бесконечно малая, можем положить:

$$\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$$

и

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}.$$

Поэтому из первого уравнения:

$$F = S' - S = dS;$$

из второго уравнения:

$$F_n = (S + dS) \frac{d\varphi}{2} + S \frac{d\varphi}{2} = 2S \frac{d\varphi}{2} + dS \frac{d\varphi}{2} \approx S d\varphi$$

(пренебрегаем бесконечно малыми величинами второго порядка).

Но:

$$F = fF_n = fSd\varphi,$$

где  $f$  – коэффициент трения между нитью и шкивом.

Таким образом,

$$fSd\varphi = dS;$$

$$\frac{dS}{S} = fd\varphi;$$

$$\int_{S_{нб}}^{S_{сб}} \frac{dS}{S} = f \int_0^\alpha d\varphi;$$

$$\ln \frac{S_{сб}}{S_{нб}} = f\alpha.$$

Отсюда получаем *формулу Эйлера*, устанавливающую зависимость между натяжениями набегающей  $S_{нб}$  и сбегающей  $S_{сб}$  ветвей нити:

$$S_{сб} = S_{нб} e^{f\alpha}. \quad (1.6.32)$$

## 1.5 Механический коэффициент полезного действия механизма

При установившемся движении механизма имеет место соотношение  $A_d = A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}}$ . Так как всегда существуют вредные сопротивления, то  $A_d > A_{\text{пс}}$ .

Отношение абсолютной величины работы (или средней мощности) полезных сопротивлений к работе (или средней мощности) движущих сил за один полный цикл установившегося движения механизма называется механическим коэффициентом полезного действия (КПД) механизма.

Обозначая КПД через  $\eta$ , получаем:

$$\eta = \frac{A_{\text{пс}}}{A_d} = \frac{P_{\text{пс}}}{P_d} < 1. \quad (1.5.19)$$

КПД механизма является одной из важнейших количественных характеристик его качества. Чем больше величина  $\eta$ , тем большая часть энергии расходуется в механизме на полезную работу и тем меньше доля потерь ее на вредные сопротивления, т.е. тем рациональнее используется поступающая энергия.

Наряду с понятием КПД пользуются понятием *коэффициента потерь*  $\varphi$ .

*Коэффициентом потерь* называется отношение абсолютной величины работы (или средней мощности) вредных сопротивлений к работе (или средней мощности) движущих сил:

$$\varphi = \frac{A_{\text{вс}}}{A_d} = \frac{P_{\text{вс}}}{P_d}. \quad (1.5.20)$$

Таким образом,

$$\eta = \frac{A_{\text{пс}}}{A_d} = \frac{A_d - A_{\text{вс}}}{A_d} = 1 - \varphi. \quad (1.5.21)$$

Определим КПД сложного механизма, состоящего из  $n$  последовательно соединенных механизмов, КПД которых соответственно  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ , ...,  $\eta_n$ . (рис. 1.5.5, а).

$A_d$  – работа движущих сил первого механизма;

$A_1$  – полезная работа первого механизма, являющаяся по отношению ко второму механизму работой движущих сил;

$A_2$  – полезная работа второго механизма;

$A_n$  – полезная работа  $n$ -го механизма.

Тогда:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_d}; \quad \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}; \quad \dots \dots \dots \quad \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$



Перемножим соответственно левые и правые части этих равенств:

$$\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n = \frac{A_1}{A_d} \frac{A_2}{A_1} \dots \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_d},$$

но

$$\frac{A_n}{A_d} = \eta,$$

где  $\eta$  — КПД всего механизма.

Следовательно:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n, \quad (1.5.22)$$

то есть *полный* КПД сложного механизма, состоящего из ряда *последовательно* соединенных механизмов, равен *произведению* *частных* КПД.

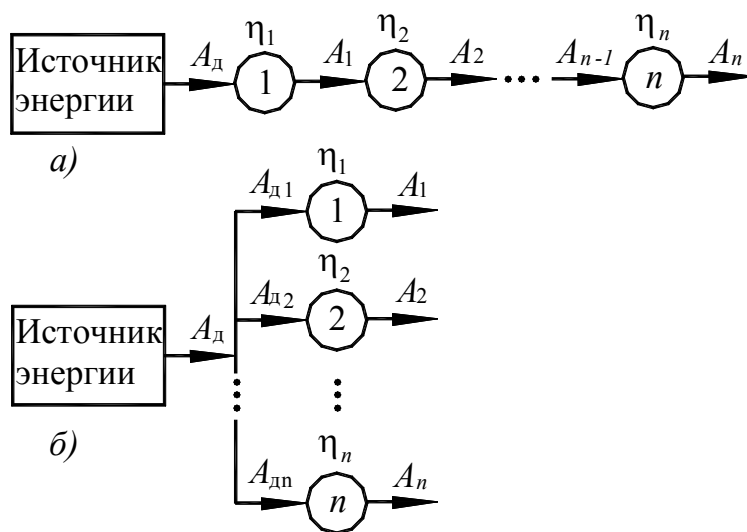


Рис. 1.5.5

При *параллельном* соединении нескольких механизмов с общим источником энергии (рис. 1.5.5, б) имеем:

$$A_d = \sum_{v=1}^n A_{dv},$$

$$A_{п.с} = \sum_{v=1}^n A_v,$$

где  $A_{dv}$  ( $v=1, 2, \dots, n$ ) — работа движущих сил отдельных механизмов;  
 $A_v$  ( $v=1, 2, \dots, n$ ) — полезные работы, совершаемые этими механизмами.

Учитывая, что:

$$\eta_v = \frac{A_v}{A_{dv}} \quad (v=1, 2, \dots, n),$$

для КПД всего механизма имеем:

$$\eta = \frac{A_{п.с}}{A_d} = \frac{\sum_{v=1}^n A_v}{\sum_{v=1}^n A_{dv}} = \frac{\sum_{v=1}^n \eta_v A_{dv}}{\sum_{v=1}^n A_{dv}}. \quad (1.5.23)$$

Если  $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n$ , то, как следует из формулы (1.5.23):

$$\eta = \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n,$$

т.е. в этом случае КПД всей машины тот же, что и для отдельного механизма.

Если:

$$A_{д1} = A_{д2} = \dots = A_{дn},$$

то:

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \eta_v,$$

т.е. КПД всей машины равен среднему арифметическому от КПД отдельных механизмов.

Рассмотрим зависимость между *моментом движущих сил* и *моментом полезных сопротивлений* механизма передачи вращательного движения (рис. 1.5.6).

В механизме:

$\omega_1$  – угловая скорость входного вала механизма;

$\omega_n$  – угловая скорость выходного вала механизма;

$\eta$  – КПД механизма.

Обозначим вращающий момент на входном валу через  $T_d$ , а момент полезных сопротивлений на выходном валу – через  $T_{пс}$ .

Тогда:

$$P_d = T_d \omega_1;$$

$$P_{пс} = T_{пс} \omega_n.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{P_{пс}}{P_d} = \frac{T_{пс} \omega_n}{T_d \omega_1} = \frac{T_{пс}}{T_d i},$$

где  $i$  – передаточное отношение всего механизма.

Отсюда:

$$T_{пс} = \eta i T_d \tag{1.5.24}$$

или

$$T_d = \frac{T_{пс}}{\eta i}.$$

Полагая  $\eta = 1$ , получим зависимость между моментом движущих сил и моментом полезных сопротивлений при установившемся движении *идеального* механизма.

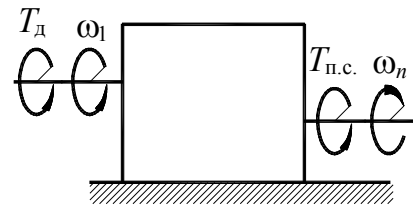


Рис. 1.5.6

**Лекция № 4 (2 часа).**  
**Основы сопротивления материалов. Общие сведения.**  
**Основные понятия и определения**

**2 Основы сопротивления материалов**

**2.1 Общие сведения**

В процессе эксплуатации машин и механизмов элементы конструкции в результате действия на них внешних сил в той или иной степени изменяют свои первоначальные размеры и форму, то есть *деформируются*. Деформации, в силу своей малости по сравнению с абсолютными размерами тела, не оказывают существенного влияния на законы его равновесия и движения, вследствие чего в теории механизмов и машин ими пренебрегают. Однако без изучения этих деформаций невозможно определить условия, при которых может произойти разрушение детали или недопустимое изменение ее формы или размеров.

*Под прочностью* понимают *способность конструкции, а также ее частей и деталей, выдерживать, не разрушаясь, действие внешней нагрузки*.

Изложение *методов расчета* элементов конструкций *на прочность* составляет *первую* задачу науки о сопротивлении материалов.

Во многих случаях приходится определять те изменения формы и размеров (*деформации*), которые возникают в элементах конструкций при действии нагрузок. Абсолютно твердых, недеформирующихся тел в природе не существует. Поэтому во многих случаях величину деформаций, несмотря на их малую величину по сравнению с размерами самой детали, приходится ограничивать, так как в противном случае нормальная эксплуатация конструкции может стать невозможной. Например, при механической обработке детали на станке вследствие деформации самой детали и элементов станка может произойти недопустимое снижение точности обработки.

*Способность конструкции и ее элементов сопротивляться изменению своих первоначальных размеров и формы* называется *жесткостью*.

Изложение *методов расчета* элементов конструкций *на жесткость* составляют *вторую* задачу науки о сопротивлении материалов.

Имеется ряд задач, в которых основное внимание приходится уделять вопросам *устойчивости*, под которой понимается *способность элемента конструкции сопротивляться возникновению больших отклонений от невозмущенного равновесия при малых возмущающих воздей-*

ствиях. Возмущающим воздействием в этом случае является малое изменение нагрузки. Следовательно, понятие устойчивости может быть сформулировано также следующим образом.

*Равновесие элемента устойчиво, если малому изменению нагрузки соответствует малое изменение деформаций.*

И наоборот, *равновесие неустойчиво, если ограниченный рост нагрузки сопровождается неограниченным ростом деформаций.*

*Признаком потери устойчивости является также внезапная смена одной формы равновесия другой.*

В качестве примера приведем случай сжатия тонкого элемента силой, действующей вдоль его оси. До какого-то определенного (критического) значения сжимающей силы, зависящего от материала, размеров и условий закрепления элемента, он устойчиво сохраняет прямолинейную форму. При достижении же силой критического значения наряду с прямолинейной становится возможной и *искривленная форма равновесия* – более опасная для элемента.

Потеря устойчивости может иметь место при значениях нагрузок, совершенно безопасных с точки зрения прочности или жесткости элемента.

Создание *методов расчетов на устойчивость*, которые должны обеспечить отсутствие качественного изменения характера деформации элементов конструкций, составляют *третью* задачу науки о сопротивлении материалов.

*Основной задачей* науки о сопротивлении материалов является *разработка методов расчета* различных элементов сооружений и машин с целью получения их оптимальных весогабаритных характеристик.

## **2.2 Основные понятия и определения**

### **2.2.1 Внешние и внутренние силы**

При изучении сопротивления материалов активные внешние силы, действующие на рассматриваемое тело (элемент конструкции), называют *нагрузками*.

Нагрузки, действующие на сооружения и их элементы, *по способу приложения* нагрузки подразделяют на:

- *сосредоточенные*;
- *распределенные*.

К *сосредоточенным* относят силы, которые передаются на элемент конструкции через площадку небольших размеров (по сравнению с размерами всего элемента). Характеристикой сосредоточенной силы  $F$  является ее модуль, имеющий размерность, например, ньютон. При расчетах сосредоточенную силу считают приложенной в *точке*. Это допу-

щение достаточно условно, так как в природе сосредоточенных сил не бывает. Все реальные силы распределены по некоторой площади или объему. Например, давление колеса вагона на рельс практически передается через небольшую площадку, получающуюся в результате деформации рельса и колеса. Однако для определения внутренних сил, возникающих в рельсе и колесе на некотором расстоянии от площади передачи давления, можно, как это будет показано позднее (принцип Сен-Венана), распределенную нагрузку заменить сосредоточенной равнодействующей силой, что значительно упрощает расчет.

К *распределенным* относятся *нагрузки, приложенные непрерывно на некоторой длине или площади*. На схемах такие нагрузки изображают в виде графиков, показывающих изменение нагрузки по длине или поверхности тела. Характеристикой распределенной нагрузки является ее интенсивность  $q$ , то есть величина нагрузки, которая приходится на единицу площади или длины. В первом случае величина  $q$  измеряется, например, в  $\text{Н/м}^2$ , а во втором – в  $\text{Н/м}$ . Нагрузки могут быть *распределены* не только *по поверхности* или *длине*, но и *по объему* (силы веса, силы инерции, магнитные силы и др.). Они также характеризуются интенсивностью, имеющей размерность, например,  $\text{Н/м}^3$ . Распределенные *по длине* элемента конструкции нагрузки, как и сосредоточенные силы, реально в природе не существуют, а получаются в результате схематизации действительных нагрузок. В ряде случаев такая схематизация приводит к появлению пар сил (моментов).

По *характеру воздействия* на элементы конструкции нагрузки подразделяют на:

- *статические*;
- *динамические*.

*Статическими* называются *нагрузки, которые изменяют свою величину или точку приложения (или направление) с очень маленькой скоростью, поэтому возникающими при этом ускорениями можно пренебречь*. При действии таких нагрузок колебания сооружений и их частей пренебрежимо малы.

*Динамическими* называются *нагрузки, изменяющиеся во времени с большой скоростью* (например, ударные нагрузки). Действие таких нагрузок сопровождается возникновением колебаний сооружений. При колебании же вследствие изменения скорости колеблющихся масс возникают силы инерции, пропорциональные (по второму закону Ньютона) колеблющимся массам и ускорениям. Величина этих сил инерции может многократно превосходить те же нагрузки, приложенные статически, и ими при расчетах пренебрегать нельзя.

Динамические нагрузки делятся на:

- мгновенно приложенные,
- ударные,
- повторно-переменные.

В частных случаях изменение нагрузки  $F$  может носить *периодически повторяющийся характер*, так что через одни и те же промежутки времени  $t$  максимальные значения нагрузки будут повторяться. Нагрузки такого типа называются нагрузками с *установившимся режимом* или *повторно-периодическими*.

Однако во многих, других случаях изменение нагрузки во времени не имеет установившегося характера. Таковы нагрузки, действующие на детали автомобилей, тракторов, станков, нагрузки, действующие на сооружения, нагрузки от давления ветра, снега и т.п. Эти нагрузки называются *повторными нагрузками неустановившихся режимов*.

В машиностроении расчетные нагрузки определяются в зависимости по *номинальным* значениям мощности, угловой скорости отдельных ее деталей, силы тяжести, сил инерции и т.п. Например, при расчете деталей трехтонного автомобиля учитывают номинальный полезный груз, равный трем тоннам. Возможность же *перегрузки* автомобиля учитывают тем, что размеры сечения деталей назначают с некоторым *запасом прочности*.

*Сопротивление тел*, оказываемое действующим на них нагрузкам, обуславливается наличием в этих телах *внутренних сил*, природа которых объясняется молекулярным строением материи. Внутренние силы существуют всегда, и именно они являются причиной существования тела как такового. При действии на тело *внешних сил* *внутренние* силы изменяются – появляются *дополнительные внутренние* силы, которые в дальнейшем будем называть *усилиями*. Эти усилия и являются предметом изучения науки о сопротивлении материалов, так как именно их величина характеризует способность тел сопротивляться внешним воздействиям.

Для определения величины внутренних усилий пользуются *методом сечений*, суть которого заключается в следующем.

1. Тело, на которое действует какая-либо *внешняя* нагрузка, в интересующем нас месте мысленно рассекается на две части (рис. 2.2.1, *а*).
2. Отбрасывается условно одна из частей (например, часть *В*).
3. Действие отброшенной части *В* на оставшуюся *А* заменяется *внутренними* силами.

Так как тело под действием внешних сил находилось в состоянии статического равновесия, то эти внутренние силы, являющиеся внешними для оставшейся части, должны уравновесить часть *А* с приложенными к ней внешними силами (рис. 2.2.1, *б*).

Таким образом, *внутренние* силы сводятся к категории *внешних* сил, для определения которых можно использовать уравнения *статики* твердого тела.

Со стороны отброшенной части на часть *A* действует система сил, распределенных по всему сечению. Эту систему в общем случае можно привести к одной силе  $F_R$  (главному вектору) и к одной паре сил  $M$  (главному моменту) (рис. 2.2.1, б).

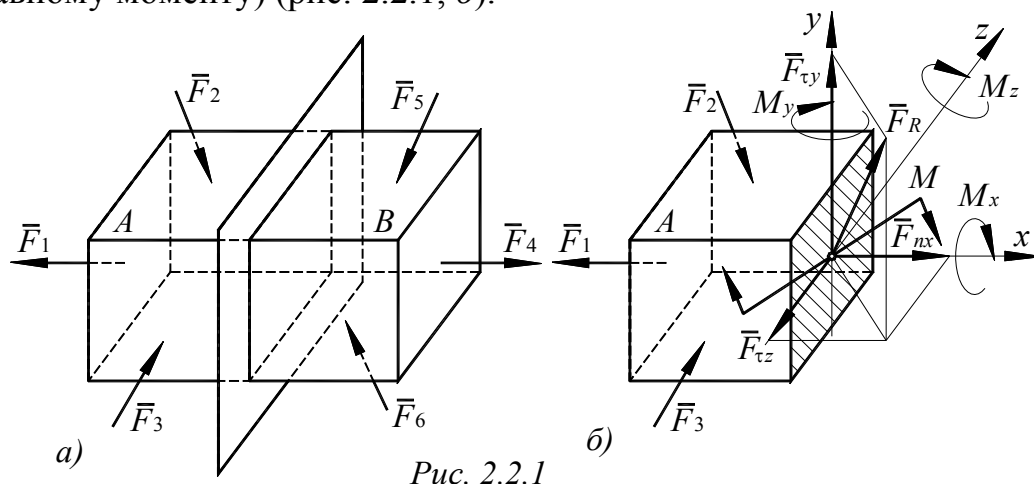


Рис. 2.2.1

Выбрав систему координатных осей  $x, y, z$  с началом в центре тяжести сечения, разложим главный вектор и главный момент на составляющие по указанным осям.

Эти составляющие имеют следующие обозначения и названия:

$F_{nx} = F_n$  – продольная сила;

$F_{ty}$  и  $F_{tz}$  – поперечные силы соответственно в плоскостях  $yx$  и  $xz$ ;

$M_x = T_k$  – крутящий момент;

$M_y$  и  $M_z$  – изгибающие моменты соответственно в плоскостях  $xz$  и  $xy$ .

Этим видам внутренних усилий соответствуют следующие виды деформации:

1) *растяжение* или *сжатие* – при появлении в поперечных сечениях только продольных усилий  $F_n$ ;

2) *сдвиг* – при появлении в поперечных сечениях только поперечных усилий  $F_{ty}$  и  $F_{tz}$ ;

3) *кручение* – в поперечных сечениях возникает только крутящий момент  $T_k$ ;

4) *изгиб* – в сечении действует только изгибающий момент  $M_y$  или  $M_z$ .

Появление в поперечных сечениях сразу нескольких внутренних усилий приводит к сложным видам деформации (сложному сопротивлению).

### 2.2.2 Понятие о напряжениях

Внутренние усилия, которые были найдены выше из уравнений статики, не являются реальными, а представляют собой лишь статический эквивалент этих усилий, распределенных по всей площади рассматриваемого сечения. Иначе говоря, найденные усилия являются равнодействующими действительных внутренних сил, возникающих в каждой точке сечения.

В сечении части  $A$  (рис. 2.2.1, б) выделим элементарную площадку  $dA$  (рис. 2.2.2). В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению. Тогда равнодействующая их  $\overline{dF_R}$  будет проходить через центр тяжести площади элемента  $dA$ , координаты которого равны  $x$  и  $z$ . Проектируя вектор  $\overline{dF_R}$  на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получим элементарную продольную силу  $\overline{dF_n}$  и элементарные поперечные силы  $\overline{dF_{\tau_y}}$  и  $\overline{dF_{\tau_z}}$ . Разделив эти усилия на площадь  $dA$ , получим величины внутренних сил, приходящихся на единицу площади (рис. 2.2.3):

$$\sigma_x = \frac{dF_n}{dA}; \quad (2.2.1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{dF_{\tau_y}}{dA}; \quad (2.2.2)$$

$$\tau_{xz} = \frac{dF_{\tau_z}}{dA}. \quad (2.2.3)$$

Эти величины называют *напряжениями в точке поперечного сечения тела* (с координатами  $y, z$ ):

$\sigma$  – нормальное напряжение;

$\tau$  – касательное напряжение.

*Нормальные и касательные напряжения представляют собой интенсивность распределения соответственно нормальных и поперечных сил, действующих по элементарной площадке в рассматриваемой точке.*

У нормального напряжения ставится индекс, указывающий, какой координатной оси параллельно данное напряжение.

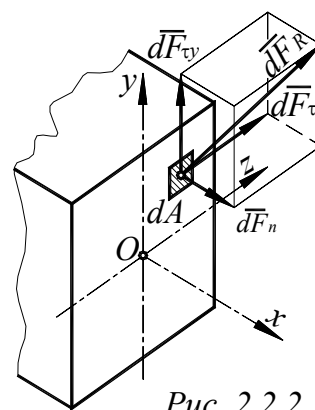


Рис. 2.2.2

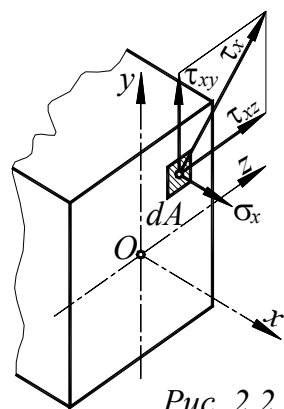


Рис. 2.2.3



*Растягивающее нормальное напряжение* принято считать *положительным*, а *сжимающее нормальное напряжение* – *отрицательным*.

Обозначения *касательных напряжений* снабжены двумя индексами:

— *первый индекс* указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия данного напряжения,

— *второй индекс* указывает, какой оси параллельно само напряжение.

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет физический смысл.

*Нормальное* напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться.

*Касательные* напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости рассматриваемого сечения.

Через любую точку упругого тела, подверженного действию внешней нагрузки, можно провести бесчисленное множество сечений (площадок), по которым в общем случае будут действовать как нормальные, так и касательные напряжения. При этом величина и направление указанных напряжений в каждом конкретном случае будут зависеть от ориентации площадки.

Для исследования напряжений обычно выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 2.2.4). На его гранях действуют внутренние силы, заменяющие воздействие удаленной части тела и вызывающие появление напряжений. Полные напряжения на гранях можно разложить на нормальные и касательные составляющие.

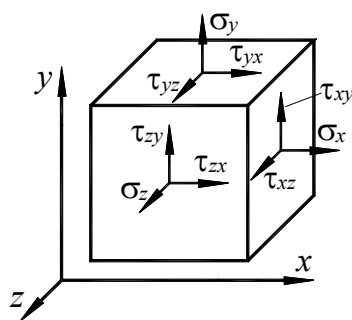


Рис. 2.2.4

Если ориентацию выделенного элемента изменить, то действующие на его гранях напряжения будут также изменяться. При этом *можно найти хотя бы одно такое положение элемента, при котором на его гранях касательные напряжения равны нулю*.

Грани элемента, по которым касательные напряжения не действуют, называют *главными площадками*, а нормальные напряжения на них – *главными напряжениями*. Доказано, что в каждой точке тела имеются, по крайней мере, *три главные площадки*, причем они всегда взаимно перпендикулярны, то есть в каждой точке будут также *три главных напряжения*. Главные напряжения принято обозначать так, чтобы наибольшее из них (*алгебраически*) имело индекс «1», а наименьшее – индекс «3» (рис. 2.2.5). В зависимости

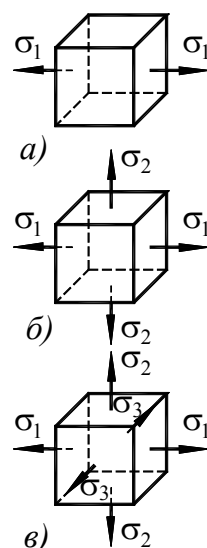


Рис. 2.2.5

от величины главных напряжений различают следующие виды напряженного состояния в точке:

— *линейное*, или *одноосное* – только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны нулю (рис. 2.2.5, а);

— *плоское*, или *двухосное* – два главных напряжения отличны от нуля (рис. 2.2.5, б);

— *объемное*, или *трехосное* – все главные напряжения отличны от нуля (рис. 2.2.5, в).

Зная напряженное состояние в любой точке детали, можно оценить прочность этой детали.

В *простейших* случаях оценка прочности элементов конструкций производится или по наибольшему нормальному напряжению (расчет на растяжение или сжатие), или по наибольшему касательному напряжению (расчет на сдвиг).

Условия прочности в этих случаях записываются в виде:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_p, \quad (2.2.4)$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_p, \quad (2.2.5)$$

где  $\sigma_p$  и  $\tau_p$  – допускаемые значения нормального и касательного напряжений, зависящие от материала и условий работы рассчитываемого элемента.

Величины  $\sigma_p$  и  $\tau_p$  выбираются с таким расчетом, чтобы была обеспечена нормальная эксплуатация конструкции.

В более сложных случаях оценка прочности производится по приведенному напряжению в соответствии с той или иной гипотезой прочности, которые будут рассмотрены в разделе «Сложное сопротивление».

### 2.2.3 Конструктивные элементы механизмов и машин

Конструкции, с которыми инженеру приходится встречаться на практике, имеют в большинстве случаев сложную форму, отдельные элементы которой можно свести к следующим *простейшим типам*:

1. *Брусья* – элементы конструкций, у которых один размер (длина) значительно больше других (рис. 2.2.6, а).

Основными геометрическими характеристиками бруса являются его *ось* и *поперечное сечение*.

*Ось бруса* – линия, соединяющая центры тяжести всех его поперечных

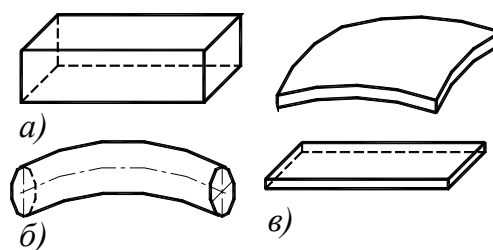


Рис. 2.2.6

сечений. В зависимости от формы оси брусья могут быть либо *прямолинейными* (рис. 2.2.6, а), либо *криволинейными* (рис. 2.2.6, б). Брус с *прямолинейной осью* часто называют *стержнем*.

Плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется его *поперечным сечением*.

*Оболочки* – тела, ограниченные криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга. У этих элементов конструкции один размер значительно меньше двух других (рис. 2.2.6, в).

*Плоские оболочки* называют *плитами* или *пластинами*.

*Массив* – тело, у которого все три размера одного порядка.

В разделе «Основы сопротивления материалов» рассматриваются преимущественно тела, имеющие форму брусьев постоянного сечения, и простейшие системы, состоящие из них, обладающие *достаточной жесткостью*, то есть *не претерпевающие значительных деформаций при нагрузке*. В расчетных схемах брусья обычно изображают одной осевой линией с идеализированными опорами.

В *гибких стержнях* возникают столь значительные деформации, что с ними нельзя не считаться даже при определении опорных реакций. Методы расчета *гибких* брусьев, пластинок, оболочек и массивных тел рассматриваются в курсе «Прикладная теория упругости» без упрощающих гипотез, которые вводятся в данном разделе (см. ниже).

Способы расчета *стержневых* систем изучаются в курсе «*Строительная механика*».

## **Лекция № 5 (2 часа).**

### **Основные гипотезы и допущения. Растяжение и сжатие. Механические характеристики и свойства материалов.**

#### **2.2.4 Основные гипотезы и допущения**

Из-за сложности задачи расчета элементов конструкций в курсе сопротивления материалов принимают некоторые *упрощающие* гипотезы и допущения, касающиеся свойств материала, нагрузок и характера взаимодействия детали и нагрузок. Экспериментальная проверка расчетных зависимостей, полученных на основе приведенных ниже гипотез и допущений, показала, что погрешность, вносимая ими, незначительна и для практических целей ею можно пренебречь.

#### **Гипотеза о сплошном строении тела.**

*Предполагают, что материал полностью заполняет объем тела (пустоты отсутствуют).*

Это допущение вполне оправдано, так как большинство конструкционных материалов имеет мелкозернистую структуру, что позволяет без существенной погрешности считать их строение сплошным, непрерывным.

#### **Гипотеза об однородности материала.**

*Предполагают, что все частицы материала обладают одинаковыми свойствами, то есть свойства материала не зависят от размеров тела.*

Металлы обладают высокой однородностью, то есть имеют во всех точках детали практически одинаковые свойства. В пластмассах же свойства смолы отличаются от свойств наполнителя.

Тем не менее, как показывает опыт, расчеты, основанные на допущении об однородности материала детали, для основных конструкционных материалов дают удовлетворительные результаты.

#### **Гипотеза об изотропности материала.**

*Предполагают, что в любом направлении свойства материала одинаковы.*

У материалов, имеющих мелкозернистую структуру, благодаря большому количеству кристаллов, расположенных в беспорядке, свойства в разных направлениях выравниваются, «осредняются», и можно считать эти материалы практически *изотропными*.

Материалы, свойства которых в разных направлениях различны, называются *анизотропными*. Например, для меди прочность кристаллов в разных направлениях различается более чем в 3 раза.

#### **Гипотеза об идеальной упругости материала.**

*Под идеальной упругостью понимают способность тела восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших деформацию тела.*

#### **Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли).**

*Поперечные сечения, плоские и нормальные к оси бруса до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси после деформации.*

#### **Допущение о малости деформаций.**

*Деформации тела настолько малы по сравнению с его размерами, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение нагрузок.*

#### **Допущение о линейной зависимости между деформациями и нагрузками.**

*Предполагают, что для большинства материалов перемещения, являющиеся результатом деформации тела, прямо пропорциональны вызвавшим их нагрузкам.*

### **Допущение об отсутствии начальных усилий.**

*В теле до приложения нагрузки нет внутренних (начальных) усилий.*

Это допущение полностью не выполняется ни для одного материала. Например, в стальных деталях имеются внутренние силы, вызванные неравномерностью остывания. Величина этих сил конструктору обычно неизвестна. В тех случаях, когда есть основания предполагать, что эти силы значительны, их определяют экспериментальным путем.

