

4. ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Основы расчетов на прочность и жесткость элементов конструкций составляют часть науки о сопротивлении материалов.

Сопротивление материалов – это наука о надежности и экономичности элементов конструкций, деталей машин, приборов и механизмов.

Целью данного раздела является овладение методами анализа и расчета элементов конструкций, сопротивляющихся простейшим видам нагружения, которые обеспечат создание надежных и экономичных конструкций.

Задачи раздела: а) экспериментальное изучение поведения материалов при различных силовых воздействиях и обоснование теоретических положений механики деформирования; б) изучение методов расчета, гарантирующих с заданным коэффициентом запаса, прочность и жесткость элементов конструкций при максимально возможной экономии материала.

4.1 Основные понятия и определения

Обеспечить надежное сопротивление элемента или конструкции в целом – означает обеспечить их прочность, жесткость, устойчивость и выносливость.

Прочность – способность тела сопротивляться внешним нагрузкам.

Жесткость – способность тела сопротивляться изменению своих размеров и формы под воздействием внешних нагрузок. (В отличие от теоретической механики в сопротивлении материалов рассматриваются деформируемые тела, то есть тела, которые изменяют свои размеры и форму под нагрузкой).

Устойчивость – способность тела под нагрузкой сохранять первоначальную форму устойчивого равновесия.

Выносливость – способность материала сопротивляться переменным силовым воздействиям длительное время.

Показателем надежности является коэффициент запаса n :

$$n = \frac{P_{\text{кр}}}{P_{\text{max}}}, \quad (4.1)$$

где $P_{\text{кр}}$ – критическое (предельное) значение параметра (нагрузка, напряжение). P_{max} – наибольшее значение данного параметра в рабочих условиях.

Условие надежности имеет вид

$$n \geq [n], \quad (4.2)$$

здесь $[n]$ – допускаемое или нормируемое значение коэффициента запаса, которое назначают, исходя из практического опыта создания аналогичных конструкций, уровня техники. Для каждой области техники $[n]$ имеет свои границы значений. Так, например, при проектировании стационарных долговременных сооружений $[n] = 2 \dots 5$, в авиационной технике $[n] = 1,5 \dots 2$.

4.1.1. Моделирование объекта исследования

Объектом исследования, как было отмечено выше, является элемент конструкции, который может быть изготовлен из любого материала, отличаться большим многообразием формы, на него могут действовать различные нагрузки, а также, в зависимости от перечисленного, может быть и разным характер разрушения.

Для того чтобы охватить отмеченное многообразие материалов, формы, условий нагружения и разрушения, необходимо их модельное представление, которое должно учитывать наиболее значимые и отбрасывать несущественные факторы. Учет всех факторов, конечно, невозможен из-за их неисчерпаемости, поэтому любая модель – это приближенное в той или иной степени представление объекта. Таким образом, моделирование необходимо, чтобы на его основе получить расчетные зависимости, справедливые для достаточно широкого диапазона изменения соответствующих факторов.

Модель материала. Материал детали представляют однородной, сплошной изотропной средой. Это позволяет рассматривать тело как непрерывную среду и применять методы математического анализа.

Однородность означает, что тело состоит из материала одной природы, при этом результаты исследования элемента объема можно распространить на все тело, и свойства поверхности можно считать тождественными свойствам внутренних объемов тела.

Изотропия – независимость свойств материала от направления.

Модель материала наделяется такими физическими свойствами,

как упругость, пластичность, хрупкость и ползучесть.

Упругость – способность тела восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

Пластичность – способность тела сохранять значительные деформации (остаточные) после разгрузки.

Хрупкость – способность тела разрушаться без образования заметных остаточных деформаций.

Ползучесть – изменение во времени деформаций и напряжений при действии на тело постоянной внешней нагрузки.

Отмеченные физические свойства зависят от условий окружающей среды (температуры, химического свойства, уровня радиации и др.).

Модель формы. Для оценки прочности и жесткости элементов конструкций с целью упрощения расчетов вводят три типа формы тела: стержень; пластину (оболочку); массив.

Стержень – тело, имеющее поперечные размеры, несоизмеримо малые с его длиной. Стержень может иметь прямолинейную или криволинейную ось, постоянные или переменные по длине размеры и форму сечения.

Пластина (оболочка) – тело, имеющее размеры в двух направлениях, несоизмеримо большие, чем в третьем, и ограничивающиеся двумя плоскими (криволинейными) поверхностями.

Массив – тело, имеющее размеры, соизмеримые в трех направлениях.

Модели нагружения. *Сила* – это мера механического взаимодействия между телами. Силы подразделяются на внешние и внутренние.

Внешние силы – нагрузки, действующие на тело при его взаимодействии с другими телами.

Внутренние силы – силы взаимодействия между частями отдельного тела, оказывающие противодействие внешним силам, так как под влиянием внешних сил тело деформируется. Внутренние силы распределены в одних случаях по всей площади поперечного сечения тела равномерно, а в других – неравномерно. Если тело внешними силами не нагружено, то принимается, что внутренние силы отсутствуют.

Модели разрушения. В зависимости от условий нагружения выделяют статическое и усталостное разрушение.

4.1.2. Внутренние силовые факторы. Метод сечений

Внутренние силы определяют нагруженность элемента конструкции (детали), поэтому их необходимо уметь определять. Для этого используют метод сечений, который заключается в следующем.

Рассмотрим тело произвольной формы, находящееся в равновесии под действием внешних сил F_1, F_2, \dots, F_n (рис. 4.1,а).

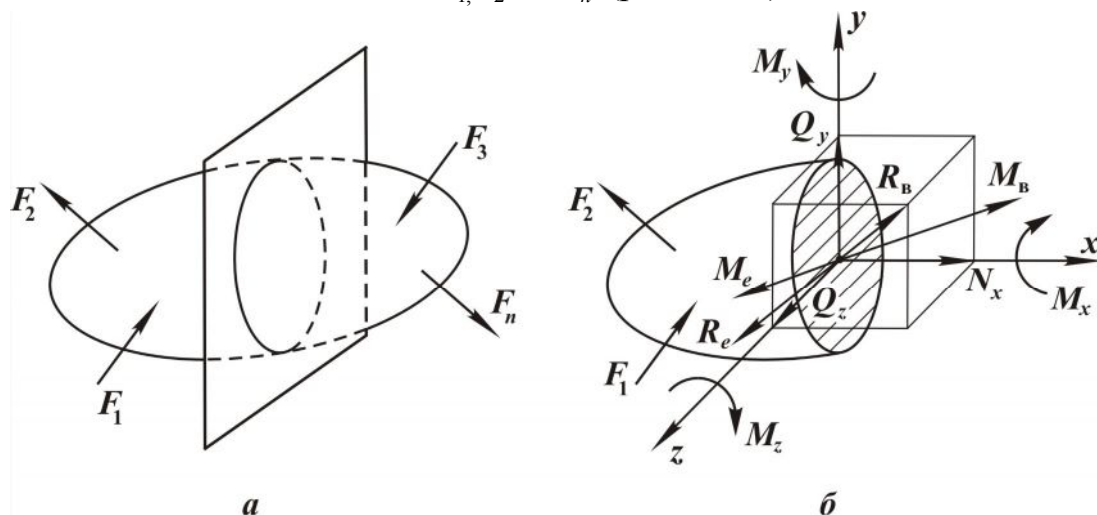


Рис. 4.1

Мысленно разрежем тело плоскостью на две части. Поскольку все тело находится в состоянии равновесия, то в равновесии будет находиться и каждая отсеченная часть.

Рассмотрим, например, левую часть (рис. 4.1,б).

Внешние силы, действующие на отсеченную часть, будут уравниваться внутренними, определяющими ее взаимодействие с отброшенной правой частью тела. (Внутренние силы между отсеченными частями также друг друга уравнивают).

По сечению внутренние силы распределены сложным образом, поэтому их приводят в центре тяжести сечения (точка O) к главному вектору сил \bar{R}_b и к главному моменту \bar{M}_b (рис. 4.1,б).

Внешние силы, действующие на рассматриваемую часть, тоже можно привести в той же точке O к главному вектору сил \bar{R}_e и к главному моменту \bar{M}_e . Так как мысленно отсеченная часть тела находится в равновесии, то $\bar{R}_b = \bar{R}_e$, $\bar{M}_b = \bar{M}_e$. Также должны быть равны и их проекции на оси системы координат $Oxyz$, помещенной своим началом в точке O и ориентированной таким образом, что оси y и z лежат в плоскости сечения, а ось x направлена по нормали к сечению.

Разложим в выбранной системе координат $Oxyz$ главный вектор

внутренних сил на проекции: N_x, Q_y, Q_z , а главный момент внутренних сил – на M_x, M_y, M_z (см. рис. 4.1,б). Эти составляющие называют *внутренними силовыми факторами*, причем, N_x называют нормальной, или продольной, силой, Q_y, Q_z – поперечными силами, M_x – крутящим моментом, а M_z, M_y – изгибающими моментами.

Данные силовые факторы могут быть определены из условий равновесия рассматриваемой части тела:

$$\begin{aligned} \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0; \\ \sum m_x = 0, \quad \sum m_y = 0, \quad \sum m_z = 0. \end{aligned}$$

Так, например, N_x будет равна сумме проекций внешних сил на ось x , а M_x – сумме моментов внешних сил относительно оси x , действующих на рассматриваемую часть тела.

4.1.3. Напряжение

Напряжение – это количественная мера интенсивности распределения внутренних сил по сечению, определяющая взаимодействие материальных частиц тела. Поэтому степень нагруженности детали определяют не внутренние силы, а напряжения. При достижении ими определенного уровня внутренние связи материальных частиц тела разрушаются. Однако для определения напряжений необходимо знать внутренние силовые факторы. Рассмотрим это подробнее. Пусть тело (рис. 4.2,а) нагружено произвольным образом.

Мысленно разрежем его на две части.

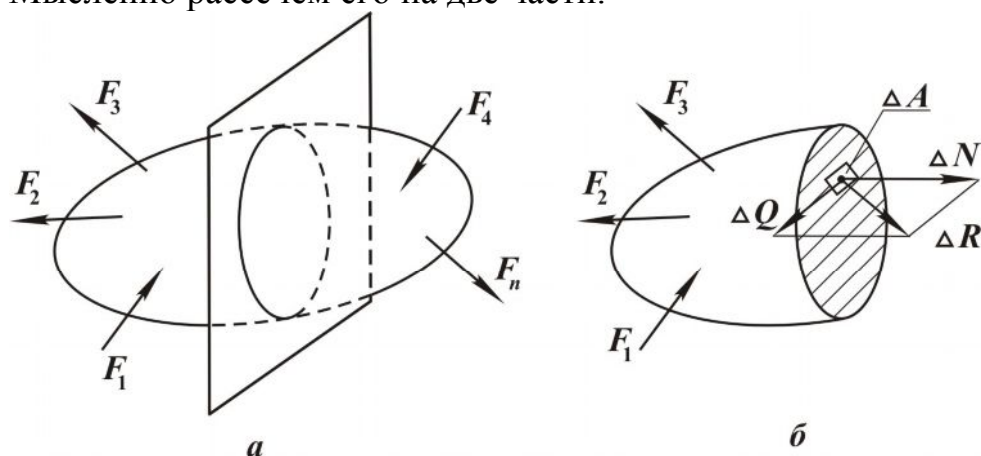


Рис. 4.2

Выделим в окрестности произвольной точки сечения элементарную площадку с площадью ΔA (рис. 4.2,б).

На этой площадке будет действовать равнодействующая внутренних сил ΔR . Тогда отношение $\frac{\Delta R}{\Delta A}$ будет являться *средним напряжением* на выделенной площадке.

Если размеры площадки уменьшать, то в пределе получим полное напряжение в выбранной точке сечения:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}. \quad (4.3)$$

Практически удобнее рассчитывать не полное напряжение, а его составляющие. Поэтому разложим ΔR на нормальную ΔN и касательную ΔQ составляющие к площадке. Тогда

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}; \quad (4.4)$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

будут называться соответственно нормальным и касательным напряжением в точке. При этом полное напряжение в точке может быть определено как

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (4.5)$$

Напряжения в точке зависят от положения плоскости сечения, поэтому, говоря о напряжении, необходимо указывать ориентацию сечения, проходящего через рассматриваемую точку. Совокупность напряжений во всех сечениях, проходящих через рассматриваемую точку, определяет напряженное состояние в точке. Напряжение характеризуется знаком (направлением) и модулем.

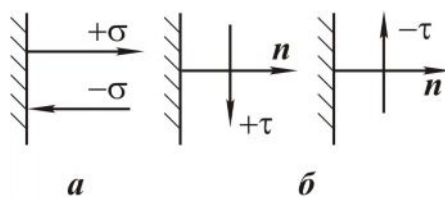


Рис. 4.3

Нормальное напряжение считается положительным, если оно направлено от сечения (рис. 4.3,а).

Касательное напряжение считается положительным, если для совмещения нормали к сечению с направлением напряжения ее необходимо повернуть по часовой стрелке (рис. 4.3,б). Раз-

мерность напряжения $\frac{H}{m^2} = Pa$ (Паскаль).

4.1.4. Перемещение и деформация

Перемещение – это изменение положения в пространстве сечения или всего элемента конструкции. Перемещения подразделяются на линейные и угловые.

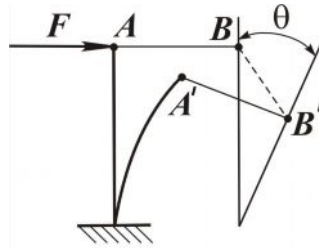


Рис. 4.4

На рис. 4.4 элемент OA деформируется и перемещается, а AB – только перемещается. Так, для сечения B отрезок BB' – линейное перемещение, угол θ – угловое перемещение. Перемещения являются следствием деформации.

Деформация – это геометрическое искажение в окрестности материальной точки.

Деформация тоже подразделяется на линейную и угловую.

Для определения деформации в точке B рассмотрим два малых отрезка AB и BC , выделенных в теле до его деформации и после нагружения (рис. 4.5).

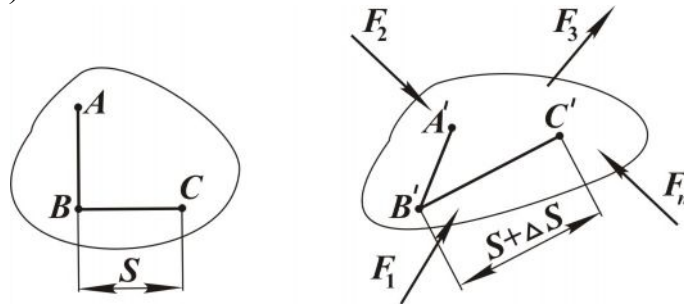


Рис. 4.5

После приложения нагрузки отрезки изменяют свою длину и взаимный угол расположения.

При этом

$$\varepsilon_{BC} = \lim_{BC \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}; \tag{4.6}$$

$$\gamma_{Ae} = \lim_{AB \rightarrow 0, BC \rightarrow 0} (\angle ABC - \angle A'B'C')$$

будут являться соответственно линейной и угловой (сдвиговой) деформацией в точке B . Совокупность линейных и угловых деформаций по

различным направлениям и плоскостям для одной точки определяют деформированное состояние в точке.

4.1.5. Закон Гука

Английский ученый Р. Гук в конце XVI века сформулировал закон, согласно которому *деформации материала элемента в каждой точке (в определенных пределах) прямо пропорциональны напряжениям в этой же точке и в том же направлении (при нагружении и разгрузении тела):*

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon, \\ \tau &= G\gamma,\end{aligned}\tag{4.7}$$

где E , G – модуль нормальной упругости и модуль сдвига соответственно.

Данный закон является основополагающим в расчетах на прочность и жесткость элементов конструкций.

4.1.6. Принцип независимости действия сил

В условиях выполнения закона Гука и малости деформаций (в условиях упругого деформирования они не превышают 1,5 %) в расчетах используется принцип независимости действия нагрузок.

Согласно этому принципу *результат воздействия системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности, то есть производимый эффект не зависит от порядка приложения внешних сил.*

4.1.7. Виды нагружения

При действии на элемент конструкции внешних сил в его поперечном сечении не всегда возникают все шесть внутренних силовых факторов.

