



Теория электрических цепей

Гребенников Виталий Владимирович, доцент каф. ПМЭ ИНК ТПУ

Виды, параметры и представление электрических сигналов

Информация – любые сведения об окружающем нас мире.

В электронике носителями информации являются электрические сигналы. Как правило, это ток изменяющийся во времени ток или напряжение.

Электрический сигнал – материальный носитель информации об электромагнитных процессах, происходящих в электрической цепи, в качестве которого используется обычно либо ток, либо напряжение.

Классификация электрических сигналов

Все электрические сигналы можно разделить на три группы:

- аналоговые;
- дискретные;
- цифровые.

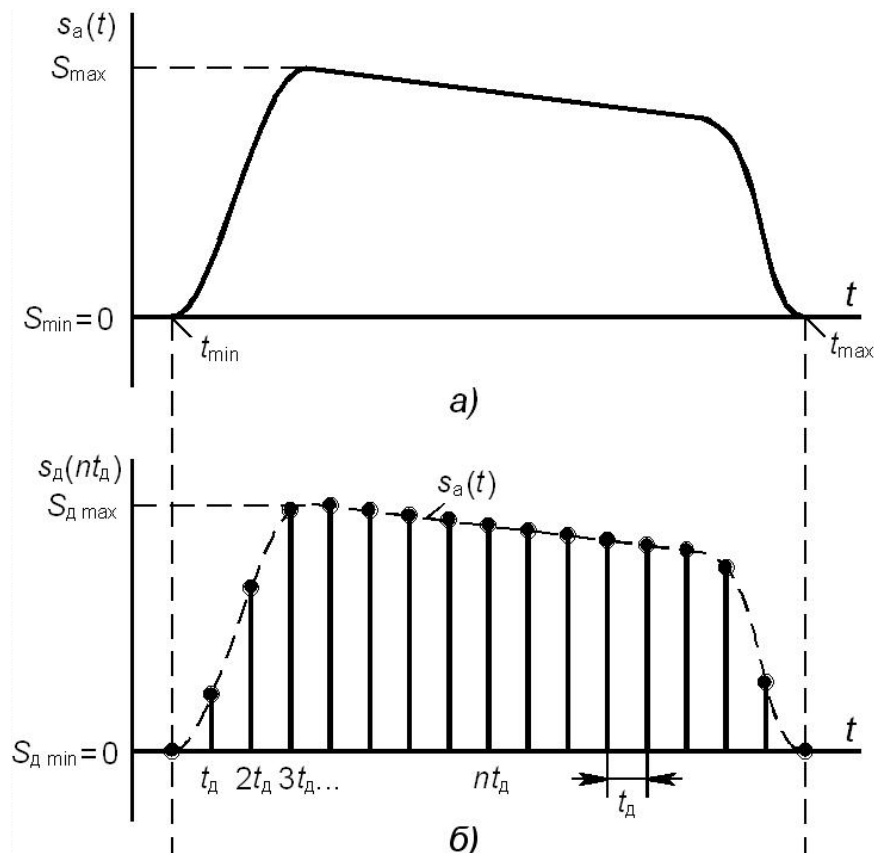
Аналоговый называют сигнал, который описывается **непрерывной** или **кусочно-непрерывной** (с конечными разрывами 1-го рода) функцией $s_a(t)$.

Основным отличием аналогового сигнала от дискретного и цифрового является его непрерывность как по значениям (величине, размеру, уровню), так и во времени.

Сама функция $s_a(t)$, и ее аргумент t могут принимать любые значения на заданных интервалах: $s \in (S_{\min}; S_{\max})$; $t \in (t_{\min}; t_{\max})$.

Дискретный (от лат. *discretus* – прерывистый, разделенный) сигнал меняется **дискретно** либо только во времени, оставаясь непрерывным по величине, либо только по уровню, будучи непрерывным по времени, либо одновременно и по времени, и по уровню.

Период дискретизации – временной интервал, с которым происходит преобразование непрерывной функции в дискретную.



Электрические сигналы:

а) аналоговый;

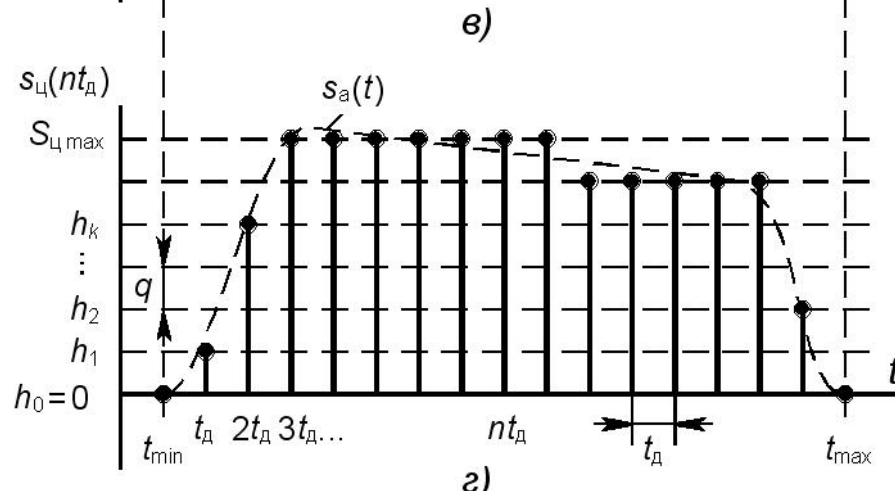
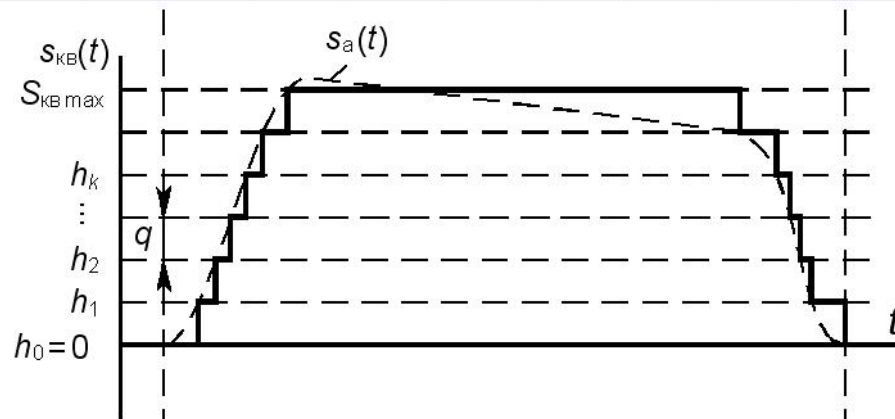
б) дискретный по времени
непрерывный по величине.

t_d – период дискретизации;
 $n = 0; 1; 2; 3 \dots$

Цифровой сигнал – это сигнал $s_{ц}(nt_{д})$, дискретный **одновременно** и по величине, и по времени (принято говорить – **квантованный по уровню и дискретный по времени**).