### **Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции или принцип наложения).**

*Какая-либо величина, например усилие или перемещение в любом элементе конструкции, вызванные различными факторами (несколькими силами, воздействием температуры), может быть получена как сумма величин, найденных от действия каждого из этих факторов в отдельности и в любом порядке.*

Под словами «результат воздействия» в зависимости от конкретной задачи следует понимать деформации, внутренние силы, возникающие в теле, и перемещения отдельных точек. Необходимо иметь в виду, что действие отдельных сил системы должно рассматриваться вместе с соответствующими им реакциями связей.

Принцип независимости действия сил к деформируемым телам применим лишь при следующих *двух условиях*:

— *перемещения точек приложения сил малы по сравнению с размерами тела;*

— *перемещения, являющиеся результатом деформации тела, линейно зависят от действующих сил (такие тела называют линейно деформируемыми или подчиняющимися закону Гука).*

В обычных конструкциях оба эти условия выполняются и поэтому принцип независимости действия сил широко используется при силовом расчете конструкций.

### **Принцип Сен-Венана.**

*Если тело нагружается статически эквивалентными системами сил и размеры области их приложения невелики (по сравнению с размерами тела), то в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, величина напряжений весьма мало зависит от способа нагружения.*

Этот принцип во многих случаях позволяет производить замену одной системы сил другой системой, статически эквивалентной, что может упростить расчет.

Например, при расчете рельса, как балки, опирающейся на множество опор (шпал)

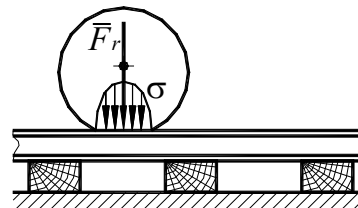


Рис. 2.2.7

(рис. 2.2.7), фактическую нагрузку от колеса, распределенную по площадке контакта по некоторому закону ( $\sigma$ ), можно заменить сосредоточенной (равнодействующей) силой  $\bar{F}_r$ .

## 2.3 Растяжение и сжатие

### 2.3.1 Внутренние усилия

Рассмотрим случай *осевого* (центрального) растяжения или сжатия, когда внешние силы действуют по оси стержня (рис. 2.3.1).

Для определения *внутренних* усилий (продольных сил) применим *метод сечений*. Проведем какое-нибудь сечение, например *a-a*, и рассмотрим равновесие нижней отсеченной части. Воздействие верхней отброшенной части на нижнюю заменим продольной силой и предварительно направим ее *от сечения*, то есть предположим, что сила является *растягивающей*.

Составим *уравнение равновесия*.

Проектируя все силы, действующие на нижнюю часть, на направление, параллельное оси стержня, и приравнявая сумму проекций нулю, получаем:

$$F_{n1} + F_1 - F_2 = 0,$$

откуда:

$$F_{n1} = -(F_1 - F_2).$$

Знак «минус» показывает, что направление силы  $F_{n1}$  следует изменить на обратное, то есть продольная сила будет в данном случае не *растягивающей*, как мы предположили, а *сжимающей*.

Аналогично найдем продольную силу в сечении *b-b*:

$$F_{n2} = F_2 \text{ (растяжение).}$$

Условимся продольную силу, соответствующую *растяжению*, считать *положительной*.

Наглядное представление о законе изменения продольных сил по длине стержня дает график (эпюра продольных сил), ось абсцисс которого проводится параллельно оси стержня, а ось ординат ей перпендикулярна. По оси ординат в выбранном масштабе откладывают значения продольных сил (с учетом знаков) в поперечных сечениях стержня.

Для рассмотренного случая эпюра  $F_n$  представлена на рис. 2.3.1.

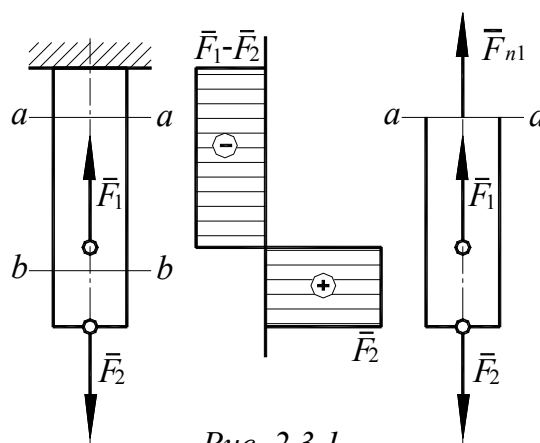


Рис. 2.3.1

## 2.3.2 Напряжения

Если на поверхность призматического стержня нанести сетку линий, параллельных и перпендикулярных оси стержня (рис. 2.3.2, а), и приложить к нему растягивающую силу, то можно убедиться в том, что линии сетки и после деформации останутся взаимно перпендикулярными, за исключением небольшого участка стержня вблизи точки приложения силы, который из рассмотрения пока исключаем, но расстояния между ними изменятся (рис. 2.3.2, б).

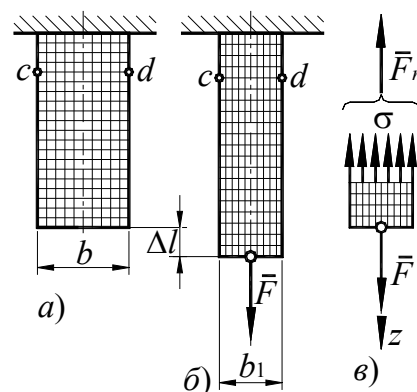


Рис. 2.3.2

Все горизонтальные линии, например  $cd$ , переместятся вниз, оставаясь горизонтальными и прямыми.

Можно предположить также, что и внутри стержня будет такая же картина – *поперечные сечения стержня плоские и нормальные к его оси до деформации, останутся плоскими и нормальными к оси и после деформации*, то есть подтверждается гипотеза плоских сечений.

Такая картина деформаций дает основание считать, что в поперечных сечениях стержня действуют только *нормальные* напряжения, равномерно распределенные по сечению, а *касательные* напряжения равны нулю.

Продольная сила  $F_n$  есть равнодействующая нормальных напряжений в поперечном сечении:

$$F_n = \int_A \sigma dA.$$

Поскольку  $\sigma = \text{const}$ , то:

$$F_n = \sigma A, \quad (2.3.1)$$

откуда:

$$\sigma = \frac{F_n}{A}. \quad (2.3.2)$$

В частном случае, когда на стержень действует одна внешняя сила  $F$ , из уравнения равновесия (рис. 2.3.2, в) получим:

$$F_n = F$$

и вместо общей формулы (2.3.2) получим частный вид формулы для растяжения:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.3.3)$$

Эти формулы справедливы и для *сжатия*, с той только разницей, что сжимающие напряжения считаются *отрицательными*.

Кроме того, *сжатые* стержни помимо расчета на *прочность* рассматриваются также на *устойчивость*.

### 2.3.3 Деформации и перемещения

Стержень (рис. 2.3.2), под действием двух равных по величине и противоположно направленных по его продольной оси сил ( $F$  и  $F_n$ ), претерпевает деформацию *растяжения*, которая проявляется в изменении длины и поперечных размеров стержня. Его первоначальная длина  $l$  увеличивается на величину  $\Delta l$ , именуемую *абсолютным удлинением*, и становится равной  $l_1$ .

Таким образом:

$$\Delta l = l_1 - l.$$

Абсолютное удлинение стержня при заданном значении деформирующей силы возрастает с увеличением его первоначальной длины. Поэтому деформация при растяжении более полно характеризуется относительной величиной  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , которую называют *относительным удлинением*.

Очевидно:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l} \quad (2.3.4)$$

При направлении внешних сил, *противоположном* указанному на рис. 2.3.2, стержень испытывает деформацию *сжатия*. В этом случае параметр  $\Delta l$  называют *абсолютным укорочением*, так как при сжатии длина стержня уменьшается.

Одновременно с продольной деформацией стержень претерпевает *поперечную* деформацию. При растяжении поперечные размеры уменьшаются, при сжатии – увеличиваются.

Относительная *поперечная деформация*:

$$\varepsilon' = \frac{b - b_1}{b}.$$

Отношение

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (2.3.5)$$

называют *коэффициентом Пуассона*, характеризующим способность материала к поперечным деформациям. Этот коэффициент определяют опытным путем.



## 2.3.4 Механические характеристики и свойства материалов

### 2.3.4.1 Общие сведения

Работоспособность конструкционных материалов при различных видах нагружения определяется величинами, которые называют *механическими характеристиками*.

*Механические характеристики* устанавливают *границу безопасной эксплуатации* элементов конструкций при *статическом* и *динамическом* (циклическом и ударном) нагружениях.

К числу *основных* механических характеристик относятся:

- *предельные напряжения*,
- *твёрдость*,
- *ударная вязкость*.

Величины механических характеристик могут быть получены в лабораторных условиях доведением образцов до *разрушения* или *чрезмерной деформации*. Наиболее распространены *испытания на растяжение и сжатие*, так как они относительно просты, дают результаты, позволяющие с достаточной достоверностью судить о поведении материалов и при других видах деформации.

Часто целью испытаний является *определение твёрдости* и *ударной вязкости*.

Все конструкционные материалы можно условно разделить на:

- *хрупкие*,
- *пластичные*.

К весьма *пластичным* материалам относят малоуглеродистые стали, алюминий, медь и некоторые другие. Эти материалы обладают способностью деформироваться в широких пределах без разрушения.

Примерами *хрупких* материалов могут служить чугун, высокоуглеродистые сорта стали, металлокерамические материалы, стекло. Хрупкие материалы разрушаются без заметной предварительной деформации.

Промежуточное положение занимают *малопластичные* материалы, к которым могут быть отнесены многие легированные стали, дюралюминий, бронза.

### 2.3.4.2 Испытания материалов

#### 2.3.4.2.1 Испытания на растяжение

Для изучения свойств материалов и установления величины *предельных напряжений* (по разрушению или по пластическим деформациям) производят испытания образцов материала вплоть до разрушения.

*Испытания* производят при нагрузках следующих *категорий*:

- статической,
- ударной и циклической (испытание на усталость или выносливость).

По *виду деформации*, испытываемой образцом, различают испытания на:

- растяжение,
- сжатие,
- кручение
- изгиб.

Значительно реже проводят испытания на *сложное сопротивление*, например, сочетание растяжения и кручения.

Так как результаты испытаний зависят от формы образца, скорости его деформирования, температуры при испытании и т.д., то эксперимент обычно ведут в условиях, предусмотренных Государственными стандартами (ГОСТами).

Подробное описание испытательных машин и приборов можно найти в специальных руководствах.

Наибольшее распространение имеют испытания на растяжение статической нагрузкой, так как они наиболее просты и в то же время во многих случаях дают возможность достаточно верно судить о поведении материала при других видах деформации. Испытание различных материалов на растяжение осуществляют статическим нагружением на специальных машинах. Для этого применяют стандартный цилиндрический образец диаметром (3-10) мм (рис. 2.3.3, а).

Длина центрального цилиндра превышает его диаметр приблизительно в 15 раз. На цилиндре выделяют участок  $l_0$  для измерения деформации:

$$l_0 = 10d_0,$$

где  $d_0$  – диаметр стержня до растяжения.

Иногда для испытаний применяют плоские или малые цилиндрические образцы, у которых:

$$l_0 = 5d_0.$$

При растяжении образца на машинах регистрируют нагрузку на образец и его удлинение  $\Delta l$ .

Количественная оценка физических свойств материала может быть сделана при помощи диаграммы растяжения в системе координат ( $\sigma$ ,  $\epsilon$ ).

*Напряжение*, откладываемое по вертикальной оси:

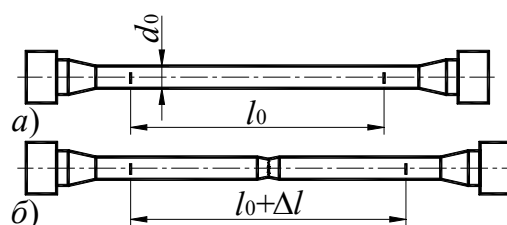


Рис. 2.3.3

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad (2.3.6)$$

где  $A_0$  – площадь поперечного сечения образца до испытания.

Относительное удлинение образца, откладываемое по горизонтальной оси:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.3.7)$$

где  $l_0$  – длина расчетного участка образца до испытания.

Диаграмма растяжения  $\sigma = f(\varepsilon)$  характеризует свойства испытуемого материала и носит название *условной* диаграммы растяжения, так как напряжения и относительные удлинения вычисляются соответственно по отношению к первоначальной площади сечения и первоначальной длине.

Условная диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали (рис. 2.3.4) характеризуется следующими четырьмя отличительными участками.

Участок I соответствует упругим деформациям материала образца.

На этом участке для пластичных материалов имеет место *прямая пропорциональная зависимость* между напряжениями и деформациями, называемая *законом Гука* (прямая OA):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.3.8)$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  называется *модулем продольной упругости* или *модулем упругости первого рода*. Он имеет размерность напряжений (МПа) и характеризует способность материала сопротивляться упругой деформации при растяжении и сжатии. Величину модуля продольной упругости для различных материалов определяют экспериментально и приводят в справочниках.

Участок II начинается после точки A, когда диаграмма становится криволинейной. Однако до точки B деформации остаются упругими, то есть при разгрузке образец восстанавливает свою первоначальную форму и размеры.

При дальнейшем увеличении нагрузки за точкой B появляются неупругие деформации.

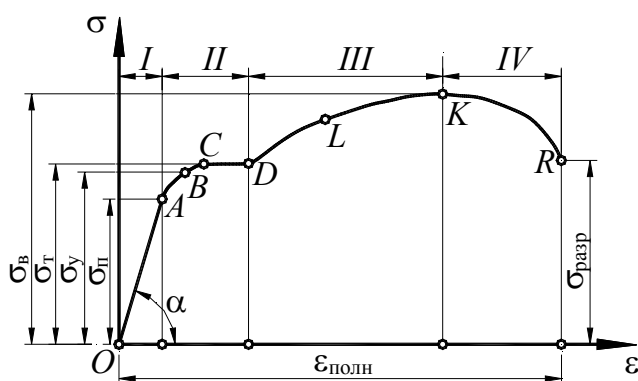


Рис. 2.3.4

В точке  $C$  начинается процесс деформации детали *без* увеличения *внешней* нагрузки. Этот процесс называется процессом *текучести* материала.

*Участок III (DK)* характерен увеличением нагрузки, при которой происходит дальнейшая деформация образца. Этот участок называется *зоной упрочнения*. Заканчивается участок при достижении максимальной нагрузки, воспринимаемой образцом.

*Участок IV* начинается в точке  $K$  и заканчивается разрушением образца в точке  $R$ . Этот участок носит название *зоны разрушения* образца. Деформация образца на этом участке характерна образованием шейки и удлинением образца за счет ее утонения (рис. 2.3.3, б).

Диаграмма растяжения *хрупких* материалов показана на рис. 2.3.5, где отклонение от закона Гука начинается при *малых* значениях деформирующей силы. Эта диаграмма не имеет *площадки текучести*. Образцы разрушаются при очень малой остаточной деформации без образования шейки.

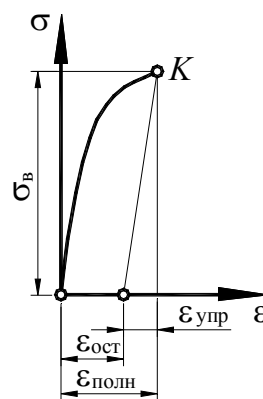


Рис. 2.3.5

#### 2.3.4.2.2 Испытания на сжатие

Во избежание искривления металлические образцы, подлежащие испытанию на сжатие, выполняют в виде коротких цилиндров высотой  $h \leq 3d$  или кубиков. Применение очень коротких образцов также нежелательно, так как развивающиеся по торцам образца силы трения препятствуют его расширению, в результате чего образец принимает бочкообразную форму. Результаты испытания на сжатие зависят от величины сил трения и поэтому цилиндрические образцы целесообразнее кубических.

Образцы на *сжатие* испытывают на специальных прессах или универсальных разрывных машинах.

Диаграмма *сжатия* образца из *пластического* материала показана на рис. 2.3.6, а. В начальной части диаграмма сжатия совпадает с диаграммой растяжения (линия  $OABCD$ ). После точки  $D$  материал образца расплющивается, и сжимающая сила быстро возрастает. Модуль упругости первого рода, а также пределы пропорциональности, упругости и текуче-

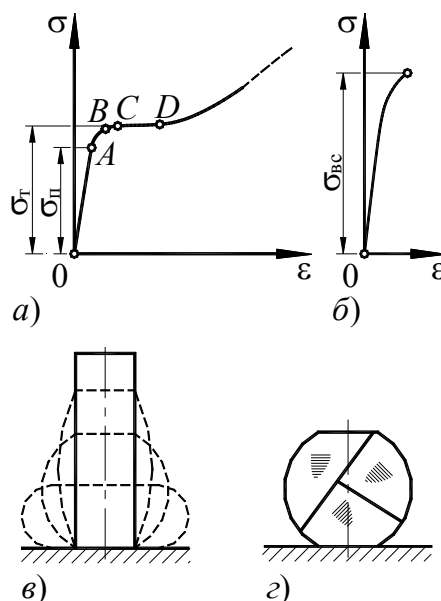


Рис. 2.3.6

сти у малоуглеродистой стали при растяжении и сжатии можно считать совпадающими. На рис. 2.3.6, в представлен вид малоуглеродистого стального образца до сжатия и после сжатия на специальном испытательном станке.

Диаграмма сжатия образца из хрупкого материала показана на рис. 2.3.6, б. Основными характеристиками хрупкого материала при сжатии является предел прочности, обозначаемый  $\sigma_{в.с.}$ , и относительная остаточная деформация при разрушении  $\epsilon_{ост.}$ . На рис. 2.3.6, г изображен образец из хрупкого материала, разрушенный при сжатии.

Предел прочности при сжатии хрупких материалов оказывается значительно выше, чем при растяжении, то есть хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению.

Качественно диаграмма сжатия хрупкого материала аналогична диаграмме его растяжения.

### 2.3.4.3 Механические характеристики материалов

#### 2.3.4.3.1 Основные характеристики

В соответствии с диаграммой растяжения вводят следующие *основные характеристики материала*.

1. Отношение растягивающего усилия в точке *A* к первоначальной площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_{\pi} = \frac{F_A}{A_0} \quad (2.3.9)$$

называется *пределом пропорциональности*.

До предела пропорциональности сохраняет силу *закон Гука*.

2. Отношение растягивающего усилия в точке *B* к первоначальной площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_y = \frac{F_B}{A_0} \quad (2.3.10)$$

называется *пределом упругости*.

*Предел упругости* – такое напряжение, при котором величина относительной остаточной деформации не превышает 0,005%, то есть предел упругости соответствует такому наибольшему напряжению, до которого материал сохраняет свои упругие свойства.

Для многих материалов разница между *пределом пропорциональности* и *пределом упругости* очень мала.

3. Отношение растягивающего усилия в точке *C* к первоначальной площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_T = \frac{F_C}{A_0} \quad (2.3.11)$$

называется *пределом текучести*.

*Предел текучести* – такое напряжение, при котором происходит рост деформации без увеличения нагрузки.

Для ряда материалов, не имеющих на диаграмме выраженной площадки текучести, вводят понятие *условного предела текучести*, под которым подразумевают напряжение, вызывающее остаточную деформацию, равную 0,2%.

4. Отношение наибольшей нагрузки к первоначальной площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma_{B(пч)} = \frac{F_{\max}}{A_0} \quad (2.3.12)$$

называется *пределом прочности*, или *временным сопротивлением*.

Предел прочности обозначают:

— при *растяжении*  $\sigma_{B.p.}$ ,

— при *сжатии*  $\sigma_{B.c.}$ .

Предел прочности соответствует *максимальному* напряжению, возникающему в образце до его разрушения.

Диаграммой растяжения можно воспользоваться для определения модуля упругости  $E$ . На диаграмме растяжения (рис. 2.3.4) прямолинейный участок, соответствующий закону Гука, наклонен под углом  $\alpha$  к горизонтальной оси. Отметим текущее напряжение  $\sigma$  и соответствующее ему относительное удлинение  $\varepsilon$ . Тогда тангенс угла наклона участка  $OA$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (2.3.13)$$

Исходя из соотношения, выражающего закон Гука, получим:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (2.3.14)$$

Сопоставление этих формул позволяет сделать вывод о том, что:

$$E = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.3.15)$$

Следовательно, модуль упругости материала численно равен тангенсу угла наклона к горизонтали прямолинейного участка  $OA$  диаграммы растяжения.

За *характеристику прочности хрупких материалов*, как и в случае растяжения, *принимается временное сопротивление*.

Подставив в формулу (2.3.8) значение величин  $\varepsilon$  и  $\sigma$  из формул (2.3.7) и (2.3.3), получим:

$$\Delta l = \frac{Fl_0}{EA} \quad (2.3.16)$$

то есть абсолютное удлинение (укорочение) стержня при растяжении (сжатии) прямо пропорционально растягивающей (сжимающей) силе, первоначальной длине стержня и обратно пропорционально модулю упругости  $E$  и площади поперечного сечения  $A$ .

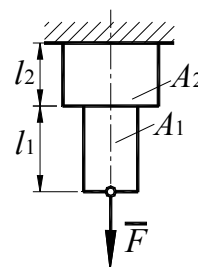


Рис. 2.3.7

Произведение  $EA$  называют *жесткостью поперечного сечения при растяжении (сжатии)*.

Для ступенчатых стержней (рис. 2.3.7) полное изменение длины бруса определяется как алгебраическая сумма деформаций его отдельных частей, в пределах которых  $E$ ,  $F_n$  и  $A$  постоянны:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta l_i = \sum \frac{F_{n_i} l_i}{E_i A_i} \quad (2.3.17)$$

Например, для стержня согласно рис. 2.3.7 имеем:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F_{n_1} l_1}{E_1 A_1} + \frac{F_{n_2} l_2}{E_2 A_2} \quad (2.3.18)$$

где  $F_{n_1} = F_{n_2} = F$ .

#### 2.3.4.3.2 Явление наклепа

Если при нагружении образца *не был превышен предел упругости*, то при разгрузке все деформации полностью исчезнут и при повторном нагружении этот образец будет себя вести так же, как и при первом нагружении.

Если же образец был нагружен *до напряжения, большего предела упругости*, например, до напряжения, соответствующего точке  $L$  диаграммы на рис. 2.3.4, а затем нагрузка будет снята, то *пластическая часть деформации останется*. При этом происходит увеличение *предела текучести*. Если материал нагружать снова, то *пластическая деформация увеличится*, но в меньшей степени, чем при первичном однократном нагружении.

*Явление повышения предела пропорциональности и снижения пластичности материала при повторных нагружениях называется наклепом*.

Наклеп во многих случаях является нежелательным явлением, так как наклепанный металл становится более хрупким. Наклеп можно устранить при помощи специальной термической обработки

Однако в целом ряде других случаев наклеп полезен и его создают искусственно, например, в деталях, подвергающихся воздействию переменных нагрузок.

## Лекция № 6 (2 часа).

### Твердость. Ударная вязкость. Допускаемые напряжения и запасы прочности. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (сжатии).

#### 2.3.4.3.3 Твердость

*Твердостью называют способность материала сопротивляться механическому проникновению в него другого тела.*

Твердость определяют различными способами, и соответственно существуют различные величины, характеризующие твердость. Наиболее широкое распространение получили испытания твердости по Бринеллю и по Роквеллу.

Твердость по Бринеллю определяют вдавливанием закаленного шарика в испытуемый материал. Величина, характеризующая твердость или число твердости по Бринеллю ( $HB$ ), представляет отношение силы  $F$ , с которой вдавливается шарик, к поверхности  $A$  лунки, оставшейся после вдавливания на испытуемом материале:

$$HB = \frac{F}{A}. \quad (2.3.19)$$

При испытании по Роквеллу в материал вдавливают острый алмазный наконечник.

Числом твердости можно пользоваться в производственных условиях для определения механических характеристик материала. Так, по числу твердости можно с достаточной степенью точности определить предел текучести, временное сопротивление и предел упругости.

Для углеродистой термически не обработанной стали связь между числом твердости и временным сопротивлением может быть выражена следующей зависимостью:

$$\sigma_B = (0,35 - 0,40) HB. \quad (2.3.20)$$

Для легированной термически обработанной стали

$$\sigma_B = (0,35 - 0,45) HB. \quad (2.3.21)$$

В справочной литературе приведены таблицы, устанавливающие зависимость между числами твердости по Бринеллю и Роквеллу.

#### 2.3.4.3.4 Ударная вязкость

*Ударной вязкостью называют величину, характеризующую способность материала сопротивляться действию ударных нагрузок.*

Меру сопротивления удару определяют на специальных испытательных копрах, на которых при помощи маятника разрушаются образцы.



Ударную вязкость  $a$  определяют как отношение работы, затраченной на разрушение образца  $A_p$  (в дж) к площади его поперечного сечения  $A$  (в  $\text{м}^2$ ):

$$a = \frac{A_p}{A}. \quad (2.3.22)$$

Величины механических характеристик основных конструкционных материалов приведены в соответствующих справочниках.

Описанные выше испытания материалов с целью получения их механических характеристик проведены по методикам, строго регламентированным ГОСТами и ведомственными нормами.

Механические характеристики материалов зависят от многих факторов, в числе которых можно назвать, например, химический состав и технологию получения материалов, виды термической обработки и обработки резанием, условия эксплуатации и др.

### 2.3.5. Допускаемые напряжения и запасы прочности

Для обеспечения нормальной работоспособности детали необходимо, чтобы фактически возникающие напряжения растяжения и сжатия не превышали некоторого *безопасного*, или *допускаемого напряжения*, обозначаемого  $\sigma_p$ . То есть *допускаемое напряжение является таким максимально возможным напряжением, при котором обеспечивается достаточная прочность и необходимая долговечность детали*.

Известно, что экспериментально определенные механические характеристики, как и принимаемые для расчета нагрузки, в большинстве случаев отличаются от фактически существующих. При этом многие факторы, оказывающие влияние на действительную прочность, не поддаются непосредственному предварительному учету, так как носят случайный характер и прогнозировать их трудно. Часть факторов не может быть учтена из-за отсутствия исчерпывающих данных о физической сущности происходящих явлений.

Для того чтобы деталь обладала необходимой надежностью, необходимо создать требуемый *запас прочности* по отношению к экспериментально определенным величинам предельных напряжений, при которых может разрушиться деталь или возникнуть пластическая деформация. Таким образом:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_{пр}}{S_p} \quad (2.3.23)$$

где  $\sigma_p$  – допускаемое напряжение;

$S_p$  – регламентированный нормами проектирования *коэффициент запаса прочности* или *коэффициент безопасности*;

$\sigma_{пр}$  – предельное напряжение материала.

В качестве исходной величины для определения предельных напряжений выбирают одну из нормативных механических характеристик материала:

— для *пластичных* материалов при статическом нагружении – *предел текучести*  $\sigma_T$ ;

— для *хрупких* материалов при статическом нагружении – *временное сопротивление*  $\sigma_B$ ;

— для *любых* материалов при циклическом изменении нагрузки – *предел выносливости (предел усталости)*  $\sigma_r$ .

Величина *регламентированного* коэффициента безопасности  $S_p$  определяется на основе существующего опыта эксплуатации данной группы механизмов, машин, приборов.

Общий коэффициент безопасности  $S_p$  обычно рассматривают как произведение частных коэффициентов безопасности:

$$S_p = S_{p1} S_{p2} \dots S_{pn} \quad (2.3.24)$$

При выполнении проверочных расчетов должно быть выполнено условие:

$$S \geq S_p, \quad (2.3.25)$$

где  $S$  – фактически существующий коэффициент безопасности.

Каждый из *частных* коэффициентов безопасности отражает влияние на прочность деталей какого-либо фактора или группы взаимозависимых факторов. Учет тех или иных факторов зависит от требований, которые предъявляются к расчету, а также от назначения и условий работы рассчитываемых деталей. Обычно при определении коэффициента безопасности учитывают степень надежности материала, точность расчетной схемы, степень динамичности нагрузки и величину возможной перегрузки, степень ответственности детали, условия работы детали, наличие концентраторов напряжения и т.д. Количество учитываемых факторов и соответствующих им частных коэффициентов колеблется от одного до десяти.

Значения коэффициентов безопасности обычно принимают на основании опыта конструирования и эксплуатации машин определенного типа. В литературе имеются рекомендации по использованию одним, тремя, пятью и даже десятью частными коэффициентами безопасности. Обычно рекомендуется пользоваться тремя частными коэффициентами:

$$S_p = S_{p1} S_{p2} S_{p3}, \quad (2.3.26)$$

где  $S_{p1}$  – коэффициент, учитывающий *точность расчетной схемы*;  
при повышенной точности расчета:

$$S_{p1} = 1,2 - 1,5;$$

при наличии упрощений и допущений, снижающих точность расчета:

$$S_{p1}=2-3;$$

$S_{p2}$  – коэффициент, учитывающий *неоднородность материала и его чувствительность к степени чистоты обработки поверхности*;

$S_{p2}$  в расчетах по пределу текучести при действии *статических* нагрузок можно принимать по нижеприведенной таблице (без учета влияния абсолютных размеров) в зависимости от отношения предела текучести к пределу прочности.

|                             |           |           |           |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\frac{\sigma_T}{\sigma_B}$ | 0,45-0,55 | 0,55-0,70 | 0,70-0,90 |
| $S_{p2}$                    | 1,2-1,5   | 1,4-1,8   | 1,7-2,2   |

При расчете по пределу прочности для *малопластичных и хрупких* материалов величину  $S_{p2}$  принимают:

а) для *малопластичных* материалов (высокопрочные стали при низком отпуске)  $S_{p2}=2-3$ ;

б) для *хрупких* материалов  $S_{p2}=3-4$ ;

в) для *весьма хрупких* материалов  $S_{p2}=4-6$ .

При расчете на усталость коэффициент  $S_{p2}$  принимают равным 1,5-2,0, увеличивая его для материала с *пониженной однородностью* (особенно для литья) и для деталей *больших размеров* до 3,0 и более;

$S_{p3}$  – коэффициент, учитывающий *условия работы и степень ответственности детали*; обычно  $S_{p3}=1,0-1,5$ .

Выбор допускаемого напряжения определяет эксплуатационные и экономические характеристики механизма или машины.

## 2.3.6 Расчеты при растяжении (сжатии)

### 2.3.6.1 Расчеты на прочность

Для обеспечения нормальной работоспособности детали необходимо, чтобы фактически существующее напряжение растяжения (сжатия) не превышало допускаемого. Напряжение в расчетном сечении растянутого (сжатого) стержня может быть определено из уравнения (2.3.3). Для оценки прочности стержня необходимо сопоставить *действующее* напряжение с *допускаемым*:

$$\sigma_{p(c)} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{p(c)p} \quad (2.3.27)$$

Здесь  $\sigma_{p(c)}$  – фактическое напряжение на растяжение или сжатие;

$\sigma_{p(c)p}$  – допускаемое напряжение на растяжение или сжатие.