В зависимости от вида и количества силовых факторов в сечении выделяют следующие простейшие виды нагружения: растяжение-сжатие (присутствует только N_x); кручение (M_x); чистый изгиб (M_z или M_y); плоский поперечный изгиб (Q_y , M_z или Q_z , M_y).

На практике также имеют место и комбинированные виды нагружения (сложное сопротивление): изгиб при действии нагрузок в разных плоскостях; кручение с изгибом; кручение с растяжением (сжатием); изгиб с растяжением (сжатием) и кручением. Аналитические выражения,

используемые в расчетах на прочность и жесткость элементов конструкций, зависят от вида нагружения. Поэтому целесообразно перейти к рассмотрению вопросов прочности и жесткости отдельно при каждом простейшем виде нагружения.

4.2. Растяжение и сжатие

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения, при котором внешние силы создают в поперечном (перпендикулярном оси) сечении стержня только один внутренний силовой фактор – продольную растягивающую (сжимающую) силу N_x .

4.2.1. Эпюры (диаграммы) внутренних сил

Эпюра внутренних сил – это график, показывающий характер изменения внутренних сил по длине стержня.

Построение эпюр необходимо для определения положения наиболее нагруженного (опасного) сечения стержня.

Порядок построения эпюр:

1. Определяют все внешние нагрузки (активные и реактивные), действующие на стержень.

2. Стержень мысленно разделяют на силовые участки. *Силовой участок* – это часть стержня, в пределах которой изменение внутреннего силового фактора определяется одним и тем же аналитическим выражением. Силовые участки ограничиваются сечениями, в которых приложены сосредоточенные нагрузки или начинают (заканчивают) действовать распределенные нагрузки.

3. Используя метод сечений, записывают аналитическое выражение для внутреннего силового фактора на каждом силовом участке.

4. По полученным аналитическим выражениям строят эпюры.

Данный порядок построения эпюр внутренних силовых факторов справедлив при любом виде нагружения.

Рассмотрим на примере (см. рис. 4.6) построение эпюры внутренней продольной силы.

Пример. Стержень загружен активными сосредоточенными силами ($F_1 = 10 \text{ кН}$; $F_2 = 25 \text{ кН}$), действующими вдоль оси стержня. Собственным весом стержня пренебрегаем (см. рис. 4.6). Построим эпю-

ру внутренних сил (N_x) в соответствии с приведенным порядком построения.

Решение

1. Активные нагрузки вызывают реактивную силу R_D . Определим ее значение из условия равновесия:

$$\sum X = 0. \quad (4.8)$$

$$\sum X = R_D - R_2 + F_1 = 0;$$

$$R_D = F_2 - F_1 = 15 \text{ кН.}$$

2. Имеем три силовых участка: OA , AC , CD .

3. Рассмотрим *участок* OA . Начало координат расположим в точке O . (В дальнейшем начало координат всегда будем располагать в начале каждого силового участка). Ось x направим вдоль оси стержня. В пределах участка на расстоянии x_1 от его начала мысленно сделаем сечение и рассмотрим равновесие отсеченной части длиной x_1 . (Для участка OA x_1 лежит в пределах $0 \leq x_1 \leq a$).

Внутренняя продольная сила должна уравновесить внешние силы, действующие на рассматриваемую часть. Так как собственным весом стержня пренебрегаем, а других внешних нагрузок, действующих на участок длиной x_1 , нет, то внутренняя продольная сила на первом участке $N_{x_1} = 0$.

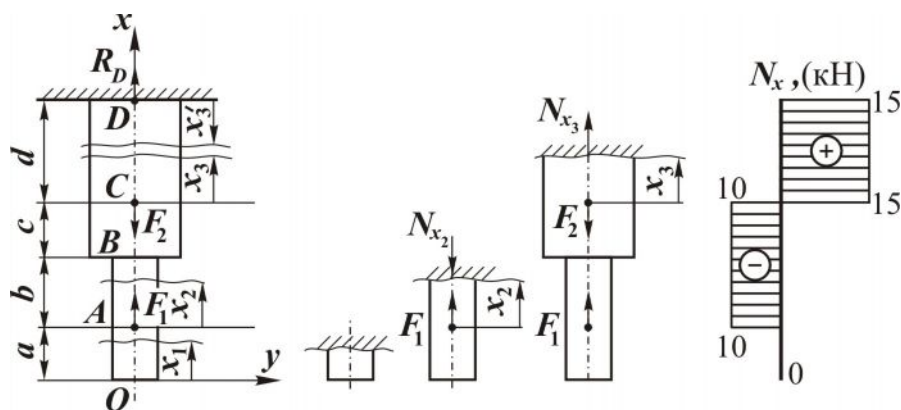


Рис. 4.6

Рассмотрим *участок* AC . Делаем сечение на расстоянии x_2 от нового положения начала координат (начало координат переносим в точку A). Для участка AC координата сечения может принимать значения: $0 \leq x_2 \leq b + c$. Однако, согласно методу сечения, рассматриваем равновесие всей нижней части стержня длиной $(a + x_2)$.

Правило знаков для внутренней силы: рассматриваемую часть стержня $(a + x_2)$ мысленно закрепляют в сечении. При этом, если внешняя

сила вызывает растяжение исследуемой части стержня (возможно и не всей), то эта сила создает положительную внутреннюю силу и наоборот.

Для рассматриваемой части внешняя сила F_1 вызывает ее сжатие от сечения приложения силы F_1 до сечения x_2 .

Следовательно, внутренняя сила будет отрицательной и по модулю равна F_1 , так как других внешних сил, действующих на рассматриваемую часть ($a + x_2$), нет:

$$N_{x_2} = -F_1 = -10 \text{ кН.}$$

Участок CD. Начало координат располагаем в точке C . В пределах участка делаем сечение на расстоянии x_3 от точки C . Тогда для участка CD : $0 \leq x_3 \leq d$. При этом внутренняя сила N_{x_3} будет уравнивать нагрузки, действующие на часть стержня длиной $a + b + c + x_3$. Закрепляем эту часть в сечении и в соответствии с правилом знаков записываем аналитическое выражение для N_{x_3} :

$$N_{x_3} = -F_1 + F_2 = +15 \text{ кН.}$$

4. Строим эпюру N_x . Проводим линию, параллельную оси стержня, и откладываем на ней значение внутренних сил на каждом силовом участке. Значение N_x , равное нулю, соответствует этой линии, положительное значение N_x откладывается вправо в соответствующем масштабе, отрицательное – влево. Из выражений для N_x следует, что на участке OA внутренняя сила равна нулю, на участке AC она постоянна и вызывает сжатие стержня, на CD – постоянная растягивающая.

На эпюре N_x внутренняя сила будет резко изменяться (скачком) в тех сечениях, в которых приложена сосредоточенная внешняя сила. Причем величина скачка равна соответствующей силе.

Так, в сечении A приложена сила $F_1 = 10$ кН и имеем скачок на 10 кН, в сечении C сила $F_2 = 30$ кН, скачок $10 \text{ кН} + 20 \text{ кН} = 30 \text{ кН}$.

Данную эпюру можно было построить, рассматривая силовые участки сверху: DC , CA , AO . Тогда для участка DC начало координат располагаем в точке D . Сечение проводим от точки D на расстоянии x'_3 ($0 \leq x'_3 \leq d$).

Исследуем равновесия части стержня длиной x'_3 , мысленно закрепив ее в сечении. При этом внешняя сила R_D вызывает ее растяжение (на опору внимание не обращаем, так как ее присутствие выражается действием силы R_D). Тогда $N_{x'_3} = +R_D = 10$ кН, что совпадает со значением на построенной эпюре.

Следует отметить, так как в данном примере не учитывается собственный вес стержня, то изменение размеров или формы, например в сечении B , не вызывает изменение внутренней силы N_x . Это объясняется тем, что N_x принимается как сосредоточенная в центре тяжести поперечного сечения.

4.2.2. Напряжения в поперечном сечении

Сила N_x является равнодействующей внутренних сил dN , действующих на бесконечно малых площадках dA поперечного сечения площадью A . Так как N_x перпендикулярна сечению, то dN выражаются через нормальные напряжения

$$dN = \sigma dA,$$

тогда

$$N_x = \int_A \sigma dA. \quad (4.9)$$

Эксперименты показывают, что если на поверхность стержня нанести систему взаимно перпендикулярных линий (см. рис. 4.7), то после приложения продольной внешней силы линии переместятся параллельно самим себе. Это означает, что *нормальные напряжения по поперечному сечению распределяются равномерно* (одинаковы во всех точках сечения). Если $\sigma = \text{const}$, то из формулы (4.9) получим

$$N = \sigma \cdot A,$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (4.10)$$

Следовательно, нормальное напряжение в поперечном сечении при растяжении (сжатии) равно отношению внутренней продольной оси в сечении к площади этого сечения.

Знак напряжения определяется знаком продольной силы. Построим эпюру напряжений для ранее рассматриваемого примера (см. рис. 4.7). Пусть $A_1 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, $A_2 = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$.

Порядок построения эпюры напряжений σ_x тот же, что и эпюры N_x . При этом удобно использовать эпюру и выражения для N_x . Так как σ_x определяется не только от N_x , но и от A_x , то для данного стержня будем иметь четыре участка: OA ; AB ; BC ; CD .

$$\text{Участок } OA \text{ (} 0 \leq x_1 \leq a \text{): } \sigma_{x_1} = \frac{N_{x_1}}{A_1} = 0;$$

$$\text{Участок } AB \ (0 \leq x_2 \leq b) : \sigma_{x_2} = \frac{N_{x_2}}{A_1} = 50 \text{ [МПа];}$$

$$\text{Участок } BC \ (0 \leq x_3 \leq c) : \sigma_{x_3} = \frac{N_{x_2}}{A_2} = 25 \text{ [МПа];}$$

$$\text{Участок } CD \ (0 \leq x_4 \leq d) : \sigma_{x_4} = \frac{N_{x_3}}{A_2} = 37,5 \text{ [МПа];}$$

По полученным значениям σ_x строим эпюру.

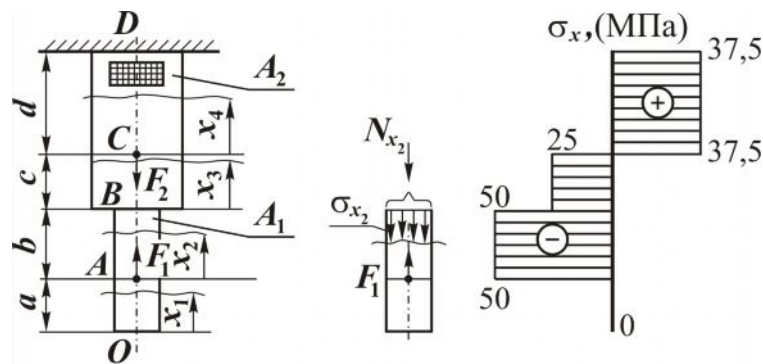


Рис. 4.7

4.2.3. Условие прочности

Проектируемые (работающие) элементы конструкции должны быть прочными, то есть способными сопротивляться действию внешних нагрузок, не разрушаясь. Такое состояние обеспечивается выполнением условия прочности, которое основано на сопоставлении максимального напряжения (σ_{\max}) в элементе конструкции, возникающего от внешних нагрузок с максимально допустимым напряжением $[\sigma]$ для материала, из которого изготовлен данный элемент (деталь):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\text{рас}}}{A} \leq [\sigma], \quad (4.11)$$

где $N_{\text{рас}}$ – расчетная внутренняя сила в наиболее нагруженном (опасном) сечении, в котором возникает максимальное напряжение; $[\sigma]$ – допустимое напряжение для конкретного материала.

В рассмотренном примере (рис. 4.7) максимальное напряжение возникает в поперечных сечениях на участке AB , следовательно, $N_{\text{рас}}$ – это внутренняя сила, действующая на этом участке.

Допускаемое напряжение определяется как

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{n}, \quad (4.12)$$

здесь $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное напряжение для материала. Для пластичного – это предел текучести, для хрупкого – предел прочности. Эти характеристики материала определяются экспериментально (см. параграф 4.2.7); n – коэффициент запаса прочности. Величина n назначается, исходя из предшествующего опыта проектирования и эксплуатации подобных конструкций, конкретных условий работы рассчитываемого элемента, степени его ответственности и последствий выхода его из строя.

4.2.4. Деформации и перемещения

До приложения нагрузки в стержне с площадью поперечного сечения A и длиной l не возникают напряжения, а, следовательно, отсутствуют и деформации. Выделим в нем элементарный объем со сторонами: dx, dy, dz (рис. 4.8).

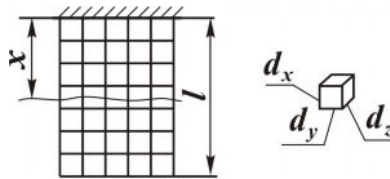


Рис. 4.8

После приложения нагрузки размеры элементарного объема изменятся (рис. 4.9) и будут равны

$$dx + \Delta dx;$$

$$dy - \Delta dy;$$

$$dz - \Delta dz.$$

При этом линейные деформации можно выразить как

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (4.13)$$

Здесь ε_x – продольная деформация; $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ – поперечные деформации.

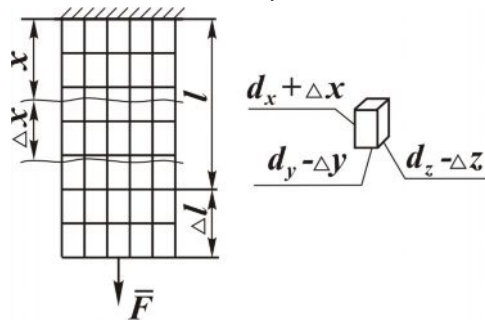


Рис. 4.9

При упругом деформировании отношение поперечной деформации к продольной для конкретного материала является постоянной величиной. Это отношение, взятое по абсолютной величине, называют *коэффициентом Пуассона* (μ).

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{прод}}} \right|. \quad (4.14)$$

Экспериментально установлено, что, например, для сталей $\mu = 0,25 \dots 0,35$. Согласно закону Гука между нормальным напряжением и линейной деформацией при упругом деформировании существует линейная связь. Для растяжения (сжатия) она имеет вид (4.7):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (4.15)$$

Определим перемещение Δx сечения, расположенного на расстоянии x от опоры (см. рис. 4.9). Согласно (4.13) $\Delta dx = \varepsilon_x dx$.

Тогда

$$\Delta x = \int_0^x \varepsilon dx. \quad (4.16)$$

С учетом закона Гука (4.15) $\Delta x = \int_0^x \frac{\sigma}{E} dx$,

или

$$\Delta x = \int_0^x \frac{N}{AE} dx. \quad (4.17)$$

Если в пределах рассматриваемого участка стержня $N = \text{const}$; $A = \text{const}$; $E = \text{const}$ (один и тот же материал), то

$$\Delta x = \frac{Nx}{EA}. \quad (4.18)$$

Здесь Δx – взаимное перемещение сечений стержня, отстоящих на расстоянии x , при условии, что на этом расстоянии постоянны N , A , E . Изменение длины всего стержня (перемещение нижнего сечения относительно опоры) будет равно (см. рис. 4.9)

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (4.19)$$

Для стержня, имеющего несколько n участков, для которых постоянны N_i, A_i, E_i , изменение всей длины определится как алгебраическая сумма изменений длины стержня Δl_i на каждом i – участке. При этом знак Δl_i определяется знаком N_{x_i} :

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i}. \quad (4.20)$$

Пример. Построим эпюру перемещений сечений стержня, изображенного на рис. 4.6, 4.7. Зададим дополнительно: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $a = 0,2$ м; $b = 0,3$ м; $c = 0,4$ м; $d = 0,1$ м.

Решение

В соответствии с формулой (4.20) стержень имеет четыре участка: DC , CB , BA , AO .