В результате из аналогового сигнала получается последовательность узких квантованных по амплитуде импульсов, которые и являются **цифровыми сигналами**.

Операция преобразования аналогового сигнала в цифровой код (дискретизация по времени, квантование по уровню) осуществляется в настоящее время одной микросхемой, называемой **аналого-цифровым преобразователем** (АЦП).



Электрические сигналы:
в) непрерывный по времени квантованный по величине;
г) цифровой.

q – шаг квантования.

В зависимости от того, меняется ли электрический сигнал с течением времени или его значение остается неизменным, различают **постоянные** и **переменные** сигналы.

Постоянные сигналы во времени не меняются.

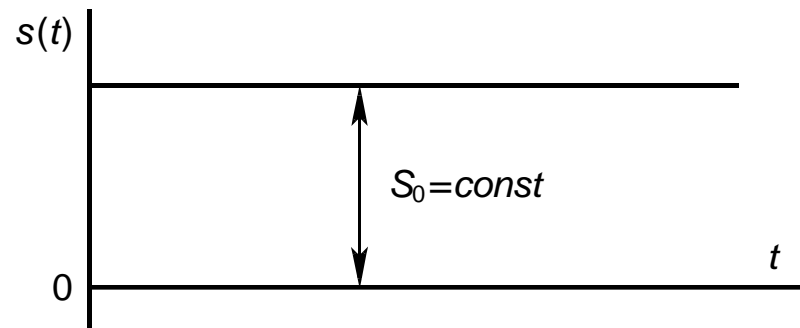
Примером постоянного сигнала является, например, сигнал $s(t) = S_0 = const$, уровень которого прямопропорционален величине выходного постоянного напряжения источника питания электронного устройства, свидетельствующий о его включенном или выключенном состоянии.

Переменный сигнал, величина которого меняется с течением времени, называют еще **электрическим колебанием**.

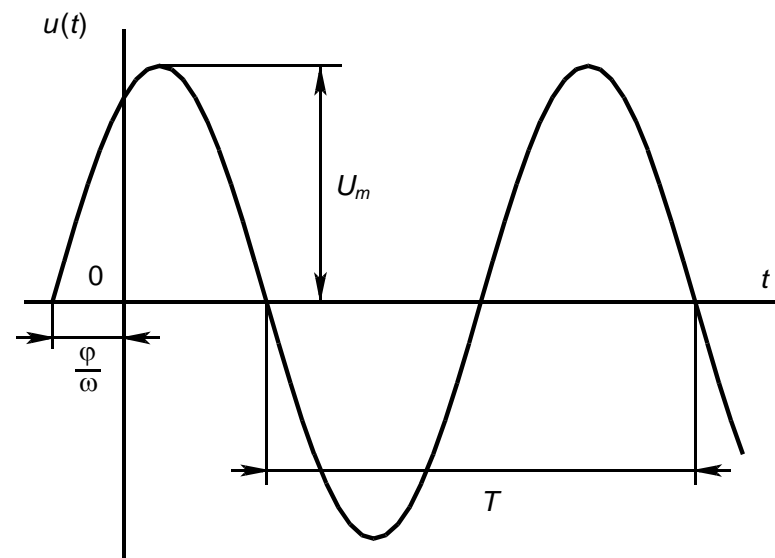
Переменными сигналами могут быть **непрерывными** и **импульсными**.

Непрерывный сигнал описывается **непрерывной функцией без разрывов**, т.е. его параметры изменяются непрерывно на всей временной оси в интервале определения.

Примером непрерывного сигнала - гармонический (синусоидальный) сигнал, меняющийся во времени по синусоидальному (или косинусоидальному) закону.



Постоянный электрический сигнал



$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

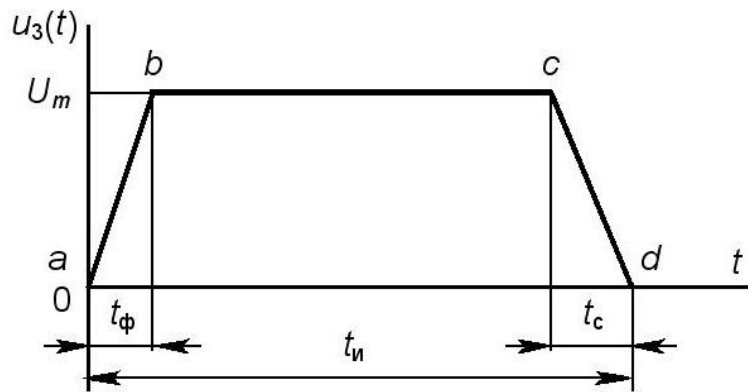
Импульсные сигналы также называют **электрическими импульсами**.

Электрический импульс – кратковременное отклонение напряжения (тока) от некоторого начального уровня (в частном случае нулевого).

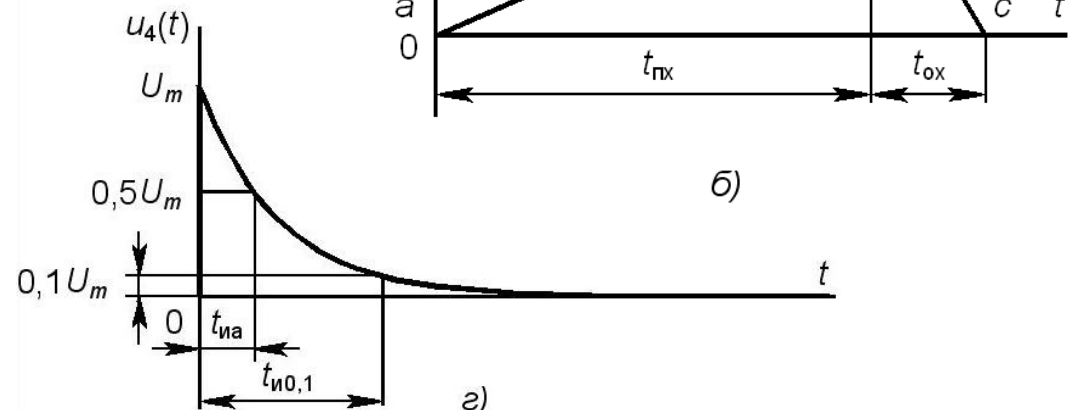
Понятие «**кратковременное отклонение**» подразумевает, что сигнал существует в течение относительно короткого интервала времени, существенно меньшего времени наблюдения.