Неравенство (2.3.27) называется *условием прочности*.

С помощью условия (2.3.27) могут быть решены задачи следующих трех типов.

1. Расчет на прочность существующей конструкции с определенными размерами. При этом определяют *напряжения* в деталях конструкции и величину их сравнивают с допустимым напряжением. Такой расчет носит название *проверочного*.

2. Определение *предельной (допускаемой) нагрузки* для детали с определенными размерами поперечного сечения  $A$  и допускаемым напряжением  $\sigma_p$ .

Из соотношения (2.3.27) получим:

$$F_p \leq A\sigma_p. \quad (2.3.28)$$

3. Определение *площади поперечного сечения* стержня по заданной продольной силе и допускаемому напряжению:

$$A \geq \frac{F}{\sigma_p}. \quad (2.3.29)$$

Такие расчеты называют *расчетами на прочность*.

### 2.3.6.2 Расчеты на жесткость

В некоторых случаях работоспособность конструкции определяют не величиной предельной нагрузки или предельного напряжения, а *величиной предельной деформации*  $\Delta l_p$ . В этом случае по уравнению (2.3.16) находят *фактическую* деформацию и сопоставляют ее с *предельной*:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \leq \Delta l_p. \quad (2.3.30)$$

Неравенство (2.3.30) называют *условием жесткости*, а расчеты, проводимые по этому неравенству, – *расчетами на жесткость*.

### 2.3.6.3 Пример расчетов на прочность и жесткость при растяжении (сжатии)

В качестве примера рассмотрим ступенчатый брус (рис. 2.3.9), нагруженный продольными силами  $F_1$  и  $F_2$ , для которого следует определить во всех поперечных сечениях внутреннюю продольную силу  $F_R$  и напряжения  $\sigma$ , а так же определить также вертикальные перемещения  $\delta$

всех поперечных сечений стержня. Результаты приведем в графическом виде, построив графики (эюры)  $F_R = f(l)$ ,  $\sigma = f(l)$  и  $\delta = f(l)$ .

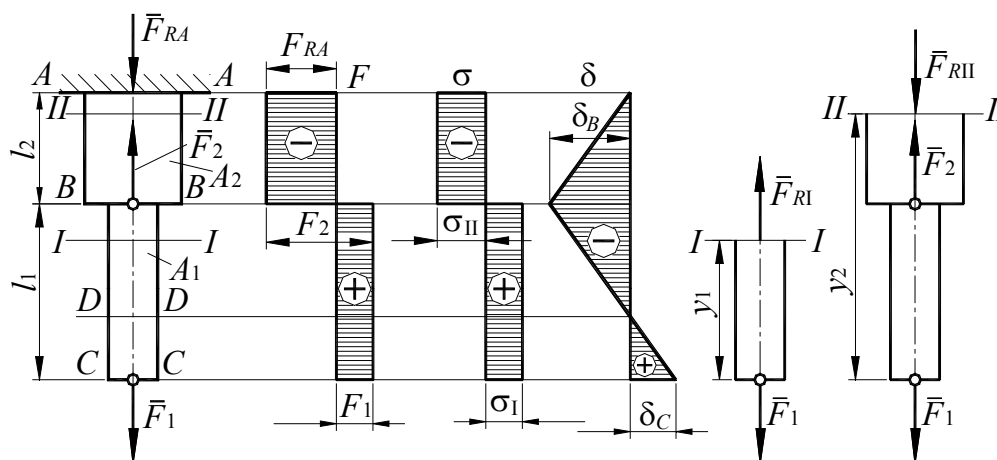


Рис. 2.3.9

*Решение.*

Для определения внутренних сил в поперечных сечениях бруса используем метод сечений.

Мысленно разрежем брус по сечениям *I-I* и *II-II*.

Составим уравнение равновесия части стержня, расположенной ниже сечения *I-I*:

$$\Sigma F_{yI} = F_{RI} - F_1 = 0,$$

откуда:

$$F_{RI} = F_1.$$

Эти уравнения будут справедливы при изменении текущей координаты  $y_1$  в пределах от 0 до  $l_1$ , то есть при:

$$0 \leq y_1 \leq l_1.$$

Уравнение равновесия части стержня, расположенной ниже сечения *II-II*:

$$\Sigma F_{yII} = -F_{RII} + F_2 - F_1 = 0,$$

откуда:

$$F_{RII} = F_2 - F_1 = 0.$$

Эти уравнения будут справедливы при:

$$l_1 \leq y_1 \leq l_1 + l_2.$$

Выбрав масштаб, строим эюру продольных сил. При этом *растягивающую* продольную силу  $F_{RI}$  считаем *положительной*, *сжимающую*  $F_{RII}$  – *отрицательной*.

Напряжения равны:

в сечениях нижней части стержня:

$$\sigma_I = \frac{F_{R_I}}{A_1} \text{ (растяжение),}$$

в сечениях верхней части стержня:

$$\sigma_{II} = \frac{F_{R_{II}}}{A_2} \text{ (сжатие).}$$

В выбранном масштабе строим эпюру напряжений.

Для построения эпюры  $\delta$  определяем перемещения характерных сечений  $B-B$  и  $C-C$  (перемещение сечения  $A-A$  равно нулю).

Перемещение сечения вниз считаем *положительным*, вверх – *отрицательным*.

Сечение  $B-B$  будет перемещаться вверх, поскольку верхняя часть стержня сжимается:

$$\delta_B = \frac{\sigma_{II} l_2}{E} \text{ (вверх).}$$

Перемещение сечения  $C-C$  является алгебраической суммой перемещения сечения  $B-B$  ( $\delta_B$ ) и удлинения части стержня длиной  $l_1$ :

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l = \delta_B + \frac{\sigma_{II} l_1}{E}$$

В выбранном масштабе откладываем на эпюре значения  $\delta_C$  и  $\delta_B$ , соединяем полученные точки прямыми линиями, так как при действии сосредоточенных внешних сил перемещения линейно зависят от абсцисс сечений стержня, и получаем график (эпюру) перемещений.

Из эпюры видно, что сечение  $D-D$  не перемещается, сечения, расположенные выше сечения  $D-D$ , перемещаются вверх, сечения, расположенные ниже сечения  $D-D$ , перемещаются вниз.

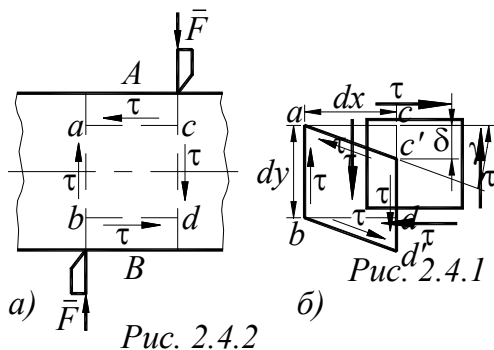
## Лекция № 7 (2 часа).

### Сдвиг. Кручение

#### 2.4 Сдвиг

##### 2.4.1 Основные понятия

Если на гранях элементарного выделенного из бруса элемента действуют только касательные напряжения (рис. 2.4.1), то такой вид напряженного состояния называется *чистым сдвигом*. Площадки, по которым действуют только касательные напряжения, назы-



ваются *площадками чистого сдвига*.

Пусть, например, к брусу приложены перпендикулярно его оси две равные по модулю, но противоположно направленные силы  $F$ , действующие весьма близко друг от друга (рис. 2.4.2, *а*). При достаточной величине этих сил произойдет *срез* – отделение левой части бруса от правой по некоторому сечению  $AB$ .

Деформации среза в зоне действия усилий предшествует перекашивание прямых углов параллелепипеда  $abdc$  (рис. 2.4.2, *б*). Эту деформацию называют *сдвигом*. На гранях параллелепипеда возникают касательные напряжения, направление которых определяется законом парности касательных напряжений. Величина касательного напряжения:

$$\tau = \frac{F}{A}, \quad (2.4.1)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения бруса.

Под действием касательных напряжений грань  $cd$  смещается относительно грани  $ab$  вниз и занимает новое положение  $c'd'$ . Величина  $\delta$  сдвига  $cc'$  относительно плоскости  $ab$  носит название *абсолютного* или *линейного сдвига*. Величина абсолютного сдвига зависит от расстояния между параллельными плоскостями.

Величину  $\frac{\delta}{dx}$  называют *относительным сдвигом*.

Угол  $\gamma$ , на который поворачиваются сечения  $ac$  и  $bd$  в процессе деформации, носит название *угла сдвига*. Угол сдвига в пределах упругой деформации очень мал, поэтому тангенс угла может быть заменен самим углом:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\delta}{dx} \approx \gamma \quad (2.4.2)$$

Следовательно, угол сдвига  $\gamma$  характеризует *относительную деформацию* при сдвиге.

Для деформации чистого сдвига закон Гука выражается соотношением:

$$\tau = G\gamma, \quad (2.4.3)$$

где  $G$  – коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости второго рода*;

$\gamma$  – относительный сдвиг.

Линейная зависимость между  $\tau$  и  $\gamma$  справедлива до тех пор, пока касательные напряжения не превзойдут предела пропорциональности при сдвиге.

Модуль упругости второго рода имеет размерность напряжения, так как относительный сдвиг является величиной безразмерной.

Для *стали* модуль сдвига равен:

$$G = \frac{2 \times 10^5}{2(1 + 0,3)} \approx 8 \times 10^4 \text{ МПа}.$$

Подставив в формулу (2.4.3) значение касательного напряжения из уравнения (2.4.1) и относительный сдвиг из уравнения (2.4.2), получим еще один вариант формулы закона Гука для сдвига:

$$\delta = \frac{Fdx}{GA}. \quad (2.4.4)$$

Конструкцию на прочность при деформации сдвига рассчитывают так, чтобы действительные касательные напряжения были меньше допускаемых.

Условие прочности при срезе имеет вид:

$$\tau = \frac{F}{A} \leq \tau_p. \quad (2.4.5)$$

Допускаемое напряжение при срезе обычно принимается как некоторая часть допускаемого напряжения того же материала при растяжении.

Для стали, меди и алюминия:

$$\tau_p = (0,5 - 0,6) \sigma_p; \quad (2.4.6)$$

для чугуна:

$$\tau_p = (0,75 - 0,80) \sigma_p. \quad (2.4.7)$$

#### 2.4.2 Потенциальная энергия при сдвиге. Зависимость между тремя упругими постоянными

Вычислим потенциальную энергию при сдвиге.

Для простоты предположим, что грань  $ab$  элемента неподвижна (рис. 2.4.2). Тогда при смещении правой грани сила  $\tau bdy$  (где  $b$  – толщина элемента) совершит работу на перемещении  $\gamma dx$ . Следовательно, потенциальная энергия деформации, накопленная в элементе, равна:

$$dU = \tau \gamma bdy \frac{dx}{2}.$$

Удельная потенциальная энергия:

$$u_p = \frac{dU}{dV} = \frac{\tau \gamma}{2}.$$

Выразив  $\gamma$  через  $\tau$  по закону Гука (2.4.3), получим:

$$u_p = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (2.4.8)$$



Множитель  $\frac{1}{2}$  принят потому, что сила прямо пропорциональна смещению.

С другой стороны, потенциальная энергия может быть выражена через главные нормальные напряжения. Из формулы (2.3.63) для плоского напряженного состояния, каким является чистый сдвиг, полагая  $\sigma_2 = 0$ , получаем:

$$u_p = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3}{2E}. \quad (2.4.9)$$

Но главные напряжения при сдвиге равны

$$\sigma_1 = \tau,$$

$$\sigma_3 = -\tau,$$

следовательно,

$$u_p = \tau^2(1 + \mu)E. \quad (2.4.10)$$

Так как величина энергии не должна зависеть от ориентирования граней элемента, то, приравнявая правые части выражений (2.4.8) и (2.4.9), получаем:

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2(1 + \mu)}{E}. \quad (2.4.11)$$

Отсюда найдем зависимость между модулем сдвига  $G$ , модулем упругости первого рода  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$ :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2.4.12)$$

## 2.5 Кручение

### 2.5.1 Построение эпюр крутящих моментов

Стержень испытывает *кручение*, если в его поперечных сечениях возникают крутящие моменты, то есть моменты, лежащие в плоскости сечения. Обычно эти крутящие моменты  $T_k$  возникают под действием внешних моментов  $T$  (рис. 2.6.1).

Внешние моменты передаются на вал, как правило, в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес и т.п. Однако и поперечная нагрузка, смещенная относительно оси стержня, вызывает крутящие моменты

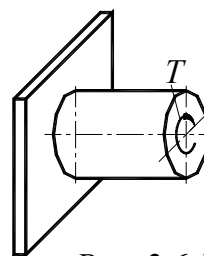


Рис. 2.6.1

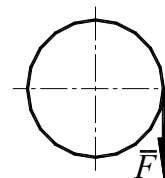


Рис. 2.6.2

(рис. 2.6.2), но в этом случае в поперечных сечениях наряду с крутящими моментами возникают и другие внутренние усилия – *поперечные силы и изгибающие моменты*.

Стержни, работающие на *кручение*, называют *валами*.

В расчетах вместо аксонометрического изображения чаще применяют плоское изображение, как более простое. Внешние скручивающие и внутренние крутящие моменты изображают иногда в виде линии с двумя окружностями. В одной из них ставят точку, обозначающую начало стрелки (направленной на наблюдателя), в другом – крестик, обозначающий конец стрелки, направленный от наблюдателя (рис. 2.6.3, а). Иногда вышеуказанные моменты изображают эллипсной стрелкой (рис. 2.6.3, б).

Для определения крутящих моментов  $T_k$ , возникающих в сечениях вала под действием внешних скручивающих моментов или поперечной нагрузки, применяют *метод сечений*.

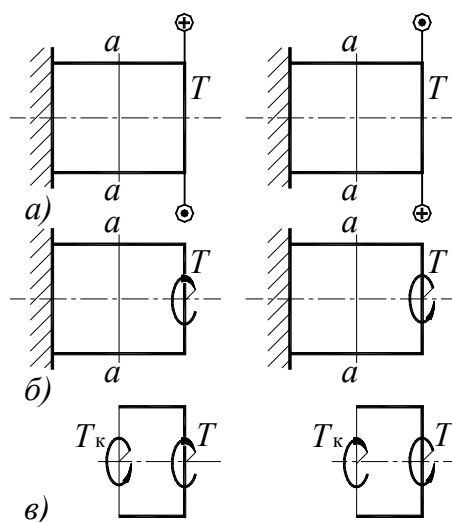


Рис. 2.6.3

Сделаем мысленный разрез стержня (рис. 2.6.3), например по *a-a*, отбросим одну часть стержня (в данном случае – левую) и рассмотрим равновесие оставшейся правой части (рис. 2.6.3, в). Взаимодействие частей стержня заменим крутящим моментом  $T_k$ , уравнивающим внешний момент  $T$ . Для равновесия отсеченной части необходимо, чтобы алгебраическая сумма всех моментов, действующих на нее, была равна нулю. Отсюда в рассматриваемом случае получим, что:

$$T_k = T.$$

Если на отсеченную часть будет действовать несколько внешних моментов, то, проведя аналогичные рассуждения, можно убедиться, что *крутящий момент в сечении численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения*.

Для наглядного представления о характере распределения и величине крутящих моментов по длине стержня строят эпюры (графики) этих моментов. Построение их вполне аналогично по строению эпюр продольных сил при растяжении или сжатии. Для построения эпюр необходимо условиться о правиле знаков. Общепринятого правила знаков для крутящих моментов не существует. Может быть принято любое

правило знаков. Важно лишь принятое правило выдержать на всем протяжении эпюры. Примем следующее *правило знаков* (рис. 2.6.4).

Крутящий момент в сечении  $a-a$  считается *положительным*, когда внешний момент вращает отсеченную часть *против часовой стрелки*, если смотреть на отсеченную часть со стороны сечения.

Если же внешний момент вращает отсеченную часть *по часовой стрелке* (при взгляде со стороны сечения), то крутящий момент в сечении будем считать *отрицательным*.

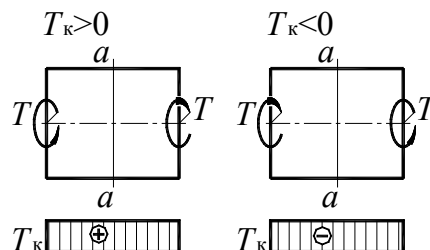


Рис. 2.6.4

Построение эпюры крутящих моментов поясним на следующем *примере* (рис. 2.6.5): рассмотрим вал  $CD$ , опирающийся на подшипники  $B$  и  $A$  и находящийся в равновесии под действием приложенных к нему в сечениях  $E$ ,  $K$  и  $L$  моментов.

Сделав сечение  $a-a$  где-либо на участке  $DL$  и рассмотрев равновесие правой отсеченной части, убедимся, что  $T_k = 0$ .

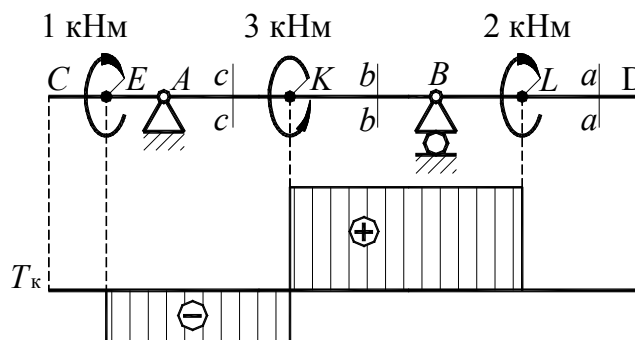


Рис. 2.6.5

Если мы сделаем затем сечение  $b-b$  в любом месте участка  $LK$ , то из условия равновесия правой от сечения части получим:

$$T_k = 2 \text{ кНм}.$$

Момент считаем положительным в соответствии с принятым правилом знаков.

Сделав сечение  $c-c$  на участке  $KE$  из условия равновесия правой части, получаем:

$$2 - 3 - T_k = 0,$$

откуда:

$$T_k = -1 \text{ кНм}.$$

Получившаяся эпюра имеет форму двух прямоугольников.

Важно заметить, что в местах приложения внешних моментов ординаты эпюры *скачкообразно* изменяются на величину приложенного здесь внешнего момента.

Если заданы поперечные нагрузки, вызывающие кручение стержня (рис. 2.6.2), то предварительно вычисляют внешние скручивающие моменты, создаваемые этими силами.

В случае, представленном на рис. 2.6.2, внешний вкручивающий момент от силы  $F$  равен:

$$T = Fr.$$

После определения внешних моментов определяют внутренние крутящие моменты и строят эпюры, как указано выше.

### 2.5.2 Определение напряжений в стержнях круглого сечения

Крутящие моменты, о которых шла речь выше, представляют лишь равнодействующие внутренние усилия. Фактически в поперечном течении скручиваемого стержня действуют непрерывно распределенные внутренние касательные напряжения, к определению которых теперь и перейдем.

Ознакомимся с результатами опытов. Если на поверхности стержня круглого сечения нанести прямоугольную сетку (рис. 2.6.6, а), то после деформации (рис. 2.6.6, б):

— прямоугольная сетка превратится в сетку, состоящую из параллелограммов, что свидетельствует о наличии касательных напряжений в поперечных сечениях бруса, а по закону парности касательных напряжений — и в продольных его сечениях;

— расстояния между окружностями, например между  $I$  и  $II$ , не изменятся. Не изменится длина стержня и его диаметр. Естественно допустить, что каждое поперечное сечение поворачивается в своей плоскости на некоторый угол, как жесткое целое (гипотеза плоских и жестких сечений). На основании этой гипотезы можно считать, что радиусы всех поперечных сечений будут поворачиваться (на разные углы), оставаясь прямолинейными.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что *при кручении* в поперечных сечениях стержня действуют только *касательные* напряжения, то есть напряженное состояние в точках скручиваемого стержня представляет собой *чистый сдвиг*.

Формулы, полученные на основе этого допущения, подтверждаются опытами. Точка  $D$  переместится по дуге  $DD'$ , точка  $C$  — по меньшей дуге  $CC'$  (рис. 2.6.7).

Для установления закона распределения касательных напряжений по попереч-

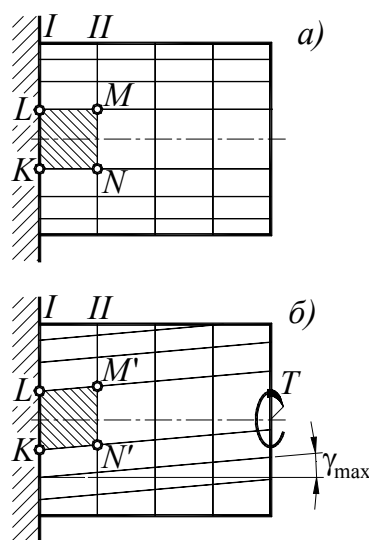


Рис. 2.6.6

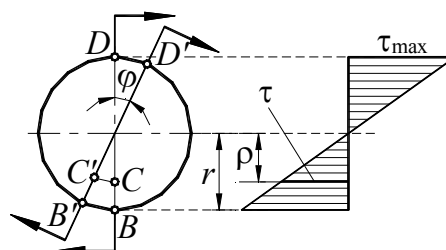


Рис. 2.6.7

ному сечению скручиваемого стержня рассмотрим более детально деформации стержня (рис. 2.6.6 и рис. 2.6.8).

На рис. 2.6.8 в более крупном масштабе изображена часть стержня между сечениями  $I$  и  $II$  и показана одна сторона  $KN$  элемента  $KLMN$  (рис. 2.6.6).

Угол сдвига для элемента  $KLMN$ , лежащего на поверхности стержня, равен отношению отрезка  $NN'$  к длине элемента  $dx$  (рис. 2.6.8):

$$\gamma_{\max} = \frac{rd\varphi}{dx}. \quad (2.6.1)$$

Выделяя мысленно из рассматриваемой части бруса цилиндр произвольного радиуса  $\rho$  и повторяя те же рассуждения, получим угол сдвига для элемента, отстоящего на расстоянии  $\rho$  от оси стержня:

$$\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx} \quad (2.6.2)$$

На основании закона Гука при сдвиге имеем:

$$\tau = G\gamma = G\mu \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.6.3)$$

Очевидно, что *при кручении* деформации сдвига и касательные напряжения прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения.

Эпюра касательных напряжений по поперечному сечению стержня представлена на рис. 2.6.7. В центре тяжести круглого сечения касательные напряжения равны нулю. Наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, расположенных у поверхности стержня.

Зная закон распределения касательных напряжений, можно определить их величину из условия, что крутящий момент в сечении представляет собой равнодействующий момент касательных напряжений в сечении:

$$T_K = \int_A \tau \rho dA, \quad (2.6.4)$$

где  $\tau \rho dA$  – элементарный крутящий момент внутренних сил, действующих по площадке  $dA$ .

Подставив в (2.6.4) значение напряжений из формулы (2.6.3), получим:

$$T_K = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA. \quad (2.6.5)$$

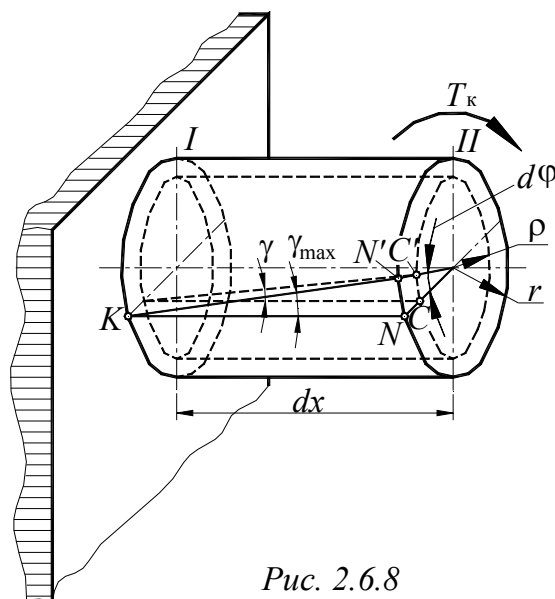


Рис. 2.6.8

Величина  $\int_A \rho^2 dA$  называется *полярным моментом инерции* сечения и обозначается  $J_p$ .

Для круглого сплошного сечения:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (2.6.6)$$

Тогда:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T_k}{GJ_p}. \quad (2.6.7)$$

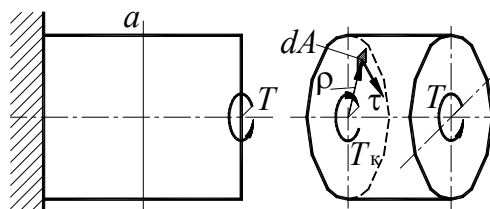


Рис. 2.6.9

Подставляя значение  $\frac{d\varphi}{dx}$  в формулу (2.6.3), получим:

$$\tau = \frac{T_k \rho}{J_p}.$$

В частном случае, когда на стержень действует один внешний скручивающий момент  $T$  (рис. 2.6.9), из условия равновесия отсеченной части стержня получим:

$$T_k = T.$$

Таким образом, окончательная формула для определения касательных напряжений при кручении имеет вид:

$$\tau = \frac{T_k \rho}{J_p}. \quad (2.6.8)$$

Как видно из этой формулы, в точках, одинаково удаленных от центра сечения, напряжения  $\tau$  одинаковы.

Наибольшие напряжения в точках у контура сечения равны:

$$\tau_{\max} = \frac{T_k r}{J_p} = \frac{T_k}{W_p}, \quad (2.6.9)$$

где:

$$W_p = \frac{J_p}{r} \quad (2.6.10)$$

Геометрическая характеристика  $W_p$  называется *полярным моментом сопротивления* или *моментом сопротивления при кручении*.

Для круглого сплошного сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (2.6.11)$$

Для кольцевого сечения:

$$W_p = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) \approx 0,2D^3(1 - c^4) \quad (2.6.12)$$

где  $c = \frac{d}{D}$ .

Условие статической прочности вала при кручении имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{T_k}{W_p} \leq \tau_p, \quad (2.6.13)$$

где  $\tau_p$  – допускаемое касательное напряжение.

При действии статической нагрузки принимают (без учета концентрации напряжений и других факторов, снижающих прочность)

$$\tau_p = (0,5 - 0,6) \sigma_{pp}. \quad (2.6.14)$$

Кроме проверки прочности, по этой формуле можно также подбирать диаметр вала или определять допускаемый крутящий момент при известных остальных величинах.

Так как для круглого сплошного сечения:

$$W_p \approx 0,2d^3,$$

получаем:

$$d = \sqrt[3]{\frac{T_k}{0,2\tau_p}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{T_k}{\tau_p}} \quad (2.6.15)$$

По этой формуле определяют *диаметр вала по условию прочности*.

Допускаемый из условия прочности крутящий момент определяют по формуле:

$$T_{kp} = W_p \tau_p.$$

### 2.5.3 Деформации и перемещения при кручении валов

#### 2.5.3.1 Расчет деформаций и перемещений при кручении

Для вычисления деформаций вала при кручении воспользуемся формулой (2.6.6):

$$d\varphi = \frac{T_k dx}{GJ_p} \quad (2.6.16)$$

Деформация вала на длине  $z$  (взаимный угол поворота сечений) равна:

$$\varphi = \int_0^z \frac{T_k dx}{GJ_p} \quad (2.6.17)$$

Если крутящий момент и величина  $GJ_p$ , называемая *жесткостью вала при кручении*, постоянны на всем участке интегрирования, то:

$$\varphi = \frac{T_k x}{GJ_p} \quad (2.6.18)$$

Аналогично, для вала длиной  $l$  получим:

$$\varphi = \frac{T_k l}{GJ_p} \quad (2.6.19)$$

Эта формула по своей структуре аналогична формуле для определения деформаций при растяжении-сжатии.

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины, называют *относительным углом закручивания*. Он равен:

$$\psi = \frac{\varphi}{l} = \frac{T_k}{GJ_p} \quad (2.6.20)$$

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания  $\theta$  не превосходил допускаемого значения  $\psi_p$ :

$$\psi = \frac{\varphi}{l} = \frac{T_k}{GJ_p} \leq \psi_p \quad (2.6.21)$$

В формуле (2.6.21)  $\psi_p$  – допускаемый относительный угол закручивания в *радианах* на единицу длины вала.

Эта формула выражает *условие жесткости вала при кручении*.

В большинстве случаев допускаемый *относительный угол закручивания* задают в *градусах* на 1 м длины, тогда взамен формулы (2.6.21) получим:

$$\psi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T_k}{GJ_p} \leq \psi_p \quad (2.6.22)$$

Угол  $\psi_p$  выбирают в зависимости от назначения вала и его размеров. Для валов средних размеров рекомендуется принимать допускаемый угол закручивания  $\psi_p$  равным  $0,5^\circ$  на 1 м длины.

Из условия (2.6.22) можно *определить диаметр вала* по заданной *жесткости*. Учитывая, что:

$$J_p \approx 0,1d^4,$$

получаем:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180^\circ T_k}{\pi G 0,1 \psi_p}} \quad (2.6.23)$$



### 2.5.3.2 Построение эпюр угловых перемещений при кручении

Имея формулы для определения деформаций и зная условия закрепления стержня, нетрудно определить угловые перемещения сечений стержня и построить эпюры этих перемещений. Если имеется вал, у которого нет неподвижных сечений, то для построения эпюры угловых перемещений принимают какое-либо сечение за условно неподвижное.

Рассмотрим конкретный пример (рис. 2.6.10, а).

На рис. 2.6.10, б приведена эпюра  $T_k$ .

Примем сечение в точке А за условно неподвижное. Определим поворот сечения В по отношению к сечению А.

По формуле (2.6.19) найдем:

$$\varphi_{BA} = \frac{T_{BA} l_{AB}}{GJ_p},$$

где  $T_{AB}$  – крутящий момент на участке АВ;

$l_{AB}$  – длина участка АВ.

Примем следующее правило знаков для углов поворота сечений: углы  $\varphi$  будем считать *положительными*, когда сечение поворачивается (если смотреть вдоль оси справа налево) *против часовой стрелки*.

В данном случае  $\varphi_{BA}$  будет положительным.

В принятом масштабе отложим ординату  $\varphi_{BA}$  (рис. 2.6.10, в). Полученную точку К, соединяем прямой точкой Е, так как на участке АВ углы изменяются по закону прямой линии (см. формулу (2.6.18), в которую абсцисса сечения  $z$  входит в первой степени).