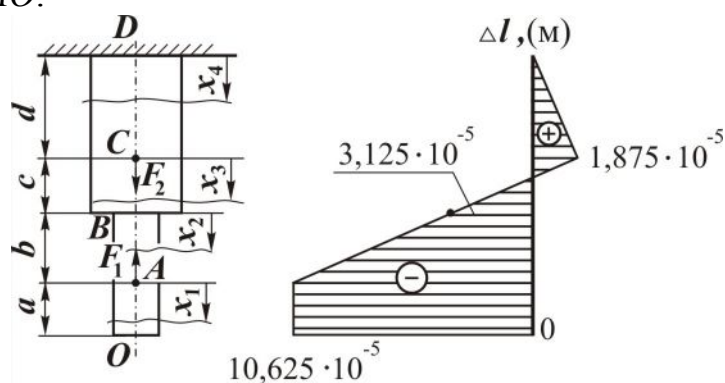


Рис. 4.10

Участок DC ($0 \leq x_1 \leq d$). Начало координат в точке D . Перемещение сечения x_1 относительно неподвижного сечения D , с учетом эпюры N_x и формулы (4.20). будет иметь вид

$$\Delta_{x_1 D} = \frac{N_{x_1} \cdot x_1}{E \cdot A_2}. \quad (4.21)$$

В выражении (4.21) переменной величиной для участка DC является только x_1 . Рассчитаем перемещение в начале участка ($x_1 = 0$): $\Delta_{x_1 D(x=0)_1} = 0$ и в конце ($x_1 = d$):

$$\Delta_{x_1 D(x_1=d)} = \Delta_{CD} = \frac{15 \cdot 0,1}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}} = 1,875 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Здесь Δ_{CD} – перемещение сечения C относительно D .

Участок CB ($0 \leq x_2 \leq c$). Начало координат в точке C . Перемещение сечения x_2 относительно сечения D можно выразить как алгебраическую сумму перемещений Δ_{CD} и перемещения сечения x_2 относительно сечения C ($\Delta_{x_2 C}$):

$$\Delta_{x_2 D} = \Delta_{CD} + \Delta_{x_2 C},$$

или

$$\Delta_{x_2 D} = \Delta_{CD} + \frac{N_{x_2} \cdot x_2}{E \cdot A_2}. \quad (4.22)$$

Тогда

$$\Delta_{x_2 D(x_2=0)} = \Delta_{CD} = 1,875 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

а в конце участка

$$\Delta_{x_2 D(x_2=C)} = \Delta_{BD} = 1,875 \cdot 10^{-5} - \frac{10 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}} = -3,125 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Участок BA ($0 \leq x_3 \leq b$):

$$\Delta_{x_3 D} = \Delta_{BD} + \Delta_{x_3 B} = \Delta_{BD} + \frac{N_{x_3} \cdot x_3}{E \cdot A_1};$$

$$\Delta_{x_3 D(x_3=0)} = \Delta_{BD} = -3,125 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

$$\Delta_{x_3 D(x_3=b)} = \Delta_{AD} = -3,125 \cdot 10^{-5} - \frac{10 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = -10,625 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Участок AO ($0 \leq x_4 \leq a$). Внутренняя сила на данном участке $N_{x_4} = 0$ (см. рис. 4.6). Следовательно, он не деформируется, хотя и перемещается за счет деформации части стержня *DA*:

$$\Delta_{x_4 D} = \Delta_{AD} = \Delta_{OD}.$$

По полученным значениям перемещений в начале и конце каждого участка строим эпюру перемещений (см. рис. 4.10).

Перемещение сечения *O* относительно *D* (Δ_{OD}) также можно получить, рассматривая действие на стержень отдельно каждой внешней силы.

$$\Delta_{OD} = \Delta l_{OD} = \frac{F_2 \cdot d}{E \cdot A_2} - \frac{F_1(c+d)}{E \cdot A_2} - \frac{F_1 \cdot b}{E \cdot A_1}.$$

Сила F_2 вызывает растяжение участка *DC*, поэтому берется со знаком плюс, F_1 сжимает *AD* (знак минус). Действие F_1 выражается двумя слагаемыми, так как на участке *AD* площадь сечения имеет значения A_1, A_2 .

4.2.5. Условие жесткости

Условие жесткости накладывает ограничения на изменение размеров элементов конструкций под действием нагрузок и имеет вид

$$\Delta l_{\max} = \left(\frac{N l}{EA} \right)_{\max} \leq [\Delta l]$$

или

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta l_{\max}}{l} \leq [\varepsilon]. \quad (4.23)$$

Здесь $[\Delta l]$; $[\varepsilon]$ – соответственно допускаемое абсолютное и относительное изменение длины наиболее деформируемого участка стержня, регламентируемые для конкретного материала.

4.2.6. Три типа задач

На основе условий прочности и жесткости для конкретной расчетной схемы могут решаться три типа задач (при любом виде нагружения).

1. *Проверочный расчет.* Цель расчета – проверка условий прочности и жесткости при следующих известных параметрах: внешние нагрузки, размеры конструкции и ее элементов, материал элементов конструкции $[\sigma]$, $[\varepsilon]$.

2. *Проектный расчет.* Цель расчета – определение размеров элементов конструкции, если известны внешние нагрузки и материал элементов конструкции. При данном расчете возможен и подбор материала для заданных размеров деталей.

3. *Расчет допустимых нагрузок.* Цель расчета – определение максимально допустимых внешних нагрузок для заданных размеров элементов конструкции и выбранном материале.

4.2.7. Механические испытания материалов

В расчетах на прочность и жесткость элементов конструкций необходимо знать механические свойства материалов, из которых они будут изготовлены. Эти свойства изучаются экспериментально при механических испытаниях образцов из конкретных материалов. При испытаниях оцениваются характеристики прочности, пластичности и упругости.

Условия испытания представлены в Государственных стандартах. Существуют стандарты на следующие основные виды нагружения: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. Результаты испытания на растяжение во многих случаях позволяют достаточно верно судить о поведении материала и при других видах нагружения.

Рассмотрим подробнее испытание на растяжение. Для испытания на растяжение чаще используются образцы круглого (см. рис. 4.11), реже прямоугольного сечений.

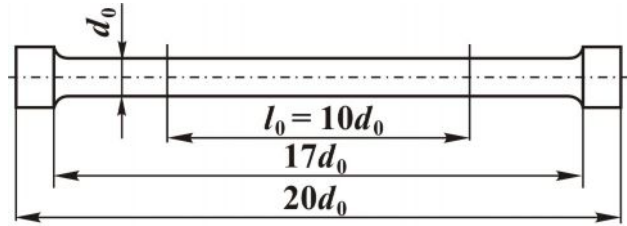


Рис. 4.11

Длину рабочей части образца l_0 принимают больше его диаметра d_0 в 10 раз, допускается и в 5 раз. Концевые утолщения образца необходимы для его закрепления в захватах машины.

На рис. 4.12 приведены диаграммы растяжения для малоуглеродистой стали и чугуна (пластичного и хрупкого материалов).

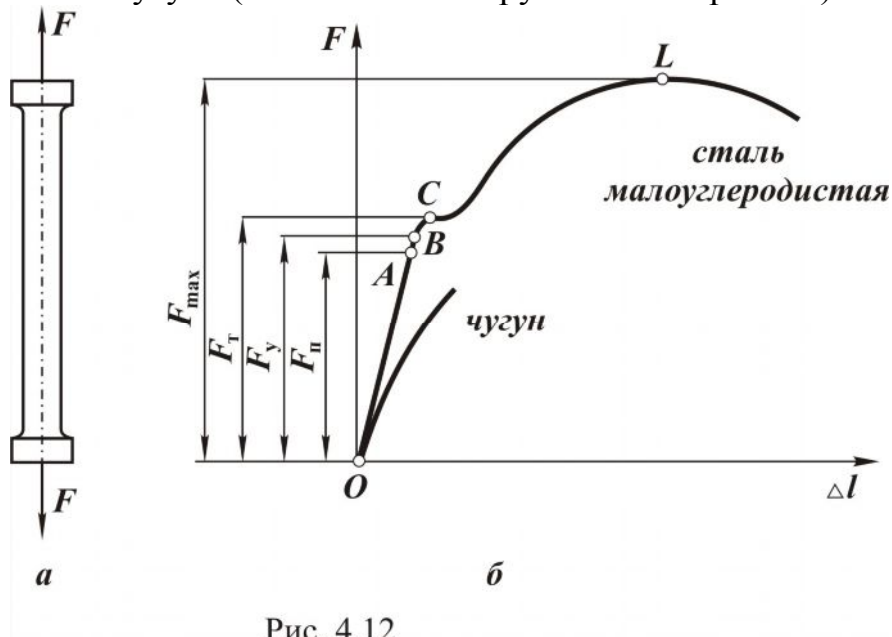


Рис. 4.12

Испытания проводят на универсальных испытательных машинах, имеющих силоизмерительное устройство и аппарат для автоматической записи диаграммы растяжения (сжатия) в координатах: сила F – удлинение Δl .

Такой график зависит от размеров образца и физических свойств материала. Для исключения зависимости от размеров образца диаграмму растяжения перестраивают в координатах: напряжение (σ) – деформация (ε) (см. рис. 4.13).

При этом напряжение и деформация рассчитываются как

$$\sigma = \frac{F}{A_0};$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где A_0, l_0 – соответственно площадь поперечного сечения и рабочая длина образца до испытания.

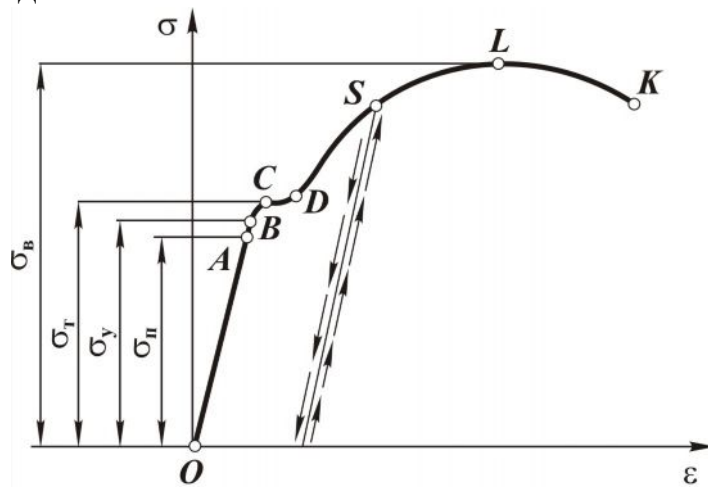


Рис. 4.13

Определим на диаграмме (рис. 4.13) характерные точки и дадим качественную и количественную оценку механическим свойствам материала.

Рассматривается диаграмма малоуглеродистой стали как наиболее показательная при определении характеристик прочности. На диаграмме условно можно выделить четыре зоны.

Первая зона (OB) – *зона упругого деформирования*. При снятии нагрузки в этой зоне деформирования образец принимает начальные размеры. Точка A на оси σ соответствует *пределу пропорциональности* σ_n .

$\sigma_n = \frac{F_n}{A_m}$ – это наибольшее напряжение, до которого материал деформируется в соответствии с законом Гука ($\sigma = E \cdot \epsilon$). Точка B соответствует *пределу упругости* σ_y . $\sigma_y = \frac{P_y}{A_0}$ – это наибольшее напряжение, до которого в материале не образуются остаточные деформации.

Вторая зона (BD) называется *зоной общей пластичности*. Для нее характерно значительное увеличение деформации без заметного роста напряжений за счет одновременных сдвигов в кристаллической решетке по всему объему материала образца. Точка C на диаграмме соответствует *пределу текучести* $\sigma_T = \frac{P_T}{A_0}$.

Это напряжение, при котором в материале возникают значительные деформации без заметного роста напряжений. Для тех материалов, у которых нет выраженной зоны BD , пределом текучести называется напряжение, соответствующее

остаточной деформации, равной $\varepsilon = 0,02 \dots 0,2$ % (условный предел текучести).

Предел текучести является очень важной характеристикой прочности, так как используется для определения допускаемого напряжения пластичных материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где n_T – коэффициент запаса, определяющий во сколько раз максимально допускаемые напряжения в реальной конструкции должны быть меньше предела текучести.

Третья зона (*DL*) – *зона упрочнения*. Под *упрочнением* понимается повышение уровня напряжений, до которого материал деформируется упруго. Так, если разгрузить образец из состояния, соответствующего точке *S*, то при последующем нагружении он будет деформироваться упруго до точки *S*, где напряжение выше предела упругости. Это явление повышения предела упругости материала в результате пластического деформирования носит название «*наклёп*» и широко используется в технике. Наклёп при необходимости может быть снят термической обработкой – *отжигом*.

Четвертая зона (LK) называется *зоной местной текучести*. В этой зоне требуется все меньшая нагрузка для дальнейшего деформирования образца. Это объясняется образованием местного сужения (шейки) в наиболее слабом сечении образца, и дальнейшее деформирование происходит в зоне шейки, где площадь сечения быстро уменьшается. Однако многие материалы разрушаются без заметного образования шейки.

Напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, которую может выдержать образец (точка *L*), называется *пределом прочности*:

$$\sigma_B = \frac{P_{\max}}{A_0}.$$

Предел прочности используется для определения допускаемого напряжения хрупких материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B},$$

где n_B – коэффициент запаса.

Аналогично определяются характеристики прочности и при других видах нагружения.

4.3. Сдвиг. Срез

Сдвиг – это такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении стержня возникает только поперечная (перерезывающая) сила Q_y или Q_z , а остальные силовые факторы равны нулю (рис. 4.14).

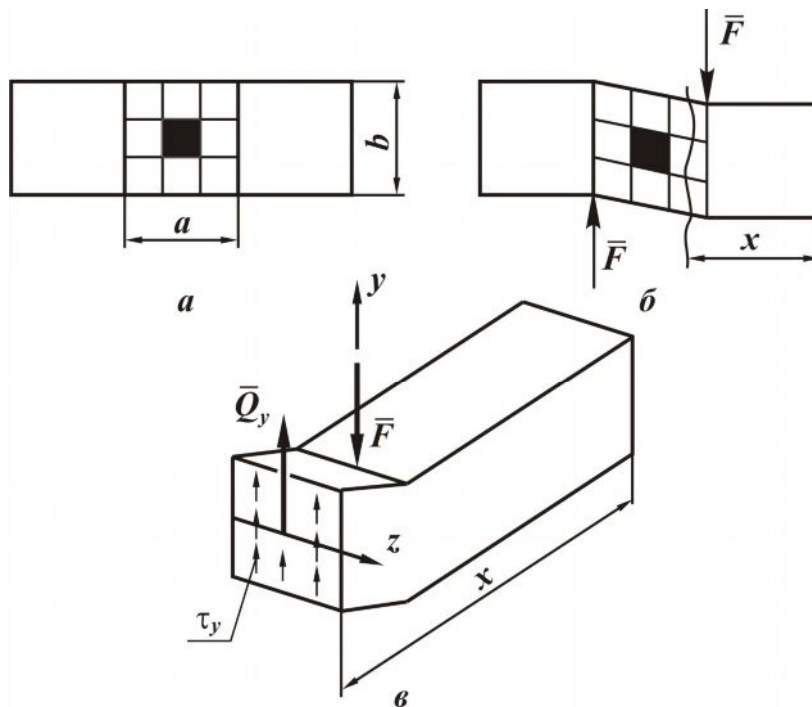


Рис. 4.14

Срез – это частный случай сдвига при $c \ll b$. Примеры среза: разрезание ножницами металлических прутков, пластин и др.

Для определения внутренней силы рассмотрим равновесие мысленно отсеченной правой части стержня длиной x . При этом внутренняя сила Q_y равна F и является равнодействующей касательных напряжений τ_y , лежащих в плоскости сечения и направленных параллельно F .

При сдвиге (срезе) принимается равномерное распределение напряжений по сечению, тогда

$$\tau_y = \frac{Q_y}{A}, \quad (4.24)$$

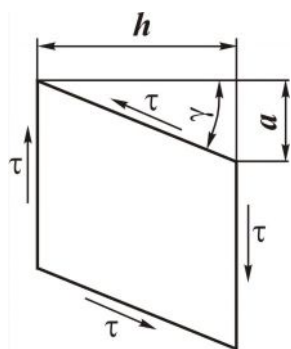
где A – площадь поперечного сечения стержня.