Импульсные сигналы описываются кусочно-непрерывными функциями с конечными разрывами 1-го рода.

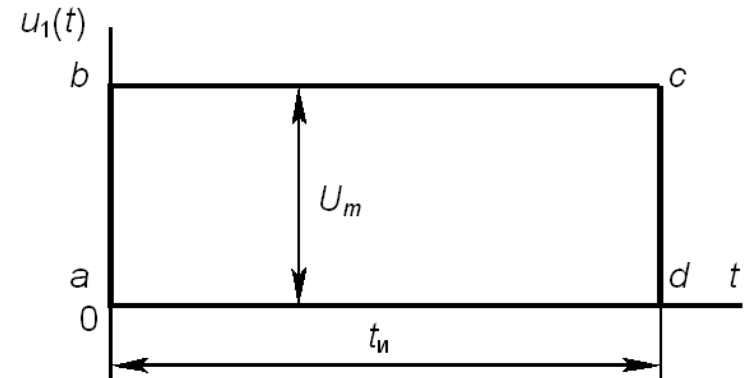
Наиболее часто на практике встречаются импульсы прямоугольной, треугольной (пилообразной), трапецеидальной и экспоненциальной формы.



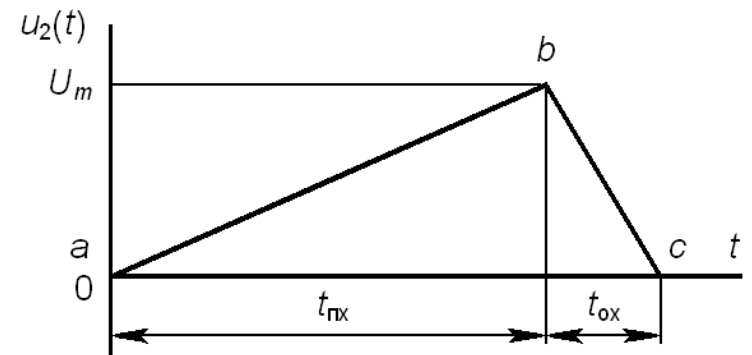
в)



г)



а)



б)

Импульсные сигналы: а) прямоугольный; б) треугольный; в) трапецеидальный; г) экспоненциальный.

Формы представления электрических сигналов

Существует несколько форм представления электрических сигналов, наиболее широко используемых на практике:

аналитическая; графическая; спектральная.

Аналитическая форма - функция $s(t)$ аргумента t , описывающая изменение сигнала во времени и являющаяся его **математической моделью**.

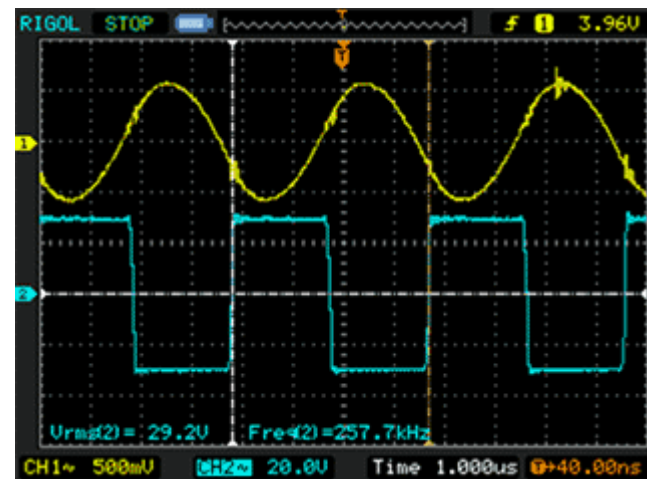
Используется в теоретических исследованиях.

Графическая форма – график в декартовой системе координат, наглядно отражающий изменение функции $s(t)$ во времени.

Полученный график называют **временной диаграммой** сигнала, позволяющей однозначно судить о его геометрической форме.

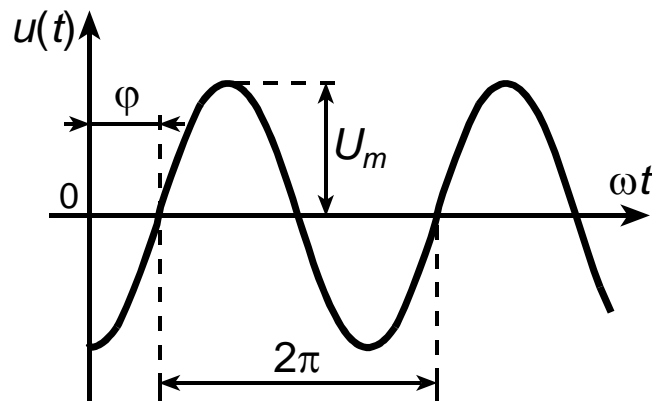
Если диаграмма получена в результате визуальной или фотографической регистрации изображения сигнала на экране осциллографа, то ее называют **осциллограммой**.

Аналитическая и графическая формы представляют электрические сигналы во **временной области** (т.е. отражают изменение сигнала во времени), взаимно дополняют друг друга и используются, как правило, вместе.



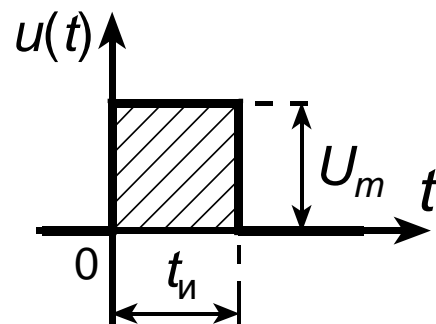
Примеры представления электрических сигналов в аналитической и графической формах

Гармонический (синусоидальный или косинусоидальный сигнал)



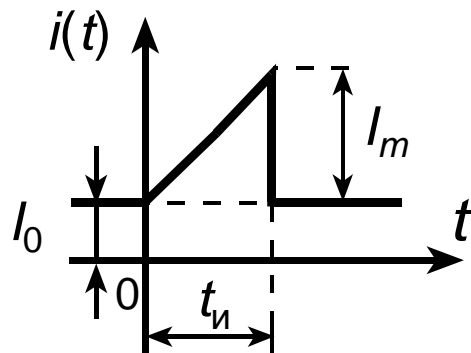
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Одиночный прямоугольный импульс



$$u(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0; \\ U_m, & 0 \leq t \leq t_n; \\ 0, & t_n < t < \infty. \end{cases}$$

Одиночный треугольный импульс



$$i(t) = \begin{cases} I_0, & -\infty < t < 0; \\ \frac{I_m \cdot t}{t_n} + I_0, & 0 \leq t \leq t_n; \\ I_0, & t_n < t < \infty. \end{cases}$$

Спектральная форма представляет сигнал в **частотной области**. Основным аргументом функции, описывающей сигнал, является частота ω (или f).