Вычислим теперь угол поворота сечения С по отношению к сечению В. Учитывая принятое правило знаков для углов закручивания, получаем:

$$\varphi_{CB} = -\frac{T_{BC} l_{BC}}{GJ_p}.$$

Так как сечение В не неподвижное, то угол поворота сечения С по отношению к сечению А равен:

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = -\frac{T_{BC} l_{BC}}{GJ_p} + \varphi_{BA}.$$

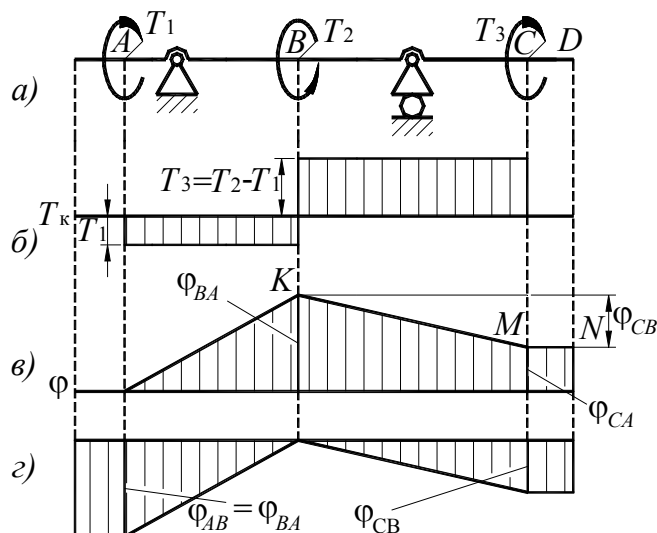


Рис. 2.6.10

Угол закручивания  $\varphi_{CA}$  может получиться положительным, отрицательным и, в частном случае, равным нулю.

Предположим, что в данном случае угол  $\varphi_{CA}$  получился положительным.

Тогда, отложив эту величину в принятом масштабе вверх от оси эпюры, получим точку  $M$ .

Соединяя точку  $M$  с точкой  $K$ , получим график углов закручивания  $\varphi$  на участке  $BC$ .

На участке  $CD$  скручивания не происходит, так как крутящие моменты на этом участке равны нулю, поэтому там все сечения поворачиваются на столько же, на сколько поворачивается сечение  $C$ .

Участок  $MN$  эпюры  $\varphi$  здесь горизонтален.

Если за неподвижное принять сечение  $B$ , то эпюра углов закручивания будет иметь вид, представленный на рис. 2.6.10, *г*.

Рассмотрим *пример* определения диаметра стального вала, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , и передающего мощность  $P$ . Допускаемое напряжение  $\tau_p$ . Допускаемый угол закручивания равен  $\theta_p$ . Модуль сдвига равен  $G$ .

Момент, передаваемый валом, определим по формуле:

$$T = \frac{P}{\omega}.$$

Диаметр вала по прочности на кручение определяем по формуле (2.6.15).

Диаметр вала из условия жесткости определяем по формуле (2.6.23).

Для дальнейшего проектирования вала принимается больший из этих двух значений диаметра (округленный в большую сторону до стандартной величины).

## **Лекция № 8 (2 часа).**

### **Изгиб прямолинейного бруса**

#### **2.6 Изгиб**

##### **2.6.1 Общие понятия о деформации изгиба**

Значительное количество деталей механизмов или элементы этих деталей в процессе работы подвергаются воздействию нагрузки, перпендикулярной к продольной оси, или внешних пар, действующих в плоскости, проходящей через указанную ось (рис. 2.5.1). При этом в поперечных сечениях деталей или их элементов возникают *изгибающие* моменты, то есть

внутренние моменты, действующие в плоскости, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения. Такой вид нагружения называют *изгибом*. При действии такой нагрузки ось стержня искривляется. Стержни, работающие в основном на изгиб, принято называть *балками*.

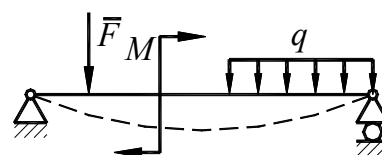


Рис. 2.5.1

Изгиб называют *чистым*, если *изгибающий момент* является *единственным* внутренним усилием, возникающим в поперечном сечении стержня (в поперечном сечении *отсутствуют поперечные силы*).

Если в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами *возникают и поперечные силы*, то такой изгиб называют *поперечным*.

Если плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения стержня, изгиб называют *простым* или *плоским*. При этом ось балки после деформации остается в силовой плоскости.

Если плоскость действия изгибающего момента в сечении не совпадает ни с одной из главных осей сечения, изгиб называют *косым*.

При косом изгибе плоскость деформации не совпадает с силовой плоскостью.

Деформацию изгиба легко проследить на модели, представляющей собой прямолинейный призматический брус, длина которого значительно превышает его поперечные размеры. На боковые грани бруса нанесены равноотстоящие горизонтальные и вертикальные линии (рис. 2.5.2, а). В плоскости симметрии *abcd* к концам бруса приложены два равных противоположно направленных момента *M*, под действием которых брус изгибается, как показано на (рис. 2.5.2, б).

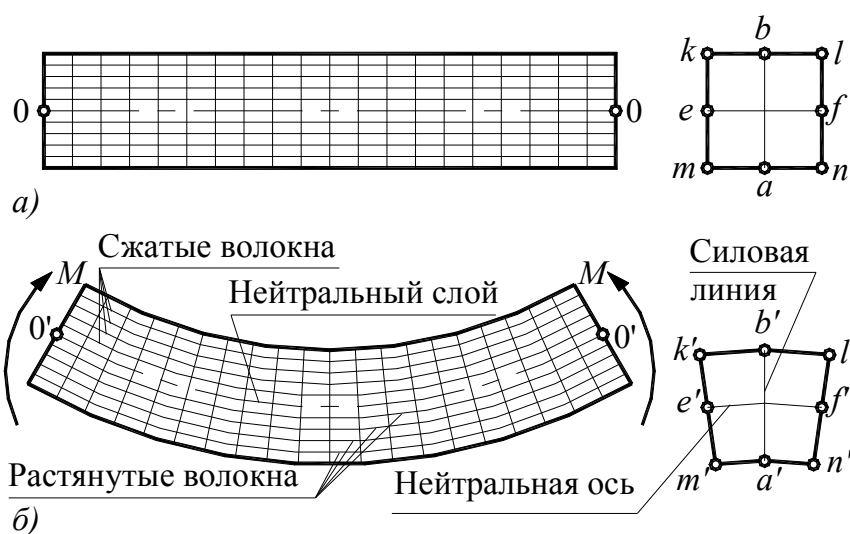


Рис. 2.5.2

Рассмотрение изогнутого бруса позволяет установить следующие основные *признаки чистого изгиба*.

1. Плоские поперечные сечения бруса остаются плоскими и поворачиваются на некоторый угол одно относительно другого.

2. Плоские продольные сечения искривляются, о чем можно судить по тому, что продольные горизонтальные прямые, нанесенные на боковые грани, становятся кривыми линиями.

3. Волокна на *вогнутой* стороне бруса *укорачиваются*, что свидетельствует об их сжатии, а на *выпуклой* стороне – *удлиняются, растягиваются*.

4. Как показывает опыт, одна из горизонталей на боковой грани бруса своей длины не изменяет (линия 00 на рис. 2.5.2, б). Это позволяет сделать вывод о существовании у бруса слоя, которые не испытывают ни растяжения, ни сжатия. Такой слой называют *нейтральным слоем*.

5. След  $e'f'$  нейтрального слоя на плоскости поперечного сечения называют *нейтральной осью* (рис. 2.5.2, б). *Нейтральная ось 00 при изгибе своей длины не изменяет*.

6. След  $a'b'$  силовой плоскости на поперечном сечении балки называют *силовой линией*.

Таким образом, здесь наблюдаются те же явления, что и при простом растяжении и сжатии, когда знак поперечной деформации противоположен знаку продольной деформации, то есть продольное растяжение сопровождается поперечным сжатием и продольное сжатие приводит к поперечному растяжению.

Из рис. 2.5.2 следует, что величина деформации волокон, как в продольном, так и в поперечном направлении тем больше, чем дальше они расположены от нейтрального слоя или нейтральной оси.

## 2.6.2 Типы опор балок

Опоры балок, рассматриваемых как плоские системы, бывают трех основных типов.

1. *Подвижная шарнирная опора* (рис. 2.5.3, а).

Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней может возникнуть только *одна реакция*, которая перпендикулярна плоскости качения и проходит через центр катка.

Подвижные опоры дают возможность балке беспрепятственно изменять свою длину при изменении температуры и тем самым устраняют возможность появления температурных напряжений.

2. *Неподвижная шарнирная опора* (рис. 2.5.3, б).

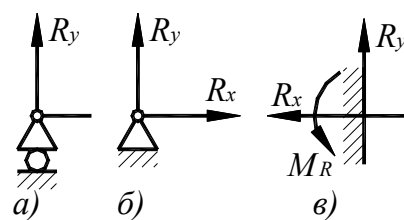


Рис. 2.5.3

Такая опора допускает вращение конца балки, но устраняет поступательное перемещение ее в любом направлении. Возникающую в ней реакцию можно разложить на *две составляющие* – горизонтальную и вертикальную.

3. *Жесткая заделка, или защемление* (рис. 2.5.3, в).

Такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения. В этой опоре может в общем случае возникать реакция, которую обычно раскладывают на *две составляющие* (вертикальную и горизонтальную) и *реактивный момент*.

Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузку в одной плоскости и оставалась бы при этом в целом неподвижной по отношению к основанию, наименьшее число связей, налагаемых опорами, должно быть равно *трем*.

Если опорные реакции могут быть найдены только из *уравнений статики*, то балки называют *статически определенными*.

Для таких балок возможны следующие варианты крепления:

1) защемление балки одним концом (балка с одним заделанным концом называется *консольной балкой* или просто *консолью*);

2) крепление одного конца балки при помощи неподвижной шарнирной опоры, а другого конца – при помощи подвижной шарнирной опоры (балки, имеющие две опоры, называют *двухопорными*).

Такие опоры исключают возможность возникновения продольных усилий при деформации, вызванной изменением температуры.

Если же *число неизвестных опорных реакций больше, чем число уравнений статики*, возможных для данной задачи, то балки называют *статически неопределимыми*. Для определения реакций в таких балках необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения перемещений.

В данном курсе статически неопределимые балки не рассматриваются.

### 2.6.3 Определение опорных реакций

Определение *опорных реакций* производят при помощи *уравнений статики*. Методику их определения рассмотрим на примерах.

В *первом* примере определим опорные реакции *консольной балки* (рис. 2.5.4).

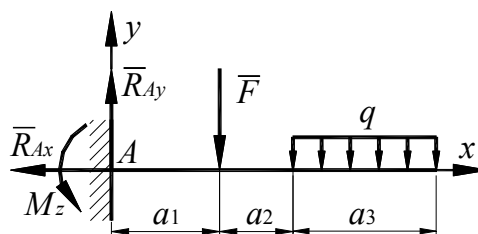


Рис. 2.5.4

Реакцию заделки разложим на две составляющие силы  $\overline{R_{Ax}}$  и  $\overline{R_{Ay}}$ , направленные вдоль осей  $x$  и  $y$ , и реактивный момент  $M_{Az}$ ,

Составим *уравнения равновесия балки*.

1. Приравняем нулю сумму проекций на ось  $x$  всех сил, действующих на балку:

$$\sum F_x = 0.$$

Получаем:

$$R_{Ax} = 0.$$

При отсутствии горизонтальной нагрузки горизонтальная составляющая реакции  $R_{Ax}$  равна нулю.

2. Приравняем нулю сумму проекций на ось  $y$  всех сил, действующих на балку:

$$\sum F_y = 0.$$

Равномерно распределенную нагрузку  $q$  заменяем *равнодействующей*  $qa_3$ , приложенной в середине участка  $a_3$ :

$$R_{Ay} - F_1 - qa_3 = 0,$$

откуда:

$$R_{Ay} = F_1 + qa_3.$$

Вертикальная составляющая реакции в консольной балке равна сумме сил, приложенных к балке.

3. Составляем третье уравнение равновесия.

Приравняем нулю сумму моментов всех сил относительно какой-нибудь точки, например, относительно точки  $A$ :

$$\sum M_{Az} = 0;$$

$$-M_{Az} - F_1 a_1 - qa_3 \left( a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right) = 0,$$

откуда:

$$M_{Az} = -F_1 a_1 - qa_3 \left( a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right) = 0.$$

Знак «минус» показывает, что принятое вначале направление реактивного момента следует изменить на обратное.

*Реактивный момент в заделке равен сумме моментов внешних сил относительно заделки.*

Во *втором* примере рассмотрим определение опорных реакций *двухопорной* балки (рис. 2.5.5).

$$1. \sum F_{Ax} = -R_{Ax} - F \cos \alpha = 0;$$

$$R_{Ax} = -F \cos \alpha.$$

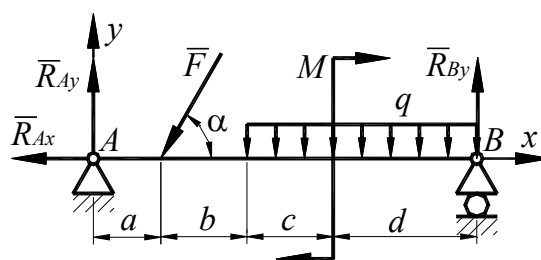


Рис. 2.5.5

$$2. \sum M_{Bz} = -R_{Ay}(a+b+c+d) + (b+c+d)F \sin \alpha + \frac{q(c+d)^2}{2} - M = 0.$$

$$R_{Ay} = \frac{(b+c+d)F \sin \alpha + \frac{q(c+d)^2}{2} - M}{a+b+c+d}.$$

$$2. \sum F_y = R_{Ay} - F - q(c+d) + R_{By} = 0;$$

$$R_{By} = -R_{Ay} + F + q(c+d).$$

## 2.6.4 Определение внутренних усилий при изгибе

Как было отмечено в разделе 2.5.1, при *плоском поперечном* изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора:

— *изгибающий момент*  $M_x$ ,

— *поперечная сила*  $F_{Rt}$ .

Для их определения применим *метод сечений*.

В рассматриваемом месте сделаем мысленный разрез балки, например, на расстоянии  $x$  от левой опоры (рис. 2.5.6, а). Отбросим одну из частей балки, например правую, и рассмотрим равновесие левой части. Взаимодействие частей балки заменим *внутренними* усилиями, действующими в этом сечении: изгибающим моментом  $M_x$  и поперечной силой  $F_{Rt}$  (рис. 2.5.6, б).

Для определения величин  $M_x$  и  $F_{Rt}$  используем два уравнения равновесия:

$$1. \sum M_0 = R_{Ay}x - F_1(x - a_1) - M_x = 0;$$

$$M_x = R_{Ay}x - F_1(x - a_1).$$

$$2. \sum F_y = R_{Ay} - F_1 + F_{Rt} = 0;$$

$$F_{Rt} = F_1 - R_{Ay}.$$

Следовательно:

1) *поперечная сила*  $F_{Rt}$  в поперечном сечении балки *численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения*;

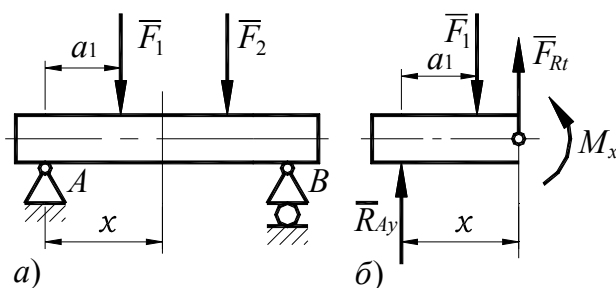


Рис. 2.5.6

2) *изгибающий момент* в поперечном сечении балки численно равен *алгебраической сумме* моментов (вычисленных *относительно центра тяжести сечения*) *внешних сил*, действующих по *одну* сторону от данного сечения.

### Правило знаков для изгибающих моментов и поперечных сил

*Поперечная сила* в сечении балки *mn* (рис. 2.5.7, а) считают *положительной*, если равнодействующая внешних сил *слева* от сечения направлена *снизу вверх*, а *справа* – *сверху вниз*, и *отрицательной* – в *противоположном* случае (рис. 2.5.7, б).

*Изгибающий момент* в сечении балки, например, в сечении *mn* (рис. 2.5.8, а), *положителен*, если равнодействующий момент внешних сил *слева* от сечения направлен *по часовой стрелке*, а *справа* – *против часовой стрелки*, и *отрицателен* – в *противоположном* случае (рис. 2.5.8, б).

Моменты, изображенные на рис. 2.5.8, а, изгибают балку *выпуклостью вниз*, а моменты, изображенные на рис. 2.5.8, б, изгибают балку *выпуклостью вверх*.

Отсюда следует другое, более удобное для запоминания *правило знаков* для изгибающего момента.

*Изгибающий момент* считается *положительным*, если в рассматриваемом сечении балка *изгибается выпуклостью вниз*.

## 2.6.5 Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Для наглядного представления о характере изменения изгибающего момента и поперечной силы по длине балки и для нахождения опасных сечений строят эпюры  $M_x$  и  $F_{Rt}$ . Методику построения этих эпюр рассмотрим на следующих примерах.

В *первом* примере рассмотрим построение эпюр  $M_x$  и  $F_{Rt}$  для *консольной* балки, изображенной на рис. 2.5.10, а.

Проводим сечение *справа* от силы на расстоянии  $x_1$  от *правого* конца балки (сечение *I-I*),  $x_1$  – величина *переменной*, индекс «1» обозначает номер участка, на котором сделано сечение.

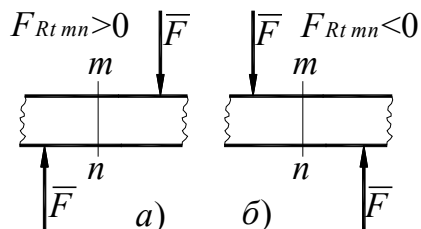


Рис. 2.5.7

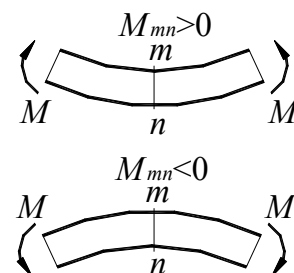


Рис. 2.5.8

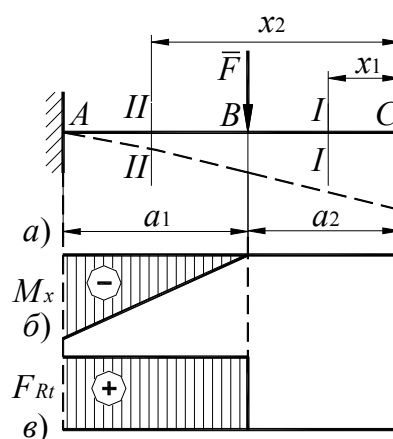


Рис. 2.5.10



*Изгибающий момент* в сечении *I-I* проще всего определить, составив уравнение суммы моментов внешних сил, расположенных, в данном случае, *справа* от сечения:

$$M_{x1} = 0;$$

$$0 \leq x_1 \leq a_2.$$

Изгибающий момент в любом поперечном сечении балки на участке *BC* отсутствует.

*Изгибающий момент* в сечении *II-II* на участке *AB* так же вычислим, как сумму моментов всех сил, расположенных *справа* от сечения (в этом случае нет необходимости в определении опорных реакций в заделке):

Получим:

$$M_{x2} = -F(x_2 - a_2);$$

$$a_2 \leq x_2 \leq (a_1 + a_2).$$

Знак «минус» взят потому, что балка изгибается выпуклостью вверх.

Полученное уравнение является уравнением наклонной *прямой* линии. Поэтому для построения эпюры на участке *AB* достаточно вычислить *два* значения  $M_x$ :

$$M_{x2=a2} = 0;$$

$$M_{x2=a1+a2} = -Fa_1.$$

Величину  $Fa_1$  в выбранном масштабе откладываем вниз от оси эпюры. Эпюра  $M_x$  представлена на рис. 2.5.10, *б*.

Наибольший изгибающий момент возникает в сечении у заделки:

$$M_{x \max} = -Fa_1.$$

Вычислим теперь *поперечную силу* в сечении *I-I*.

Проектируя на вертикальную ось силы, расположенные *справа* от сечения, получаем, что:

$$F_{Rt_{x1}} = 0;$$

$$0 \leq x_1 \leq a_2$$

Для сечения *II-II* тем же путем получим:

$$F_{Rt_{x2}} = F;$$

$$a_2 \leq x_2 \leq (a_1 + a_2).$$

Знак «плюс» взят потому, что внешняя сила *справа* от сечения направлена *сверху* вниз.

Эпюра  $F_{Rt}$  показана на рис. 2.5.10, *в*.

Во *втором* примере рассмотрим построение эпюр  $M_x$  и  $F_{Rt}$  для *двухопорной* балки, изображенной на рис. 2.5.11, *а*.

Используя уравнения равновесия, определим реакции  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$ .

Изгибающий момент в сечении с абсциссой  $x_1$  определяем как сумму моментов от сил, расположенных *слева* от сечения:

$$M_{x_1} = -R_{Ay}x_1 - \frac{q_1x_1^2}{2};$$

$$0 \leq x_1 \leq l_1.$$

Уравнение момента  $M_{x_1}$  описывает *параболу*. Поэтому двух фиксированных точек для построения эпюры недостаточно. Эпюру строим по *трем* точкам:

$$x'_1 = 0;$$

$$M'_{x_1} = 0;$$

$$x''_1 = \frac{l_1}{2};$$

$$M''_{x_1} = -\frac{R_{Ay}l_1}{2} - \frac{q_1l_1^2}{8};$$

$$x'''_1 = l_1;$$

$$M'''_{x_1} = -R_{Ay}l_1 - \frac{q_1l_1^2}{2}.$$

По этим данным строим эпюру  $M_x$  на участке  $AE$ .

Определяем изгибающий момент в сечении с абсциссой  $x_2$  от всех нагрузок, действующих *слева* от этого сечения:

$$M_{x_2} = -R_{Ay}x_2 - q_1l_1\left(x_2 - \frac{l_1}{2}\right) + M;$$

$$l_1 \leq x_2 \leq (l_1 + l_2).$$

Второй член этого выражения представляет собой изгибающий момент от равнодействующей распределенной нагрузки  $q_1$ , действующей на участке  $AE$ .

Уравнение  $M_{x_2}$  описывает наклонную *прямую* линию. Поэтому для построения эпюры достаточно вычислить *два* значения  $M_{x_2}$ :

$$x'_2 = l_1;$$

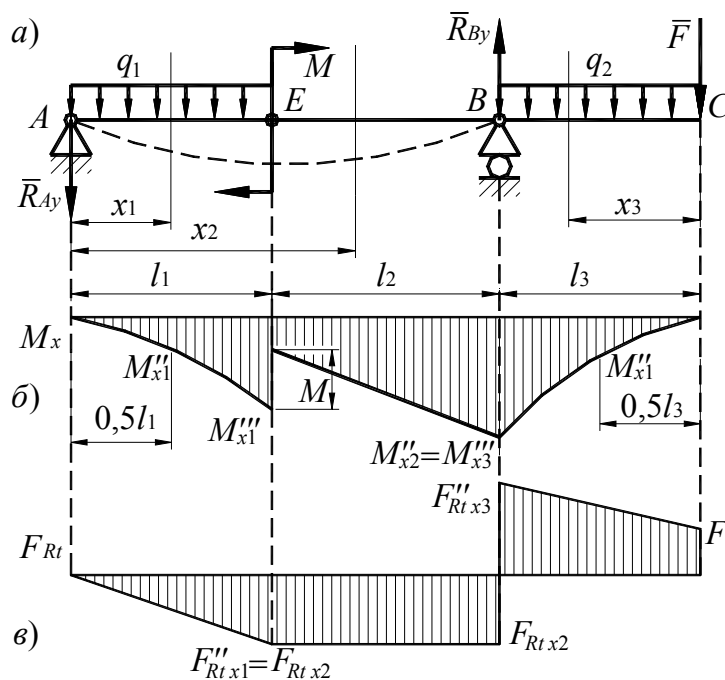


Рис. 2.5.11

$$M'_{x2} = -R_{Ay}l_1 - \frac{q_1l_1^2}{2} + M;$$

$$x_2'' = l_1 + l_2;$$

$$M''_{x2} = -R_{Ay}(l_1 + l_2) - q_1l_1\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) + M.$$

По этим данным построим эпюру  $M_x$  на участке  $BE$ .

Определяем изгибающий момент в сечении, отстоящем на расстоянии  $x_3$  от *правого* конца балки.

Так как справа от указанного сечения внешних силовых факторов меньше, чем слева, то  $M_{x3}$  проще вычислить как сумму моментов от сил, расположенных *справа* от сечения:

$$M_{x3} = -Fx_3 - \frac{q_2x_3^2}{2};$$

$$0 \leq x_3 \leq l_3.$$

Первый член в уравнении  $M_{x3}$  представляет собой изгибающий момент от силы  $F$ , а второй – изгибающий момент от распределенной нагрузки  $q_2$ , действующей *правее* рассматриваемого сечения.

Уравнение момента  $M_{x3}$  описывает *параболу*. Эпюру строим по *трем* точкам:

$$x_3' = 0;$$

$$M'_{x3} = 0;$$

$$x_3'' = \frac{l_3}{2};$$

$$M''_{x3} = -\frac{Fl_3}{2} - \frac{q_2l_3^2}{8};$$

$$x_3''' = l_3;$$

$$M'''_{x3} = -Fl_3 - \frac{q_2l_3^2}{2}.$$

По этим данным строим эпюру  $M_x$  на участке  $BC$ .

*Поперечную силу*  $F_{Rt}$  определяем, проектируя на вертикаль силы, действующие на отсеченную часть:

$$F_{Rtx1} = -R_{Ay} - q_1x_1;$$

$$0 \leq x_1 \leq l_1.$$

Уравнение  $F_{Rtx1}$  является уравнением наклонной *прямой* линии.

$$x_1' = 0;$$

$$F'_{Rtx1} = 0;$$

$$x_1'' = l_1;$$

$$F''_{Rtx1} = -R_{Ay} - q_1 l_1.$$

Поперечная сила в произвольном сечении участка  $EB$ :

$$F_{Rtx2} = -R_{Ay} - q_1 l_1.$$

Величина  $F_{Rtx2}$  не зависит от текущей координаты  $x_2$ , поэтому ее эпюра имеет вид горизонтальной *прямой* линии.

На третьем участке:

$$F_{Rtx3} = F + q_2 x_3;$$

$$0 \leq x_3 \leq l_3.$$

Уравнение  $F_{Rtx3}$  является уравнением наклонной *прямой* линии на участке  $BC$ .

$$x_3' = F;$$

$$F'_{Rtx3} = 0;$$

$$x_3'' = l_3;$$

$$F''_{Rtx3} = F + q_2 l_3.$$

Скачки в эпюре  $F_{Rt}$  равны по величине приложенным в соответствующих сечениях балки сосредоточенным силам  $R_{Ay}$ ,  $R_{By}$ ,  $F$ .

## 2.6.6 Напряжения при изгибе. Расчеты на прочность

### 2.6.6.1 Общие сведения

Как было показано в разделе 2.5.1, наибольшую деформацию растяжения (или сжатия) претерпевают периферийные слои изгибаемой балки. Очевидно, что эти деформации тем больше, чем больше изгибающий момент. Следовательно, при *изгибе* величина *нормальных* напряжений зависит от величины *изгибающего момента*. Величина же *касательных* напряжений зависит от величины *поперечной силы*.

Изгибающий момент или поперечная сила в любом сечении балки могут быть определены с помощью эпюр рассмотренными выше методами.

При расчетах на прочность большое значение имеет *распределение* нормальных и касательных *напряжений по сечению*. Длительная практика эксплуатации изогнутых балок показывает, что *наиболее опасной*, определяющей работоспособность конструкции, является *точка*, расположенная на *крайних растянутых волокнах*.

Лишь в *некоторых специфических случаях* касательное напряжение может оказаться решающим фактором, определяющим прочность изогну-

той балки. Тогда производят *полный* расчет балки по *эквивалентным напряжениям*.

Установим зависимость между изгибающим моментом, действующим в сечении, и возникающими при этом нормальными напряжениями, а также определим закон распределения нормальных напряжений по сечению. Пусть прямолинейная балка, имеющая продольную вертикальную плоскость симметрии, подвергается *чистому* изгибу под влиянием силовых факторов, действующих в этой плоскости (рис. 2.5.12). Указанную плоскость будем называть *плоскостью изгиба*.

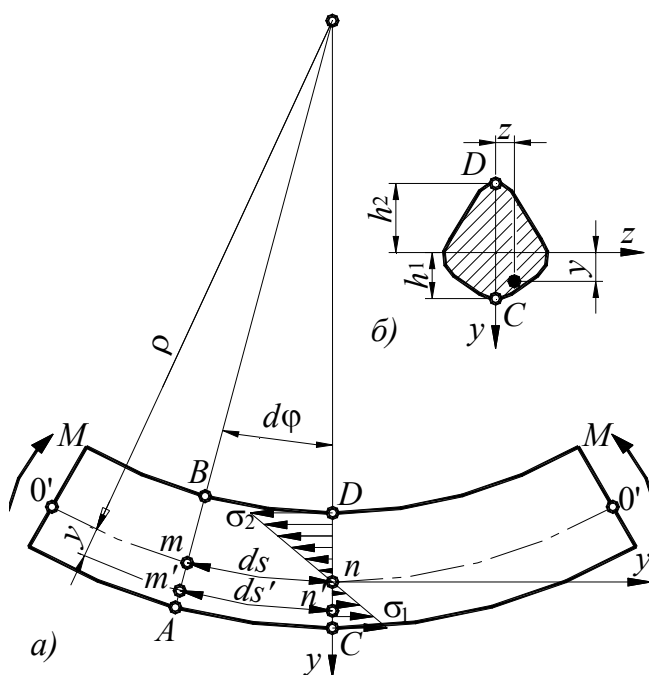


Рис. 2.5.12

Выделим элемент балки, ограниченный двумя поперечными сечениями, находящимися на бесконечно малом расстоянии  $ds$  друг от друга.

При изгибе ось балки (линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью изгиба) искривляется (рис. 2.5.12, а), а сечения, ограничивающие выделенный элемент балки, поворачиваются вокруг нейтральных осей, проходящих через точки  $m$  и  $n$ , и, заняв положения  $AB$  и  $CD$ , образуют угол  $d\varphi$ . При этом можно считать, что указанные сечения остаются плоскими, а расстояния между продольными слоями балки не меняются.