Условие прочности при сдвиге (срезе) имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\text{рас}}}{A} \leq [\tau], \quad (4.25)$$

где $Q_{\text{рас}}$ – внутренняя перерезывающая сила в наиболее нагруженном сечении стержня; $[\tau]$ – допускаемое напряжение на срез.

Элемент в форме прямоугольника, выделенный на рис. 4.14, после приложения нагрузки получил геометрические искажения (рис. 4.15), которые характеризуются абсолютным сдвигом a и относительным сдвигом (угол сдвига γ):



$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{a}{h}. \quad (4.26)$$

Экспериментально установлено, что при упругом деформировании связь между напряжением и угловой деформацией прямо пропорциональна, то есть соответствует закону Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (4.27)$$

Рис. 4.15

Величина G называется *модулем упругости при сдвиге*.

С позиции прочности на срез рассчитываются различные соединения: заклепочные, резьбовые, сварные, шпоночные и др.

Пример. Определить диаметр d заклепки, если известны: сила F и допускаемое напряжение на срез $[\tau]$ (рис. 4.16).

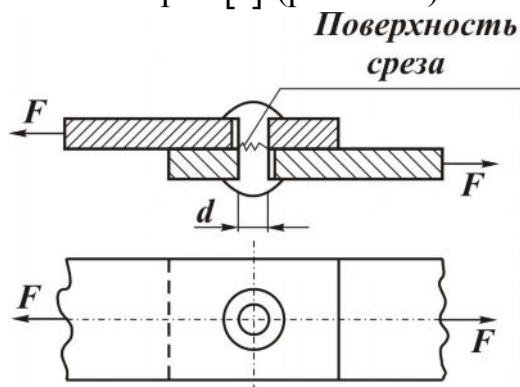


Рис. 4.16

Решение. Сила F , растягивающая листы, вызывает срез заклепки по площади

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}.$$

Из условия прочности (4.25)

$$A \geq \frac{Q}{[\tau]} \quad \text{или} \quad \frac{\pi \cdot d^2}{4} \geq \frac{F}{[\tau]},$$

откуда

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

4.4. Кручение

Кручение – это такой вид нагружения, когда из шести внутренних силовых факторов в поперечном сечении стержня возникает только один – крутящий момент (M_x).

Стержень, работающий на кручение, называют *валом*.

4.4.1. Эпюры внутреннего силового фактора

При расчете вала на прочность и жесткость необходимо знать значение внутреннего крутящего момента на каждом силовом участке, то есть иметь эпюру крутящих моментов (M_x). Рассмотрим на примере (рис. 4.17) порядок построения эпюры M_x .

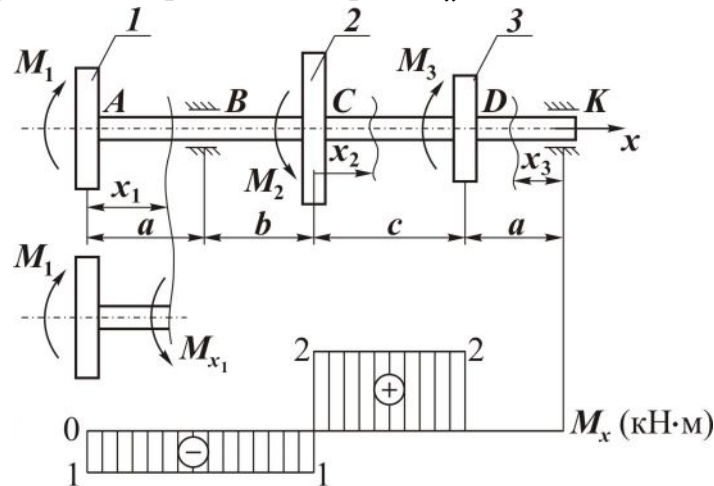


Рис. 4.17

В данном примере вращающий момент M_2 подводится к валу от шкива 2 ременной передачи и снимается с вала через передающие шкивы 1, 3 на другие валы механизма.

Пусть $M_1 = 1$ кНм, $M_2 = 3$ кНм, $M_3 = 2$ кНм.

Для построения эпюры необходимо знать все внешние нагрузки (параграф 4.2.1.). Если моментами сопротивления, которые возникают в опорах (подшипниках) за счет сил трения пренебречь как несоизмеримо малыми по сравнению с M_1 , M_2 , M_3 , то все внешние нагрузки известны.

Далее выделяем силовые участки. *Участки ограничиваются сечениями, в которых приложены внешние сосредоточенные моменты.* Следовательно, имеем три участка: *AC*, *CD*, *DK*.

Эпюра строится по аналитическим выражениям, полученным на

основе метода сечений, для M_x на каждом силовом участке. При записи выражения для внутреннего момента необходимо соблюдать *правило знаков*: если на исследуемую часть вала посмотреть со стороны сечения, то внешний момент, действующий против часовой стрелки, будет создавать положительный внутренний момент.

Рассмотрим участок AC ($0 \leq x_1 \leq a + b$).

Начало координат расположим в точке A . Тогда из условия равновесия части вала длиной x_1 имеем

$$M_{x_1} = -M_1 = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad (4.28)$$

Из выражения (4.28) следует, что на участке AC внутренний момент – постоянный и отрицательный.

Участок CD ($0 \leq x_2 \leq c$).

Начало координат перенесем в точку C , но исследовать будем всю левую часть до сечения x_2 :

$$M_{x_2} = -M_1 + M_2 = 2 \text{ [кНм]}.$$

Внутренний момент на участке CD – постоянный и положительный.

На участке DK удобнее сделать сечение на расстоянии x_3 от точки K (начало координат в точке K) и исследовать равновесие правой части вала длиной x_3 .

Участок KD ($0 \leq x_3 \leq a$).

$M_{x_3} = 0$, так как на длине x_3 внешние моменты отсутствуют. По полученным выражениям для M_x строим эпюру (см. рис. 4.17), из которой следует, что наиболее нагруженными будут сечения вала на участке CD .

На эпюре M_x резкое изменение значения момента (скачок) имеет место в тех сечениях, в которых приложены сосредоточенные внешние моменты. Причем величина скачка должна быть равна соответствующему моменту. Это следует иметь в виду при проверке правильности построения эпюры.

4.4.2. Деформации и перемещения

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиусом r , заделанный одним концом и нагруженный вращающим моментом M на другом конце (см. рис. 4.18).

Если на боковую поверхность ненагруженного вала нанести сетку (рис. 4.18,*а*), образованную окружностями и продольными линиями, то ячейка такой сетки будет прямоугольной.

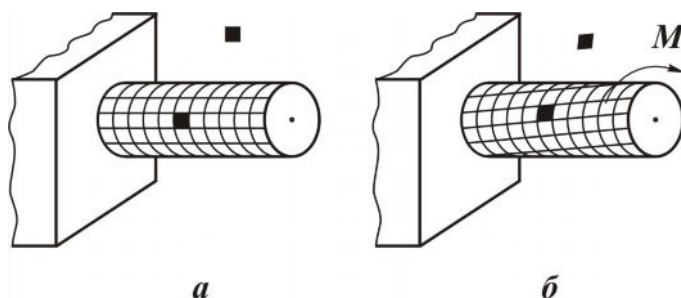


Рис. 4.18

После приложения внешнего момента ячейка получит геометрические искажения (рис. 4.18,*б*), соответствующие искажениям при сдвиге (см. рис. 4.15). Следовательно, *кручение по своей физической сущности – это сдвиг смежных плоских сечений друг относительно друга, приводящий к взаимному повороту отстоящих на некотором расстоянии поперечных сечений.*

Таким образом, получается, что плоские поперечные сечения остаются плоскими и после приложения крутящего момента; радиусы поперечных сечений при деформации остаются прямыми; расстояние между поперечными сечениями после нагружения вала не изменяются.

Выразим аналитически взаимосвязь между деформацией и перемещением. В соответствии с принятыми допущениями образующая AD цилиндрического стержня после приложения момента займет новое положение – AD_1 (рис. 4.19).

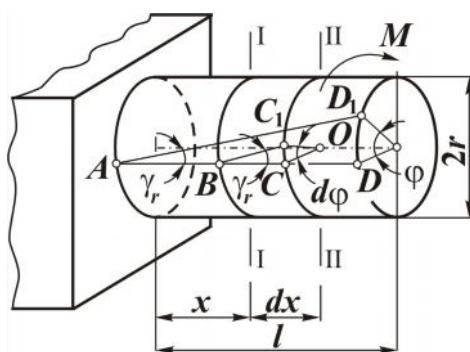


Рис. 4.19

При этом угол γ_r (угол сдвига) определяет угловую деформацию смежных сечений на поверхности вала, а угол φ (угол поворота) показывает, насколько крайнее правое сечение повернулось относительно

сечения в заделке, отстоящее на расстоянии l , то есть φ – это угловое перемещение.

Выделим сечениями I–I и II–II элемент длиной dx , расположенный на расстоянии x от заделки.

Из рис. 4.19 видно, что сечения I–I и II–II имеют относительный сдвиг γ_r и взаимный угол поворота $d\varphi$. Если из треугольников C_1BC и C_1OC выразить дугу CC_1 и приравнять, то получим следующее соотношение:

$$dx\gamma_r = r \cdot d\varphi, \quad (4.29)$$

из которого угол сдвига на поверхности выразится через взаимный угол поворота сечений как

$$\gamma_r = r \frac{d\varphi}{dx}. \quad (4.30)$$

Из (4.30) следует, что угол сдвига зависит от радиуса цилиндрического стержня. Для элемента длиной dx с радиусом ρ ($0 \leq \rho \leq r$) угловая деформация, в соответствии с (4.30), запишется в следующем виде:

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (4.31)$$

здесь $\frac{d\varphi}{dx} = \theta$ – относительный угол закручивания.

4.4.3. Напряжения в поперечном сечении

Внутренний сосредоточенный момент M_x , лежащий в плоскости поперечного сечения вала, можно выразить через касательные напряжения, которые, согласно закону Гука, при сдвиге (4.27) связаны с деформацией

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho \quad (4.32)$$

или, с учетом (4.31),

$$\tau_\rho = G \frac{d\varphi}{dx} \rho. \quad (4.33)$$

Тогда элементарный внутренний момент (см. рис. 4.20)

$$dM = \tau_\rho \cdot dA \cdot \rho,$$

где dA – площадь элементарной площадочки, лежащей в сечении вала на расстоянии ρ от центра тяжести сечения; $\tau_\rho dA$ – элементарная окружная сила.

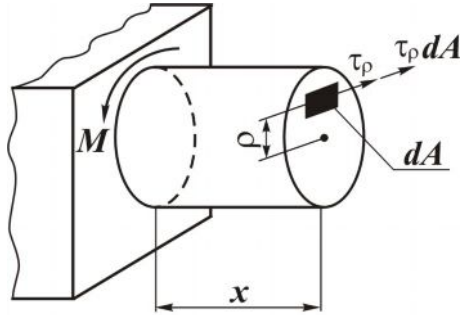


Рис. 4.20

Суммируя элементарные моменты по площади сечения, получаем выражение для внутреннего сосредоточенного момента

$$M_x = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA$$

или, с учетом (4.33),

$$M_x = \int_A G \frac{d\varphi}{dx} \cdot \rho^2 \cdot dA.$$

Так как произведение $G \frac{d\varphi}{dx}$ постоянно для всех точек сечения, то

$$M_x = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 \cdot dA .$$

Интеграл $\int_A \rho^2 dA = I_\rho$ представляет собой геометрическую характеристику поперечного сечения и носит название полярного момента инерции сечения.

Таким образом,

$$M_x = G \frac{d\varphi}{dx} I_\rho, \quad (4.34)$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_\rho}. \quad (4.35)$$

Произведение GI_ρ называется *жесткостью сечения стержня при кручении*. Подставим (4.35) в (4.33) и получим выражение для касательного напряжения

$$\tau_\rho = \frac{M_x}{I_\rho} \cdot \rho, \quad (4.36)$$

из которого следует, что напряжения вдоль радиуса изменяются по линейному закону и наибольшее напряжение при кручении возникает на периферии сечения:

$$\tau_{\max} = \tau_{\rho=r} = \frac{M_x}{I_\rho} \cdot r,$$

ИЛИ

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_\rho},$$

где $W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{I_\rho}{r}$ – геометрическая характеристика сечения, которая называется *полярным моментом сопротивления*.

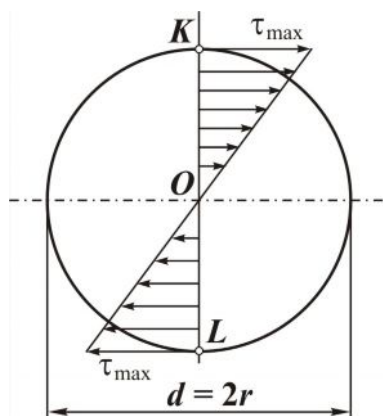


Рис. 4.21

На рис. 4.21 представлена эпюра касательных напряжений, построенная в соответствии с зависимостью (4.36), для точек, лежащих на диаметре KL . Из эпюры видно, что наиболее нагруженными будут точки, лежащие на максимальном удалении от центра тяжести сечения. В центре тяжести напряжения равны нулю

$$(\tau_{\rho=0} = \frac{M_x}{I_\rho} \cdot 0 = 0).$$

4.4.4. Геометрические характеристики сечения

Полярный момент инерции $I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA$.

Для сечения круглой формы (рис. 4.22)

$$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

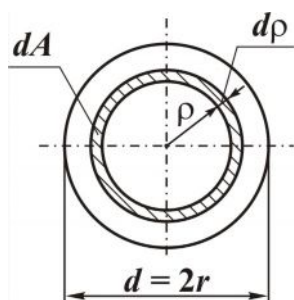


Рис. 4.22

Тогда

$$I_\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (4.37)$$

где d – диаметр сечения.

Если в стержне имеется центральное отверстие диаметром d , а наружный диаметр вала равен D , то полярный момент инерции

кольцевого сечения

$$I_\rho = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \quad (4.38)$$

Полярные моменты сопротивления будут равны:

для сплошного сечения

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (4.39)$$

для кольцевого сечения

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \quad (4.40)$$

4.4.5. Условие прочности

Условие прочности ограничивает максимальные напряжения в наиболее нагруженном поперечном сечении вала (τ_{\max}) максимально допускаемыми напряжениями $[\tau]$ для конкретного материала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{рас}}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (4.41)$$

где $M_{\text{рас}}$ – расчетный внутренний момент (момент в наиболее нагруженном сечении);

$$[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{n},$$

здесь $\tau_{\text{пред}}$ – предельное напряжение для конкретного материала. Для пластичного – это предел текучести, для хрупкого – предел прочности. Эти характеристики определяются экспериментально (см. параграф 4.2.7); n – коэффициент запаса прочности (см. параграф 4.2.3).

4.4.6. Расчет перемещений и условие жесткости

Угловое перемещение (взаимный угол поворота $d\varphi$) сечений, отстоящих на расстоянии dx (см. рис. 4.19) может быть определено из выражения (4.35)

$$d\varphi = \frac{M_x \cdot dx}{G \cdot I_{\rho}}.$$

Тогда взаимный угол поворота сечений, отстоящих на расстоянии x (см. рис. 4.19), равен

$$\varphi = \int_0^x \frac{M_x \cdot dx}{G \cdot I_{\rho}}. \quad (4.42)$$

Если крутящий момент M_x , момент инерции сечения I_{ρ} и модуль

сдвига G постоянны на участке длиной x , то

$$\varphi = \frac{M_x \cdot x}{G \cdot I_p}. \quad (4.43)$$

Для рассматриваемого вала (см. рис. 4.19) угол поворота крайнего правого сечения относительно сечения в заделке выразится согласно (4.43)

$$\varphi = \frac{Ml}{G \cdot I_p}. \quad (4.44)$$

При скачкообразном изменении по длине вала крутящего момента (см. рис. 4.17) угол поворота между его начальным и конечным сечениями определяется как сумма углов поворота по участкам с постоянным внутренним крутящим моментом M_x :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{x_i} l_i}{G \cdot I_p}. \quad (4.45)$$

Условие жесткости накладывает ограничение на взаимный угол поворота крайних сечений наиболее деформированного участка вала φ_{\max} и имеет вид

$$\varphi_{\max} \leq [\varphi], \quad (4.46)$$

а в относительных величинах

$$\theta_{\max} \leq [\theta]. \quad (4.47)$$

Здесь $\theta_{\max} = \left(\frac{\varphi}{l} \right)_{\max}$ – максимальный относительный угол поворота среди участков вала; $[\varphi]$ и $[\theta]$ – соответственно максимально допустимый абсолютный и относительный углы поворота для конкретного материала.