Что такое спектр сигнала?

И математически, и физически доказано, что любой реальный электрический сигнал $s(t)$ можно представить в виде суммы некоторых более простых **однотипных** сигналов, называемых **базисными функциями** или **спектральными составляющими** этого сигнала:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot f_n(t).$$

Здесь: $f_n(t)$ – базисные функции; C_n – постоянные коэффициенты;
 $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ – порядковый номер слагаемого.

Совокупность спектральных составляющих $C_n \cdot f_n(t)$ называется **спектром сигнала** в выбранной системе базисных функций.

Количество слагаемых в спектре зависит от вида сигнала и может быть как конечным, так бесконечным.

В качестве базисных на практике наиболее широко используются **гармонические спектры**, состоящие из гармонических составляющих с определенными частотами ω_n , амплитудами U_{mn} и начальными фазами φ_n – рис. на слайде 5.

Гармонической сигнал – это единственный сигнал, который, проходя через линейную электрическую цепь, не искажается по форме, меняя лишь амплитуду и начальную фазу. Кроме того, гармонические сигналы достаточно просто реализуются технически, что тоже является их преимуществом по сравнению с другими типами сигналов.

Для нахождения гармонического спектра некоторого периодического сигнала $s(t)$ его, пользуясь известными формулами, разлагают в **ряд Фурье**

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n \omega_1 t + b_n \cdot \sin n \omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \cos(n \omega_1 t - \psi_n),$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ – угловая частота первой (основной) гармоники периодического сигнала $s(t)$; T – период; a_n, b_n – постоянные коэффициенты, определяемые выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T s(t) \cdot \cos n \omega_1 t \cdot dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_T s(t) \cdot \sin n \omega_1 t \cdot dt;$$

$A_{mn} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ – амплитуда n -й гармоники; $\operatorname{tg} \psi_n = b_n / a_n$ – фаза n -й гармоники;

$\frac{a_0}{2}$ – постоянная составляющая (нулевая гармоника);

$n = 0; 1; 2; \dots \infty$ – номер гармонической составляющей (гармоники).

Гармонические составляющие, характеризующиеся амплитудами A_{mn} , начальными фазами и частотами $n\omega_1$, кратными основной частоте ω_1 , называют **гармониками**.

Каждая из гармоник имеет свой порядковый номер.

Первая гармоника ($n = 1$), частота которой равна частоте рассматриваемого сигнала (ω_1), называется **основной**. Все последующие гармоники (**вторая, третья** и т.д.) получили название **высших** и имеют частоты, в n раз превышающие ω : $\omega_2 = 2\omega_1$; $\omega_3 = 3\omega_1$; ... $\omega_n = n\omega_1$.

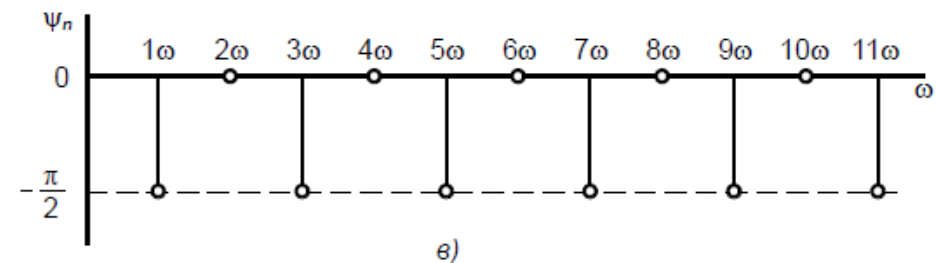
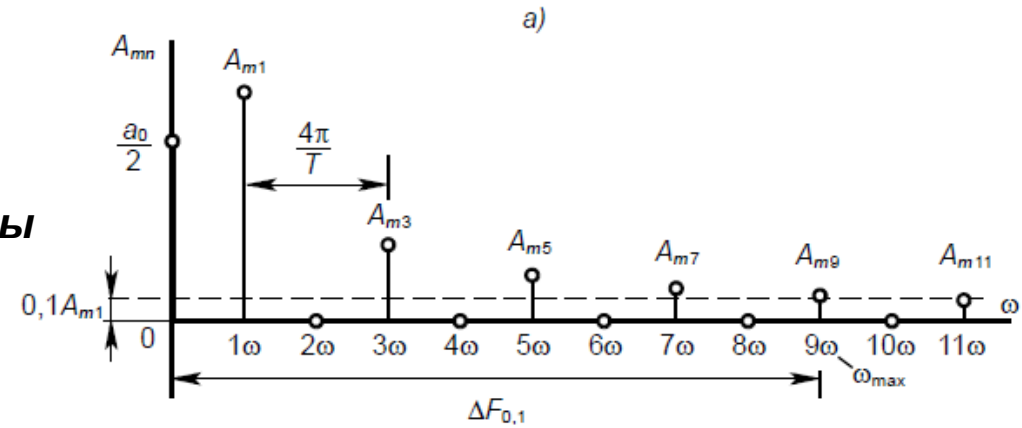
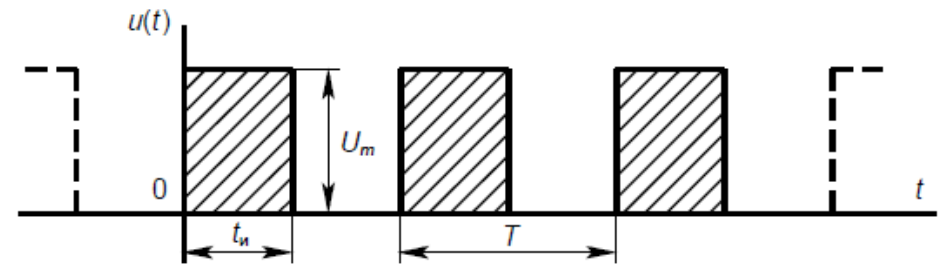
Постоянная составляющая $a_0/2$, называемая иначе **нулевая гармоника**, представляет собой **среднее за период значение** рассматриваемого сигнала и определяется при $n = 0$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} a_n \Big|_{n=0} = \frac{1}{T} \int_T s(t) \cdot dt.$$

Различают **амплитудный** и **фазовый спектры** периодического сигнала.

Амплитудный спектр – это дискретная функция $A_{mn} = f(n\omega_1)$, $n = 0; 1; 2; \dots$, отражающая зависимость амплитуд гармоник от частоты.

Фазовый спектр – аналогичная функция $\psi_n = f(n\omega_1)$, показывающая, как зависят от частоты начальные фазы гармоник сигнала.