Дуга  $mn$ , принадлежащая нейтральному слою, сохраняет свою первоначальную длину  $ds$ , а длина дуги  $m'n'$ , отстоящей на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя, принимает новое значение  $ds''$ . Радиус кривизны дуги  $mn$  изогнутой оси балки можно считать постоянным. Обозначив его через  $\rho$ , получим:

$$ds = \rho d\varphi;$$

$$ds' = (\rho + y) d\varphi.$$

Относительное удлинение дуги:

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (2.5.8)$$

По закону Гука напряжение в слое, отстоящем на расстоянии  $y$  от нейтрального равно:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (2.5.9)$$

Таким образом, нормальные напряжения в поперечном сечении изогнутой балки прямо пропорциональны расстояниям от рассматриваемых точек до нейтральной оси (рис. 2.5.12, б), т. е. изменение напряжений по сечению в плоскости изгиба подчиняется линейному закону (рис. 2.5.12, а).

Из равенства (2.5.9) следует:

$$\sigma = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$\sigma = \sigma_{\max} \text{ при } y = y_{\max},$$

то есть *нормальное напряжение равно нулю на нейтральной оси* и достигает максимальных значений в наиболее удаленных от этой оси волокнах.

Рассматривая  $y$  как алгебраическую величину, имеющую положительное значение для растянутых и отрицательное для сжатых волокон, получим для напряжений в этих волокнах соответственно положительные и отрицательные значения.

На выделенный элемент  $ABCD$  (рис. 2.5.12, а) действуют со стороны правой части балки распределенные по сечению  $CD$  силы:

$$dF = \sigma dA = \frac{Ey}{\rho} dA,$$

где  $dA$  – элементарная площадка, расположенная на расстоянии  $y$  от нейтральной оси.

Эта система элементарных сил эквивалентна системе внешних сил, действующих на правую часть балки, сводящихся в данном случае к одному изгибающему моменту  $M_{\text{и}}$  (поперечная сила  $F_{Rt} = 0$ , так как рассматривается чистый изгиб). Таким образом, главный вектор распределенных по сечению  $CD$  сил равен нулю, а главный момент их относительно любого центра равен изгибающему моменту в этом сечении. Поэтому при выбранной системе осей:

$$\Sigma F_x = 0;$$

$$\Sigma F_x = \Sigma dF = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0;$$

$$\Sigma M_z = -\Sigma y dF = -\int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = -M_{\text{и}},$$

где  $\int_A y dA = S_z$  – *статический момент площади* сечения относительно нейтральной оси;

$\int_A y^2 dA = J_z$  — момент инерции площади сечения относительно нейтральной оси.

Отсюда, так как  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ :

$$S_z = 0. \quad (2.5.10)$$

Кроме того:

$$\frac{EJ_z}{\rho} = M_n. \quad (2.5.11)$$

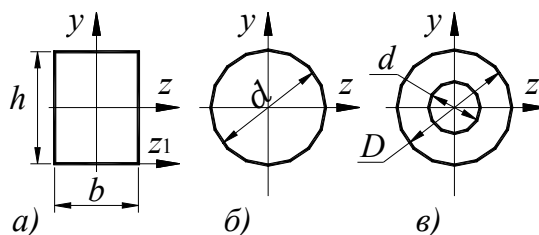


Рис. 2.5.13

Из уравнения (2.5.10) следует, что нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения и для симметричных сечений она является одной из главных центральных осей инерции.

Для наиболее распространенных сечений (рис. 2.5.13) величины моментов инерции равны:

1. прямоугольник высотой  $h$  и шириной  $b$ :

$$J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}; \quad (2.5.12)$$

для того же прямоугольника момент инерции относительно оси, проходящей через основание:

$$J_{z_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad (2.5.13)$$

2. круг диаметром  $d$ :

$$J_z = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4; \quad (2.5.14)$$

3. круговое кольцо с наружным диаметром  $D$  и внутренним  $d$ :

$$J_z = J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \approx 0,05(D^4 - d^4). \quad (2.5.15)$$

Уравнение (2.5.11) можно представить в виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_n}{EJ_z} \quad (2.5.16)$$

Величина  $\frac{1}{\rho}$  представляет собой кривизну изогнутой оси балки и характеризует величину деформации при изгибе.

Произведение модуля упругости  $E$ , характеризующего механические свойства материала балки, на момент инерции сечения  $J_z$ , характеризующий форму и размеры сечения, называют жесткостью при изгибе. Из соотношения (2.5.16) следует, что величина деформации изогнутой

оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту  $M_{\text{и}}$  и обратно пропорциональна жесткости при изгибе  $EJ_z$ .

Таким образом: *жесткость при изгибе характеризует способность балки из данного материала с заданной формой и размерами поперечного сечения сопротивляться воздействию изгибающего момента.*

Подставляя в уравнение (2.5.9) выражение  $\frac{1}{\rho}$  из уравнения (2.5.16), получим:

$$\sigma = Ey \frac{M_{\text{и}}}{EJ_z} = \frac{M_{\text{и}} y}{J_z}. \quad (2.5.17)$$

Наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают на наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах, то есть при:

$$y = y_{\text{max}}.$$

Формула (2.5.17) выведена для *чистого* изгиба. С достаточной для практики точностью она может применяться и при *поперечном* изгибе.

Обозначим:

$$\frac{J_z}{y_{\text{max}}} = W_z. \quad (2.5.18)$$

Величину  $W_z$  называют *осевым моментом сопротивления сечения*. Момент сопротивления является *геометрической* характеристикой поперечного сечения балки, определяющей ее *прочность при изгибе*.

#### 2.6.6.2. Условия прочности по нормальным напряжениям

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения при изгибе в опасном сечении, то есть в сечении, где  $M_{\text{и}}$  имеет наибольшее значение, не превосходили соответствующих допускаемых напряжений (рассматриваются только балки с постоянным по всей длине поперечным сечением).

Обозначим (рис. 2.5.12):

$h_1$  – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленного растянутого волокна,

$h_2$  – расстояние от нейтральной оси до наиболее сжатого волокна.

Тогда:

- наибольшее растягивающее напряжение при изгибе равно:

$$\sigma_{\text{рmax}} = \frac{M_{\text{и}} h_1}{J_x}, \quad (2.5.19)$$

- наибольшее сжимающее напряжение (по абсолютной величине):



$$\sigma_{c_{\max}} = \frac{M_{\text{и}} h_2}{J_x} \quad (2.5.20)$$

Для *хрупких* материалов (например; чугуна) допускаемые напряжения на растяжение и сжатие различны:  $\sigma_{cp}$  в 3-5 раз больше  $\sigma_{pp}$ , поэтому для балок из таких материалов обычно применяют сечения, не симметричные относительно нейтральной оси. При этом сечение располагают таким образом, чтобы  $h_1 < h_2$ , то есть, чтобы обеспечивалось неравенство  $\sigma_{p_{\max}} < \sigma_{c_{\max}}$ .

В указанных случаях нужно составлять *два условия прочности*:

- по наибольшим растягивающим напряжениям:

$$\sigma_{p_{\max}} = \frac{M_{\text{и}} h_1}{J_z} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{zp}} \leq \sigma_{pp} \quad (2.5.21)$$

- по наибольшим сжимающим напряжениям:

$$\sigma_{c_{\max}} = \frac{M_{\text{и}} h_2}{J_z} = \frac{M_{\text{и}}}{W_{zc}} \leq \sigma_{cp} \quad (2.5.22)$$

где  $W_{zp}$  и  $W_{zc}$  – моменты сопротивления растянутого и сжатого волокон.

В формулы (2.5.21), (2.5.22) надо подставлять наибольшее (по абсолютной величине) значение  $M_{\text{и}}$ .

Если сечение балки симметрично относительно нейтральной оси (такие сечения целесообразно применять для балок из *пластичных* материалов), то есть:

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2},$$

то вместо двух формул (2.5.19) и (2.5.20) получим одну:

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}} h}{J_z} \cdot \frac{1}{2}. \quad (2.5.23)$$

Обозначив:

$$W_z = \frac{2J_z}{h}, \quad (2.5.24)$$

получим при *одинаковых* допускаемых напряжениях на растяжение и сжатие  $\sigma_p$  следующее *условие прочности*:

$$\sigma = \frac{M_{\text{и}}}{W_z} \leq \sigma_p. \quad (2.5.25)$$

Величина  $W_z$  называется *осевым моментом сопротивления* или *моментом сопротивления при изгибе*.

Момент сопротивления является *геометрической* характеристикой поперечного сечения балки, определяющей ее прочность при изгибе.

Для наиболее распространенных сечений (рис. 2.5.13) величины моментов сопротивления равны:

1. Прямоугольник высотой  $h$  и шириной  $b$ :

$$W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{h^2b}{6} \quad (2.5.26)$$

2. Круг диаметром  $d$ :

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3. \quad (2.5.27)$$

3. Круговое кольцо с наружным диаметром  $D$  и внутренним  $d$ :

$$W_z = W_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}. \quad (2.5.28)$$

4. Для *прокатных* сечений (двутавры, швеллеры и т.п.) значения  $W_z$  приведены в таблицах сортамента.

Определение минимально допускаемого поперечного сечения балки при его заданной форме при изгибе рассмотрим на примере, в котором требуется построить эпюры  $M_{\text{и}}$  и  $F_{Rt}$  для *двухопорной* балки, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 2.5.14, а, б, в) и подобрать сечение балки двутаврового профиля при данных  $l$ ,  $q$  и  $\sigma_p$ .

Вследствие симметрии нагружения балки опорные реакции равны между собой:

$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{ql}{2}.$$

*Изгибающий момент* в сечении с абсциссой  $x$  равен:

$$M_x = R_{Ay}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

$$0 \leq x \leq l.$$

Первый член в вышеприведенном уравнении представляет собой изгибающий момент от реакции, взятый со знаком «плюс», так как, мысленно закрепив балку в рассматриваемом сечении, можно убедиться, что от действия реакции часть балки слева от сечения изогнется выпуклостью вниз.

Второй член представляет собой изгибающий момент от равномерно распределенной нагрузки, расположенной левее проведенного сечения. Равнодействующая этой нагрузки равна  $qx$  и приложена в середине участка, то есть на расстоянии  $0,5x$  от сечения. Следовательно, мо-

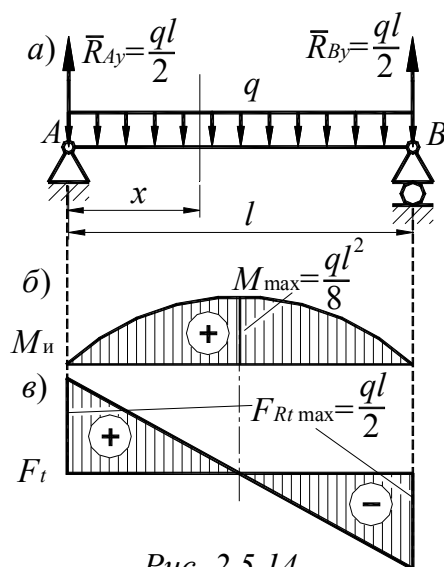


Рис. 2.5.14

мент от этой нагрузки равен  $\frac{qx^2}{2}$  со знаком «минус», так как такая нагрузка изогнет балку (мысленно закрепленную в сечении) выпуклостью вверх.

Полученное уравнение для изгибающего момента есть уравнение *параболы*.

Вычисляем три ординаты эпюры  $M_x$ :

$$x' = 0;$$

$$M'_x = 0;$$

$$x'' = \frac{l}{2};$$

$$M''_x = \frac{ql^2}{8};$$

$$x''' = l;$$

$$M'''_x = 0;$$

По этим данным строим эпюру  $M_x$ .

Максимальный изгибающий момент (в середине балки) равен:

$$M_{\max} = -\frac{ql^2}{8}.$$

Продифференцировав выражение для  $M_x$  и приравняв первую производную нулю, убедимся в том, что максимум  $M_x$  действительно имеет место посередине пролета балки.

*Поперечная сила* в сечении (как сумма сил, расположенных слева от сечения):

$$F_{Rt} = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$0 \leq x \leq l.$$

$$x' = 0;$$

$$F'_{Rt} = \frac{ql}{2};$$

$$x' = l;$$

$$F''_{Rt} = -\frac{ql}{2}.$$

Строим эпюру  $F_t$ .

Требуемый момент сопротивления:

$$W_z = \frac{M_{\max}}{\sigma_p} = \frac{ql^2}{8\sigma_p}.$$

Из таблиц сортамента выбираем двутавр, у которого момент сопротивления ближайший больший относительно определенного по последней формуле расчета.

## Лекция № 9 (2 часа).

### Сложное сопротивление. Изгиб с кручением

#### 2.7 Сложное сопротивление

##### 2.7.1 Общие положения

До сих пор рассматривались расчеты на прочность для простых видов деформации – когда материал находится или в *одноосном* напряженном состоянии (*растяжение, сжатие*), или *простейшем двухосном*, когда главные напряжения в каждой точке равны между собой по величине и противоположны по знаку (*сдвиг, кручение*).

На практике нередки случаи, когда в поперечных сечениях бруса возникают сразу *несколько внутренних силовых факторов*, например, кручение с изгибом и другие, более сложные, случаи напряженного состояния. Такие случаи принято называть *сложным сопротивлением*.

На рис. 2.7.1 изображен общий случай трехосного напряженного состояния. На этом рисунке показана площадка действия максимального касательного напряжения.

Ранее (см. раздел 2.2.2) было принято следующее правило обозначения *главных* напряжений:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

где величины  $\sigma$  – алгебраические величины.

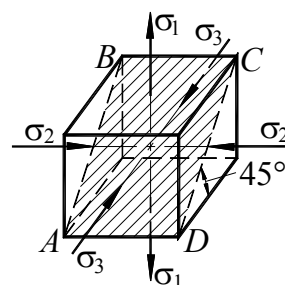


Рис. 2.7.1

##### 2.7.2. Теории прочности

Одной из важнейших задач инженерного расчета является *оценка прочности* детали по известному *напряженному состоянию в опасной точке поперечного сечения*.

Для *простых* видов деформаций эта задача решается сравнительно просто: по известным формулам определяют максимальные напряжения, которые затем сравнивают с опасными (предельными) для данного материала напряжениями, устанавливаемыми экспериментально.

Для обеспечения прочности материала требовалось, чтобы наибольшее нормальное напряжение (при растяжении, сжатии) или наибольшее касательное напряжение (при кручении) не превосходило соответствующую

щего *предельного* напряжения, значение которого установлено по полученному опытным путем, соответствующему *пределу текучести* (для пластичных материалов) или *пределу прочности* (для хрупких материалов).

В случае необходимости реализовать требуемый коэффициент безопасности максимальные напряжения сравнивают с *допускаемыми*.

Указанный подход к оценке прочности является вполне обоснованным, так как при растяжении и сжатии бруса имеет место однородное линейное напряженное состояние, а при прямом поперечном изгибе наиболее нагруженные точки также находятся, как правило, в условиях линейного напряженного состояния.

Для *сложного* напряженного состояния подобный метод оценки прочности непригоден. Дело в том, что для одного и того же материала, как показывают опыты, *опасное* состояние может наступить при *различных предельных значениях главных напряжений*  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  в зависимости от *соотношений* между ними. Экспериментально установить предельные величины главных напряжений в зависимости от соотношений между ними очень сложно не только из-за трудности постановки опытов, но и вследствие большого объема испытаний.

В случае *сложного* напряженного состояния конструкции, как правило, расчеты на прочность производят на основании теоретических разработок с использованием данных о механических свойствах материалов, получаемых при испытании на растяжение и сжатие (иногда используют также результаты опытов на кручение). Только в отдельных случаях для оценки прочности конструкции или ее элементов прибегают к моделированию. В исключительных, особо ответственных случаях вопрос о прочности решается натурными испытаниями опытных образцов конструкции.

Все существующие теоретические методы расчета основаны на гипотезах о преимущественном влиянии того или иного фактора на процесс перехода материала в предельное состояние. Суть применения этих гипотез для оценки прочности материала заключается в замене *фактического* напряженного состояния *эквивалентным* (равноопасным) ему линейным напряженным состоянием.

*Эквивалентными (равноопасными и равнопрочными)* называют такие два каких-либо напряженных состояния, которые при пропорциональном увеличении главных напряжений одновременно становятся *предельными*. В этом случае коэффициент безопасности для обоих напряженных состояний при указанных условиях будет одинаковым.

Приведение *сложного* напряженного состояния к эквивалентному ему *линейному* осуществляется заменой главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  эквивалентным напряжением, которое надо создать в *растянутом* образце, чтобы получить напряженное состояние, эквивалентное заданному.

Прочность оценивают при помощи сравнения *эквивалентных* напряжений с *предельными* при *растяжении* (*сжатии*) или непосредственно с *допускаемыми* напряжениями.

Выбранную за основу гипотезу о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора часто называют *теорией прочности*.

Существует множество теорий прочности, но для наиболее распространенных конструкционных материалов используются *пять теорий*:

- теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности);

- теория наибольших относительных линейных деформаций (вторая теория прочности);

- теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности);

- энергетическая теория формоизменения (четвертая теория прочности);

- теория прочности Мора (пятая теория прочности).

#### 2.7.2.1 Первая теория прочности

За *критерий прочности* принимается *наибольшее нормальное напряжение*.

Первая теория прочности может быть сформулирована следующим образом: *предельное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает величины предельного напряжения при одноосном напряженном состоянии*:

$$\sigma_{1п} = \sigma_{п}, \quad (2.7.1)$$

где  $\sigma_{1п}$  – предельное значение наибольшего (из трех) нормального напряжения (в момент разрушения),

$\sigma_{п}$  – предельное напряжение при одноосном сжатии или растяжении (предел прочности).

*Условие прочности*:

$$\sigma_1 \leq \sigma_p \quad (2.7.2)$$

где  $\sigma_1$  – фактическое значение наибольшего главного напряжения, возникающего в опасной точке детали;

$\sigma_p$  – допускаемое значение нормального напряжения, принимаемое для одноосного растяжения или сжатия.

*Прочность материала при сложном напряженном состоянии обеспечивается, если наибольшее нормальное напряжение не превосхо-*

дит допускаемого нормального напряжения, установленного для одноосного напряженного состояния.

Эта гипотеза учитывает лишь влияние наибольшего главного напряжения, пренебрегая влиянием двух других главных напряжений на прочность материала.

Первая теория прочности подтверждается экспериментальными данными для *хрупких* материалов.

Если материал имеет *различные* допускаемые напряжения на *растяжение* и *сжатие*, то вместо одного условия прочности (2.7.2) будем иметь *два* условия – по наибольшим растягивающим и сжимающим напряжениям:

$$\sigma_{p \max} \leq \sigma_{pp} \quad (2.7.3)$$

$$\sigma_{с \max} \leq \sigma_{ср} \quad (2.7.4)$$

### 2.7.2.2 Вторая теория прочности

Согласно второй гипотезе *основной причиной разрушения* материала является *наибольшая относительная линейная деформация*.

Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступит тогда, когда наибольшая по абсолютной величине линейная деформация  $\varepsilon_{\max}$  достигнет опасного значения, соответствующего предельному состоянию данного материала при растяжении или сжатии.

Условие *прочности* в рассматриваемом случае записывается так:

$$\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_p \quad (2.7.5)$$

Используя формулы (2.3.49) обобщенного закона Гука, выразим условие прочности (2.7.5) в напряжениях.

Так как из трех деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  наибольшей в алгебраическом смысле будет деформация  $\varepsilon_1$ , то:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}.$$

Имея в виду, что:

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E},$$

окончательно получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_p \quad (2.7.6)$$

Из *условия прочности* (2.7.6) видно, что с допускаемым напряжением нужно сравнивать не какое-либо из главных напряжений, а их

*комбинацию*, которая представляет собой некоторое напряжение, называемое *эквивалентным*.

Вторая теория учитывает влияние на прочность всех трех главных напряжений, однако применима она только для *хрупких* материалов (например, для легированного чугуна, высокопрочных сталей после низкого отпуска и т.д.).

### 2.7.2.3 Третья теория прочности

В качестве фактора, определяющего прочность материала, здесь принимается величина *наибольшего касательного напряжения*.

Предполагается, что прочность материала при сложном напряженном состоянии считается обеспеченной, если *наибольшее касательное напряжение не превосходит допускаемого касательного напряжения, установленного для одноосного напряженного состояния*:

$$\tau_{\max} \leq \tau_p \quad (2.7.7)$$

В разделе 2.3.7.3 было показано, что при двухосном напряженном состоянии наибольшие касательные напряжения имеют место в сечениях под углом  $\alpha = 45^\circ$  к направлению главных напряжений и равны полуразности этих напряжений.

В случае объемного напряженного состояния максимальные касательные напряжения имеют место в плоскости *ABCD*; их величина равна (рис. 2.7.1):

$$\tau'_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}.$$

Допускаемое касательное напряжение  $\tau_p$  при одноосном напряженном состоянии связано с допускаемым нормальным напряжением  $\sigma_p$  соотношением, вытекающим из предыдущей формулы, если положить в ней  $\sigma_3$  равные нулю:

$$\tau_p = \frac{\sigma_p}{2}.$$

Таким образом, *условие прочности* по третьей гипотезе, выраженное в нормальных напряжениях, имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_p \quad (2.7.8)$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (2.7.8), представляет собой некоторое напряжение, называемое *эквивалентным*.

Его следует понимать как *напряжение*, которое следует создать в *растянутом (или сжатом) образце*, чтобы его прочность была *одинаковой с прочностью образца, находящегося в условиях сложного напряженного состояния*.



Чтобы сравнить эту гипотезу с опытными данными, напомним по третьей гипотезе также условие перехода материала в предельное состояние:

$$\sigma_{1п} - \sigma_{3п} = \sigma_{п} \quad (2.7.9)$$

где  $\sigma_{1п}$  и  $\sigma_{3п}$  – значения главных напряжений в предельном состоянии;  
 $\sigma_{п}$  – предельное напряжение одноосного сжатия или растяжения.

Для случая часто встречающегося на практике случая *плоского напряженного состояния* (рис. 2.7.2), для которого:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma,$$

$$\tau_{\alpha} = \tau,$$

$$\sigma_{\beta} = 0.$$

Тогда, на основании формулы (2.3.44):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

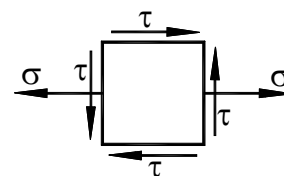


Рис. 2.7.2

Условие прочности (2.7.7) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_p. \quad (2.7.10)$$

Для случая чистого сдвига (кручения), когда  $\sigma_1 = \tau$  и  $\sigma_3 = -\tau$ , по формуле (2.7.9) получаем:

$$2\tau_T = \sigma_T$$

или

$$\tau_T = 0,5\sigma_T,$$

где  $\tau_T$  – предел текучести при чистом сдвиге;

$\sigma_T$  – предел текучести при одноосном растяжении (сжатии).

Опыты для большинства сталей дают значение:

$$\tau_T \approx 0,6\sigma_T.$$

Третья теория прочности хорошо подтверждается экспериментальными данными для *пластичных* материалов, *одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию*. Ее недостатком является то, что она *неприменима* при расчете деталей из *хрупких* материалов.

#### 2.7.2.4 Четвертая теория прочности

Предполагается, что прочность материала при сложном напряженном состоянии обеспечивается в том случае, если *удельная потенциальная энергия формоизменения не превосходит допускаемой удельной по-*

тенциальной энергии формоизменения, установленной для одноосного напряженного состояния:

$$u_{\phi} \leq u_{\phi p} \quad (2.7.11)$$

Удельная потенциальная энергия деформации при объемном напряженном состоянии равна (см. раздел 2.3.8):

$$u_p = \frac{\left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]}{2E}. \quad (2.7.12)$$

Эта величина всегда положительна. Поэтому энергетическая гипотеза, так же как и третья, не учитывает различия между растяжением и сжатием, другими словами, пользуясь этой гипотезой, приходится принимать:

$$\sigma_{pp} = \sigma_{cp} = \sigma_p.$$

Допускаемая удельная потенциальная энергия при одноосном напряженном состоянии при  $\sigma_1 = \sigma_p$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  определяется по той же формуле (2.7.12):

$$u_{pp} = \frac{\sigma_p^2}{2E}. \quad (2.7.13)$$

Подставив значения  $u_p$  из формулы (2.7.12) и  $u_{pp}$  из формулы (2.7.13) в формулу (2.7.11), получим:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_p^2$$

или

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_p. \quad (2.7.14)$$

Опыты показывают, что лучшие результаты получаются, если в качестве критерия прочности принимать *не всю* энергию деформации, а *лишь ту ее часть, которая связана с изменением формы тела*. Это условие проще всего записать, полагая в формуле (2.7.14)  $\mu=0,5$ , так как при  $\mu=0,5$  объем тела не изменяется (см. раздел 2.3.7.5). Тогда *условие прочности* (в данном случае это – *условие пластичности*) по энергетической теории формоизменения (четвертой теории прочности) примет вид:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_p. \quad (2.7.15)$$

В частном случае для плоского напряженного состояния ( $\sigma_3=0$ ) получим:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leq \sigma_p. \quad (2.7.16)$$

Для сопоставления с опытными данными напомним предельное условие по этой гипотезе для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{1п}^2 + \sigma_{2п}^2 - \sigma_{1п}\sigma_{2п} = \sigma_{п}^2, \quad (2.7.17)$$

где  $\sigma_{1п}$  и  $\sigma_{2п}$  – предельные значения главных напряжений;

$\sigma_{п}$  – предельное значение напряжения при одноосном растяжении (сжатии).

Для случая *плоского* напряженного состояния из (2.7.17) получим:

$$3\tau_T^2 = \sigma_T^2,$$

откуда:

$$\tau_T \approx 0,58\sigma_T,$$

что близко совпадает с опытными данными.

*Уравнение прочности* принимает вид:

$$\sigma_{эКВ} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_p \quad (2.7.18)$$

*Четвертая* теория прочности дает для *пластичных* материалов *более точное*, по сравнению с *третьей* теорией, совпадение теоретических расчетов с экспериментальными данными, благодаря чему она получила большое распространение.

Для расчета деталей из *хрупких* материалов данная теория прочности *неприменима*.

### 2.7.2.5 Пятая теория прочности

Рассматриваемые выше теории прочности дают удовлетворительные результаты:

- только для *хрупкого* разрушения (*первая* теория),
- только для *вязкого* (*третья* или *четвертая* теории).

Но все они не учитывают различной прочности материалов на растяжение и сжатие.

*Пятая* теория прочности (теория прочности Мора) позволяет учесть различное сопротивление материалов растяжению и сжатию.

*Условие прочности*, по теории Мора, имеет вид:

$$\sigma_{эКВ} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq \sigma_{pp} \quad (2.7.19)$$

где  $\nu = \frac{\sigma_{п.р}}{\sigma_{п.с}};$

$\sigma_{п.р}$  – предельное напряжение при растяжении;

$\sigma_{п.с}$  – предельное напряжение при сжатии.

Для *пластичных* материалов *предельные напряжения* равны соответствующим *пределам текучести*:

$$\sigma_{п.р} = \sigma_{т.р};$$

$$\sigma_{п.с} = \sigma_{т.с}.$$

Для *хрупких* материалов *предельные напряжения* равны *пределам прочности*:

$$\sigma_{п.р} = \sigma_{пч.р};$$

$$\sigma_{п.с} = \sigma_{пч.с}.$$

Таким образом, теория Мора может рассматриваться и как теория пластичности, и как теория разрушения.

При  $\nu=1$  теория прочности Мора совпадает с третьей теорией.

Для *хрупких* материалов теория Мора дает удовлетворительные результаты, хотя и приводит к завышенным размерам сечений.

Наилучшие результаты дает теория Мора при  $\sigma_1 > 0$  и  $\sigma_3 < 0$ .

#### 2.7.2.6 Рекомендации по применению теорий прочности

На основании имеющихся опытных данных можно считать, что для *пластичных* материалов при трехосном напряженном состоянии удовлетворительные результаты дают *четвертая* и *третья* теории прочности.

Что же касается *хрупких* материалов, то для них рекомендуется *пятая* теория прочности (теория прочности Мора).

#### 2.7.3 Расчеты на прочность и жесткость при сложном сопротивлении

Рекомендуется следующий порядок решения таких задач.

Вначале с помощью *метода сечений* определяют *внутренние силовые факторы*, возникающие в поперечных сечениях стержня.

При *сложной* нагрузке рекомендуется строить *эпюры* внутренних усилий, позволяющие определить положение *опасного сечения*.

В некоторых случаях по эпюрам внутренних усилий не представляется возможным с полной уверенностью установить, какое сечение является опасным, при этом по эпюрам устанавливают два (а иногда и более) *предположительно опасных* сечения и для каждого из них производят расчет.

После этого на основании принципа независимости действия сил (см. раздел 2.2.4) определяют *нормальные* и *касательные* напряжения от *каждого* внутреннего усилия *отдельно*, пользуясь полученными в предыдущих разделах формулами.

Исследуя *распределение* напряжений по *сечению*, устанавливают *опасную* (или предположительно опасную) точку, для которой и составляют *условие прочности*.

Если окажется, что в опасной точке имеет место *одноосное* напряженное состояние (одноосное растяжение или сжатие), то для расчета на прочность достаточно сопоставить возникающее в этой точке суммар-

ное (то есть от всех внутренних усилий) нормальное напряжение с допускаемым  $\sigma_{pp}$  или  $\sigma_{cp}$ .

В случае же, если напряженное состояние в опасной точке является *двухосным* (при расчете бруса случаи трехосного напряженного состояния не встречаются), расчет следует выполнять, применяя ту или иную *теорию прочности*.

*Выбор теории прочности* определяется в первую очередь состоянием материала (*пластическое* или *хрупкое*).

При необходимости определения того или иного перемещения также используется *принцип независимости действия сил* (сложение перемещения производится, как правило, геометрически).

### 2.7.3.1 Изгиб с кручением

В конструкциях различных механизмов очень часто встречаются детали, работающие на совместное действие изгиба и кручения. Характерным примером таких деталей являются валы самых разнообразных устройств.

Силы, которые передаются на вал механизма, в общем случае приводят к появлению в поперечных сечениях вала крутящего момента  $T_k = T_x$ , изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ , а также поперечных сил  $F_{tx}$  и  $F_{ty}$ . Под действием указанных силовых факторов в сечениях возникают нормальные (от изгиба) и касательные (от изгиба и кручения) напряжения. Величиной касательных напряжений от изгиба обычно пренебрегают, поскольку она незначительна по сравнению с величиной касательных напряжений от кручения. Так же пренебрегают сжимающих сил на прочность вала. Поэтому фактически рассматривают сочетание *кручения с чистым изгибом*.