4.4.7. Расчеты на прочность и жесткость

Как было отмечено выше (см. параграф 4.2.6), на основе условий прочности и жесткости могут решаться три типа задач: проверочный расчет, проектный расчет и расчет максимально допустимых нагрузок.

Рассмотрим пример проектного расчета.

Пример. Определить диаметр вала постоянного поперечного сечения (см. рис. 4.23,а).

Дано: $[\tau] = 70 \text{ МПа}$; $[\theta] = 2 \text{ град/м}$; $M_2 = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_3 = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_3 = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $a = 0,1 \text{ м}$; $b = 0,2 \text{ м}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Определить диаметр вала из условия прочности и условия жест-

кости, взяв за проектное значение диаметра его наибольшую величину.

Решение. Запишем условие прочности для наиболее нагруженного сечения, положение которого найдем из эпюры крутящих моментов.

Порядок построения эпюры M_x представлен в параграфе 4.4.1, согласно которому начинаем с определения всех внешних моментов. Для этого используем уравнение равновесия – сумму внешних моментов относительно оси x :

$$\sum m_x = M_A - M_1 - M_2 + M_3 = 0,$$

из которого находим

$$M_A = M_1 + M_2 - M_3 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Далее выделяем силовые участки AB , BC , CK , KL и, используя метод сечений, для каждого участка записываем выражения внутреннего момента M_x .

Участок AB ($0 \leq x_1 \leq a$):

$$M_{x_1} = M_A = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок BC ($0 \leq x_2 \leq b$), начало координат переносим в начало участка:

$$M_{x_2} = M_A - M_1 = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок CK ($0 \leq x_3 \leq b$):

$$M_{x_3} = M_A - M_1 - M_2 = -1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На *участке KL* внутренний момент равен нулю.

На основе полученных выражений для M_x строим эпюру (см. рис. 4.23,б), из которой видно, что наиболее нагруженными будут сечения на участке AB .

Следовательно, расчетный момент – $M_{\text{рас}} = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}$, тогда минимальное значение диаметра вала, удовлетворяющее условию прочности (4.41), будет равно

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\text{рас}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^3}} = 0,06 \text{ м}.$$

Второе значение диаметра d_2 , определим из условия жесткости, которое необходимо записать для наиболее деформируемого участка вала.

Положение такого участка наглядно отразится на эпюре углов поворота, хотя для вала, имеющего по всей длине постоянный диаметр, данный участок будет соответствовать части стержня с наибольшим внутренним крутящим моментом.

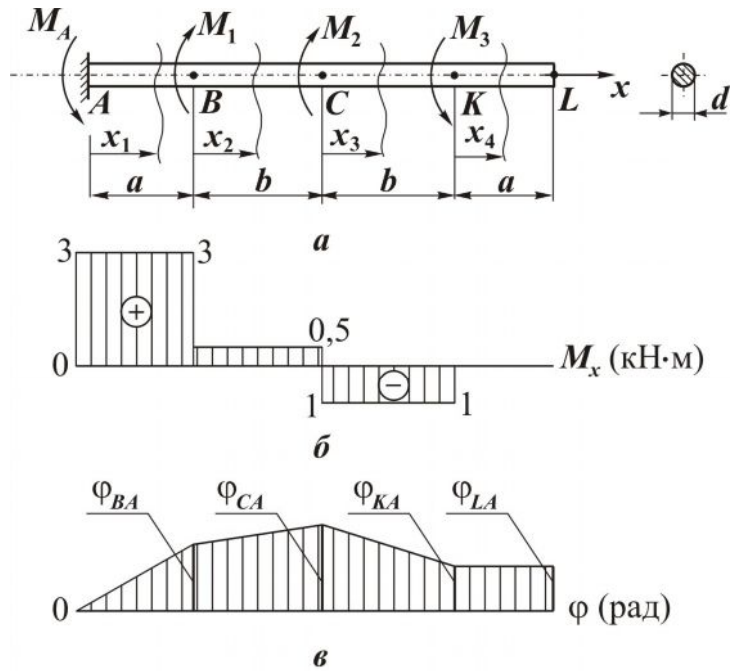


Рис. 4.23

Для наглядности построим эпюру φ углов поворота сечений.

Участками будут части стержня, для которых внутренней крутящий момент, полярный момент инерции и модуль сдвига постоянны. Для заданной схемы – это AB , BC , CK , KL .

Участок AB ($0 \leq x_1 \leq a$).

Угол поворота сечения x_1 относительно сечения A

$$\varphi_{x_1 A} = \frac{M_{x_1} \cdot x_1}{G \cdot I_p}. \quad (4.48)$$

Из выражения (4.48) видно, что угол поворота на участке AB изменяется по линейному закону, то есть для построения эпюры достаточно рассчитать значение $\varphi_{x_1 A}$ в начале и в конце участка:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1(x_1=0)} = \varphi_{AA} &= \frac{3 \cdot 0}{8 \cdot 10^7 \cdot I_p} = 0; \\ \varphi_{x_1 A(x_1=a)} = \varphi_{BA} &= \frac{3 \cdot 0,1}{8 \cdot 10^7 \cdot I_p} = \frac{0,375}{10^8 I_p}. \end{aligned}$$

φ_{BA} – угол поворота сечения B относительно A .

Участок BC ($0 \leq x_2 \leq b$).

Угол поворота сечения x_2 относительно A

$$\varphi_{x_2 A} = \varphi_{BA} + \varphi_{x_2 B} = \varphi_{BA} + \frac{M_{x_2} \cdot x_2}{G \cdot I_p};$$

$$\varphi_{x_2 A(x_2=0)} = \varphi_{BA};$$

$$\varphi_{x_2 A(x_2=b)} = \varphi_{BA} + \frac{M_{x_2} b}{G \cdot I_\rho} = \varphi_{CA} = \frac{0,375}{10^8 I_\rho} + \frac{0,5 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^7 I_\rho} = \frac{0,5}{10^8 \cdot I_\rho}.$$

Участок CK ($0 \leq x_3 \leq b$):

$$\varphi_{x_3 A} = \varphi_{CA} + \varphi_{x_3 C};$$

$$\varphi_{x_3 A(x_3=0)} = \varphi_{CA};$$

$$\varphi_{x_3 A(x_3=b)} = \varphi_{CA} + \frac{M_{x_3} \cdot b}{G \cdot I_\rho} = \varphi_{KA} = \frac{0,5}{10^8 \cdot I_\rho} + \frac{-1 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^7} = \frac{0,25}{10^8 \cdot I_\rho}.$$

Участок KL ($0 \leq x_4 \leq a$):

$$\varphi_{x_4 A} = \varphi_{KA} + \varphi_{x_4 K};$$

$$\varphi_{x_4 A(x_4=0)} = \varphi_{KA};$$

$$\varphi_{x_4 A(x_4=a)} = \varphi_{KA} + \frac{M_{x_4} a}{G \cdot I_\rho} = \varphi_{KA} = \frac{0,25}{10^8 I_\rho} + 0 = \frac{0,25}{10^8 I_\rho}.$$

По полученным значениям для φ строим эпюру (см. рис. 4.23,в), из которой видно, что наибольший относительный угол поворота θ_{BA} будет на участке AB :

$$\theta_{BA} = \frac{\varphi_{BA}}{a} = \frac{0,375}{10^7 I_\rho}.$$

Поэтому условие жесткости запишем для этого участка как

$$\theta_{BA} \leq [\theta]. \quad (4.49)$$

Размерность $\theta_{BA} - \frac{\text{рад}}{\text{м}}$, а $[\theta] - \frac{\text{град}}{\text{м}}$. Приведем $[\theta]$ к той же размерности.

$$[\theta] \cdot \frac{\pi}{180} = 0,0349 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

тогда условие (4.49) запишется как

$$\frac{0,375}{10^7 \cdot I_\rho} \leq 0,0349, \quad (4.50)$$

учитывая, что $I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$ из выражения (4.50), определяем d_2 :

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{0,375 \cdot 32}{10^7 \cdot 3,14 \cdot 0,0349}} = 0,057 \text{ м.}$$

Окончательно принимаем диаметр вала $d_1 = 0,06$ м, полученный

по условию прочности, так как он больше.

4.5. Изгиб

Рассмотрим плоский поперечный *изгиб*. Это такой вид нагружения, когда под действием внешних нагрузок из шести внутренних силовых факторов в поперечном сечении стержня могут возникать только два – изгибающий момент M_z и поперечная сила Q_y или изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_z .

Изгиб называют чистым, если в поперечном сечении возникает только изгибающий момент. Стержень, работающий на изгиб, называют *балкой*.

4.5.1. Эпюры внутренних силовых факторов

Для определения положения наиболее нагруженного сечения стержня при изгибе, как и при других видах нагружения, необходимо иметь эпюры внутренних силовых факторов. Рассмотрим балку на двух опорах (см. рис. 4.24,а), нагруженную сосредоточенной внешней силой (активной) F . Собственный вес балки учитывать не будем.

Согласно порядку построения эпюры (см. параграф 4.2.1) прежде всего необходимо определить все внешние нагрузки, действующие на стержень.

В сечении A расположена шарнирно-неподвижная опора, создающая в общем случае нагружения две реактивных составляющих R_A и H_A , а в сечении B имеем шарнирно-подвижную опору, которая создает одну реактивную составляющую R_B . Отмеченные опорные реакции определим из уравнений равновесия балки:

$$\begin{aligned}\sum X &= H_A = 0; \\ \sum m_A &= -F \cdot a + R_B(a + b) = 0; \\ \sum Y &= R_A - F + R_B = 0.\end{aligned}$$

Решая данные уравнения совместно, получаем

$$H_A = 0; R_B = \frac{F \cdot a}{a + b}; R_A = \frac{F \cdot b}{a + b}.$$

Для проверки правильности определения реакций необходимо записать еще одно уравнение равновесия, например

$$\sum m_B = -R_A(a + b) + F \cdot b = 0,$$

и, подставив в него найденные значения реакций, убедиться в его выполнении.

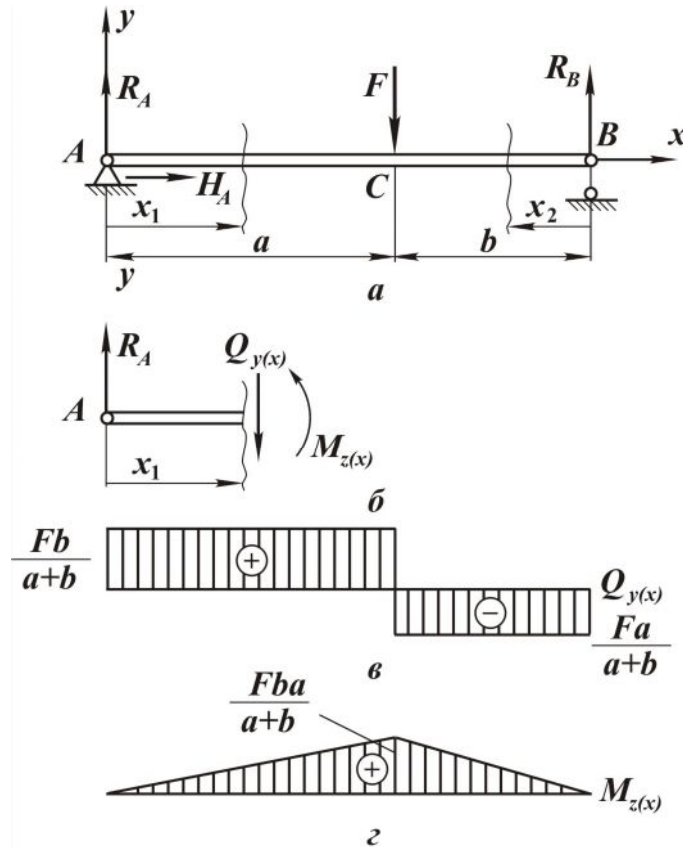


Рис. 4.24

Следующим этапом построения эпюры является выделение силовых участков (понятие участка приведено в параграфе 4.2.1).

Для исследуемого стержня имеем два силовых участка: AC , CB . Далее, используя метод сечений (см. параграф 4.1.2.), на каждом участке записываем аналитические выражения для внутренних силовых факторов.

На участке AC ($0 \leq x_1 \leq a$) рассмотрим равновесие мысленно отсеченной части стержня длиной x_1 . Эта часть стержня нагружена внешней сосредоточенной силой R_A , которую должна уравновесить внутренняя поперечная сила $Q_{y(x)}$. Если на рассматриваемую часть стержня действует несколько внешних сил, то внутренняя сила $Q_{y(x)}$ будет равна сумме их проекций на ось y .

Следовательно,

$$Q_{y(x_1)} = R_A = \frac{F \cdot b}{a + b}. \quad (4.51)$$

Примем следующее *правило знаков* для внутренней поперечной силы. Если внешняя сила направлена таким образом, что стремится повернуть рассматриваемую часть стержня относительно сечения по часовой стрелке, то она создает по-

ложительную внутреннюю силу $Q_{y(x)}$ (рис. 4.25).

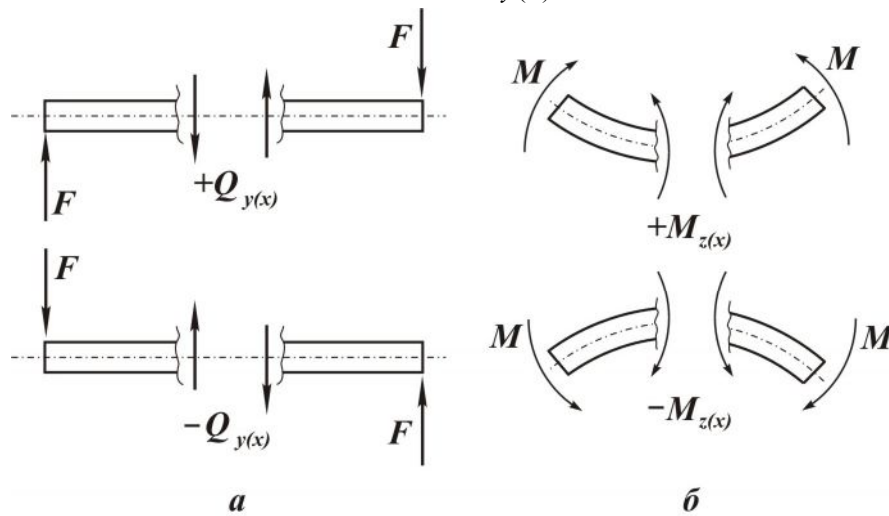


Рис. 4.25

Согласно правилу знаков внешняя сила R_A в сечении x_1 создает положительную внутреннюю силу (см. рис. 4.24,б). Однако рассматриваемая часть стержня длиной x_1 под действием R_A и $Q_{y(x_1)}$ в равновесии не находится, так как эти силы создают момент, равный

$$M_{z(x)} = R_A \cdot x_1.$$

Следовательно, в сечении x_1 должен возникать внутренний момент $M_{z(x)}$, уравнивающий момент от силы R_A .

Таким образом, если на рассматриваемую часть действует несколько внешних нагрузок, то изгибающий момент $M_{z(x)}$ в сечении стержня равен сумме моментов от внешних нагрузок, взятых относительно центра тяжести рассматриваемого сечения, то есть момент в сечении x_1 будет равен

$$M_{z(x_1)} = R_A \cdot x_1 = \frac{F \cdot b}{a + b} \cdot x_1. \quad (4.52)$$

Рассмотрим *правило знаков* для внутреннего момента. Если внешние нагрузки деформируют рассматриваемую часть стержня, мысленно закрепленную в сечении, выпуклостью вниз, то они создают положительный момент $M_{z(x)}$ (см. рис. 4.25).