Последовательность идеальных прямоугольных импульсов со скважностью $q = 2$ (а) и ее спектры: амплитудный (б) и фазовый (в)

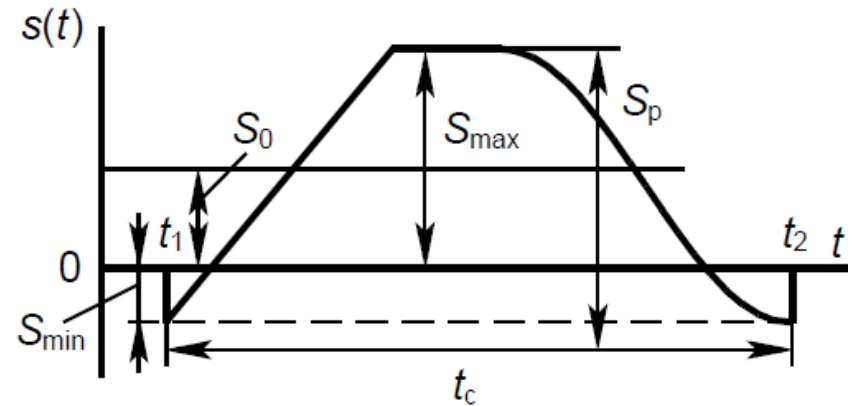
Параметры и характеристики аналоговых электрических сигналов

ГОСТ 16465-70 «Сигналы радиотехнические. Термины и определения»

Основные параметры электрических сигналов

Основные параметры – параметры, свойственные всем электрическим сигналам независимо от их формы:

1. **Длительность сигнала** t_c – интервал времени, в течение которого сигнал существует, т.е. функция $s(t)$, описывающая его, определена. В случае, когда начало и конец сигнала трудно определить в качестве длительности t_c принимают интервал времени, в течение которого значение сигнала не снижается ниже некоторого наперед заданного уровня, например, 0,1 от максимального значения (амплитуды).

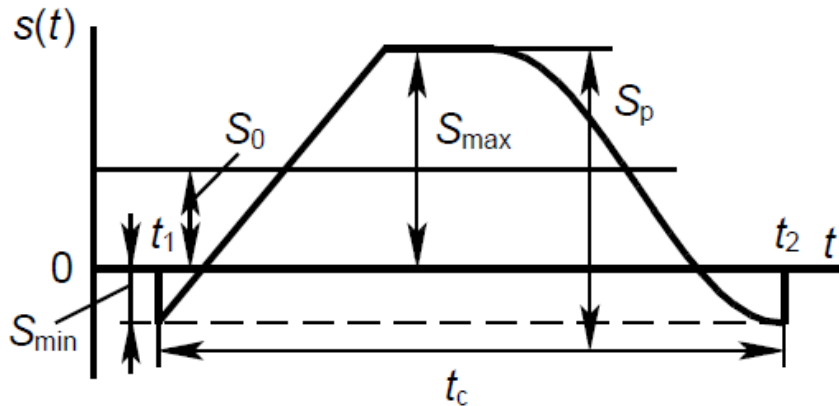


2. **Минимальное значение сигнала** S_{\min} – наименьшее значение сигнала на протяжении заданного интервала времени (обычно t_c).

3. **Максимальное значение сигнала** S_{\max} – наибольшее значение сигнала на протяжении заданного интервала времени.

4. **Постоянная составляющая сигнала** S_0 – **среднее значение** сигнала на интервале усреднения T_y , который для одиночных сигналов принимается равным t_c , а для периодических – периоду сигнала T :

$$S_0 = \frac{1}{T_y} \int_0^{T_y} s(t) dt.$$



7. Средневыпрямленное значение сигнала – среднее значение модуля сигнала:

$$S_{\text{св}} = \frac{1}{T_y} \int_0^{T_y} |s(t)| dt.$$

Периодические сигналы, в дополнение к рассмотренным параметрам, характеризуются еще **периодом T** и **частотой**.

К основным параметрам электрических сигналов относятся также параметры их спектров: **амплитудный** и **фазовый спектры** – для периодических сигналов.

5. Переменная составляющая сигнала – разность между сигналом и его постоянной составляющей:

$$s_{\sim}(t) = s(t) - S_0.$$

6. Размах сигнала S_p – разность между максимальным и минимальным значениями сигнала на протяжении заданного интервала времени (обычно t_c).

8. Среднеквадратичное значение сигнала – корень квадратный из среднего значения квадрата сигнала:

$$S = \sqrt{\frac{1}{T_y} \int_0^{T_y} s^2(t) dt}$$

Параметры электрических импульсов

Для их описания используются **основные**, **производные** и **дополнительные** параметры, характеризующие специфику формы конкретного сигнала и его расположение на временной оси.

Основные параметры электрических импульсов

К **основным** параметрам **электрических импульсов**, характерным **для всех** импульсных сигналов **независимо от их формы**, помимо на слайдах 12 и 13, относят **амплитуду** U_m , **длительность** $t_{\text{и}} = t_{\text{с}}$ и, для периодических последовательностей импульсов, **период** T .

Амплитуда U_m – величина максимального импульсного отклонения напряжения от начального уровня U_0 , в частном случае нулевого (**не путать с максимальным значением сигнала!**) – рис. на слайде 6.

Длительность импульса $t_{\text{и}} = t_{\text{с}}$ – интервал времени от момента появления сигнала до момента его окончания – рис. на слайде 6. Поскольку у реальных импульсов вследствие малой скорости изменения напряжения на начальной и конечной стадии формирования сигнала трудно выделить «начало» и «конец», отсчет длительности $t_{\text{и}}$ ведут по уровню $0,1U_m$ (обозначается $t_{\text{и}0,1}$) или по уровню $0,5U_m$. В последнем случае длительность импульса называют **активной** – $t_{\text{иа}}$ (рис. г на слайде 6).

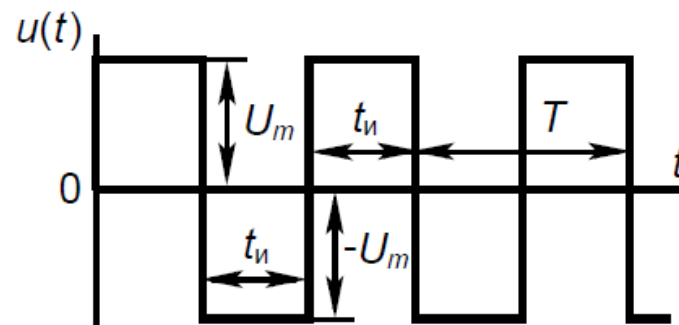
Период T периодической последовательности импульсов – минимальный временной интервал, для которого выполняется условие периодичности $u(t) = u(t+T)$.