Рассмотрим вал-червяк круглого поперечного сечения (рис. 2.7.5).

Решение этой задачи производим с использованием принципа независимости действия сил.

#### 2.7.3.1.1 Определение составляющих реакций в опорах

Силовую картину рассмотрим отдельно в плоскостях:

- вертикальной ( $YOZ$ );
- горизонтальной ( $XOZ$ ).

Плоскость  $YOZ$ :

1. Составим уравнение моментов, действующих на вал относительно опоры  $A$ , исходя из условия равновесия системы.

Единого *правила знаков* при решении подобных задач не существует. Условимся, для определенности, при решении подобных задач, считать

положительным момент, действующий по часовой стрелке, и отрицательным – действующий против часовой стрелки.

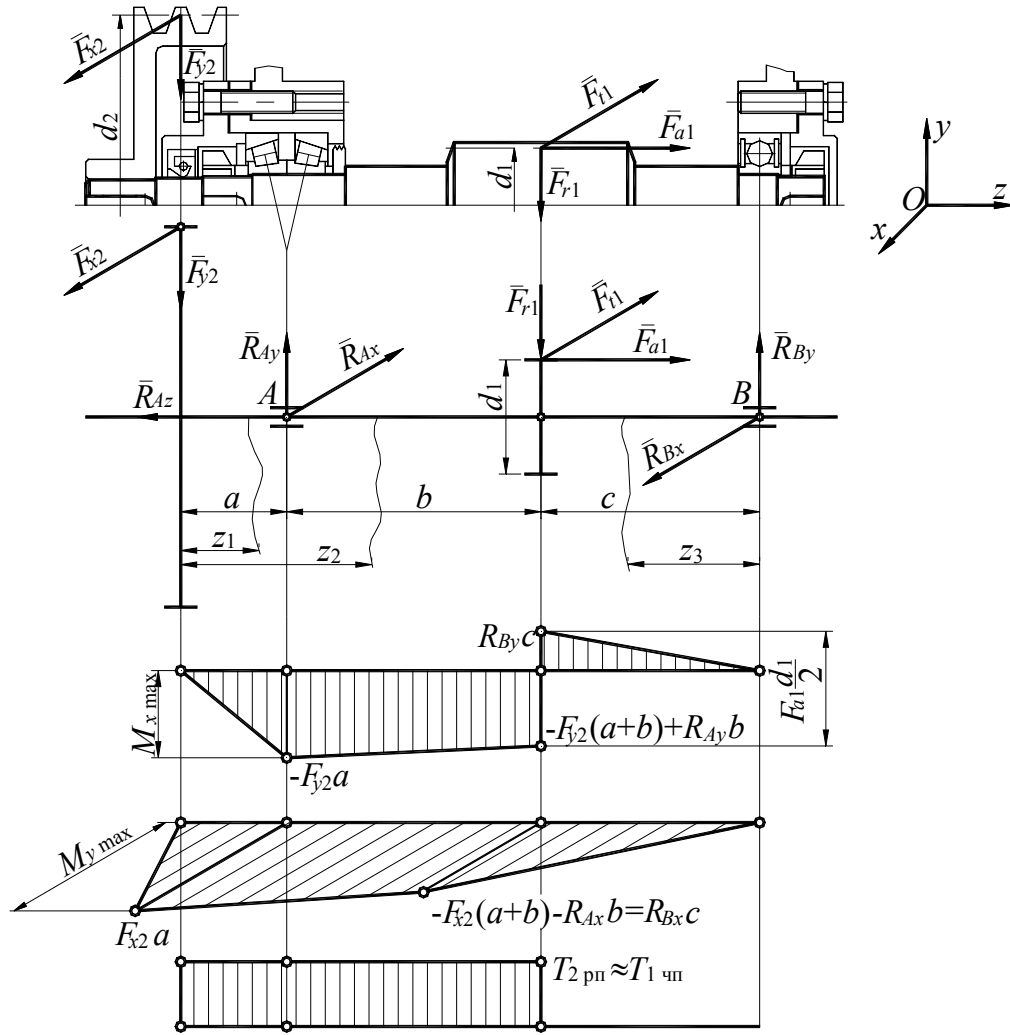


Рис. 2.7.5

Тогда:

$$\Sigma M_A = -F_{y2}a + F_{r1}b + F_{a1}\frac{d_1}{2} - R_{By}(b+c) = 0, \quad (2.7.36)$$

откуда:

$$R_{By} = \frac{-F_{y2}a + F_{r1}b + F_{a1}\frac{d_1}{2}}{b+c}. \quad (2.7.37)$$

2. Исходя из условия равновесия системы, составим уравнение суммы сил, действующих на вал:

$$\Sigma F_y = -F_{y2} + R_{Ay} - F_{r1} + R_{By} = 0, \quad (2.7.38)$$

откуда:

$$R_{Ay} = F_{r1} - R_{By} + F_{y2}. \quad (2.7.39)$$

$$\Sigma F_z = F_{a1} - R_{Az} = 0, \quad (2.7.40)$$

откуда:

$$F_{a1} = R_{Az}. \quad (2.7.41)$$

Плоскость  $XOZ$ :

1. Составим уравнение моментов, действующих на вал относительно опоры  $A$ , исходя из условия равновесия системы.

$$\Sigma M_A = -F_{x2}a - F_{t1}b + R_{Bx}(b + c) = 0, \quad (2.7.42)$$

откуда:

$$R_{Bx} = \frac{F_{x2}a + F_{t1}b}{b + c}. \quad (2.7.43)$$

2. Исходя из условия равновесия системы, составим уравнение суммы сил, действующих на вал:

$$\Sigma F_x = F_{x2} - R_{Ax} - F_{t1} + R_{Bx} = 0, \quad (2.7.44)$$

откуда:

$$R_{Ax} = F_{x2} - F_{t1} + R_{Bx}. \quad (2.7.45)$$

### 2.7.3.1.2 Построение эпюр изгибающих моментов

Определим изгибающие моменты в сечениях вала, которые численно равны алгебраической сумме изгибающих моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Плоскость  $YOZ$ :

$$\Sigma M_{z1} = -F_{y2}z_1, \quad (2.7.46)$$

где  $0 \leq z_1 \leq a$ .

При  $z_1=0$   $M_{z1}=0$ ;

при  $z_1=a$   $M_{z1}=-F_{y2}a$ ;

$$\Sigma M_{z2} = -F_{y2}z_2 + R_{Ay}(z_2 - a), \quad (2.7.47)$$

где  $a \leq z_2 \leq a + b$ .

При  $z_2=a$   $M_{z2}=-F_{y2}a$ ;

при  $z_2=a + b$   $M_{z2}=-F_{y2}(a + b) + R_{Ay}b$ ;

$$\Sigma M_{z3} = R_{By}z_3, \quad (2.7.48)$$

где  $0 \leq z_3 \leq c$ .

При  $z_3=0$   $M_{z3}=0$ ;

при  $z_3=c$   $M_{z3}=R_{By}c$ ;

По полученным данным строится эпюра  $M_x$ .

Плоскость  $XOZ$ :

$$\Sigma M_{x1} = -F_{x2}z_1, \quad (2.7.49)$$

где  $0 \leq z_1 \leq a$ .

При  $z_1=0$   $M_{z1}=0$ ;

при  $z_1=a$   $M_{z1}=-F_{x2}a$ ;

$$\Sigma M_{z2} = F_{x2}z_2 - R_{Ax}(z_2 - a), \quad (2.7.50)$$

где  $a \leq z_2 \leq a + b$ .

При  $z_2=a$   $M_{z2}=F_{x2}a$ ;

при  $z_2=a+b$   $M_{z2}=F_{x2}(a+b) - R_{Ax}b$ ;

$$\Sigma M_{z3} = R_{Bx}z_3, \quad (2.7.51)$$

где  $0 \leq z_3 \leq c$ .

При  $z_3=0$   $M_{z3}=0$ ;

при  $z_3=a$   $M_{z3}=R_{Bx}c$ .

По полученным данным строится эпюра  $M_y$ .

#### 2.7.3.1.3 Построение эпюр крутящих моментов

Определим крутящие моменты в сечениях вала, которые численно равны алгебраической сумме крутящих моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

$$\Sigma T_{z1} = T_{2 \text{ рп}}, \quad (2.7.52)$$

где  $0 \leq z_1 \leq a$ .

При  $z_1=0$   $T_{z1} = T_{z \text{ рп}}$ ;

при  $z_1=a$   $T_{z1} = T_{z \text{ рп}}$ ;

$$\Sigma T_{z2} = T_{2 \text{ рп}}, \quad (2.7.53)$$

где  $a \leq z_2 \leq a + b$ .

При  $z_2=a$   $T_{z2} = T_{z \text{ рп}}$ ;

при  $z_2=a+b$   $T_{z2} = T_{z \text{ рп}}$ ;

$$\Sigma T_{z3} = 0, \quad (2.7.54)$$

где  $0 \leq z_3 \leq c$ .

При  $z_3=0$   $T_{z3}=0$ ;

при  $z_3=a$   $T_{z3}=0$ ;

По полученным данным строится эпюра крутящих моментов  $T$ .

#### 2.7.3.1.4 Проверка прочности вала

Сопоставляя полученные эпюры, находим, что наиболее опасным являются сечение под подшипником  $A$ .

В каждом сечении круглого вала имеет место прямой изгиб от действия *результатирующего* изгибающего момента:



$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (2.7.55)$$

Нормальные напряжения от этого момента достигают наибольших значений в крайних волокнах вала и определяются по формуле:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{и}}}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}. \quad (2.7.56)$$

В любой точке контура поперечного сечения вала действуют также максимальные касательные напряжения от кручения, связанные с величиной крутящего момента соотношением:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{2W}. \quad (2.7.57)$$

В формулах (2.7.56) и (2.7.57):

$W$  – осевой момент сопротивления сечения вала.

Прочность вала в опасном сечении проверяют по формулам приемлемых теорий прочности.

Воспользуемся, например, условием прочности (2.7.10), исходя из третьей теории.

Подставив в это условие выражения (2.7.56) и (2.7.57) для напряжений  $\sigma$  и  $\tau$ , получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + T^2}}{W} \leq \sigma_p. \quad (2.7.58)$$

Если исходить из четвертой теории прочности, то согласно условию (2.7.18), после подстановок (2.7.56) и (2.7.57) получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75T^2}}{W} \leq \sigma_p. \quad (2.7.59)$$

При проверочных расчетах, когда диаметр вала известен, коэффициент безопасности определяется, как:

$$S = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\text{экв}}}, \quad (2.7.60)$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести.

По третьей теории прочности значение  $\sigma_{\text{экв}}$  определяется выражением (2.7.10). Для этого случая:

$$S = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} + \frac{\tau^2}{(0,5\sigma_T)^2}}}.$$

В соответствии с третьей теорией  $\tau_T = 0,5\sigma_T$ , поэтому:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} + \frac{\tau^2}{\tau_T^2}}}. \quad (2.7.61)$$

Формула (2.7.61) после преобразований принимает вид:

$$S = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}}, \quad (2.7.62)$$

где  $S_\sigma = \frac{\sigma_T}{\sigma}$  — коэффициент безопасности по нормальным напряжениям;

$S_\tau = \frac{\tau_T}{\tau}$  — коэффициент безопасности по касательным напряжениям.

Следует отметить, что зависимости (2.7.61) и (2.7.62) остаются в силе и для четвертой теории прочности, только в этом случае:

$$\tau_T \approx 0,58\sigma_T. \quad (2.7.63)$$

## Лекция № 10 (2 часа).

### Сложное сопротивление. Изгиб с кручением

#### 2.8 Местные напряжения

##### 2.8.1 Виды местных напряжений

Изложенные в предыдущих разделах методы расчетов на прочность для различных видов деформаций предполагают определенную схематизацию элементов конструкций и внешней нагрузки. Так, внешняя нагрузка переносится на ось бруса и прикладывается к ней в виде сил и пар. Полученная таким образом нагрузка на ось может, очевидно, соответствовать действительным способам приложения внешних сил к поверхности бруса. Однако распределение напряжений внутри бруса в том и другом случаях будет не везде одинаковым.

При решении практических задач указанной выше схематизацией пользуются весьма широко. Расчетные зависимости позволяют достаточно точно определять основные напряжения в брусе и дают *погрешности* только в тех областях бруса, которые *непосредственно прилегают к месту приложения нагрузок*.

Дополнительные напряжения, накладывающиеся на основные в отмеченных областях, носят название *местных напряжений*.

## 2.8.2 Концентрация напряжений

Резкое изменение размеров сечения, ослабления его всякого рода отверстиями и выточками также приводят к довольно значительным местным отклонениям от общего закона распределения напряжений. Это явление носит общее название *концентрации напряжений*, а причина, вызвавшая его (отверстие, выточка и т.д.), – *концентратора напряжений*.

Определение напряжений в местах концентрации производится экспериментально или методами теории упругости. Поскольку аналитическое решение указанной задачи довольно сложно и не является предметом данного курса, рассмотрим лишь основные результаты исследований применительно к каждому из основных видов деформаций.

Предварительно остановимся на некоторых понятиях и определениях, встречающихся при расчетах на прочность с учетом концентрации напряжений.

*Номинальным* называют такое напряжение, которое определяется по общим формулам сопротивления материалов в предположении, что концентрация напряжений отсутствует.

Например, для полосы с отверстием:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (2.10.1)$$

где  $A$  – площадь ослабленного сечения.

Количественной характеристикой концентрации напряжений является *коэффициент концентрации*.

Различают *теоретический* и *эффективный* коэффициенты концентрации.

*Отношение максимального местного напряжения к номинальному* называется *теоретическим коэффициентом концентрации напряжений*:

$$\alpha_{\text{к}\sigma} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma}, \quad (2.10.2)$$

$$\alpha_{\text{к}\tau} = \frac{\tau_{\text{max}}}{\tau}.$$

*Теоретический коэффициент* концентрации напряжений, определяемый в предположении, что для материала при деформации выполняется закон Гука, во многих случаях не дает правильного представления о влиянии концентрации напряжений на прочность детали, так как он зависит только от вида концентратора и его размеров и не учитывает свойств материала.

Опыты показывают, что для большинства материалов снижение прочности при наличии концентрации напряжений получается меньше чем в  $\alpha_{\text{к}}$  раз. Это снижение определяется экспериментально, как отношение

предела прочности  $\sigma_B$  детали без концентрации напряжений к пределу прочности  $\sigma_{B.K}$  детали, имеющей заданный концентратор напряжений:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_B}{\sigma_{B.K}}, \quad (2.10.3)$$

$$k_\tau = \frac{\tau_B}{\tau_{B.K}}.$$

Коэффициент  $k$  называется *эффективным коэффициентом концентрации напряжений*.

Опыты показывают, что при *статических* нагрузках для деталей из *пластичных* материалов практически  $k=1$ , то есть для таких нагрузок концентрация напряжений должна учитываться лишь при расчете деталей из *хрупких* или *малопластичных* материалов.

При действии *переменной* нагрузки (расчет на выносливость) концентрация напряжений учитывается для *всех* материалов.

Значения  $\alpha_k$  и  $k$  приводятся в справочниках.

### 2.8.2.1 Концентрация напряжений при растяжении (сжатии)

На рис. 2.10.1, *а* показана эпюра нормальных растягивающих напряжений в сечении широкой полосы, ослабленном небольшим круглым отверстием, а на рис. 2.10.1, *б* – в сечении, ослабленном полукруглыми выкружками.

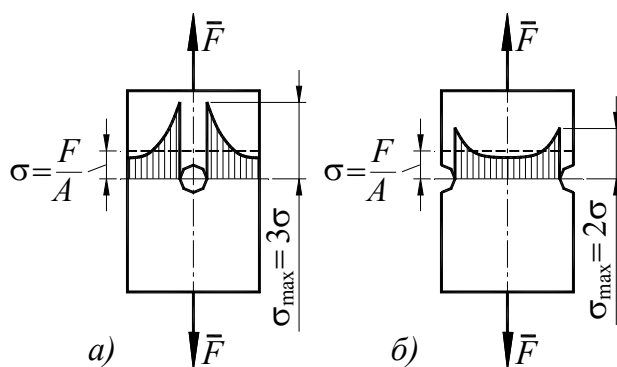


Рис. 2.10.1

Максимальное напряжение у края отверстия  $\sigma_{\max}$

(рис. 2.10.1, *а*) в три раза больше среднего (номинального), вычисленного по формуле:

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

Для широкой полосы с небольшими полукруглыми ослаблениями по краям максимальное напряжение в два раза больше номинального (рис. 2.10.1, *б*). При этом чем меньше радиус, тем в большей степени максимальные напряжения отличаются от номинальных.

Чтобы уменьшить влияние концентрации напряжений на прочность элементов конструкций, следует по возможности избегать глубоких выточек, выкружек, резких переходов сечений и т.п. Необходимо также

стремиться к тщательной обработке поверхностей деталей, особенно изготовленных из высокопрочных закаленных сталей.

### 2.8.2.2 Концентрация напряжений при изгибе

В местах резкого изменения формы или размеров поперечных сечений балки наблюдается концентрация напряжений. На рис. 2.10.2 приведены эпюры нормальных напряжений, возникающих в балке при отсутствии концентрации напряжений (рис. 2.10.2, а) и при наличии концентрации (рис. 2.10.2, б).

В последнем случае вследствие резкого изменения сечения в его крайних волокнах действуют максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \alpha_{\text{к}\sigma} \sigma_{\text{н}},$$

где  $\sigma_{\text{н}} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{Fl}{W_x}$  [см. формулу (2.6.25)].

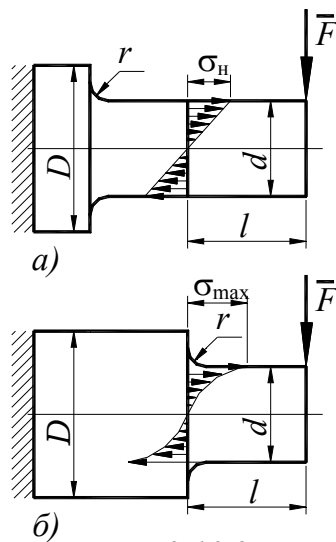


Рис. 2.10.2

Величина *теоретического* коэффициента концентрации напряжений в данном случае зависит от соотношения диаметров  $d$  и  $D$  сопрягаемых участков балки, а также от радиуса закругления  $r$  в месте сопряжения этих участков.

Для определения величины *эффективного* коэффициента концентрации проводят испытания на изгиб специальных образцов. Установив значения временного сопротивления материала образца без концентрации напряжений ( $\sigma_{\text{в.и}}$ ) и с концентрацией ( $\sigma_{\text{в.и.к}}$ ), находят  $k$ :

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{в.и}}}{\sigma_{\text{в.и.к}}}.$$

Чтобы уменьшить концентрацию напряжений в деталях, испытывающих деформацию изгиба, необходимо предусматривать плавные переходы от одного размера сечения к другому, закругления в углах, уменьшение жесткости более массивной части детали в месте перехода, и т.п. Все это приводит к заметному снижению коэффициента концентрации и, следовательно, благоприятно сказывается на прочности деталей.

### 2.8.2.3 Концентрация напряжений при кручении

Местное увеличение напряжений при кручении вызывается резким изменением контура поперечного или продольного сечения вала (наличием отверстия, резьбы, выточки, канавки и т.д.).

Как при растяжении или изгибе, величина максимального касательного напряжения в зоне концентрации определяется произведением номинального напряжения  $\tau_n$  на коэффициент  $\alpha_{кт}$ , то есть:

$$\tau_{\max} = \alpha_{кт} \tau_n.$$

Значение  $\tau_n$  вычисляют для наименьшего сечения по обычным формулам сопротивления материалов. Например, при расчете круглых валов используется зависимость (2.6.9):

$$\tau_{\max} = \frac{T_k}{W_p}, \quad (2.10.4)$$

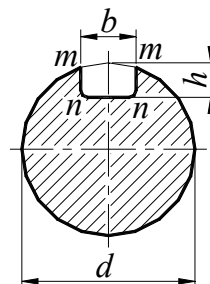


Рис. 2.10.3

Рассмотрим концентрацию напряжений у продольных шпоночных пазов. Если шпоночный паз имеет прямоугольное сечение (рис. 2.10.3), то в выступающих углах  $m$  касательные напряжения равны нулю, а во входящих углах  $n$  напряжения теоретически бесконечно велики (практически же их величина ограничена пределом текучести – если вал изготовлен из пластичного материала).

Как показали исследования, коэффициент концентрации напряжений для паза при заданных глубине его и размерах вала зависит главным образом от кривизны поверхности по дну паза. Поэтому углы  $n$  необходимо скруглять, причем с увеличением радиуса скругления концентрация напряжений будет уменьшаться. Так, с увеличением радиуса от 0,1 до 0,5 глубины паза коэффициент  $\alpha_k$  снижается более чем в 2 раза.

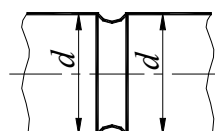


Рис. 2.10.4

Если вал имеет поперечную кольцевую выточку полукруглого сечения с очень малым радиусом (рис. 2.10.4), то касательное напряжение в глубине выточки вдвое больше, чем на поверхности вала без выточки.

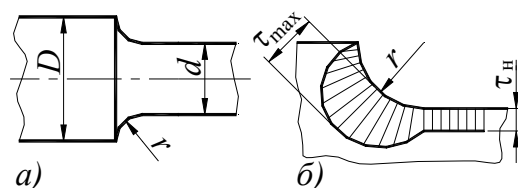


Рис. 2.10.5

На практике часто применяют цилиндрические валы с различными диаметрами на разных участках, причем участки сопрягаются кольцевыми выкружками (рис. 2.10.5, а). При кручении таких валов в начале закругления имеет место высокая концентрация напряжений (эпюра касательных напряжений в зоне концентрации показана на рис. 2.10.5, б). Для случая, когда  $\frac{D}{d} = 2$  и  $\frac{2r}{d} = 0,04$ , величина теоретического коэффициента концентрации  $\alpha_k = 2,4$ .

Чтобы уменьшить концентрацию напряжений, следует избегать резких изменений контура сечения, применяя в местах ступенчатого

изменения диаметра вала переходные кривые возможно большего радиуса. Влияние концентрации напряжений на прочность деталей машин, испытывающих деформацию растяжения (сжатия), изгиба или кручения, проявляется примерно одинаково.

Опыты показывают, что для *пластичных* материалов концентрация напряжений при статических нагрузках не представляет опасности, поскольку за счет текучести в зоне концентрации происходит перераспределение (выравнивание) напряжений. Величина эффективного коэффициента концентрации  $k$  в этом случае близка к единице.

*Хрупкие* материалы, напротив, весьма чувствительны к концентрации напряжений. Например, разрушение при кручении ступенчатого вала, изготовленного из закаленной стали, может произойти и при статической нагрузке, так как вследствие концентрации напряжений в местах перехода двух смежных диаметров возможно появление трещин. Поэтому в расчетах на статическую прочность деталей из хрупких и малопластичных материалов необходимо учитывать концентрацию напряжений, причем для таких материалов эффективный коэффициент концентрации  $k$  весьма близок по своему значению к теоретическому  $\alpha_k$ .

В случае *динамических* нагрузок концентрация напряжений существенно снижает прочность деталей как из хрупких, так и пластичных материалов, что необходимо учитывать в практических расчетах.

### 2.8.3 Контактные напряжения

При взаимном сжатии двух соприкасающихся тел в зоне контакта возникают *местные* напряжения. Вследствие деформации материала в месте соприкосновения возникает *площадка* контакта, по которой и происходит передача давления. Материал вблизи такой площадки, не имея возможности свободно деформироваться, испытывает объемное напряженное состояние. Если *первоначальный* контакт тел происходит в *точке* или по *линии*, то такие напряжения называют *контактными*.

В результате деформации контактирующих тел начальный точечный или линейный контакт переходят в контакт по некоторой малой площадке. Давление, передаваемое от одной детали к другой, распределено по контактной площадке неравномерно.

Определение контактных напряжений и деформаций производится методами теории упругости при следующих *допущениях*:

- а) в зоне контакта возникают только упругие деформации, следующие закону Гука;
- б) линейные размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусами кривизны соприкасающихся поверхностей;

в) силы давления, распределенные по поверхности контакта, нормальны к этим поверхностям;

г) на поверхности контакта возникают только нормальные напряжения.

Как доказывается в теории упругости, при этих допущениях силы давления распределяются по площадке контакта, имеющей в общем случае форму эллипса. Максимальное давление возникает в центре площадки контакта.

Контактные напряжения играют основную роль при расчете шариковых и роликовых подшипников, зубчатых колес, элементов кулачковых механизмов и т. д.

Ниже приведены (без вывода) некоторые расчетные формулы для частных случаев контактной деформации. Коэффициент Пуассона  $\mu$  принят равным 0,3.

1. При взаимном давлении *двух упругих шаров* диаметрами  $d_1$  и  $d_2$  (рис. 2.10.6) образуется круглая площадка контакта, радиус которой  $a$  может быть определен по формуле:

$$a = 0,6983 \sqrt{F \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}} \quad (2.10.5)$$

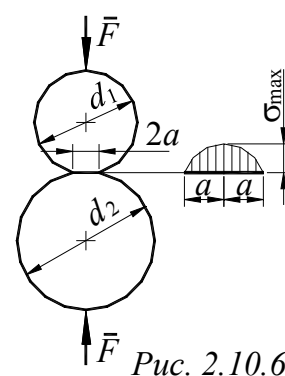


Рис. 2.10.6

Максимальное давление, следовательно, и сжимающее напряжение у поверхности контактирующих тел в центре площадки определяется по формуле:

$$\sigma_{\max} = 0,9783 \sqrt{F \frac{(d_2 + d_1)^2}{d_1^2 d_2^2} \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2}} \quad (2.10.6)$$

Формула (2.10.6) справедлива и для случая, когда *шар* диаметром  $d_1$  *лежит на вогнутой шаровой поверхности* диаметром  $d_1$  (рис. 2.10.7), только в этом случае значение  $d_2$  следует взять с *обратным* знаком. В результате получим:

$$\sigma_{\max} = 0,9783 \sqrt{F \frac{(d_2 - d_1)^2}{d_1^2 d_2^2} \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2}} \quad (2.10.7)$$

По сравнению с предыдущим случаем напряжения получаются меньшими.

В случае давления *шара на плоскость* напряжения определяют по формуле (2.10.6), если принять в ней значение  $d_2$  бесконечно большим:

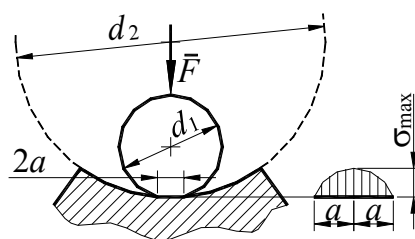


Рис. 2.10.7



$$\sigma_{\max} = 0,9783 \sqrt{F \frac{1}{d^2} \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2}} \quad (2.10.8)$$

2. Контакт *цилиндрических тел с параллельными образующими бесконечно большой длины* (рис. 2.10.8).

При равномерно распределенной нагрузке  $q$  площадка касания имеет вид узкого прямоугольника, ширина которого равна:

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{r_1 r_2}{r_2 + r_1} \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}}. \quad (2.10.9)$$

Максимальное напряжение сжатия определяется по формуле:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{q \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2} \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (2.10.10)$$

В случае давления *цилиндра на деталь с вогнутой цилиндрической поверхностью* (рис. 2.10.9) значение  $\sigma_{\max}$  определяют по формуле:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{q \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (2.10.11)$$

Подставив в формулу (2.10.10) величину  $R_2 = \infty$ , получим выражение для  $\sigma_{\max}$  в случае взаимного давления цилиндра и детали с плоской поверхностью (рис. 2.10.10):

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{q}{r_1} \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (2.10.12)$$

На основании формул для определения  $\sigma_{\max}$  нетрудно установить, что контактные напряжения не являются линейной функцией нагрузки, с ростом сил они возрастают все медленнее. Это объясняется тем, что с увеличением нагрузки увеличивается и площадка контакта.

Следует обратить внимание на следующее: если размеры площадки контакта окажутся сопоставимыми с величиной радиусов кривизны со-

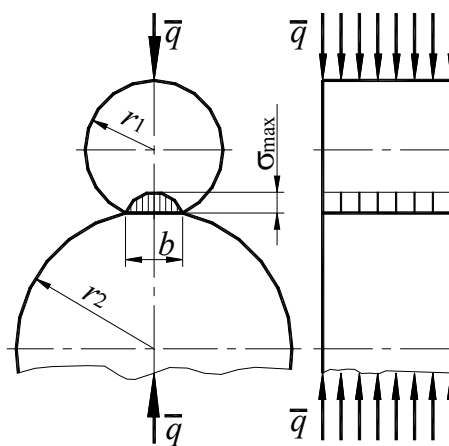


Рис. 2.10.8

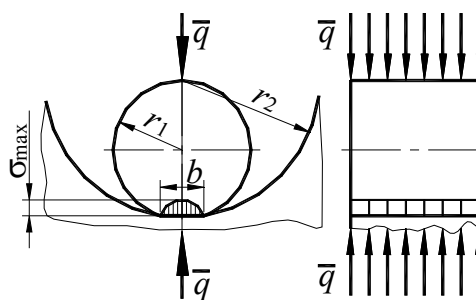


Рис. 2.10.9

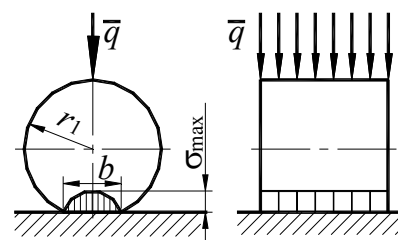


Рис. 2.10.10

прикасающихся поверхностей, то приведенные выше расчетные зависимости применять нельзя.

Если начальный контакт происходит по некоторой *площадке* конечных размеров, то возникающие напряжения называют принято *напряжениями смятия* (рис. 2.10.11).

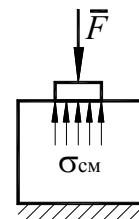


Рис. 2.10.11

Аналогичная картина имеет место при контакте между поверхностями тела болта или заклепки и цилиндрической поверхности отверстия. В этом случае обычно принимают, что напряжения *смятия* распределены по площадке контакта (смятия) равномерно.

Учитывая указанное допущение, получим следующую формулу для определения напряжения смятия:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}}, \quad (2.10.13)$$

где  $A_{\text{см}}$  — площадь смятия.