В соответствии с данным правилом внешняя сила R_A в сечении x_1 создает положительный внутренний момент (см. рис. 4.24,б), который согласно выражению (4.52) линейно зависит от x_1 . Поэтому, чтобы построить эпюру моментов на участке AC , необходимо знать значение момента в начале участка и в конце:

$$M_{z(x_1=0)} = 0;$$

$$M_{z(x_1=a)} = \frac{F \cdot b}{a+b} \cdot a.$$

Для участка CB удобнее начало координат перенести в сечение B и рассмотреть равновесие мысленно отсеченной части стержня длиной x_2 (см. рис. 4.24,а). Тогда для BC ($0 \leq x_2 \leq b$)

$$Q_{y(x_2)} = -R_B = -\frac{F \cdot a}{a+b}; \quad (4.53)$$

$$M_{z(x_2)} = R_B \cdot x_2 = \frac{F \cdot a}{a+b} \cdot x_2. \quad (4.54)$$

Согласно выражениям (4.53) и (4.54) внутренняя поперечная сила на участке BC – постоянная и отрицательная, а момент – положительный и изменяется по линейному закону.

В начале участка

$$M_{z(x_2=0)} = 0,$$

в конце –

$$M_{z(x_2=b)} = \frac{F \cdot a}{a+b} \cdot b.$$

По полученным выражениям для внутренних силовых факторов строим эпюру $Q_{y(x)}$ и $M_{z(x)}$ (см. рис. 4.24,з).

На эпюре $Q_{y(x)}$ в сечении, где приложена сосредоточенная внешняя сила, будет скачок на величину этой силы, а на эпюре $M_{z(x)}$ – излом. Скачок на эпюре $M_{z(x)}$ будет иметь место в том сечении, в котором приложен сосредоточенный внешний момент, причем величина скачка равна соответствующему моменту.

Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (см. рис. 4.26).

Опорные реакции для данного примера могут быть определены и без записи условий равновесия, так как система симметрична, значит каждая опора берет на себя половину активной нагрузки:

$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$. Балка имеет один силовой участок AB ($0 \leq x \leq l$). Начало координат расположим в опоре A .

Мысленно сделаем сечение на расстоянии x от опоры A и рассмотрим равновесие этой части стержня.

При этом получим

$$Q_{y(x)} = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx; \quad (4.55)$$

$$M_{z(x)} = R_A \cdot x - qx \frac{x}{2} = \frac{ql}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}. \quad (4.56)$$

Уравнение (4.55) является уравнением прямой линии, для построения которой достаточно два значения:

$$Q_{y(x=0)} = \frac{ql}{2}; \quad Q_{y(x=l)} = -\frac{ql}{2}.$$

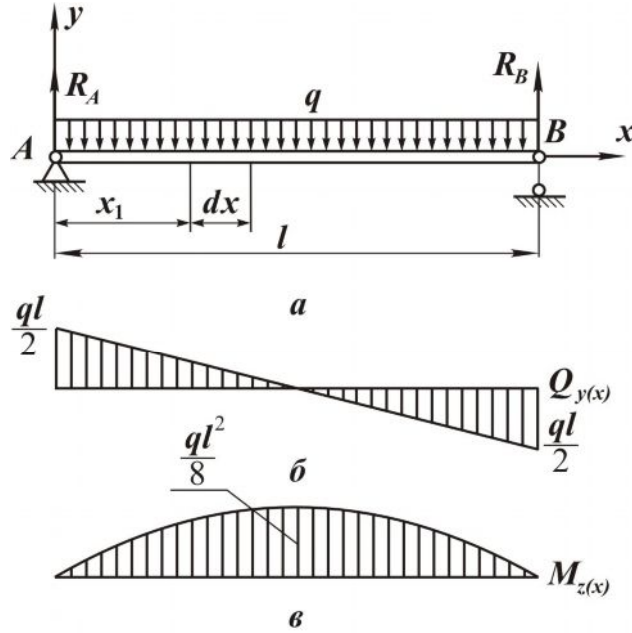


Рис. 4.26

Эпюра поперечных сил представлена на рис. 4.26,б.

Уравнение (4.56) соответствует параболе.

Для ее построения необходимо знать положение экстремума и его значение. Положение экстремума функции $M_{z(x)}$ определим, приравняв

ее первую производную $\frac{dM_{z(x)}}{dx}$ к нулю:

$$\frac{dM_{z(x)}}{dx} = \frac{ql}{2} - qx_0 = 0. \quad (4.57)$$

Тогда из (4.57) можно найти значение координаты $x_0 = \frac{l}{2}$, при котором изгибающий момент принимает экстремальное значение:

$$M_{z(x=x_0)} = \frac{ql^2}{8}.$$

Кроме того, найдем значение момента в начале и в конце участка:

$$M_{z(x=0)} = 0; \quad M_{z(x=l)} = 0.$$

Эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 4.26,в.

Сопоставляя эпюры $Q_y(x)$ и $M_z(x)$, делаем вывод, что при действии распределенной нагрузки поперечная сила на участке изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по параболическому, причем выпуклость параболы направлена навстречу распределенной нагрузке. Соответственно, в том сечении, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент принимает экстремальное значение – значит, между выражениями для поперечной силы и изгибающего момента существует *дифференциальная зависимость*.

Рассмотрим это подробнее. Для этого мысленно вырежем из стержня (см. рис. 4.26,а) элемент длиной dx (рис. 4.27). Тогда в левом сечении будут действовать силовые факторы Q_y и M_z , а в правом – $Q_y + dQ_y$ и $M_z + dM_z$.

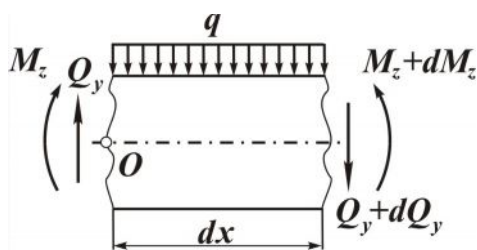


Рис. 4.27

Составим условие равновесия выделенного элемента:

$$\sum m_0 = -M_z + (M_z + dM_z) - (Q_y + dQ_y)dx - qdx \frac{dx}{2} = 0.$$

Пренебрегая произведениями $dQ_y dx$ и $qdx \frac{dx}{2}$ как величинами второго порядка малости по сравнению с остальными слагаемыми, получаем

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y. \quad (4.58)$$

Дифференциальная зависимость (4.58) используется для определения положения экстремума на эпюре изгибающих моментов, что и было проиллюстрировано выше (выражение 4.57).

4.5.2. Геометрические характеристики плоских сечений

В расчетах на прочность и жесткость геометрические характеристики используются при любом виде нагружения. Так, при растяжении (сжатии) и сдвиге (срезе), определяя напряжение или перемещение, необходимо знать площадь поперечного сечения A . Форма площади сечения при данных видах нагружения значения не имеет, так как напряже-

ния равномерно распределяются по сечению. При кручении напряжения распределяются по сечению неравномерно, поэтому мы имеем дело с такими геометрическими характеристиками, как полярный момент инерции I_p и полярный момент сопротивления W_p .

Рассмотрим геометрические характеристики поперечных сечений стержня, которые используются при изгибе.

Статические моменты сечения. *Статическим моментом площади сечения относительно оси z , взятой в той же плоскости, называется сумма произведений элементарных площадок dA сечения на их расстояние до оси* (рис. 4.28). Эта сумма распространяется на всю площадь сечения A .

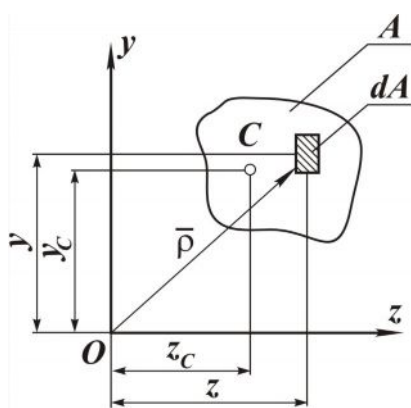


Рис. 4.28

Статические моменты сечения относительно осей z и y равны соответственно

$$S_z = \int_A y dA; \quad (4.59)$$

$$S_y = \int_A z dA;$$

или

$$S_z = y_C A; \quad (4.60)$$

$$S_y = z_C A.$$

Здесь y_C, z_C – координаты центра тяжести сечения.

Из выражений (4.59) и (4.60) следует, что статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, равен нулю, а статический момент площади сложной формы можно представить алгебраической суммой статических моментов составляющих ее площадей:

$$S_z = \sum_{i=1}^n S_{z_i} = \sum_{i=1}^n y_{c_i} \cdot A_i; \quad (4.61)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n S_{y_i} = \sum_{i=1}^n z_{c_i} \cdot A_i,$$

где y_{c_i}, z_{c_i}, A_i – соответственно координаты центра тяжести и площадь i -й части сечения, n – число частей, составляющих площадь A .

С учетом зависимостей (4.60) и (4.61) получим выражения для определения положения центра тяжести сечения относительно координатных осей, если известны статические моменты частей данной площади относительно этих же осей:

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_{c_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$
(4.62)

Пример

Определить координаты центра тяжести сечения, имеющего сложную форму (рис. 4.29,а).

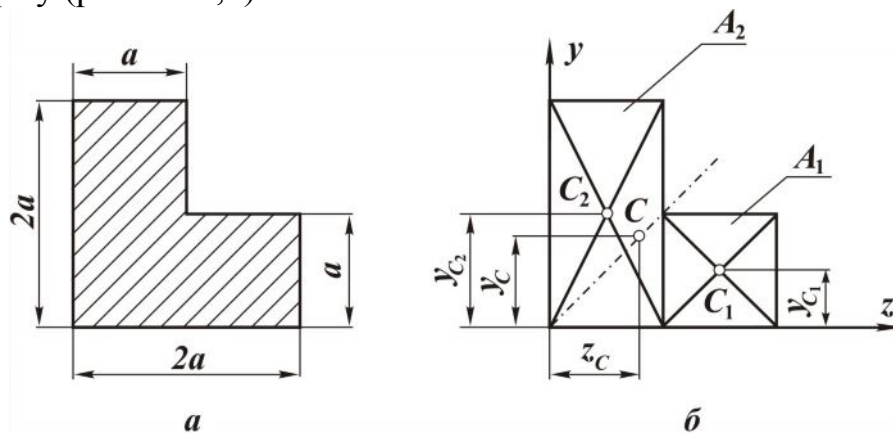


Рис. 4.29

Решение. Задаем положение координатных осей Oz, Oy . Сечение имеет одну ось симметрии, следовательно, для выбранного положения осей $y_c = z_c$.

Разобьем сечение на две части (рис.4.29,б), которые имеют площади:

$$A_1 = a^2;$$

$$A_2 = 2a^2$$

и координаты своих центров тяжести $y_{c_1} = \frac{a}{2}$; $y_{c_2} = a$, тогда, с учетом выражений (4.62),

$$y_c = \frac{y_{c_1} \cdot A_1 + y_{c_2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = 0,83a = z_c.$$

Моменты инерции сечений. Различают осевые, полярные и центробежные моменты инерции сечений.

Осевым моментом инерции площади сечения относительно какой-либо оси, лежащей в его плоскости, называется сумма произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до этой оси

(см. рис. 4.28):

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA; \\ I_y &= \int_A z^2 dA. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Полярным моментом инерции площади сечения относительно полюса O (см. рис. 4.28), взятого в начале осей координат, называется интеграл следующего вида:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.64)$$

где $\rho^2 = z^2 + y^2$, тогда

$$I_\rho = \int_A (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z. \quad (4.65)$$

Таким образом, полярный момент равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей с началом координат в полюсе O .

Центробежным моментом инерции площади сечения называется сумма произведений элементарных площадок на их расстояние до обеих координатных осей, распространенная на всю площадь сечения:

$$I_{zy} = \int_A zy dA. \quad (4.66)$$

В отличие от осевого и полярного моментов инерции центробежный момент может быть отрицательным и равным нулю.

Моменты инерции сечения при параллельном переносе координатных осей. Значения моментов инерции зависят от положения сечения по отношению к осям координат.

Пусть оси y и z являются центральными осями сечения, относительно которых известны моменты инерции.

Определим моменты инерции относительно осей y_1 и z_1 , параллельно отстоящих от центральных на расстоянии a и b соответственно (см. рис. 4.30). Тогда $y_1 = y + b$, $z_1 = z + a$, при этом

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + b)^2 dA = I_z + 2bS_z + b^2 A.$$

Так как оси y и z являются центральными, то статические моменты S_y и S_z будут равны нулю.

С учетом этого

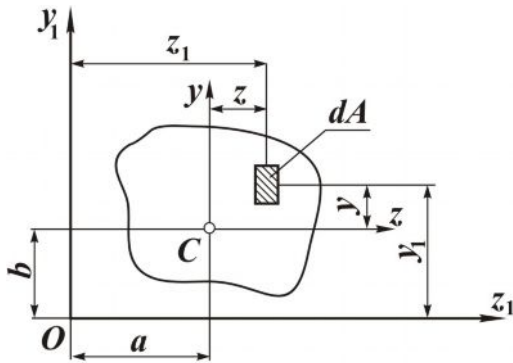


Рис. 4.30

$$\begin{aligned}
 I_{z_1} &= I_z + b^2 A; \\
 I_{y_1} &= I_y + a^2 A; \\
 I_{z_1 y_1} &= I_{zy} + abA.
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$

Зависимости (4.67) используют для вычисления моментов инерции сечений сложной формы. Используя свойства определенного интеграла, момент инерции сложного сечения находят как сумму моментов инерции составных частей этого сечения, то есть

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{z_i}, \tag{4.68}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ – номера частей, на которые мысленно разделено сложное сечение.

Моменты инерции сечения при повороте осей координат.

Найдем зависимость между моментами инерции сечения относительно осей z, y и моментами инерции сечения относительно осей v, u , повернутых на угол α (рис. 4.31).

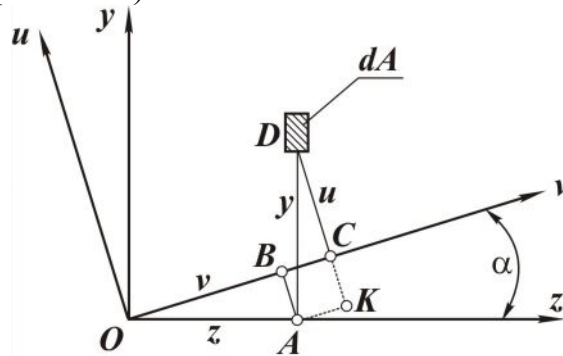


Рис. 4.31

Выразим координаты элементарной площадки dA в новой системе координат через старые координаты:

$$\begin{aligned}
 v &= OB + BC = z \cos \alpha + y \sin \alpha, \\
 u &= DK - AB = y \cos \alpha - z \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 I_v &= \int_A u^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA; \\
 I_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA;
 \end{aligned}$$

$$I_{vu} = \int_A v u \, dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha) (y \cos \alpha - z \sin \alpha) \, dA.$$

После преобразования получаем:

$$\begin{aligned} I_v &= I_z \cos^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha + I_y \sin^2 \alpha; \\ I_u &= I_z \sin^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha + I_y \cos^2 \alpha; \\ I_{vu} &= I_{zy} \cos 2\alpha + \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Из первых двух уравнений (4.69) получаем

$$I_v + I_u = I_z + I_y = \text{const.}$$

Из формул (4.69) видно, что значения осевых моментов инерции зависят от угла α , но сумма их неизменна. Следовательно, можно найти такое значение угла α , при котором один из моментов инерции принимает максимальное значение, а другой – минимальное. Дифференцируя выражение I_v по α и приравнявая производную нулю, получаем

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}. \quad (4.70)$$

Из третьего соотношения в равенствах (2.69) несложно установить, что при $\alpha = \alpha_0$ центробежный момент инерции равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называют *главными осями*. Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то их называют *главными центральными осями*, а соответствующие им осевые моменты инерции – *главными центральными моментами* инерции, выражения которых можно получить из первых двух соотношений в равенствах (4.69), исключив угол α .