Кроме основных параметров, электрические импульсы характеризуются **полярностью**.

Импульс считается **положительным**, если напряжение (ток) при его формировании увеличивается, и **отрицательным** – в противоположном случае (**независимо от знака мгновенного значения напряжения (тока)**).

Например, все импульсы, изображенные на слайде 6, являются положительными.

Импульсные сигналы бывают однополярными (либо только положительными, либо только отрицательными) и биполярными (двуполярными).



Импульсный периодический биполярный прямоугольный сигнал со скважностью импульсов $q = 2$ (меандр).

Производные параметры электрических импульсов

Производными называют параметры, получаемые из основных путем пересчета и характеризующие свойства импульсных периодических сигналов.

К производным параметрам относятся:

- **частота повторения импульсов** $f = 1/T$ [Гц] – показывает число импульсов в секунду;
- **коэффициент заполнения импульсов** γ – характеризует степень «заполнения» периода сигналов, является безразмерным параметром с диапазоном изменения $0 \leq \gamma \leq 1$

$$\gamma = t_{и} / T;$$

- **скважность импульсов** – показывает, во сколько раз период превышает длительность импульса. Безразмерный параметр, обратный коэффициенту заполнения ($1 \leq q \leq \infty$).

$$q = T / t_{и} = 1 / \gamma.$$

Дополнительные параметры электрических импульсов

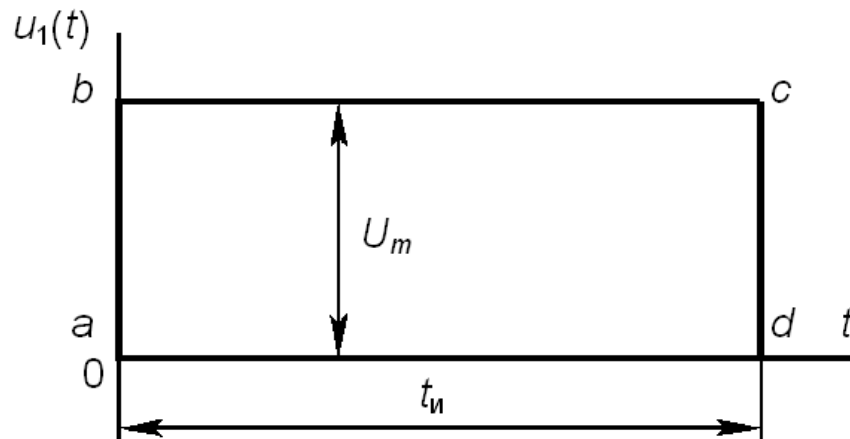
Дополнительные параметры характеризуют специфику сигналов данного вида. Следовательно, сколько видов импульсов, столько и групп дополнительных параметров.

Дополнительные параметры прямоугольного импульса

Идеализированный прямоугольный импульсный сигнал характеризуется следующими дополнительными параметрами:

фронт импульса $t_{\text{ф}}$ или **передний фронт** (отрезок **ав**) – время нарастания импульсной составляющей напряжения от 0 до U_m (для идеального прямоугольного сигнала $t_{\text{ф}} = 0$);

вершина импульса (отрезок **вс**) – интервал времени, в течение которого напряжение сигнала не меняется и равно амплитуде U_m ;



срез импульса $t_{\text{с}}$ или **задний фронт** (отрезок **cd**) – время снижения импульсной составляющей напряжения от U_m до 0 (для идеального прямоугольного сигнала $t_{\text{с}} = 0$).

В реальном случае форма прямоугольного импульса существенно отличается от идеальной (импульс искажается) из-за влияния паразитных параметров электрической цепи: длительности фронта $t_{\text{ф}}$ и среза $t_{\text{с}}$ принимают конечные значения, на фронте и спаде сигнала появляются **выбросы** напряжения, кроме того вершина импульса часто приобретает наклон, называемый **спадом плоской вершины**.

Реальный прямоугольный импульсный сигнал характеризуется параметрами:

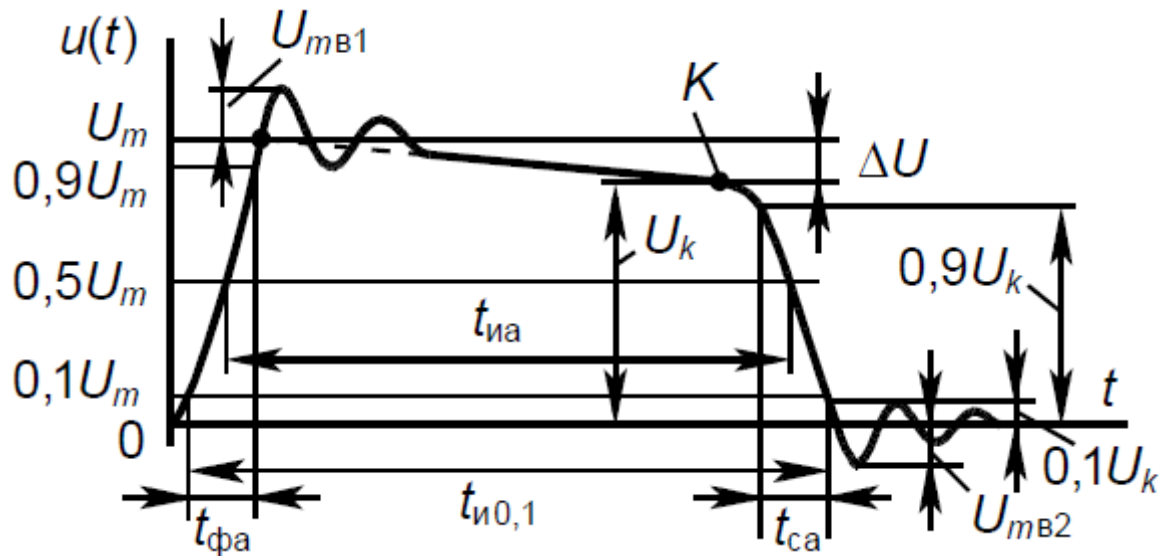
длительность импульса по основанию $t_{и0,1}$ – интервал времени, в течение которого величина сигнала превышает значение $0,1U_m$;

активная длительность импульса $t_{иа}$ – интервал времени, в течение которого величина сигнала превышает уровень $0,5U_m$;

активная длительность фронта $t_{фа}$ – время нарастания импульсной составляющей напряжения от $0,1U_m$ до $0,9U_m$;

коэффициент выброса на фронте $K_{в1}$ – отношение амплитуды первого выброса затухающих колебаний на фронте к амплитуде импульса U_m :
 $K_{в1} = U_{мв1}/U_m$;

активная длительность среза $t_{са}$. Если спад вершины импульса нельзя четко определить, то $t_{са}$ находится аналогично $t_{фа}$ – как время снижения импульсной составляющей напряжения от $0,9U_m$ до $0,1U_m$. В случае, когда спад плоской вершины сигнала четко фиксируется, активная длительность среза определяется как интервал времени, за который импульсная составляющая уменьшается от $0,9U_k$ до $0,1U_k$.