Уравнение прочности при смятии:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leq \sigma_{\text{см}p}, \quad (2.10.14)$$

На основании опытных данных в расчетах на прочность допускаемые напряжения на смятие принимают в 2-2,5 раза больше допускаемых напряжений на обычное сжатие:

$$\sigma_{\text{см}p} = (2 - 2,5) \sigma_{\text{сж}}. \quad (2.10.15)$$

*Усталостное выкрашивание* является наиболее распространенным видом повреждения рабочих поверхностей зубьев колес, дорожек качения подшипников и др. Этот вид разрушения происходит при одновременном наличии двух условий:

- относительное *качение* контактирующих *сжатых* тел происходит с их относительным *проскальзыванием*;
- наличие *жидкой* смазки в зоне контакта.

Рассмотрим контакт двух тел, удовлетворяющий вышеуказанным условиям (рис. 2.10.12).

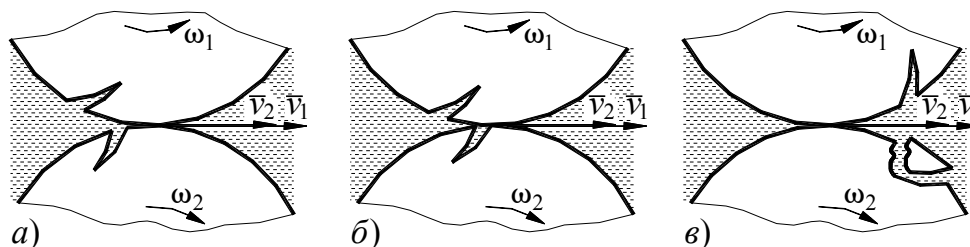


Рис. 2.10.12

Линейная скорость тела 1 в точке контакта несколько больше линейной скорости тела 2, т.е. соблюдается условие:

$$v_1 > v_2. \quad (2.10.16)$$

Для этого случая поверхность 1 является *опережающей* в относительном движении, а поверхность 2 – *отстающей*.

Под действием переменных сил трения первоначальные трещины ориентируются относительно поверхности так, как показано на рис. 2.10.12, а.

На *опережающем* теле 1 трещины ориентированы так, что в зоне наибольших контактных давлений масло из трещины выдавливается и роста трещины не происходит.

На *отстающем* теле 2 трещины ориентируются неблагоприятно. При встрече с сопряженной поверхностью края трещины соединяются и это препятствует истечению масла из трещины. В результате давление в трещине резко возрастает (рис. 2.10.12, б). Этим обусловлено расклинивающее действие, способствующее постепенному развитию трещины и выходу ее на поверхность (выламывание частичек металла) (рис. 2.10.12, в).

Из рассмотренного очевидно, что в большей степени контактному выкрашиванию подвержена *отстающая* в относительном движении поверхность.

Выкрашивание металла с поверхности контактирующих деталей может носить *ограниченный* или *прогрессирующий* характер.

*Ограниченное* выкрашивание возникает на деталях тогда, когда из-за погрешностей изготовления или монтажа нагрузка первоначально концентрируется только на отдельных участках площадки контакта. В результате начального выкрашивания, локального пластического деформирования и т. п. общая поверхность контакта возрастает, концентрация нагрузки уменьшается и усталостное выкрашивание прекращается.

Если выкрашивание начинается при *нормальном* прилегании контактирующих поверхностей, то оно обычно оказывается *прогрессирующим*.

*Контактная усталость* деталей определяется:

- физико-механическими свойствами материалов;
- скоростью смещения (качения, скольжения);
- режимом нагружения;
- шероховатостью поверхностей;
- характеристиками и способом подачи смазки в зону контакта и др.

Наиболее существенное влияние на контактную прочность деталей оказывает *твердость поверхностей контакта*. Установлено, что пределы выносливости деталей из различных материалов прямо пропорциональны твердости рабочих поверхностей, т.е.:

$$\sigma_{H \lim} = C_B \cdot HB; \quad (2.10.17)$$

$$\sigma_{H \lim} = C_R \cdot HRC, \quad (2.10.18)$$

где  $C_B$  и  $C_R$  – коэффициенты, зависящие от материала и термообработки;

$HB$  и  $HRC$  – твердости соответственно по Бринеллю и по Роквеллу.

Для повышения контактной выносливости необходимо, в первую очередь, увеличивать твердость поверхностей контактирующих деталей (в большей степени для отстающих поверхностей).

## Лекция № 11 (2 часа).

### Прочность материалов при переменных напряжениях

#### 2.9 Прочность материалов при переменных напряжениях

##### 2.9.1 Основные понятия об усталостной прочности

Ранее были рассмотрены вопросы, связанные с расчетом на прочность упругих элементов конструкций, испытывающих действие *статических* нагрузок. При этом считалось, что прочность элементов будет обеспечена, если максимальные напряжения в их опасных сечениях не превышают предельных значений.

Однако, в случае действия на элементы конструкций нагрузок, *периодически изменяющихся во времени* по величине или по величине и направлению, разрушение материала происходит при напряжениях, значительно меньших предельных значений. С подобными действиями нагрузок встречаются при расчетах движущихся элементов машин и механизмов.

Нагрузки, вызывающие появление в поперечных сечениях периодически изменяющихся напряжений, называют *циклическими* нагрузками.

Совокупность всех значений напряжений за время одного периода их изменения носит название *цикла напряжений*.

*Частота изменения напряжений* характеризуется числом циклов в единицу времени, а продолжительность цикла во времени определяет *период цикла*.

Характер разрушения материала от воздействия на него циклических нагрузок существенно отличается от характера разрушения при статических нагрузках. Разрушение начинается обычно с образования *микротрещин*, которые прогрессивно развиваются вглубь материала, уменьшая тем самым площадь поперечного сечения детали. Разрушение всегда происходит внезапно, после того как площадь сечения сократится настолько, что не может выдержать заданной нагрузки. На поверхности излома всегда можно видеть две характерные зоны: зону постепенного разрушения от

развития трещин (с гладкой поверхностью) и зону внезапного разрушения (имеющую вид крупнозернистого хрупкого излома).

Накопление необратимых механических изменений в материале при приложении циклических нагрузок называют *усталостью*, а разрушение в результате постепенного развития трещины – *усталостным разрушением*.

Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений без разрушения носит название *выносливости*, или *циклической прочности*.

Максимальные переменные напряжения, при которых материал способен сопротивляться, не разрушаясь, при любом произвольно большом числе циклов нагружения, называют *пределом выносливости*.

Законы изменения переменных напряжений могут быть самыми разнообразными. На рис. 2.11.1 приведена кривая изменения во времени нормальных напряжений в коленчатом валу дизельного двигателя за один оборот. Напряжения изменяются по очень сложному закону, но имеют периодический (циклический) характер.

Влияние формы кривой изменения напряжений на усталостную прочность деталей изучено недостаточно,

но имеющиеся данные позволяют считать, что это влияние невелико, а решающую роль играют значения максимального и минимального напряжения цикла и их отношение. Поэтому в дальнейшем будет предполагать, что изменение напряжений во времени происходит по закону, близкому к *синусоиде* (рис. 2.11.2).

Цикл переменных напряжений характеризуется:

- максимальным по алгебраической величине напряжением  $\sigma_{\max}$ ;
- минимальным по алгебраической величине напряжением  $\sigma_{\min}$ ;
- средним напряжением  $\sigma_m$  (постоянной во времени (статической) составляющей цикла (положительной или отрицательной));

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad (2.11.1)$$

- амплитудой цикла (наибольшим (положительным) значением переменной составляющей цикла напряжений);

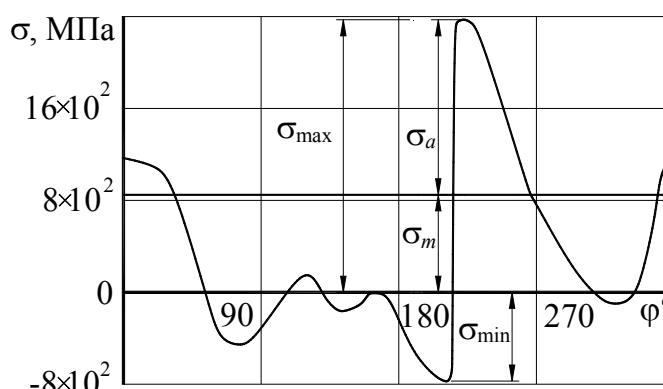


Рис. 2.11.1

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad (2.11.2)$$

— коэффициентом асимметрии цикла:

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \quad (2.11.3)$$

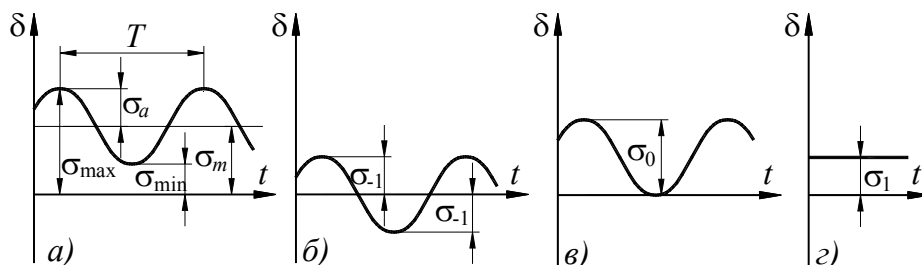


Рис. 2.11.2

Циклы, имеющие одинаковые значения  $r$ , называют *подобными*.

Из формул (2.11.1), (2.11.2), а также из рис. 2.11.2 очевидно, что:

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a; \quad (2.11.4)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (2.11.5)$$

Если:

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min},$$

то такой цикл напряжений называется *симметричным* (рис. 2.11.2, б).

Для *симметричного* цикла:

$$\sigma_m = 0,$$

$$\sigma_a = \sigma_{-1},$$

$$r = -1.$$

Цикл напряжений, показанный на рис. 2.11.2, в, называют *отнулевым* или *пульсирующим*. Для этого случая:

$$\sigma_{\max} = \sigma_0, \quad \sigma_{\min} = 0,$$

$$\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_0}{2}, \quad r = 0.$$

*Постоянное статическое* напряжение (рис. 2.11.2, г) можно рассматривать как частный случай переменного цикла с характеристиками:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_m = \sigma_1,$$

$$\sigma_a = \sigma_1, \quad r = 1.$$

Любой *асимметричный* цикл переменных напряжений можно представить как сумму *симметричного* цикла с максимальным напряжением, равным амплитуде заданного цикла, и *постоянного* напряжения, равного среднему напряжению заданного цикла (рис. 2.11.2, а).

Из рассмотренных циклов напряжений наиболее опасным является *симметричный* цикл, поскольку именно для него предел выносливости имеет минимальное значение.

В случае переменных касательных напряжений остаются в силе все приведенные здесь термины и соотношения, с заменой  $\sigma$  на  $\tau$ .

### 2.9.2 Предел выносливости при симметричном цикле. Диаграмма пределов выносливости

Величину предела выносливости при симметричном цикле определяют на основании опытных данных. Для этого испытывают серию одинаковых образцов, каждый из которых подвергают действию переменных напряжений. Целью испытаний является определение числа циклов  $N$ , при котором разрушается каждый образец. Кривую, построенную по экспериментальным данным в координатах  $(\sigma_{\max}, N)$ , называют *кривой выносливости* (рис. 2.11.3).

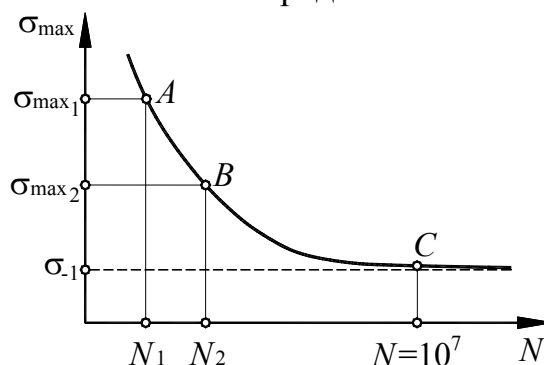


Рис. 2.11.3

Для большинства металлов характерной особенностью кривой выносливости является наличие горизонтальной асимптоты. Последняя является следствием того, что при некотором значении наибольшего напряжения цикла образец может выдержать теоретически бесконечно большое число циклов нагружения.

Это напряжение, как отмечалось, носит название *предела выносливости* и обозначается в общем случае  $\sigma_r$ , где  $r$  — коэффициент асимметрии цикла.

При *симметричном* цикле  $r = -1$ , а потому  $\sigma_r = \sigma_{-1}$ .

Для *черных* металлов за предел выносливости принимают то предельное значение наибольшего напряжения, при котором не происходит разрушения после прохождения  $10^7$  циклов. Это число циклов называют *базовым* и обозначают, как  $N_0$ .

Для *цветных* металлов и для *закаленных* сталей не удастся установить такое число циклов, выдержав которое, образец не разрушился бы в дальнейшем. Для этих случаев введено понятие *предела ограниченной выносливости*, как наибольшего по величине максимального напряжения цикла, при котором образец способен выдержать определенное число циклов (обычно  $N = 10^8$ ).

Число циклов, выдерживаемых образцом до разрушения при напряжениях, превышающих предел выносливости, определяет его *долговечность*.

Экспериментально установлено, что между пределами выносливости при изгибе ( $\sigma_{-1}$ ), кручении ( $\tau_{-1}$ ) и растяжении-сжатии ( $\sigma_{-1p}$ ) в случае симметричных циклов имеют место для некоторых материалов определенные соотношения.

Примерные их значения следующие:

при *растяжении-сжатии*:

$$\sigma_{-1p} = 0,7\sigma_{-1} \text{ (для сталей)}$$

$$\sigma_{-1p} = 0,65\sigma_{-1} \text{ (для чугуна);}$$

при *кручении*:

$$\tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1} = 0,55\sigma_{-1} \text{ (для сталей и легких сплавов)}$$

$$\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1} \text{ (для чугуна).}$$

Зная величину временного сопротивления  $\sigma_B$ , можно найти приближенные значения предела выносливости  $\sigma_{-1}$  по следующим эмпирическим соотношениям:

$$\text{для углеродистой стали } \sigma_{-1} = (0,40-0,45) \sigma_B;$$

$$\text{для легированной стали } \sigma_{-1} = (0,40-0,45) \sigma_B + (70-80) \text{ Н/мм}^2;$$

$$\text{для чугуна } \sigma_{-1} = 0,4 \sigma_B;$$

$$\text{для цветных металлов } \sigma_{-1} = (0,24-0,50) \sigma_B;$$

У большинства металлов предел выносливости при симметричном цикле ниже предела упругости; только для мягкого железа и красной меди он оказывается выше.

### 2.9.3 Диаграмма предельных напряжений

Для полной характеристики усталостной прочности материала необходимо иметь данные о его пределах выносливости при различных циклах напряжений.

Экспериментальные исследования показывают, что значительное влияние на величину предела выносливости оказывает *асимметрия цикла*. *Наименьшее* значение предела выносливости имеет при *симметричном* цикле напряжений и *наибольшее* – при *постоянном*. В последнем случае величина предела выносливости равна пределу прочности.

Циклы напряжений, у которых наибольшее напряжение равно пределу выносливости, называют *предельными*.

Для определения предела выносливости при действии напряжений с *асимметричными* циклами строятся диаграммы различных типов. Наиболее распространенной из них являются – *диаграмма предельных напряже-*





$$\sigma_{\max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_m = \sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma) \sigma_m \quad (2.11.6)$$

или

$$\sigma_a = \sigma_{\max} - \sigma_m = \sigma_{-1} + \psi_\sigma \sigma_m, \quad (2.11.7)$$

где

$$\psi_\sigma = \frac{(2\sigma_{-1} - \sigma_0)}{\sigma_0}. \quad (2.11.8)$$

Аналогично:

$$\tau_{\max} = \tau_{-1} + \frac{\tau_0 - \tau_{-1}}{\frac{\tau_0}{2}} \tau_m = \tau_{-1} + (1 - \psi_\tau) \tau_m \quad (2.11.9)$$

или

$$\tau_a = \tau_{\max} - \tau_m = \tau_{-1} + \psi_\tau \tau_m, \quad (2.11.10)$$

где

$$\psi_\tau = \frac{(2\tau_{-1} - \tau_0)}{\tau_0}. \quad (2.11.11)$$

Коэффициенты  $\psi_\sigma$  и  $\psi_\tau$  характеризует чувствительность материала к асимметрии цикла. Значения  $\psi_\sigma$  и  $\psi_\tau$  приведены в нижеприведенной таблице 2.11.1.

Таблица 2.11.1

| Коэффициенты                              | $\sigma_B$ , МПа |         |         |          |           |
|-------------------------------------------|------------------|---------|---------|----------|-----------|
|                                           | 320-420          | 400-500 | 600-750 | 700-1050 | 1050-1250 |
| $\psi_\sigma$ (изгиб, растяжение, сжатие) | 0                | 0       | 0,05    | 0,10     | 0,20      |
| $\psi_\tau$ (кручение)                    | 0                | 0       | 0       | 0,05     | 0,10      |

#### 2.9.4 Факторы, влияющие на величину предела выносливости

На выносливость элементов конструкций, находящихся в реальных условиях эксплуатации, влияет ряд факторов, которые при обычном статическом расчете не играют существенной роли. Опыт показывает, что на величину предела выносливости существенно влияют следующие факторы:

- концентрация напряжений,
- размеры деталей,
- состояние поверхности,
- характер технологической обработки и др.

#### 2.9.4.1 Влияние концентрации напряжений

В местах резкого изменения поперечных размеров детали, у отверстий, надрезов, выточек и т.п. возникает, как известно, местное повышение напряжений, снижающее предел выносливости по сравнению с таковым для гладких цилиндрических образцов. Это снижение учитывается *эффективным коэффициентом концентрации напряжений*  $k$ , который определяется *экспериментальным* путем. Указанный коэффициент представляет собой отношение предела выносливости гладкого образца при симметричном цикле к пределу выносливости образца тех же размеров, но имеющего тот или иной концентратор напряжений:

для *нормальных* напряжений:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}} \quad (2.11.12)$$

для *касательных* напряжений:

$$k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1к}} \quad (2.11.13)$$

Значения  $k_{\sigma}$  и  $k_{\tau}$  приводятся в справочниках.

В тех случаях, когда экспериментальные данные по определению эффективного коэффициента концентрации напряжений отсутствуют, а известны значения теоретического коэффициента концентрации напряжений, можно использовать для определения  $k_{\sigma}$  и  $k_{\tau}$  следующие эмпирические формулы:

$$k_{\sigma} = 1 + q_{\sigma} (\alpha_{\sigma} - 1) \quad (2.11.14)$$

$$k_{\tau} = 1 + q_{\tau} (\alpha_{\tau} - 1) \quad (2.11.15)$$

где  $q_{\sigma}$ ,  $q_{\tau}$  — коэффициенты чувствительности материала к местным напряжениям.

Для конструкционных сталей в среднем величина  $q_{\sigma}$  равна 0,6–0,8. Более подробные данные о величине коэффициента чувствительности материала к местным напряжениям для стали приведены в справочниках.

Значения теоретических коэффициентов  $\alpha_{\sigma}$  и  $\alpha_{\tau}$  определяются либо теоретически (методом теории упругости), либо экспериментально путем сравнения пределов прочности образцов без концентрации напряжений и для образцов с концентрацией напряжений.

#### 2.9.4.2. Влияние размеров деталей

Экспериментально установлено, что с увеличением размеров испытуемого образца предел выносливости его понижается.

Это объясняется тем, что:

- на образцах больших размеров более вероятны дефекты материала,
- при изготовлении малых образцов имеет место упрочнение (наклеп) поверхностного слоя на относительно большую глубину, чем у образцов больших размеров.

Влияние размеров деталей на величину предела выносливости учитывается коэффициентом  $\varepsilon$ , представляющим собой отношение предела выносливости детали заданных размеров (диаметром  $d$ ) к пределу выносливости лабораторного образца подобной конфигурации, имеющего малые размеры ( $d_0=6-12$  мм). Это отношение называют *коэффициентом влияния абсолютных размеров сечения* или *масштабным фактором*.

Для нормальных напряжений:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}; \quad (2.11.16)$$

Для касательных напряжений:

$$\varepsilon_{\tau} = \frac{(\tau_{-1})_d}{(\tau_{-1})_{d_0}}. \quad (2.11.17)$$

Масштабные коэффициенты можно определять и на образцах с концентрацией напряжений.

Коэффициенты влияния абсолютных размеров сечения могут определяться и на образцах *с концентрацией напряжений*. В этом случае:

для нормальных напряжений:

$$\varepsilon_{\sigma k} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_{d_0}}; \quad (2.11.18)$$

для касательных напряжений:

$$\varepsilon_{\tau k} = \frac{(\tau_{-1k})_d}{(\tau_{-1k})_{d_0}}. \quad (2.11.19)$$

При этом как деталь размером  $d$ , так и образец размером  $d_0$  должны иметь геометрически подобную конфигурацию. Данные о значениях  $\varepsilon_{\sigma}$  приведены в справочниках. Из-за отсутствия достаточного количества экспериментальных данных о коэффициентах  $\varepsilon_{\tau}$  (при кручении) можно приближенно принимать, что  $\varepsilon_{\tau} \approx \varepsilon_{\sigma}$ .

#### 2.9.4.3 Влияние состояния поверхности

Состояние поверхности деталей зависит от качества механической обработки. Так как разрушение материала от периодически изменяющихся нагрузок начинается с образования на поверхности микроскопи-

ческих трещин, то очевидно, что их образованию способствует наличие на поверхности острых рисок и царапин. Последнее приводит, естественно, к уменьшению предела выносливости материала.

Для оценки влияния качества поверхности на предел выносливости вводится *коэффициент состояния поверхности*  $\beta$ , равный отношению предела выносливости детали с данной обработкой поверхности к пределу выносливости тщательно полированного образца:

для *нормальных* напряжений:

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1п}}{\sigma_{-1}}, \quad (2.11.20)$$

для *касательных* напряжений:

$$\beta_{\tau} = \frac{\tau_{-1п}}{\tau_{-1}}. \quad (2.11.21)$$

В справочной литературе приведены графики значений  $\beta$  в зависимости от предела прочности  $\sigma_b$  стали и способа упрочнения поверхностного слоя.

#### 2.9.4.4. Определение предела выносливости при симметричном цикле

Учитывая изложенное выше, общий коэффициент изменения предела выносливости при симметричном цикле можно записать как:

для *нормальных* напряжений:

$$k_{\sigma-1} = \frac{k_{\sigma}}{\sigma_{\sigma}\beta_{\sigma}}, \quad (2.11.22)$$

для *касательных* напряжений:

$$k_{\tau-1} = \frac{k_{\tau}}{\sigma_{\tau}\beta_{\tau}}. \quad (2.11.23)$$

Действительные пределы выносливости реальной детали вычисляются по формулам:

для *нормальных* напряжений:

$$(\sigma_{-1к})_d = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma-1}} = \frac{\sigma_{-1}\varepsilon_{\sigma}\beta_{\sigma}}{k_{\sigma}}, \quad (2.11.24)$$

для *касательных* напряжений:

$$(\tau_{-1к})_d = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau-1}} = \frac{\tau_{-1}\varepsilon_{\tau}\beta_{\tau}}{k_{\tau}}. \quad (2.11.25)$$

#### 2.9.5. Расчеты на прочность при переменных напряжениях

Расчет элементов конструкций, находящихся под действием переменных нагрузок, обычно начинают со *статического* расчета, целью

которого является *предварительное определение размеров*. Только после этого проводят *проверочный* расчет на выносливость, в результате которого определяют *фактический коэффициент безопасности*.

Коэффициент безопасности при *симметричном* цикле характеризуется отношением действительного предела выносливости детали к максимальному напряжению цикла  $\sigma_a$ :

для *нормальных* напряжений:

$$S_\sigma = \frac{(\sigma_{-1\kappa})_d}{\sigma_a}; \quad (2.11.26)$$

для *касательных* напряжений:

$$S_\tau = \frac{(\tau_{-1\kappa})_d}{\tau_a}. \quad (2.11.27)$$

При *сложном* напряженном состоянии коэффициент безопасности вычисляется обычно по формуле (2.7.62):

$$S = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}}, \quad (2.11.28)$$

где  $S_\sigma$  и  $S_\tau$  определяют по формулам (2.11.26) и (2.11.27).

Для определения коэффициента безопасности при *несимметричных* циклах в случае любого вида нагружения (изгиба, растяжения-сжатия, кручения) можно воспользоваться следующими зависимостями:

для *нормальных* напряжений:

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma \sigma_a}{\varepsilon_\sigma \beta_\sigma} + \psi_\sigma \sigma_m}; \quad (2.11.29)$$

для *касательных* напряжений:

$$S_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau \tau_a}{\varepsilon_\tau \beta_\tau} + \psi_\tau \tau_m}. \quad (2.11.30)$$

В уравнениях (2.11.29) и (2.11.30):

$\psi_\sigma$  — коэффициент, характеризующий чувствительность материала к асимметрии цикла по *нормальным* напряжениям;

$\psi_\tau$  — коэффициент, характеризующий чувствительность материала к асимметрии цикла по *касательным* напряжениям.

Значения  $\psi_\sigma$  и  $\psi_\tau$  приводятся в справочниках.

При *сложном* напряженном состоянии коэффициент безопасности вычисляется по формуле (2.11.28).

Определив коэффициент безопасности по сопротивлению *усталости*, необходимо сравнить его с коэффициентом безопасности по сопротивлению *пластическим* деформациям, которые определяются по формулам:

для *нормальных* напряжений:

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m}, \quad (2.11.31)$$

для *касательных* напряжений:

$$S_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_m}, \quad (2.11.32)$$

При сложном напряженном состоянии коэффициент безопасности вычислить по формуле (2.11.28).

Прочность рассчитываемой детали оценивают по *наименьшему* из коэффициентов безопасности, полученных при расчетах по сопротивлению *усталости* и по сопротивлению *пластическим* деформациям.

## **Лекция № 12 (2 часа).**

### **Неразъемные соединения**

#### **3.1 Соединения**

Способы соединения деталей при сборке машин, приборов и различных механизмов весьма разнообразны. Все соединения можно разделить на две основные группы:

- неразъемные;
- разъемные.

*Неразъемные* соединения не допускают разборки собранных деталей и применяются для упрощения технологии изготовления деталей или для сокращения расхода дефицитных материалов. В таких соединениях взаимное расположение деталей в сборочной единице остается неизменным.

К неразъемным относятся соединения:

- заклепками,
- сваркой,
- пайкой,
- склеиванием,
- замазкой,
- прессовые,
- развальцовкой,
- гибкой,
- заформовкой.

*Разъемные* соединения допускают разборку соединенных деталей без разрушения деталей и скрепляющих элементов. Эти соединения применяют по технологическим, конструктивным и эксплуатационным соображениям.

К разъемным соединениям относятся:

- резьбовые,
- шпоночные,
- шлицевые,
- штифтовые,
- профильные,
- штыковые.

К соединениям предъявляются следующие основные *требования*:

- статическая и усталостная прочность;
- равнопрочность самого соединения с материалом соединяемых деталей;
- жесткость;
- плотность;
- сохранение физических и химических свойств материала в местах соединения;
- универсальность способа, то есть применимость способа для соединения деталей различной формы и размеров, изготовленных из разнообразных материалов.

Разъемные соединения должны допускать многократные сборки и разборки без дополнительных технологических операций.

### 3.1.1 Неразъемные соединения

#### 3.1.1.1 Заклепочные соединения

##### 3.1.1.1.1 Общие сведения

*Заклепкой* называется сплошной или полый цилиндрический стержень с заранее сформированной *закладной* головкой на одном конце.

В настоящее время в приборо— и машиностроении наиболее распространены стандартные заклепки с полукруглыми (рис. 5.1.1, *а*), полупотайными (рис. 5.1.1, *б*), потайными (рис. 5.1.1, *в*) головками, и пустотелые заклепки, которые, в свою очередь, могут быть как со скругленной головкой (рис. 5.1.1, *г*) и с потайной (рис. 5.1.1, *д*).

Размеры стандартизованных

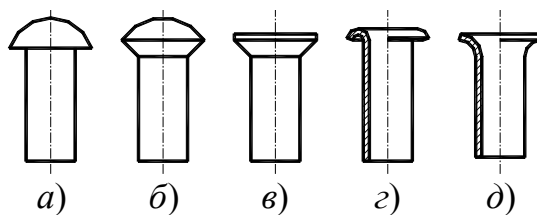


Рис. 5.1.1



заклепок приводятся в таблицах сортамента заклепок.

Заклепки изготовляют из *пластичных* материалов: малоуглеродистых сталей, низколегированных малоуглеродистых сталей, меди, латуни, алюминиевых сплавов, а также жароупорных и специальных сплавов.

*Заклепочные соединения* образуются с помощью заклепок, поставленных в специально просверленные или пробитые отверстия в соединяемых деталях. При клепке на другом конце стержня формируется вторая головка, называемая *закрывающей головкой* (рис. 5.1.2).

Заклепочные соединения применяют в конструкциях, воспринимающих большие вибрационные и повторные нагрузки, а также для соединения деталей из несвариваемых материалов и не допускающих сварку из-за нагрева деталей. Кроме того, заклепочные соединения широко применяют для соединения нескольких деталей в один пакет. В *приборостроении* заклепочные соединения применяют чаще, чем в машиностроении.

Для облегчения сборки диаметр отверстий  $d_o$  назначают несколько больше диаметра стержня заклепок:

$$d_o = d + 0,1 \text{ мм.} \quad (5.1.1)$$

Однако благодаря пластическим деформациям в процессе клепки стержни заклепок осаживаются и полностью заполняют отверстия. Таким образом, относительному смещению склепанных деталей препятствуют как стержни заклепок, так и силы трения, возникающие между склепанными деталями.

По *назначению* заклепочные швы разделяют на *прочные (силовые)* для восприятия внешних нагрузок и, обеспечивающие также и герметичность, *прочноплотные* соединения. Герметичность стыка в прочноплотных швах дополнительно обеспечивается нанесением на поверхности стыка уплотнительных составов – клеев, силиконовых эмалей или металлических покрытий.

По *конструкции* заклепочные соединения делят на соединения *внахлестку* (рис. 5.1.2) и *встык* с одной (рис. 5.1.3) и двумя (рис. 5.1.4) *накладками*, а также на *однорядные* (рис. 5.1.18) и *многорядные* с *параллельным* (рис. 5.1.3) и *шахматным* (рис. 5.1.20) расположением заклепок в рядах.

*Количество рядов* считается по одну сторону стыка в перпендикулярном ему направлении.