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + I_{yz}^2}.$$

Знак плюс соответствует максимальному моменту инерции, знак минус – минимальному. Если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось будет являться *главной центральной осью*, другая главная центральная ось будет перпендикулярна оси симметрии и пройдет через центр тяжести сечения.

Моменты инерции сечений простой формы. Рассмотрим сечения прямоугольной и круглой формы.

Прямоугольник. Определим момент инерции прямоугольника высотой h и шириной основания b относительно главных центральных

осей O_z и O_y (рис. 4.32).

Элементарную площадь dA можно выразить как $dA = b \cdot dy$. Тогда

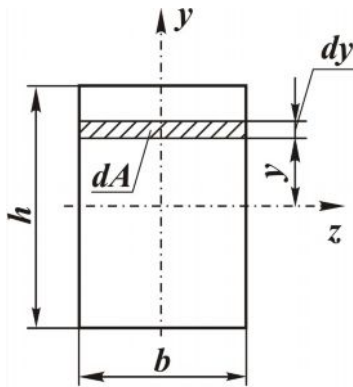


Рис. 4.32

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12} \quad (4.71)$$

По аналогии найдем

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}.$$

Круг. Для круга ранее был определен полярный момент инерции (см. параграф 4.4.4). Учитывая, что

$$I_\rho = I_y + I_z,$$

$$I_z = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (4.72)$$

4.5.3. Нормальные напряжения в поперечном сечении

При плоском поперечном изгибе в поперечном сечении возникают два силовых фактора: изгибающий момент, поперечная сила.

Естественно предположить, что сосредоточенная поперечная сила, лежащая в сечении, представлена в распределенном виде касательными напряжениями, а сосредоточенный изгибающий момент – нормальными напряжениями.

Определим закон нормальных напряжений в поперечном сечении, рассмотрев случай чистого изгиба (в поперечном сечении возникает только изгибающий момент).

Так как в любом сечении стержня действует одинаковый изгибающий момент, то изменение кривизны однородного стержня по всей длине будет одним и тем же. Это легко обнаруживается, если на боковую поверхность стержня нанести сетку из продольных и поперечных прямых линий (см. рис. 4.33).

После нагружения продольные линии и ось стержня примут форму дуг окружностей с радиусом ρ , а поперечные линии останутся прямыми. Следовательно, как и при растяжении, плоские поперечные сечения стержня до деформации останутся плоскими и после деформации.

Чистый изгиб стержня характеризуется также и тем, что его волокна на выпуклой стороне растягиваются, а на вогнутой стороне – сжимаются. Очевидно, что существует слой, в котором изменение длины отсутствует. Этот слой называют *нейтральным слоем* (см. рис. 4.33). Линию пересечения этого слоя с плоскостью поперечного сечения называют *нейтральной линией*.

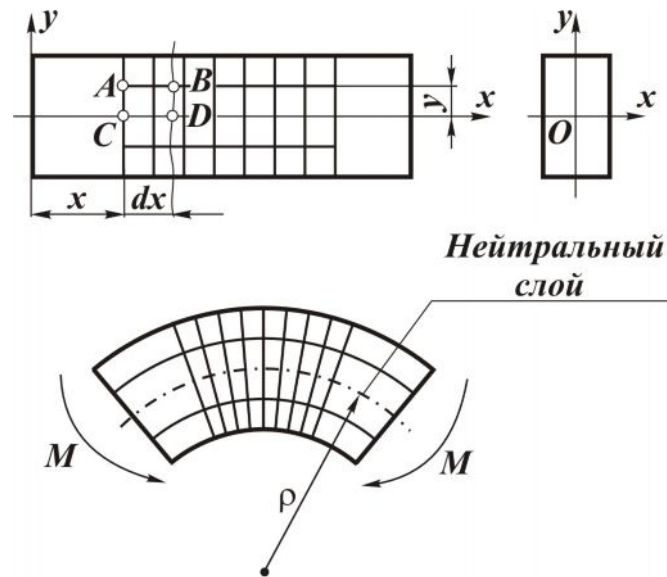


Рис. 4.33

Если предположить, что слои, параллельные нейтральному, друг на друга не давят, то каждый слой будет находиться в условиях растяжения (сжатия). Тогда для определения напряжений в поперечном сечении можно использовать закон Гука:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x. \quad (4.73)$$

Однако деформация волокон по высоте сечения будет различной: чем волокно дальше отстоит от нейтрального слоя, тем будет больше его деформация (рис. 4.33). Следовательно, напряжения по сечению распределяются неравномерно. Рассмотрим это подробнее.

Выделим в стержне элемент длиной dx (рис. 4.34) и исследуем его деформированное состояние после приложения момента.

Поперечные сечения стержня, отстоящие на расстоянии dx , после нагружения повернутся на взаимный угол $d\theta$ (рис. 4.34).

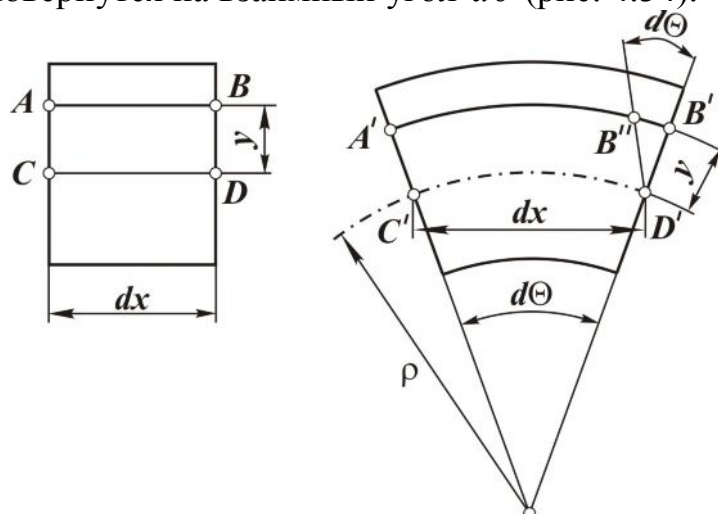


Рис. 4.34

При этом относительное удлинение (деформация) волокна AB ,

расположенного от нейтрального слоя на расстоянии y , можно определить как

$$\varepsilon_{AB} = \frac{B' \cdot B''}{AB}. \quad (4.74)$$

Учитывая, что нейтральный слой не растягивается и не сжимается, то $AB = C' \cdot D'$, а из треугольников $KC'D'$ и $D'B''B'$ получаем

$$C'D' = \rho d\theta, \quad B'B'' = yd\theta,$$

тогда

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_x = \frac{y}{\rho}. \quad (4.75)$$

Для расчета напряжений по формуле (4.73), с учетом (4.75), необходимо знать радиус кривизны ρ :

$$\sigma_x = E \frac{y}{\rho}. \quad (4.76)$$

С этой целью рассмотрим равновесие элемента длиной x (рис. 4.35).

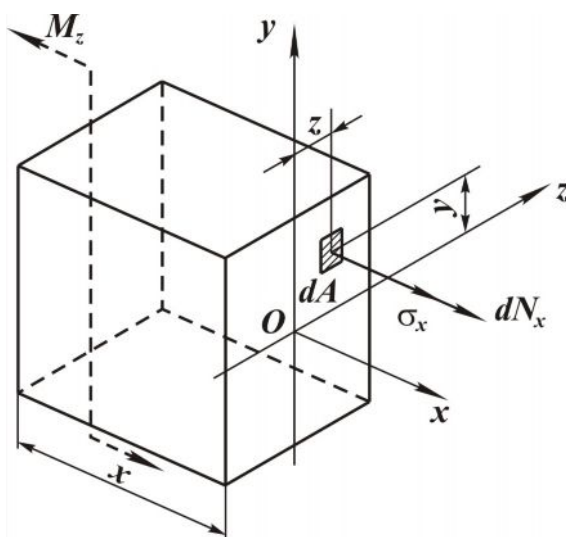


Рис. 4.35

Условия равновесия для выделенного элемента будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum X &= \int_A dN_x = 0; \\ \sum Y &= 0 = 0; \\ \sum Z &= 0 = 0; \\ \sum m_x &= 0 = 0; \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\sum m_y = \int_A dN_x \cdot z = 0;$$

$$\sum m_z = \int_A dN_x \cdot y - M_z = 0,$$

где dN_x – элементарная продольная сила, действующая на площадке dA :

$$dN_x = \sigma_x dA = E \frac{y}{\rho} dA. \quad (4.78)$$

Подставив выражение (4.78) в первое условие равновесия, получим

$$\int_A \frac{E}{\rho} y dA = 0.$$

Так как отношение $\frac{E}{\rho}$ не равно нулю и не зависит от переменной интегрирования, то, вынося его за знак интеграла и сокращая, будем

иметь

$$\int_A y dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой *статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси Oz*.

Если он равен нулю, то нейтральная ось при изгибе прямого стержня проходит через центр тяжести сечения.

Подставив выражение (4.78) в пятое условие равновесия, получим

$$\int_A \frac{E}{\rho} y \cdot z dA = 0$$

или

$$\int_A yz dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой *центробежный момент инерции площади поперечного сечения относительно осей Oz и Oy*.

Так как он равен нулю, то эти оси являются главными центральными осями инерции.

Из шестого условия равновесия после аналогичного преобразования получаем выражение для *момента внутренних сил относительно нейтральной оси*:

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (4.79)$$

Интеграл

$$\int_A y^2 dA = I_z \quad (4.80)$$

является моментом инерции поперечного сечения стержня относительно оси *Oz*, которая представляет собой нейтральную линию и главную центральную ось сечения.

Тогда выражение (4.79) приобретает вид

$$M_z = \frac{EI_z}{\rho},$$

откуда кривизна нейтрального слоя

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (4.81)$$

Подставив соотношение (4.81) в формулу (4.76), получим аналитическое выражение закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (4.82)$$

Из выражения (4.82) и предшествующих результатов изучения изгиба следует ряд выводов:

- центр тяжести сечения является началом координат для анализа напряжений;
- нейтральная линия совпадает с главной центральной осью сечения;
- напряжения зависят от значений внутреннего изгибающего момента M_z , момента инерции сечения относительно нейтральной оси I_z и расстояния y от нейтральной оси до точки, в которой определяется напряжение;
- напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой, то есть по ширине сечения напряжения не изменяются;
- по высоте сечения напряжения изменяются по линейному закону, и максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

В соответствии с выражением (4.82) построим эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении (рис. 4.36).

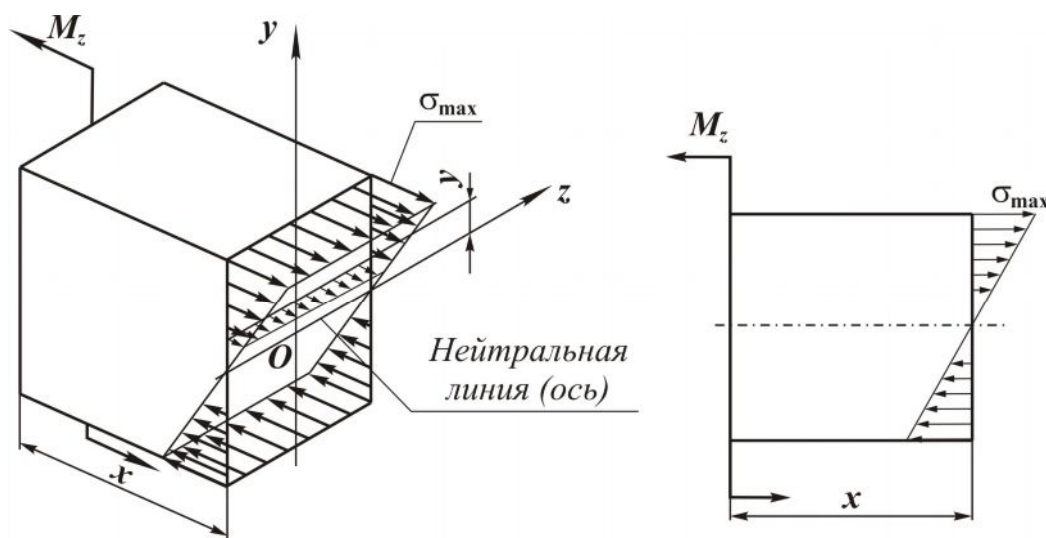


Рис. 4.36

Из эпюры (рис. 4.36) видно, что внутренние слои материала, особенно вблизи нейтральной линии, мало напряжены.

Поэтому для экономии материала площадь сечения необходимо распределять подальше от нейтральной линии, то есть использовать сечения с возможно большими моментами инерции относительно нейтральной оси (см. рис. 4.37).

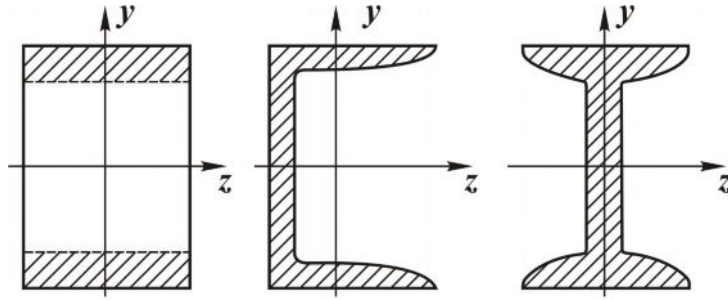


Рис. 4.37

4.5.4. Условие прочности

Максимальные напряжения, согласно формуле (4.82), будут возникать в наиболее удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения ($y = y_{\max}$):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max}$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}, \quad (4.83)$$

где $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$ – осевой момент сопротивления сечения стержня.

Для прямоугольного сечения (см. рис. 4.32)

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}, \quad (4.84)$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

Для круглого сечения, с учетом выражения (4.72),

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (4.85)$$

Условие прочности записывается для максимального напряжения в наиболее нагруженном поперечном сечении балки, положение которого определяется с помощью эпюры изгибающих моментов, и имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{расч}}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (4.86)$$

здесь $M_{\text{расч}}$ – расчетный внутренний изгибающий момент (момент в наиболее нагруженном сечении); $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе для конкретного материала стержня.

4.5.5. Касательные напряжения в поперечном сечении

В параграфе 4.5.3 было отмечено, что в поперечном сечении стержня при изгибе могут возникать не только нормальные, но и касательные напряжения, если в сечении присутствует поперечная (перерезывающая) сила.

Определим закон изменения касательных напряжений в сечении, рассмотрев поперечный изгиб.

Из балки (рис. 4.38,а) мысленно вырежем элемент длиной dx (рис. 4.39,а), в поперечных сечениях которого будут действовать: поперечные силы Q_y ; изгибающие моменты M_z и $M_z + dM_z$.