коэффициент выброса на срезе $K_{в2}$ – отношение амплитуды первого выброса затухающих колебаний на срезе к амплитуде импульса U_m :
 $K_{в2} = U_{мв2}/U_m$;

коэффициент спада плоской вершины $K_c = \Delta U/U_m$ – отношение величины спада плоской вершины импульса к амплитуде сигнала U_m .



Дополнительные параметры пилообразного импульса

Для описания идеального пилообразного (треугольного) импульса используются следующие дополнительные параметры:

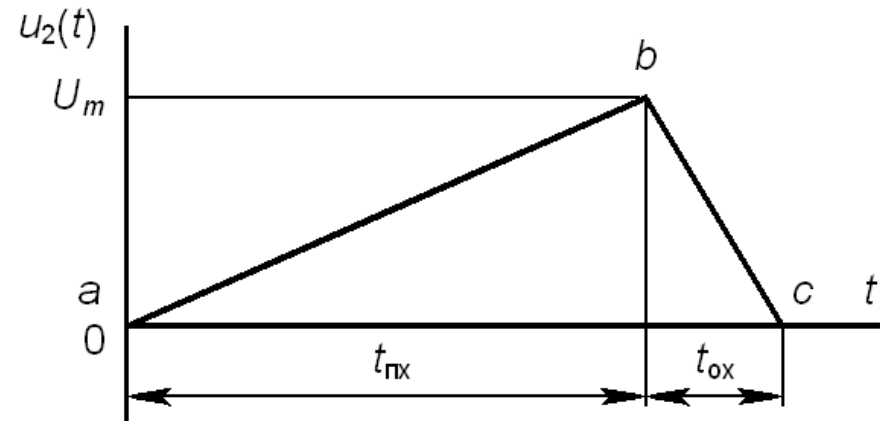
время прямого хода $t_{\text{пх}}$ (отрезок **ав**) – время нарастания напряжения «пилы» от начального уровня U_0 до амплитудного значения U_m ;

время обратного хода $t_{\text{ох}}$ (отрезок **вс**) – время убывания напряжения от значения U_m до начального уровня U_0 ;

коэффициент нелинейности «пилы» K_H – безразмерный параметр, характеризующий относительное изменение скорости нарастания (или спада) напряжения сигнала за время прямого хода:

$$K_H = \frac{\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=t_{\text{пх}}}}{\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}} = 1 - \frac{\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=t_{\text{пх}}}}{\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0}},$$

где $\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=0; t_{\text{пх}}}$ – скорость изменения пилообразного напряжения в начале и конце прямого хода, соответственно.



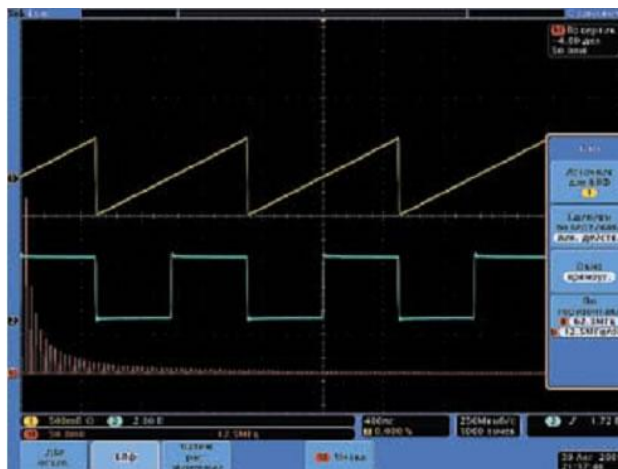
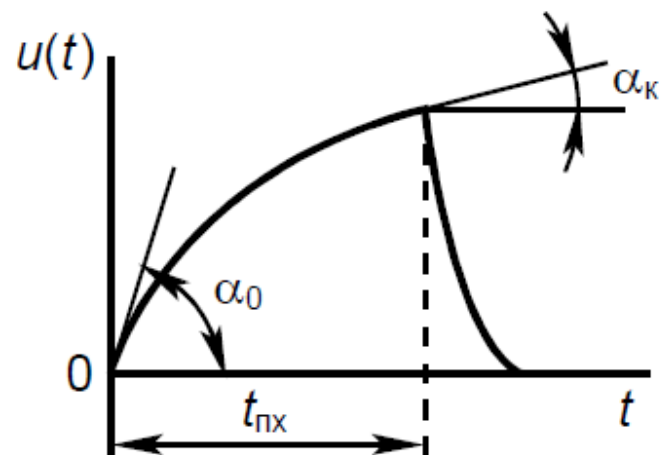
Геометрический смысл производной функции – тангенс угла между касательной, проведенной к заданной точке функции, и осью абсцисс (рис.).

Коэффициент нелинейности «пилы» можно определить графически, используя изображение «пилы», например, на экране осциллографа, по формуле:

$$K_H = 1 - \operatorname{tg}\alpha_K / \operatorname{tg}\alpha_0$$

где α_0 – угол наклона касательной в начале прямого хода «пилы» ($t = 0$);
 α_K – угол наклона касательной в конце прямого хода «пилы» ($t = t_{\text{пх}}$).

В идеальном случае, когда напряжение «пилы» строго линейно, $K_H = 0$.



Формы представления, параметры и характеристики гармонического сигнала

Самый распространенный сигнал – гармонический описывается выражением

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) = U_m \sin \Phi(t),$$

$\Phi(t) = \omega t + \varphi$ - **фазовый угол** или **фаза**.

Значение фазы при $t = 0$, т.е. $\Phi(0) = \varphi$, называют **начальной фазой**.

Скорость изменения фазы во времени $d\Phi(t)/dt = \omega = \text{const}$ называется **угловой частотой**, измеряемой в радианах в секунду [рад/сек].

За один период фаза сигнала изменяется на величину $\omega T = 2\pi$, следовательно,

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f,$$

где $f = 1/T$ – частота сигнала, отражающая число колебаний (количество периодов, циклов) в 1 секунду – измеряется в герцах [Гц].