В зависимости от числа склепываемых *слоев* металла (в том числе и накладок) шов имеет различное число поперечных срезов заклепок. Так,

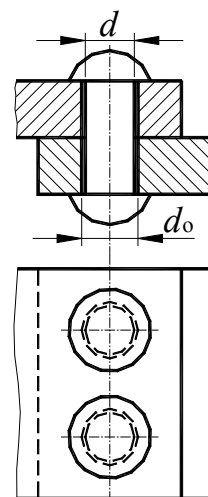


Рис. 5.1.2

шов внахлестку или встык с одной накладкой будет *односрезным*, шов встык с двумя накладками – *двухсрезным*.

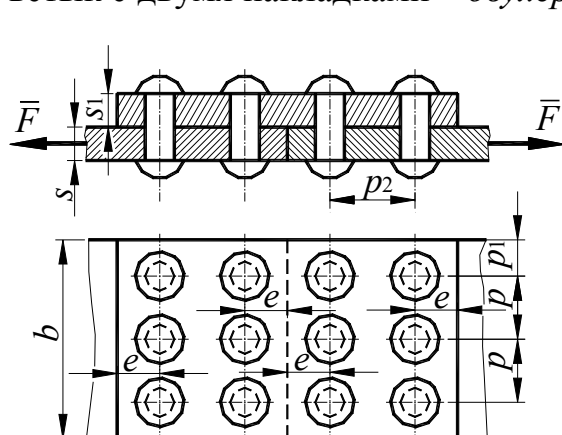


Рис. 5.1.3

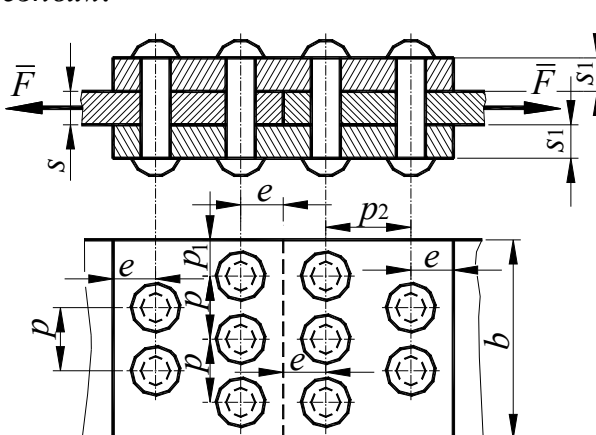


Рис. 5.1.4

### 3.1.1.1.2 Определение основных параметров заклепочных швов

Основными параметрами заклепочных швов являются *шаг  $p$*  и *диаметр заклепок  $d$* , *толщина склепываемых деталей  $s_1$  и  $s_2$*  (рис. 5.1.5).

Шагом заклепочного шва  $p$  называется расстояние между центрами заклепок в направлении, перпендикулярном к действующему на шов усилию.

Введем обозначения (рис. 5.1.3-5.1.5):

$b$  – ширина склепываемых деталей;

$z$  – число заклепок;

$n$  – число плоскостей среза заклепок, равное числу плоскостей скольжения листов;

$s_{\min}$  – наименьшая толщина одной или нескольких деталей, передающих нагрузку в одну сторону (например, если  $2s_1 > s$ , то  $s_{\min} = s$  (рис. 5.1.4));

$e$  – расстояние от центра заклепки до края детали в направлении действующего на шов усилия;

$p_2$  – расстояние между рядами заклепок.

При нагрузке, действующей в направлении *перпендикулярно осям заклепок* заклепочное соединение может

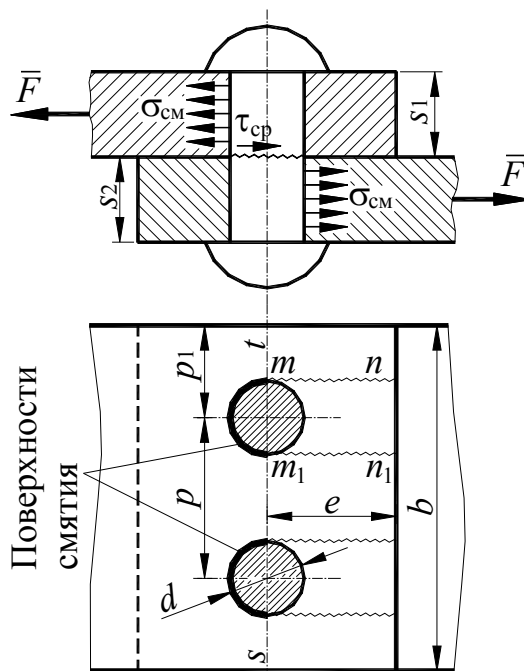


Рис. 5.1.5

быть разрушено в результате *среза заклепок* в плоскости соединения деталей или *смятия заклепок* деталями.

Если заклепки окажутся прочными и выдержат все перечисленные выше деформации, то соединение может разрушиться в результате *разрыва деталей* по их наиболее опасному сечению (по сечению, ослабленному отверстиями), *среза листа* заклепками (если расстояния до края детали и между рядами будут малы), *смятия материала листа* под заклепками.

При расчетах на прочность заклепочных соединений принимают некоторые *допущения*. Считают, что в швах все заклепки нагружаются равномерно силой  $\frac{F}{z}$ . При этом полагают, что напряжения в поперечных сечениях деталей распределяются так же равномерно. Фактически же, особенно в первоначальный момент возникновения усилий растяжения, заклепки, расположенные ближе к точке приложения внешней силы, будут испытывать большие напряжения, чем заклепки, удаленные от нее. В дальнейшем, вследствие упругих и остаточных деформаций как заклепок, так и соединяемых деталей, нагрузки на заклепки будут почти одинаковыми. Кроме того, при расчете заклепочного соединения наличие трения между соединяемыми деталями не учитывается, что увеличивает запас прочности.

Условие прочности *заклепки на срез*, на основании (2.4.5), определяется равенством:

$$F \leq A_{\text{ср}} \tau_{\text{ср } p} = zn \frac{\pi d^2}{4} \tau_{\text{ср } p}, \quad (5.1.2)$$

откуда:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi zn \tau_{\text{ср } p}}}. \quad (5.1.3)$$

Условие прочности *соединяемых деталей и заклепки на смятие*, на основании (2.10.14), определяется равенством:

$$F \leq A_{\text{см}} \sigma_{\text{см } p} = z d s_{\text{min}} \sigma_{\text{см } p}. \quad (5.1.4)$$

откуда:

$$d \geq \frac{F}{z s_{\text{min}} \sigma_{\text{см } p}}. \quad (5.1.5)$$

При применении формул (5.1.4) и (5.1.5) было сделано следующее *упрощение*. Из рис. 5.1.5 очевидно, что распределение напряжений смятия по поверхности смятия неравномерно – оно равно нулю по краям площадки смятия и максимально в центре. Для упрощения расчетов за площадь смятия принята площадь диаметрального сечения заклепки на длине  $s_{\text{min}}$ , равная  $d s_{\text{min}}$ .

Условие прочности детали шириной, равной шагу  $p$ , на разрыв соединяемых деталей по наиболее опасному их сечению, (сечению, ослабленному отверстиями), согласно (2.3.27), имеет вид:

$$F \leq s_{\min} (b - dz) \sigma_p, \quad (5.1.6)$$

откуда:

$$s_{\min} \geq \frac{F}{(b - dz) \sigma_p}. \quad (5.1.7)$$

Если размер  $e$  от кромки листа до линии центров будет недостаточен, то заклепка может *прорезать* край листа по плоскостям  $mn$  и  $m_1n_1$  (рис. 5.1.5). Условие прочности в этом случае определяется равенством:

$$F \geq 2s_{\min} e z \tau_{cp\ p}. \quad (5.1.8)$$

откуда:

$$e \geq \frac{F}{2zs_{\min} \tau_{cp\ p}}. \quad (5.1.9)$$

Обычно расстояние от кромки листа до центра заклепки принимается равным:

$$e = (1,5 - 2,0) d. \quad (5.1.10)$$

Расстояние между рядами заклепок принимается равным при расположении заклепок:

— *рядовом* (рис. 5.1.3):

$$p_2 = 4d, \quad (5.1.11)$$

— *шахматном* (рис. 5.1.4):

$$p_2 = 2d. \quad (5.1.12)$$

Допускаемые напряжения среза  $\tau_{cp\ p}$  и смятия  $\sigma_{см\ p}$  заклепок и разрыва листов  $\sigma_p$  выбирают по приводимой в специальной справочной литературе по таблицам в зависимости от материала листов и заклепок, вида деформаций, характера нагрузки, способа подготовки отверстий.

### 3.1.1.2 Сварные соединения

#### 3.1.1.2.1 Общие сведения

При сварке детали соединяют за счет формирования *межатомных связей* в свариваемых деталях при их *местном* или *общем нагреве* (сварка *плавлением*), *пластическом деформировании* деталей в зоне стыков (сварка *давлением*).

Способы сварки *давлением* делятся, в свою очередь, на две группы: *с применением нагрева* и *без применения нагрева*.

Способы сварки называются по виду используемого источника теплоты (газовая, электродуговая), по способу защиты материала в зоне сварки (в аргоне, под флюсом, в вакууме), по степени механизации (ручная, полуавтоматическая, автоматическая), по другим техническим признакам.

Наибольшее применение имеют *электродуговая, электроконтактная и газовая* сварки.

Источником энергии в *электродуговой* сварке является электрическая дуга между свариваемыми деталями и электродом – *плавящимся* металлическим или *неплавящимся*, выполненным из электротехнического угля, синтетического графита или из вольфрама.

При сварке *плавящимся* электродом сварной шов образуется почти полностью за счет металла электрода. Для защиты от окисления шва (металла в зоне сварки) электрод обмазывают защитным покрытием.

Ручная дуговая сварка металлическими электродами является универсальным способом сварки плавлением, позволяющим выполнять все виды соединений из всех марок конструкционных, углеродистых, легированных и высоколегированных сталей и сплавов при различном сочетании свариваемых материалов толщиной до 100 мм. Это один из наиболее дешевых способов сварки.

При сварке *неплавящимся* электродом сварной шов образуется почти полностью за счет металла присадочного прутка, а зону расплава защищают *инертными газами* (аргоном, гелием) или *углекислым газом*.

В среде *инертных газов* рекомендуется сваривать детали из алюминиевых, медных и титановых сплавов, высоколегированных сталей и сплавов, а также детали из разнородных сталей и сплавов.

В среде *углекислого газа* рекомендуется сваривать детали из углеродистой и легированной сталей толщиной до 20 мм. Сварку в среде углекислого газа не допускается применять при изготовлении конструкций из алюминиевых, титановых и медных сплавов.

*Контактная электросварка* производится за счет разогрева стыка деталей (тонких листов) теплотой, выделяемой при прохождении электрического тока через два электрода, сжимающих эти детали.

*Газовая* сварка происходит при оплавлении материала деталей и прутка присадочного металла высокотемпературным газовым пламенем от сгорания горючего газа в кислороде. Эту сварку применяют в основном при ремонтных работах, при заварке дефектов чугунного литья, при сварке тонколистовых конструкций из малоуглеродистых сталей (толщиной до 5 мм) и некоторых цветных металлов, а также для сварки неметаллических деталей.

При *избытке кислорода* металл интенсивно окисляется – «горит», что используется для *резки* стальных деталей.

Сварные соединения являются наиболее прочными и наименее затратными среди неразъемных соединений и могут быть получены на автоматах и автоматических линиях, в силу чего они и получили среди неразъемных соединений наибольшее распространение.

Основными недостатками сварных соединений являются: наличие остаточных напряжений из-за неоднородного нагрева и охлаждения и возможность коробления деталей при сваривании (особенно тонкостенных), возможность существования скрытых (невидимых) дефектов (трещин, непроваров, шлаковых включений), снижающих прочность соединений.

Выбор способа сварки определяется следующими факторами:

- маркой свариваемого материала;
- требуемыми свойствами сварного соединения;
- конструкцией сборочной единицы.

Необходимо принимать во внимание и дополнительные факторы, влияющие на выбор способа сварки (например, общий объем сварки в изделии, серийность и стоимость процесса сварки), и рассматривать их с учетом конкретных условий производства сварной конструкции.

В настоящем разделе рассмотрены главным образом конструктивные разновидности и расчет *электродуговых сварных соединений*, как наиболее распространенных.

#### 3.1.1.2.2 Виды сварных соединений

По *конструкции узлов* сварные соединения делят на следующие *виды*:

- *стыковые* (рис. 5.1.6, а);
- *угловые*, которые, в свою очередь, подразделяются на:
  - *нахлесточные* (рис. 5.1.6, б),
  - *тавровые* (рис. 5.1.6, в),
  - *угловые* (рис. 5.1.6, г).

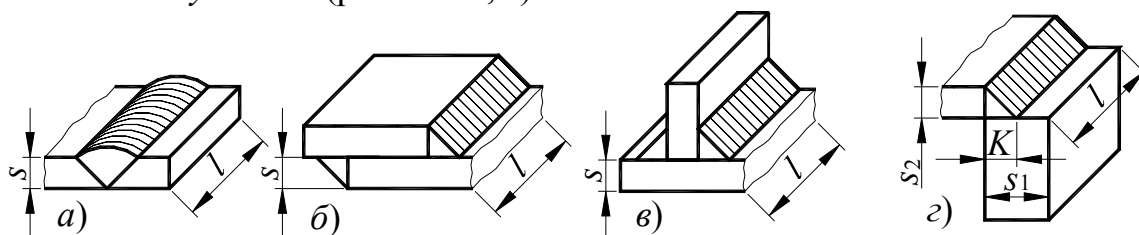


Рис. 5.1.6

Наиболее просты и прочны стыковые швы.

*Стыковые* швы обеспечивают хорошую проварку кромок деталей и поэтому лучше угловых работают при переменных нагрузках. Форму кромок и размеры поперечного сечения стыковых швов назначают в за-

висимости от толщины свариваемых деталей и способа сварки (ручная или автоматическая).

Стыковые швы деталей *одинаковой* толщины выполняют с *отбортовкой* при  $s \leq 3$  мм (рис. 5.1.7, а), *без скоса кромок* при  $s = (3 - 8)$  мм (рис. 5.1.7, б); *односкосными* (рис. 5.1.7, в) и *двухскосными* (рис. 5.1.7, г) при  $s = (8 - 20)$  мм; *двусторонними* (рис. 5.1.7, д) при  $s \geq 12$  мм.

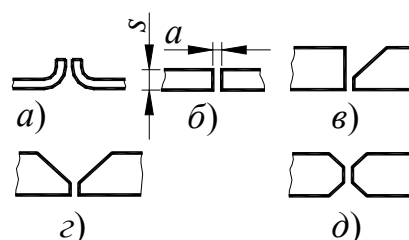


Рис. 5.1.7

Сварка стыковых соединений деталей *неодинаковой* толщины при разнице, не превышающей приведенных ниже значений, должна проводиться так же, как деталей одинаковой толщины (конструктивные элементы подготовленных кромок и размеры сварного шва следует выбирать по большей толщине), из табл. 5.1.1.

Таблица 5.1.1

| Толщина тонкой детали, мм   | 1-4 | 4-20 | 30-30 | Св. 30 |
|-----------------------------|-----|------|-------|--------|
| Разность толщин деталей, мм | 1   | 2    | 3     | 4      |

При разности в толщине свариваемых деталей свыше этих значений на детали, имеющей большую толщину  $s_1$ , должен быть сделан скос с одной или двух сторон до толщины тонкой детали  $s$ , как указано на рис. 5.1.8. При этом конструктивные элементы подготовленных кромок и размеры сварного шва следует выбирать по меньшей толщине.

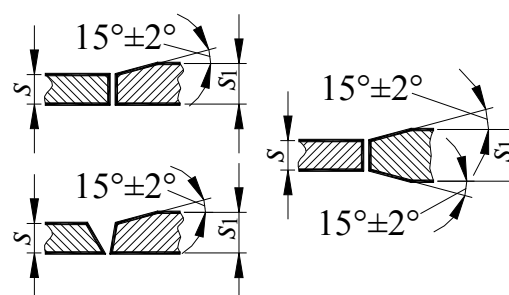


Рис. 5.1.8

Угловые швы (рис. 5.1.7, б, в, г) в поперечном сечении имеют обычно форму, близкую к прямоугольному треугольнику. Выполняются швы *нормальными* (прямыми) (рис. 5.1.9, а), *выпуклыми* (рис. 5.1.9, б), *вогнутыми* (рис. 5.1.9, в) и *специальными* (с неравными катетами) (рис. 5.1.9, г).

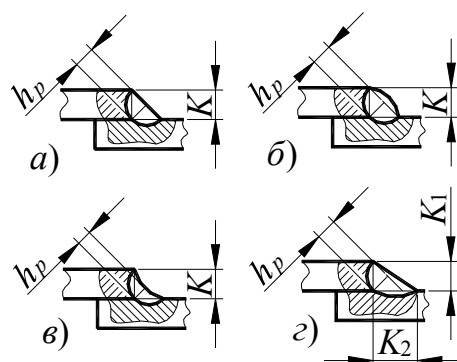


Рис. 5.1.9

*Выпуклые* швы (условно называемые

швами с усилением) склонны к образованию непроваров на участках соединения шва со стенками деталей и обладают пониженным сопротивлением усталости.

Швы с *неравными катетами*, как и *вогнутые* швы, создают более плавные переходы между деталями узлов и снижают концентрацию напряжений. Эти швы применяют при действии переменных усталостных нагрузок. Технология сварки такими швами несколько сложнее, и поэтому чаще всего применяют *нормальные* швы.

Катеты углового шва должны быть установлены не более 3 мм для деталей толщиной до 3 мм включительно и 1-2 толщин более тонкой детали при сварке деталей толщиной свыше 3 мм.

Швы *тавровых* и *угловых* соединений можно выполнять *без скоса кромок* (рис. 5.1.10, а, рис. 5.1.10, з) и *со скосом кромок* (рис. 5.1.10, б, в, 5.1.10, д, е).

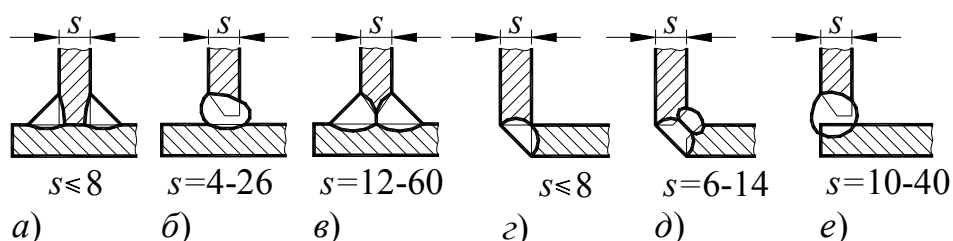


Рис. 5.5.10

В зависимости от расположения по отношению к направлению нагрузки сварные швы делят на *фланговые* – шов параллелен направлению нагрузки (рис. 5.1.11, а), *лобовые (фронтальные)* – шов перпендикулярен к направлению нагрузки (рис. 5.1.11, б); *косые* (рис. 5.1.11, в) и *комбинированные* (рис. 5.1.11, г).

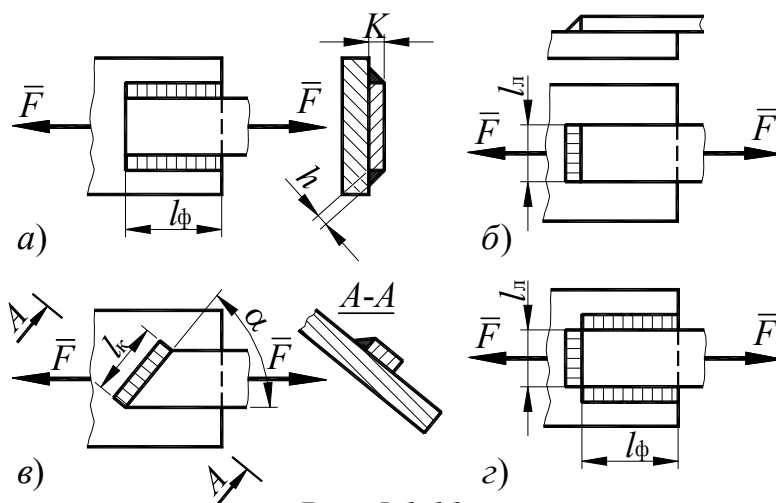


Рис. 5.1.11

Основные типы и размеры сварных швов, а также размеры, определяющие подготовку кромок свариваемых деталей из углеродистых и



низколегированных сталей при ручной электродуговой сварке, приведены в ГОСТ 5264-80, а условные изображения и обозначения швов сварных соединений – в ГОСТ 2.312-72.

### 3.1.1.2.3 Выбор сварочных материалов

Свариваемость конструкционных углеродистых, легированных и низколегированных *сталей* определяется приблизительно по эквиваленту углерода  $C_э$  по формуле:

$$C_э = C + 0,05Mn + 0,067Ni + 0,1(Cr + Mo + V), \quad (5.1.13)$$

где C – содержание углерода, %;  
Mn – содержание марганца, %;  
Ni – содержание никеля, %;  
Cr – содержание хрома, %;  
Mo – содержание молибдена, %;  
V – содержание ванадия.

В зависимости от величины C сталь по свариваемости подразделяется на четыре группы:

- I – хорошая свариваемость,  $C_э < 0,25\%$ ;
- II – удовлетворительная свариваемость,  $C_э = (0,25-0,39)\%$ ;
- III – ограниченная свариваемость,  $C_э = (0,39-0,5)\%$ ;
- IV – плохая свариваемость,  $C_э > 0,5\%$ .

Применение марок сталей группы IV следует ограничивать.

К сварочным материалам относятся сварочная проволока, флюсы, электроды для ручной электродуговой сварки, защитные и горючие газы.

При назначении сварочных материалов необходимо учитывать их технико-экономические характеристики:

- марку свариваемого материала,
- обеспечение требуемой формы и размеров швов,
- обеспечение необходимых механических свойств сварных соединений и коррозионной стойкости,
- возможность сварки в различных пространственных положениях,
- предупреждение появления трещин в металле шва и зоне термического влияния,
- способ сварки,
- стоимость,
- коэффициент полезного действия.

Для обеспечения эксплуатационной надежности сварных соединений необходимо обеспечивать не только равнопрочность шва с основным металлом, но и высокую пластичность металла шва. Практически это достигается при сварке малоуглеродистых сталей. При сварке высо-

копечных и легированных сталей, когда не представляется возможным подобрать электроды, обеспечивающие сочетание этих условий, следует предпочитать электроды с несколько меньшей прочностью наплавленного металла, но с более высокой пластичностью.

При сварке *алюминия и его сплавов* применяются сварки:

- в среде инертных газов,
- контактная,
- газовая,
- ручная электродуговая,
- под флюсом.

Выбор состава проволоки для сварки обуславливается требованиями, предъявляемыми к металлу шва и соединениям. Обычно требования предусматривают стойкость против образования трещин, прочность, пластичность, коррозионную стойкость.

#### 3.1.1.2.4 Допускаемые напряжения

Прочность сварного соединения зависит от качества основного материала, определяющего его способность к свариванию, от совершенства технологического процесса сварки и от характера действующих нагрузок (постоянные и переменные).

Все принятые в инженерной практике методы расчета сварных соединений являются *приближенными*.

Наиболее трудной и ответственной частью расчета является правильный выбор *допускаемых напряжений* с учетом всех особенностей рассчитываемой конструкции, технологии ее изготовления и условий эксплуатации.

Допускаемые напряжения в сварных швах при *статической* нагрузке определяют в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение  $\sigma_{pp}$  для основного металла:

при растяжении:

$$\sigma'_{pp} = 0,9\sigma_{pp}, \quad (5.1.14)$$

при сжатии:

$$\sigma'_{сж\,p} = \sigma_{pp}, \quad (5.1.15)$$

при срезе:

$$\tau'_{ср\,p} = 0,6\sigma_{pp}. \quad (5.1.16)$$

В зависимости от вида сварного соединения и вида сварки принятые допускаемые напряжения для сварных швов понижаются путем умножения их на коэффициент  $\phi$  (табл. 5.1.2).

Таблица 5.1.2

Значения коэффициента  $\varphi$  в зависимости от вида сварного соединения и сварки

| Вид сварного соединения                         | Вид дуговой сварки                          | $\varphi$ |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------|
| Стыковое с двусторонним проваром                | Автоматическая под флюсом                   | 1,00      |
|                                                 | Ручная, выполненная качественным электродом | 0,95      |
|                                                 | Ручная с повышенными требованиями контроля  | 1,00      |
| Стыковое при одностороннем шве                  | Автоматическая под флюсом                   | 0,80      |
|                                                 | Ручная                                      | 0,70      |
| Тавровое со сплошным проваром                   | Автоматическая под флюсом                   | 1,00      |
|                                                 | Ручная                                      | 0,70      |
| Тавровое с угловыми швами без сплошного провара | Автоматическая под флюсом или ручная        | 0,80      |

Допускаемые напряжения при *периодическом* нагружении:

$$\sigma_{rp} = \gamma \sigma_p, \quad (5.1.17)$$

$$\tau_{rp} = \gamma \tau_p, \quad (5.1.18)$$

где  $\gamma$  – коэффициент понижения допускаемых напряжений,

$$\gamma = \frac{1}{(ak_\sigma + b) - (ak_\sigma - b)r} \leq 1, \quad (5.1.19)$$

где  $k_\sigma$  ( $k_\tau$ ) – эффективный коэффициент концентрации нормальных (касательных) напряжений (табл. 5.1.3);

Таблица 5.1.3

Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений для сварных швов

| Сварной шов                |                                                    | Коэффициент $k_\sigma$ ( $k_\tau$ ) для стали |                   |
|----------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------|
|                            |                                                    | углеродистой                                  | низколегированной |
| стыковой с полным проваром | при автоматической и ручной сварке и контроле швов | 1,0                                           | 1,0               |
|                            | при ручной сварке без контроля качества шва        | 1,2                                           | 1,4               |

|                 |                                                          |     |     |
|-----------------|----------------------------------------------------------|-----|-----|
|                 | при автоматической сварке без контроля качества шва      | 1,1 | 1,2 |
| угловой лобовой | при ручной сварке                                        | 2,3 | 3,2 |
|                 | при автоматической сварке                                | 1,7 | 2,4 |
|                 | угловой фланговый шов, работающий на срез от осевой силы | 3,4 | 4,4 |

$a, b$  – коэффициенты:

для углеродистых сталей:  $a=0,58, b=0,26$ ;

для низколегированных сталей:  $a=0,65, b=0,30$ ,

$r$  – коэффициент асимметрии цикла; определяется как отношение наименьшего и наибольшего по абсолютному значению напряжений или сил, взятых со своими знаками:

$$r = r_{\sigma} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{F_{\min}}{F_{\max}}, \quad (5.1.20)$$

$$r = r_{\tau} = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{F_{\min}}{F_{\max}}. \quad (5.1.21)$$

### 3.1.1.2.5 Расчет на прочность типовых сварных соединений

Соединения обычно разрушаются по месту сварки. Рассчитывают соединения в предположении равномерного распределения напряжений по сечению швов.

Стыковые швы (рис. 5.1.6, а) рассчитывают на прочность по номинальному сечению соединяемых деталей (без учета утолщения швов), как целые детали.

От внешней растягивающей силы  $F$  в сечении шва возникают напряжения растяжения  $\sigma'_p$  (рис. 5.1.12).

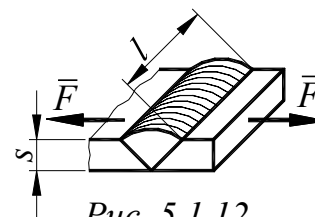


Рис. 5.1.12

Условие прочности (2.3.27) в этом случае примет вид:

$$\sigma'_p = \frac{F}{ls} \leq \sigma'_{pp}, \quad (5.1.22)$$

где  $l$  – длина шва;

$s$  – толщина соединяемых деталей.

Из уравнения (5.1.22) получаем:

$$l \geq \frac{F}{s\sigma'_{pp}}. \quad (5.1.23)$$

В случае сварки деталей разной толщины расчет ведут по более тонкой детали. Утолщения стыковых швов в расчете не учитывают.

Как показал опыт эксплуатации, все *угловые* швы, разрушаются по биссектрисе прямого угла  $h$  (рис. 5.1.9, 5.1.11), несмотря на различные условия нагружения *лобовых (фронтальных)* и *фланговых* швов. В этом случае площадь расчетного сечения  $A$  будет равна (рис. 5.1.11):

для *фланговых* швов:

$$A_{рф} = l_{ф} K \cos 45^{\circ} \approx 0,71 l_{ф} K ; \quad (5.1.24)$$

для *лобовых (фронтальных)* швов:

$$A_{рл} = l_{л} K \cos 45^{\circ} \approx 0,71 l_{л} K . \quad (5.1.25)$$

где  $K$  – расчетный катет углового шва, равный катету вписанного равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 5.1.9).

Катет шва выбирают из условия  $K \leq s$ , но не менее 3 мм при  $s \geq 3$  мм. Верхний предел катета не ограничен, но швы, у которых  $K > 20$  мм, встречаются редко.

Угловые швы при нагружении испытывают сложное напряженное состояние. Однако в *упрощенном* расчете такие швы условно рассчитывают на *срез* по средним касательным напряжениям  $\tau'_{ср}$ . Для расчетного сечения условие прочности (2.4.5) в этом случае будет иметь вид:

$$\tau'_{ср} = \frac{F}{A_p} \leq \tau'_{ср p} . \quad (5.1.26)$$

Значения в формуле  $A_p$  (5.1.26) для *фланговых* и *лобовых (фронтальных)* швов определяются по формулам (5.1.24) и (5.1.25), а значения допускаемых напряжений в сварном шве при срезе  $\tau'_{ср p}$  – по формуле (5.1.16).

Из уравнения (5.1.26) с учетом (5.1.24) и (5.1.25) получаем:

$$l_{ф} \geq \frac{1,41 F}{K \tau'_{ср p}} , \quad (5.1.27)$$

$$l_{л} \geq \frac{1,41 F}{K \tau'_{ср p}} . \quad (5.1.28)$$

Из-за дефектов сварки на концах шва (непровар в начале и кратер в конце шва) принимают *минимальную* длину шва не менее 30 мм.

Длина  $l_{ф}$  *фланговых* швов не должна превышать  $60K$  для ограничения неравномерности распределения напряжений по длине флангового шва.

Длина  $l_{л}$  *лобовых (фронтальных)* швов не ограничена.

Соединение *комбинированным* (лобовым и *фланговым*) швом рассчитывают, полагая, что швы работают независимо.