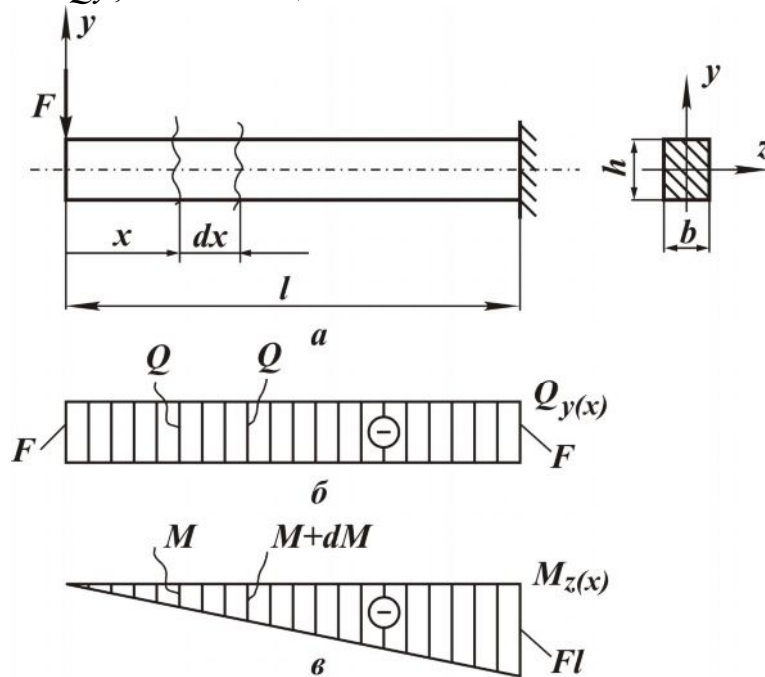


Рис. 4.38

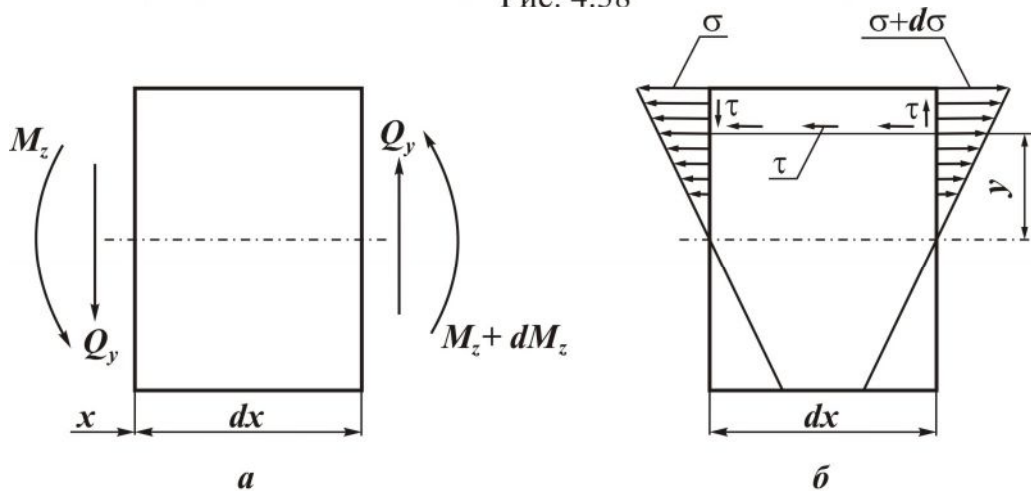


Рис. 4.39

Направления силовых факторов и напряжений приняты в соответствии со схемой нагружения.

Мысленно разделим данный элемент на две части продольным горизонтальным сечением, сделанным на расстоянии y от нейтрального слоя, и рассмотрим равновесие, например верхней части (см. рис. 4.39,б).

При этом примем ряд допущений:

* касательные напряжения в поперечном сечении направлены параллельно перерезывающей силе;

* с позиции равновесия выделенной части элемента (см. параграф 4.3 и рис. 4.15) касательные напряжения возникают также и в продольных сечениях (закон парности касательных напряжений), вызывая сдвиги волокон относительно друг друга;

* эти сдвиги приводят к искривлению поперечных сечений. Однако для длинных балок (длинной считается балка, у которой отношение ее длины к наибольшему размеру поперечного сечения больше пяти) сдвиги сравнительно невелики, и можно считать, что сечения остаются плоскими и после нагружения. Поэтому нормальные напряжения при поперечном изгибе тоже вычисляются по формуле (4.82);

* касательные напряжения в любой точке сечения, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии Oz , равны между собой, то есть по ширине сечения напряжения не изменяются.

С учетом принятых допущений условие равновесия для верхней части выделенного элемента (см. рис. 4.38,а) будет иметь вид

$$\sum X = -N_* + (N_* + dN_*) - \tau \cdot b \cdot dx = 0. \quad (4.87)$$

Здесь N_* – равнодействующая элементарных нормальных сил σdA в левом сечении, распределенных на площади A_* :

$$N_* = \int_{A_*} \sigma \cdot dA = \int_{A_*} \frac{M_z}{I_z} \cdot y_1 dA = \frac{M_z}{I_z} \int_{A_*} y_1 dA,$$

где A_* – часть площади поперечного сечения, лежащей выше уровня y ; y_1 – текущая координата элементарной площадки dA (см. рис. 4.40,б).

Учитывая, что интеграл $\int_{A_*} y_1 dA$ представляет собой статический момент S_z^* площади A_* относительно оси Oz , запишем:

$$N_* = \frac{M_z \cdot S_z^*}{I_z}. \quad (4.88)$$

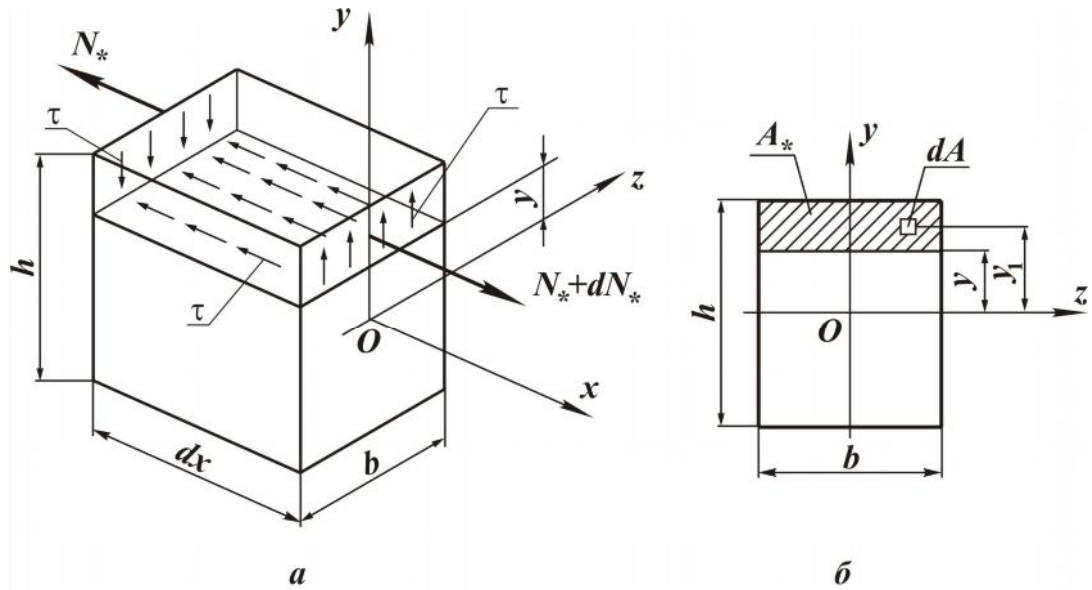


Рис. 4.40

Равнодействующая элементарных нормальных сил в правом сечении будет равна

$$N_* + dN_* = \frac{(M_z + dM_z) S_z^*}{I_z}. \quad (4.89)$$

Подставляя выражения (4.88) и (4.89) в условие равновесия (4.87), с учетом зависимости (4.58), получаем

$$\tau = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{S_z^*}{I_z b} = \frac{Q_y \cdot S_z^*}{I_z b}. \quad (4.90)$$

Здесь S_z^* – статический момент части площади поперечного сечения, лежащей в направлении от нейтральной линии за уровнем y , на котором определяется касательное напряжение τ ; b – ширина поперечного сечения на уровне y . Парные касательные напряжения в продольных сечениях стержня равны напряжениям в поперечных сечениях на одном и том же уровне y .

Для прямоугольного поперечного сечения статический момент площади, расположенной за уровнем y , и осевой момент инерции всего сечения равны соответственно

$$S_z^* = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Тогда распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения будет соответствовать параболическому закону (рис. 4.41).

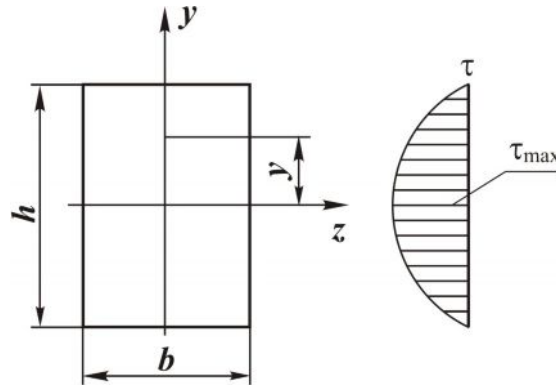


Рис. 4.41

Максимальные касательные напряжения будут действовать на нейтральной линии (при $y=0$):

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{bh}.$$

Условие прочности для касательных напряжений будет иметь вид

$$\tau_{\max} = \left(\frac{Q_y \cdot S_z^*}{I_z b} \right)_{\max} \leq [\tau], \quad (4.91)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение для конкретного материала стержня.

В расчетах на прочность касательные напряжения учитываются только для коротких балок, так как в длинных балках нормальные напряжения в поперечных сечениях значительно больше касательных.

4.5.6. Расчеты на прочность

Из трех возможных типов задач (см. параграф 4.2.6.) рассмотрим пример проектного расчета.

Пример. Определить размеры поперечного сечения балки (см. рис. 4.40,а), если $[\sigma] = 160$ МПа, $[\tau] = 80$ МПа, $M = 6$ кН·м, $q = 4$ кН/м, $h = 2b$, $a = 1$ м.

Решение. Заданы $[\sigma]$ и $[\tau]$. Принимаем, что стержень относится к категории длинных балок как наиболее распространенных в технике.

Тогда размеры сечения определим из условия прочности по нормальным напряжениям, а проверочный расчет сделаем по условию прочности для касательных напряжений.

Согласно условию прочности по нормальным напряжениям (4.86), для определения размеров сечения необходимо знать $M_{расч}$, значение которого найдем из эпюры изгибающих моментов $Mz(x)$.

Правильное построение эпюры $Mz(x)$, с учетом зависимости (4.58), контролируется эпюрой поперечных сил $Qy(x)$, которая также необходима для проверочного расчета по касательным напряжениям. Следовательно, решение данной задачи необходимо начать с построения эпюр $Mz(x)$ и $Qy(x)$.

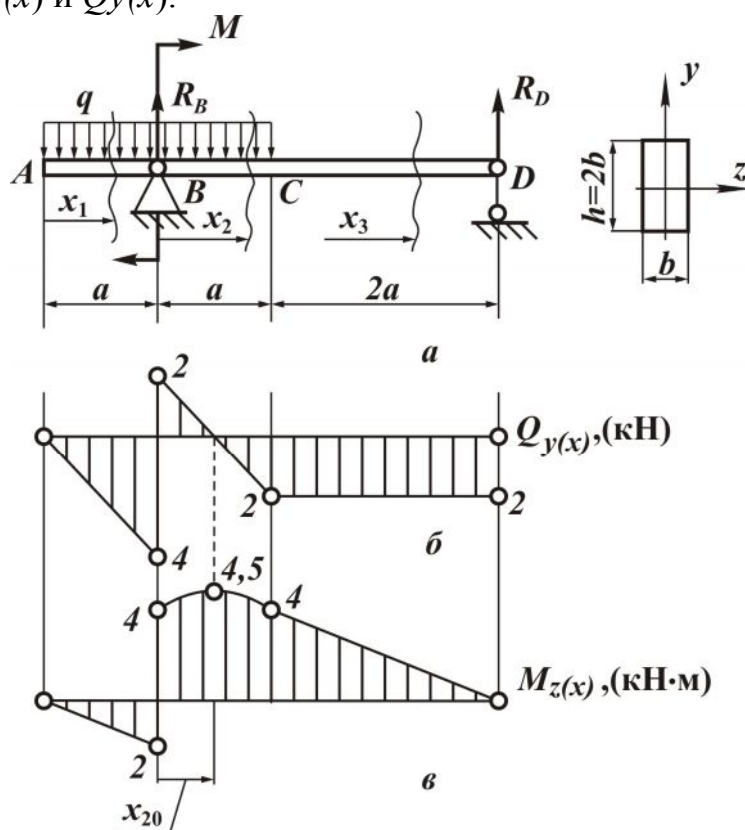


Рис. 4.42

Алгоритм и правила построения эпюр силовых факторов представлены в параграфах 4.2.1 и 4.5.1.

В соответствии с алгоритмом из условий равновесия определим опорные реакции:

$$\sum m_B = -M + R_D 3a = 0;$$

$$R_D = \frac{M}{3a} = 2 \text{ [кН]}.$$

$$\sum m_D = q2a3a - M - R_B 3a = 0;$$

$$R_B = \frac{q6a^2 - M}{3a} = 6 \text{ [кН]}.$$

Для проверки правильности значений найденных реакций используем еще одно условие равновесия:

$$\sum Y = -q2a + R_B + R_D = -4 \cdot 2 \cdot 1 + 6 + 2 = 0.$$

Условие выполняется, следовательно, реакции найдены правильно.

Балка имеет три силовых участка AB ; BC ; CD (см. рис. 4.40,а). Используя метод сечений, записываем для каждого участка аналитические выражения внутренних силовых факторов.

Участок AB ($0 \leq x_1 \leq a$):

$$Q_{y(x_1)} = -qx_1;$$

$$Q_{y(x_1=0)} = 0;$$

$$Q_{y(x_1=a)} = -qa = -4 \text{ кН};$$

$$M_{z(x_1)} = -q \frac{x_1^2}{2};$$

$$M_{z(x_1=0)} = 0; M_{z(x_1=a)} = -q \frac{a^2}{2} = -2 \text{ кН м}.$$

Изгибающий момент на данном участке изменяется по закону квадратной параболы. В сечении A поперечная сила равна нулю, следовательно, эпюра моментов в этом сечении имеет экстремум.

Участок BC ($0 \leq x_2 \leq a$). Начало координат в сечении B :

$$Q_{y(x_2)} = -q(a + x_2) + R_B;$$

$$Q_{y(x_2=0)} = -qa + R_B = 2 \text{ кН};$$

$$Q_{y(x_2=a)} = -q2a + R_B = -2 \text{ кН};$$

$$M_{z(x_2)} = -q \frac{(a + x_2)^2}{2} + M + R_B x_2;$$

$$M_{z(x_2=0)} = -q \frac{a^2}{2} + M = 4 \text{ кН м};$$

$$M_{z(x_2=a)} = -q \frac{4a^2}{2} + M + R_B a = 4 \text{ кН м}.$$

На данном участке изгибающий момент также изменяется по закону квадратной параболы. С целью определения положения экстремума эпюры моментов выражение для поперечной силы как первой производной функции моментов приравняем к нулю:

$$-q(a + x_{20}) + R_B = 0$$

и найдем из этого уравнения координату экстремального значения момента:

$$x_{20} = \frac{-qa + R_B}{q} = 0,5 \text{ [м]}.$$

Тогда экстремальное значение момента будет равно

$$M_{z(x_2=x_{20})} = -q \frac{(a + x_{20})^2}{2} + M + R_B x_{20} = 4,5 \text{ кН м}.$$

Участок DC ($0 \leq x_3 \leq 2a$). Начало координат выгоднее расположить в сечении *D*:

$$Q_{y(x_3)} = -R_D = -2 \text{ кН};$$

$$M_{z(x_3)} = R_D x_3;$$

$$M_{z(x_3=0)} = 0;$$

$$M_{z(x_3=2a)} = R_D 2a = 4 \text{ кН·м}.$$

По полученным выражениям и значениям внутренних силовых факторов строим эпюры поперечных сил (см. рис. 4.42,б) и изгибающих моментов (см. рис. 4.42,в).

Так как балка по всей длине имеет постоянное поперечное сечение, то расчетное значение момента будет равно его максимальной величине на эпюре:

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{max}} = 4,5 \text{ кН·м}.$$

Для прямоугольного сечения, согласно формуле (4.84),

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

или (для рассматриваемого случая)

$$W_z = \frac{2}{3} b^3.$$

Из условия прочности (4.86)

$$W_z \geq \frac{M_{\text{расч}}}{[\sigma]}.$$

Тогда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_{\text{расч}}}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4,5}{2 \cdot 160 \cdot 10^3}} \approx 0,035 \text{ м}.$$

Проверим выполнение условия прочности по касательным напряжениям (4.91) для полученного значения *b*:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{bh} = 2,45 \text{ МПа} < [\tau].$$

Здесь Q_y – максимальное значение поперечной силы, взятое из эпюры (см. рис. 4.40,б).

Так как условие прочности выполняется, то значение $b = 0,035$ м является окончательным.