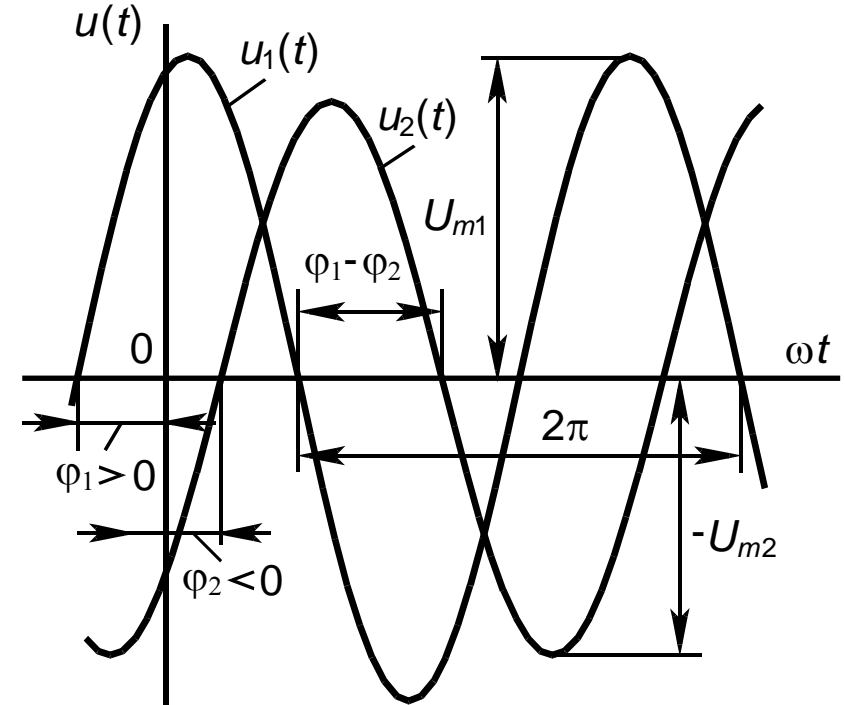
Гармонический сигнал характеризуется **амплитудой** U_m , **угловой частотой** ω и **начальной фазой** φ .

Начальная фаза определяет значение сигнала при $t = 0$: $U(0) = U_m \sin(\varphi)$.

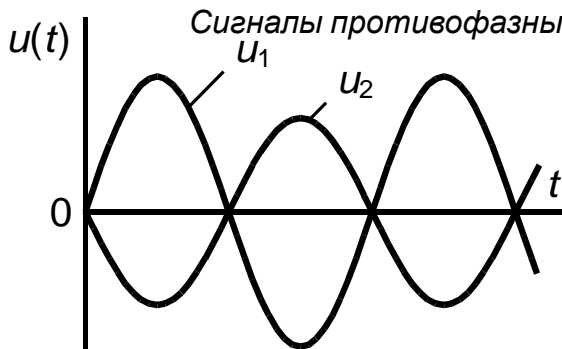
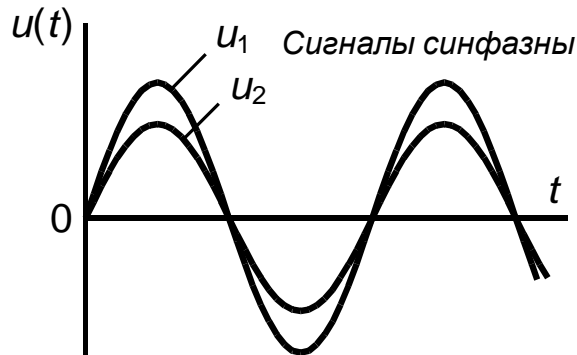
В общем случае угол начальной фазы отсчитывается **от начала координат** ($t = 0$) **до момента перехода синусоиды через нуль из области отрицательных в область положительных значений** (говорят: из «-» в «+»).

При **положительной** начальной фазе синусоида сдвигается **влево** от начала координат вдоль оси абсцисс, а при **отрицательной** – **вправо**.

Разность начальных фаз двух синусоидальных сигналов одинаковой частоты $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ называется **углом сдвига фаз** или **фазовым сдвигом**.



Для определения фазового сдвига вычисляют **угол между однородными моментами** перехода обеих синусоид через нуль из (-) в (+) или из (+) в (-).



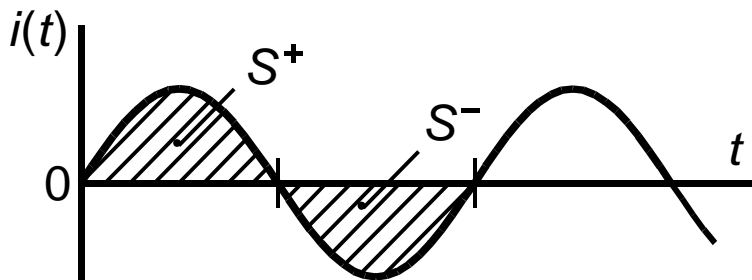
Если начальные фазы у двух синусоид с равными частотами одинаковы, говорят, что сигналы **синфазны** (совпадают по фазе), если отличаются на $\pm\pi$ – **противофазны**.

Среднее и действующее значение гармонического сигнала

Среднее значение – это постоянная составляющая сигнала (нулевая гармоника) – см. слайд 11.

Для определения среднего значения необходимо вычислить площадь, ограниченную кривой сигнала и осью абсцисс, и разделить полученную величину на период, т.е. усреднить площадь сигнала на периоде:

$$U_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt.$$



Поскольку площади положительной S^+ и отрицательной S^- полуволн синусоиды равны по модулю (рис. 1.19), **среднее значение любого гармонического сигнала равно нулю.**

Поэтому на практике принято находить **среднее значение гармоники за половину периода**, что соответствует **средневыпрямленному значению сигнала за период** (см. слайд 13):

$$I_{\text{cp}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t \cdot dt = I_{\text{срв}} = \frac{1}{T} \int_0^T |I_m \cdot \sin \omega t| \cdot dt = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0,637 I_m.$$

Действующее или **среднеквадратичное** значение характеризует энергетическую эффективность сигнала (как тока, так и напряжения) и определяется выражением (см. слайд 13):

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (I_m \sin \omega t)^2(t) \cdot dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m$$

Физический смысл этого понятия применительно к току (для напряжения аналогично): **действующее значение переменного** тока равно такому **постоянному** току, который, проходя по цепи с тем же активным сопротивлением, что и переменный ток, выделяет за период то же количество тепла.

Действительно, если обе части уравнения возвести в квадрат и результат умножить на RT , получим уравнение, описывающее известный закон Джоуля-Ленца:

$$Q = W = I^2 RT = \int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt$$

где Q – теплота, равная энергии W , выделяемая в активном сопротивлении R за время T при протекании по нему электрического тока I .

Примечание: **действующее** значение **синусоидального** тока (напряжения) в $\sqrt{2} \approx 1,41$ раз **меньше его амплитуды**; для **постоянного** же **тока действующее** и **мгновенное** значения **совпадают** по величине.